Daria Bartkowiak, 333127

Przybliżone obliczanie całek z wykorzystaniem wielomianów Czebyszewa i metody trapezów

SPRAWOZDANIE

I. TEMAT PROJEKTU

Projekt polega na przedstawieniu metody trapezów do obliczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b w_n(x)dx$, gdzie $w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x) U_k(x)$. $T_k(x)$ i $U_k(x)$ to odpowiednio wielomiany Czebyszewa pierwszego i drugiego rodzaju, spełniające następujące zależności:

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), k = 2,3,\ldots$

$U_0(x) = 1$
$U_1(x) = 2x$
$U_k(x) = 2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x), k = 2,3,\ldots$

II. OPIS METODY

Złożona metoda trapezów polega na podzieleniu przedziału całkowania $[a, b]$ na N podprzedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ (k = 1, ... , N), o długości H = $\frac{b-a}{N}$, przy czym $x_k = a + kH$. Na każdym z tych przedziałów stosujemy kwadraturę prostą: $S(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$.
Sumując przybliżenia uzyskane metodą prostą na każdym podprzedziale otrzymujemy wzór: $S(f) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k - x_{k-1}}{2}(f(x_k) - f(x_{k-1}))$, a po przekształceniu:

$$S(f) = \frac{H}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH))$$

W skrócie metoda trapezów polega na przybliżeniu pola pod wykresem funkcji za pomocą trapezów.

1. Dzielimy cały przedział całkowania na kilka mniejszych podprzedziałów o jednakowej długości H
2. W każdym podprzedziale funkcję przybliżamy linią prostą, która łączy wartości funkcji na jego końcach – tworzymy w ten sposób trapez.
3. Sumujemy pola wszystkich trapezów, aby uzyskać przybliżenie całki.

Innymi słowy: zamiast liczyć dokładne pole pod funkcją, "przykrywamy" je trapezami, których pola łatwo obliczyć. Im więcej podziałów wykonamy (im mniejsze będą trapezy), tym dokładniejsze będzie nasze przybliżenie.

III. OPIS PROGRAMU

Program został zaimplementowany w MATLAB-ie i zawiera następujące moduły:

1. Funckja chebyshev_T(X, n):

Funkcja oblicza wartości wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju dla podanych w wektorze X = $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ punktów oraz maksymalnego stopnia n. Zwracana jest macierz wielomianów, gdzie każda kolumna odpowiada kolejnemu stopniowi, a każdy wiersz kolejnej wartości. Macierz ta wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} T_0(x_0) & \cdots & T_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(x_n) & \cdots & T_n(x_n) \end{bmatrix}$$

2. Funkcja chebyshev_U(X, n):
   Funkcja działa analogicznie do poprzedniej, ale dla wielomianów Czebyszewa drugiego rodzaju. Wynikowa macierz wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} U_0(x_0) & \cdots & U_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_0(x_n) & \cdots & U_n(x_n) \end{bmatrix}$$

3. Funckja evaluate_polinomial(X, A):

   Funckja jako parametry przyjmuje wektor punktów X = $[x_0, x_1, \dots, x_n]$, dla których obliczona ma zostać wartość wielomianu oraz wektor współczynników kolejnych stopni wielomianu A = $[a_0, a_1, \dots, a_n]$.
   Zadaniem funkcji jest obliczenie wartości wielomianu $w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x) U_k(x)$, dla danych punktów x z wektora X oraz danych współczynników a_k z wektora A. Aby to zrobić funkcja korzysta z funkcji chebyshev_T(X, n) oraz chebyshev_U(X, n), aby wygenerować odpowiednie macierze wielomianów Czebyszewa, a następnie tworzy macierz, w której każda komórka to iloczyn odpowiednich komórek z macierzy wielomianu Czebyszewa 1 rodzaju i 2 rodzaju. Następnie przemnaża tą macierz, przez pionowy wektor A, co w wyniku daję nam macierz wartości wielomianu $w_n(x)$ dla kolejnych wartości x z wektora X.

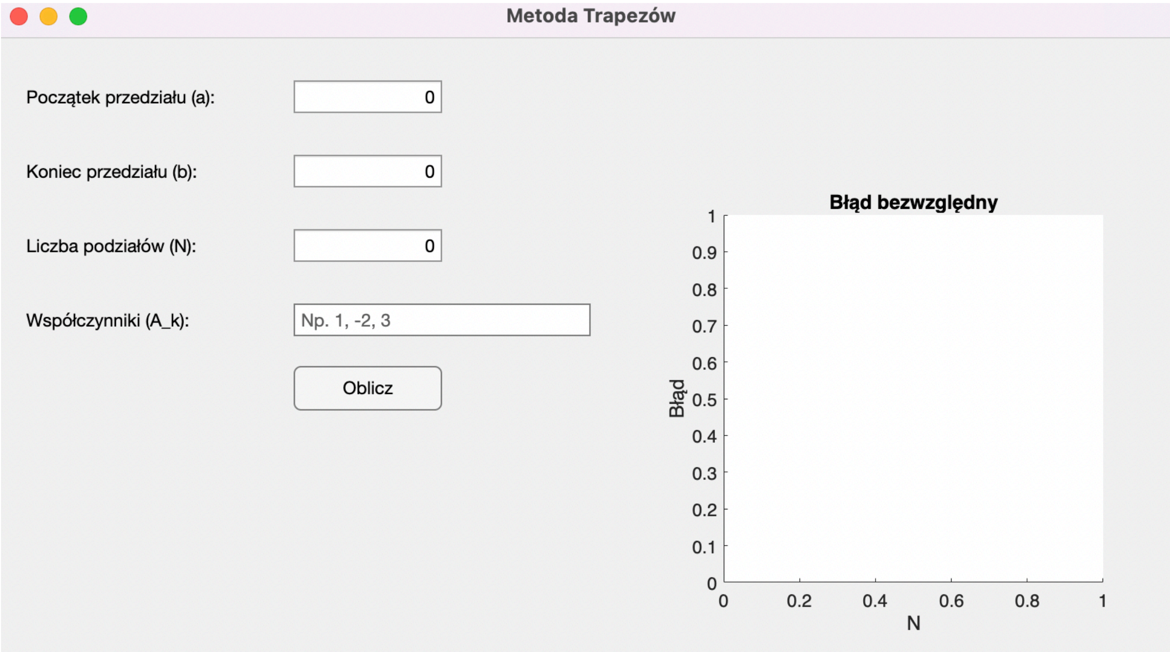
$$\begin{bmatrix} T_0(x_0)U_0(x_0) & \cdots & T_n(x_0)U_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_0(x_n)T_0(x_n) & \cdots & T_n(x_n)U_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_o \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x_o) U_k(x_o) \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x_n) U_k(x_n) \end{bmatrix} = w_n(x)$$

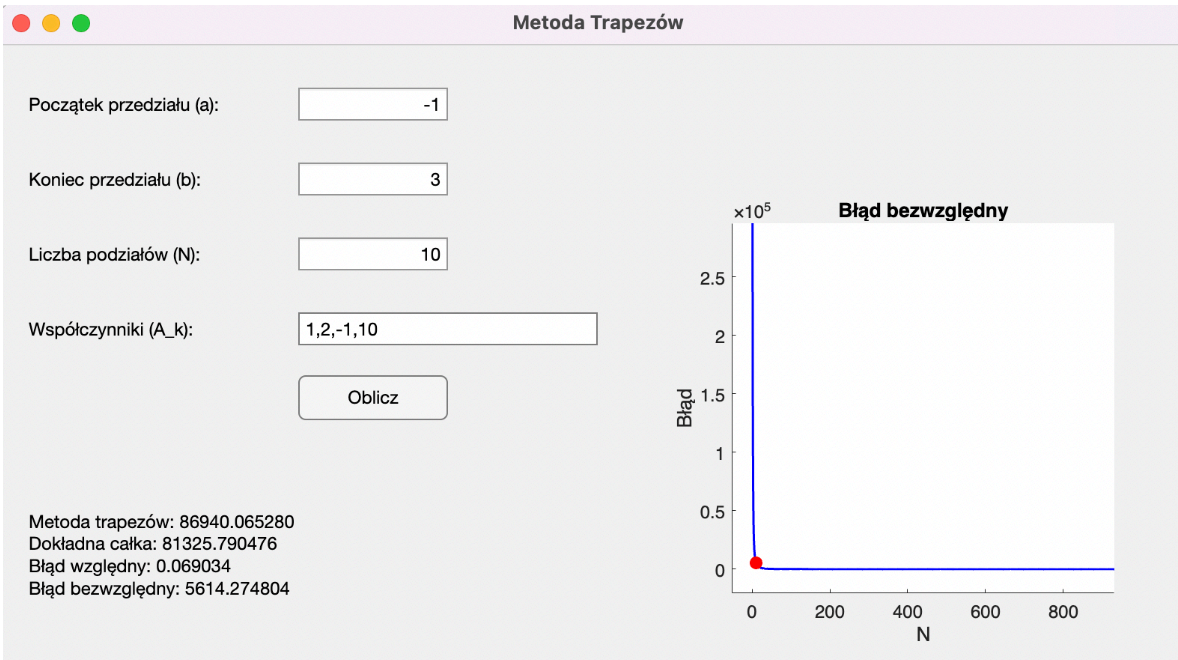
4. Funckja trapezoidal_method(A, a, b, N):

   Funkcja jako parametry przyjmuje wektor współczynników kolejnych stopni wielomianu A = $[a_0, a_1, \dots, a_n]$, początek (a) i koniec (b) przedziału całkowania [a, b] oraz N, czyli liczbę podziałów naszego przedziału. Funckja najpierw tworzy wektor N+1 równoodległych punktów podziału [a, b]. Następnie wyznacza krok tego podziału, liczy wartości wielomianu $w_n(x)$ w tych punktach i korzystając ze wzoru $S(f) = \frac{H}{2}(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH))$ wylicza i zwraca przybliżoną przez metodę trapezów wartość całki $\int_a^b w_n(x)dx$.

5. Funckja gui():

Moduł interfejsu graficznego pozwala użytkownikowi na wprowadzenie parametrów, takich jak: przedział całkowania [a, b], współczynniki wielomianu $w_n(x)$ oraz liczbę podziałów przedziału. Po naciśnięciu przycisku „Oblicz" użytkownik otrzymuję wartość całki obliczoną metodą trapezów, dokładną wartość całki obliczoną przy użyciu wbudowanej w MATLAB funkcji „integral" oraz wartości błędu bezwzględnego i względnego naszej metody. Użytkownikowi wyświetla się także wykres błędu bezwzględnego liczenia podanej całki w zależności od liczby podziałów N (0 - 1000), z zaznaczeniem w punkcie dla N podanego przez użytkownika.





IV. PRZYKŁADY DZIAŁANIA

W skrypcie testującym przetestowałam metodę trapezów dla 6 różnych przykładów wielomianu postaci $w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x) U_k(x)$. W każdym przypadku liczyłam wartość całki na dwa sposoby: z wykorzystaniem wbudowanej funkcji „integral” oraz przy użyciu zaimplementowanej przeze mnie metody trapezów. Dla każdego przykładu obliczyłam również wartość błędu względnego i bezwzględnego. Najpierw analizowałam różne wartości przedziału całkowania, lecz szybko zauważyłam, że nieznacznie wpływa on na skuteczność metody. Zarówno duże przedziały, jak i małe dawały bardzo podobny błąd względny przybliżenia. W dalszej analizie przyjęłam zatem za przedział całkowania przedział [-1, 1]

1. Prosty przypadek: $w_2(x) = T_0(x)U_0(x) - T_1(x)U_1(x) + T_2(x)U_2(x)$

   Dokładna całka: 314706.666667

Liczba podziałów (N)	Metoda trapezów	Błąd względny	Błąd bezwzględny
1	1584040.000000	4.033386	1269333.333333
10	335848.000000	0.067178	21141.333333
50	315555.596800	0.002698	848.930133
100	314918.924800	0.000674	212.258133
1000	314708.789332	0.000007	2.122666

2. Wielomian wysokiego rzędu: $w_{11}(x) = T_0(x)U_0(x) + 2T_1(x)U_1(x) + 3T_2(x)U_2(x) + 4T_3(x)U_3(x) + T_4(x)U_4(x) + 3T_5(x)U_5(x) + 4T_6(x)U_6(x) + 6T_7(x)U_7(x) + 8T_8(x)U_8(x) + T_9(x)U_9(x) + 6T_{10}(x)U_{10}(x) + 4T_{11}(x)U_{11}(x)$

   Dokładna całka: 47.912473

Liczba podziałów (N)	Metoda trapezów	Błąd względny	Błąd bezwzględny
1	650.000000	12.566405	602.087527
10	106.236065	1.217295	58.323592
50	55.240216	0.152940	7.327743
100	9.911779	0.041728	1.999306
1000	47.933062	0.000430	0.020589

3. Wielomian o dużych współczynnikach: $w_4(x) = 5T_0(x)U_0(x) + 10T_1(x)U_1(x) + 200(x)U_2(x) + 100T_3(x)U_3(x) + 1000T_4(x)U_4(x)$

   Dokładna całka: 11488.730159

Liczba podziałów (N)	Metoda trapezów	Błąd względny	Błąd bezwzględny
1	102050.000000	7.882618	90561.269841
10	18736.119680	0.630826	7247.389521
50	11809.948718	0.027959	321.218559
100	11569.288230	0.007012	80.558071
1000	11489.536577	0.000070	0.806418

4. Wielomian z ujemnymi współczynnikami: $w_4(x) = -T_0(x)U_0(x) - 10T_1(x)U_1(x) - 100(x)U_2(x) - 5\,T_3(x)U_3(x) - 1T_4(x)U_4(x)$

   Dokładna całka: -142.158730

Liczba podziałów (N)	Metoda trapezów	Błąd względny	Błąd bezwzględny
1	-692.000000	3.867798	549.841270
10	-158.195007	0.112805	16.036277
50	-142.809023	0.004574	0.650293
100	-142.321373	0.001144	0.162643
1000	-142.160357	0.000011	0.001627

5. Wielomian o bardzo dużych współczynnikach: $w_2(x) = 100000T_0(x)U_0(x) + 100000T_1(x)U_1(x)$

   Dokładna całka: 2133333.333333

Liczba podziałów (N)	Metoda trapezów	Błąd względny	Błąd bezwzględny
1	2400000.000000	0.125000	266666.666667
10	2136000.000000	0.001250	2666.666667
50	2133440.000000	0.00005	106.666667
100	2133360.000000	0.000012	26.666667
1000	2133333.600000	0.000000	0.266667

6. Wielomian wysokiego stopnia i o bardzo dużych współczynnikach: $w_{11}(x) = 1000000T_0(x)U_0(x) + 100000T_1(x)U_1(x) + 100T_2(x)U_2(x) + 100T_3(x)U_3(x) + 10000000T_4(x)U_4(x) + 100000T_5(x)U_5(x) + 10000T_6(x)U_6(x) + 1000T_7(x)U_7(x) + 10T_8(x)U_8(x) + 100T_9(x)U_9(x) + 100000000T_{10}(x)U_{10}(x) + 100T_{11}(x)U_{11}(x)$

   Dokładna całka: 118127730.497810

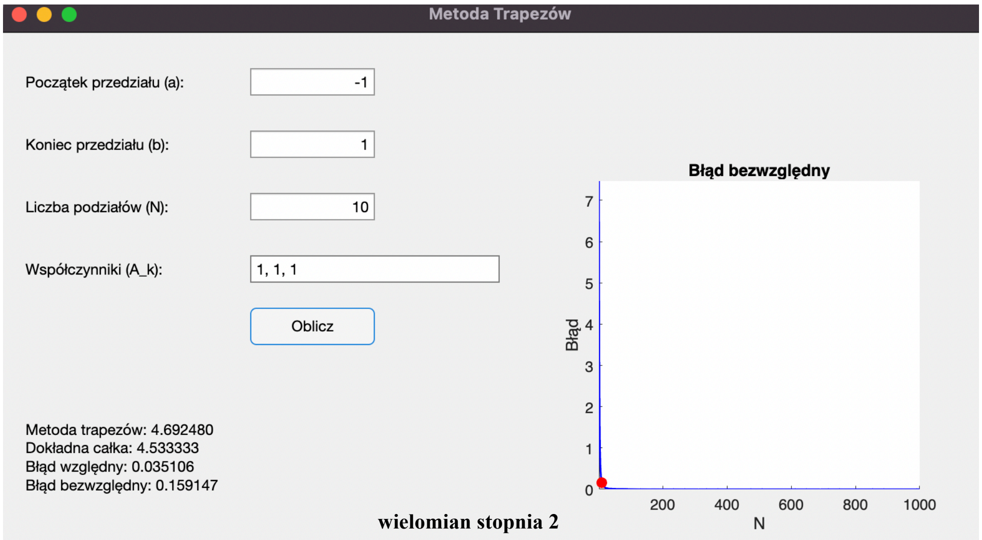
Liczba podziałów (N)	Metoda trapezów	Błąd względny	Błąd bezwzględny
1	2303761980.000000	18.502296	2185634249.502191
10	357376900.987980	2.025343	239249170.490170
50	154002283.164036	0.303693	35874552.666226
100	128113152.639124	0.084531	9985422.141314
1000	118231178.198709	0.000876	103447.700899

WNIOSKI:

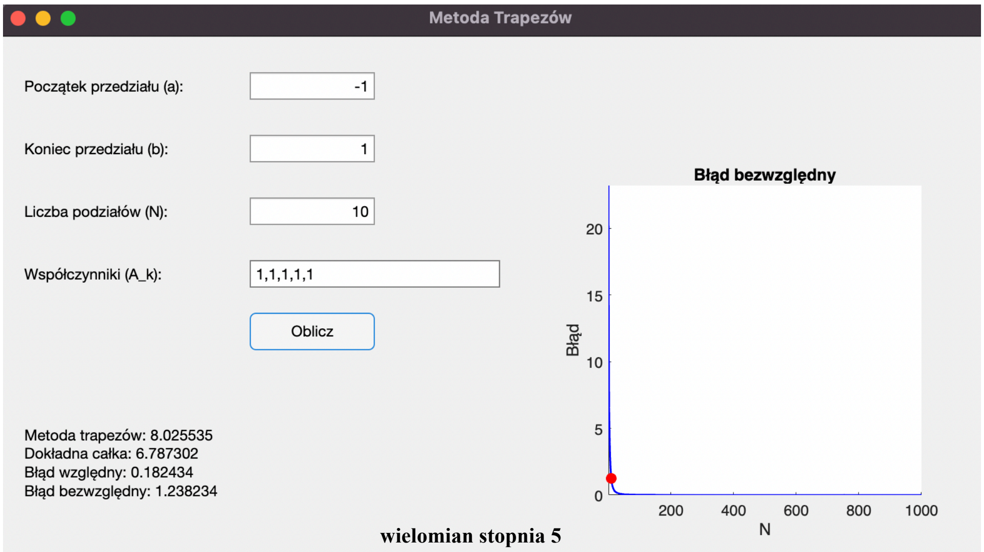
A. Jak pokazują wyniki, zwiększenie liczby podziałów N poprawia dokładność przybliżenia, ponieważ zmniejsza się błąd wynikający z liniowej aproksymacji funkcji. W większości przypadków brak podziału przedziału (czyli podział na jeden podprzedział) jest niewystarczający do uzyskania dokładnej wartości całki. Różnice natomiast dla N większych niż 10 są już niewielkie. Jedynym odstępstwem od tej reguły jest przypadek wielomianu wysokiego rzędu – tutaj podział przedziału na 10 podprzedziałów jest wciąż niewystarczający. Pozwala nam to wysnuć pewne wnioski:

- W przypadku funkcji gładkich (o małych zmianach wartości na krótkich przedziałach), już niewielka liczba podziałów daje satysfakcjonującą dokładność.
- Natomiast dla funkcji o dużym stopniu (np. wielomianów wysokiego rzędu) konieczne jest istotne zwiększenie liczby podziałów N, aby uzyskać precyzyjne wyniki.

Aby udowodnić to stwierdzenie przeprowadziłam ostatnią już analizę. Skorzystałam z mojej funkcji GUI, aby sprawdzić, jak zmienia się błąd względny obliczeń, tylko i wyłącznie pod wpływem zwiększenia stopnia wielomianu. W tym celu ustawiłam wartość przedziału [a, b] na [-1, 1], wartość N na 10, w polu współczynników dopisywałam kolejną jedynkę i sprawdzałam wynik.

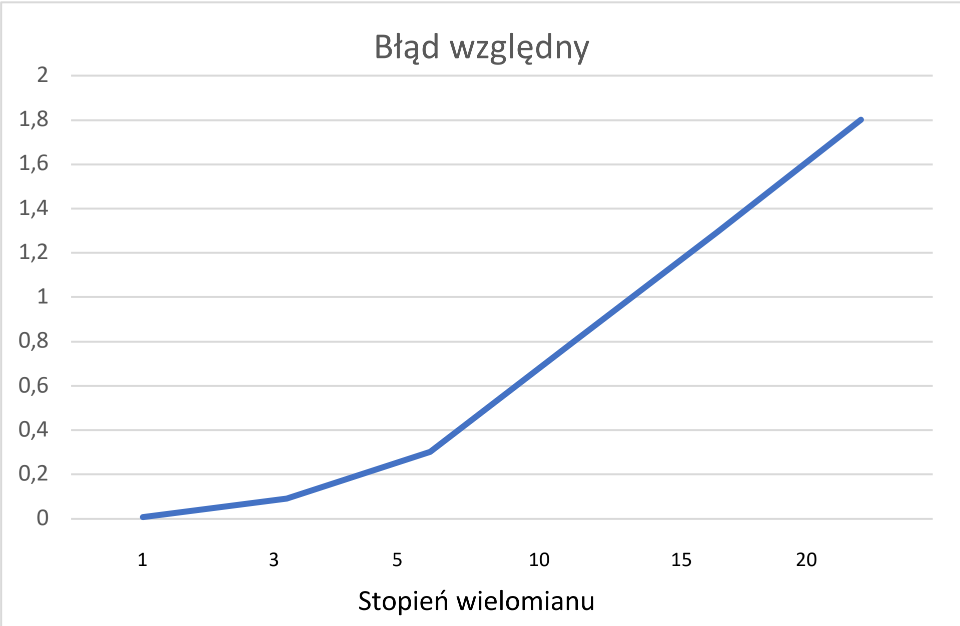


wielomian stopnia 2



wielomian stopnia 5

Wyniki mojej analizy przedstawiłam na wykresie:



Faktycznie potwierdza on znaczący wpływ stopnia wielomianu na poprawność metody trapezów w przybliżaniu wartości całki.

B. Można zauważyć także, że wielkość współczynników wielomianu raczej nie wpływa na poprawność obliczonego przybliżenia. Nawet dla współczynników bardzo wysokich w wielomianie niskiego rzędu (przykład 5), błędy względne dla każdej wartości N są bardzo niskie – przybliżenie jest bardzo dobre.

C. Dla wielomianów Czebyszewa, które są zdefiniowane na przedziale [−1,1], standardowy zakres sprawia, że metoda trapezów jest szczególnie efektywna, ponieważ wielomiany Czebyszewa mają dobrze zdefiniowane właściwości i są symetryczne względem tego przedziału.

Podsumowując, metoda trapezów jest skuteczna dla wielomianów składających się z wielomianów Czebyszewa, natomiast jej dokładność dla wielomianów wysokiego rzędu wymaga znacznego zwiększenia liczby podziałów.