Modelowanie Matematyczne - Projekt 1

Bartłomiej Krawczyk

Zadanie 1 - Sieć przepływowa

W centrum dyspozytorskim planuje się dostawy węgla z określonych kopalń do elektrowni. Rozważana jest możliwość dostaw węgla kamiennego z trzech kopalń A, B, C do trzech elektrowni F, G, H za pomocą sieci kolejowej z dwoma stacjami pośrednimi D i E.

- Jednostkowe koszty transportowe i przepustowości na poszczególnych odcinkach wynoszą (skierowanie łuku jest od wiersza do kolumny):
  - koszt:

	D	E	F	G	H
A	3	6	-	-	-
B	6	3	-	-	-
C	4	5	-	-	-
D	-	2	5	7	3
E	-	-	5	4	2

  - przepustowość:

	D	E	F	G	H
A	8	10	-	-	-
B	10	13	-	-	-
C	10	8	-	-	-
D	-	20	16	6	10
E	-	-	7	4	2

- Zdolności wydobywcze kopalń wynoszą (w tys. ton): $W_A = 10, W_B = 13, W_C = 22$.
- Średnie zużycie dobowe węgla przez elektrownie wynosi (w tys. ton): $Z_F = 15, Z_G = 10, Z_H = 10$.

Zadanie polega na wyznaczeniu planu codziennych dostaw węgla zaspokajający zapotrzebowania elektrowni i minimalizujący sumaryczne koszty transportu. W tym celu należy: - sformułować i narysować model sieciowy (sieć przepływową); Określić jaki problem na tej sieci należy rozwiązać (należy nazwać problem do rozwiązania, nie algorytm) - znaleźć jak najlepsze rozwiązanie (dowolną metodą ręcznie lub algorytmicznie) - zapisać odpowiadające zadanie programowania liniowego

Ponadto, należy sprawdzić, gdzie w sieci transportowej występuje wąskie gardło, które stanowiłoby ograniczenie w przypadku zwiększonego zapotrzebowania ze strony elektrowni (koszty transportu należy pominąć). W tym celu należy znaleźć przekrój o jak najmniejszej przepustowości; jaką informację niesie przepustowość wybranego przekroju?

Sformułować i narysować model sieciowy (sieć przepływową); Określić jaki problem na tej sieci należy rozwiązać

Problemem, który należy rozwiązać jest **problem najtańszego przepływu**.

Zapotrzebowanie dobowe wszystkich elektrowni wynosi $F_{zadane} = Z_F + Z_G + Z_H = 35$, zatem zadany przepływ to 35 jednostek (tys. ton).

Należy znaleźć przepływ ze źródła s do ujścia t o zadanej wielkości F_{zadane} i minimalnym sumarycznym koszcie.

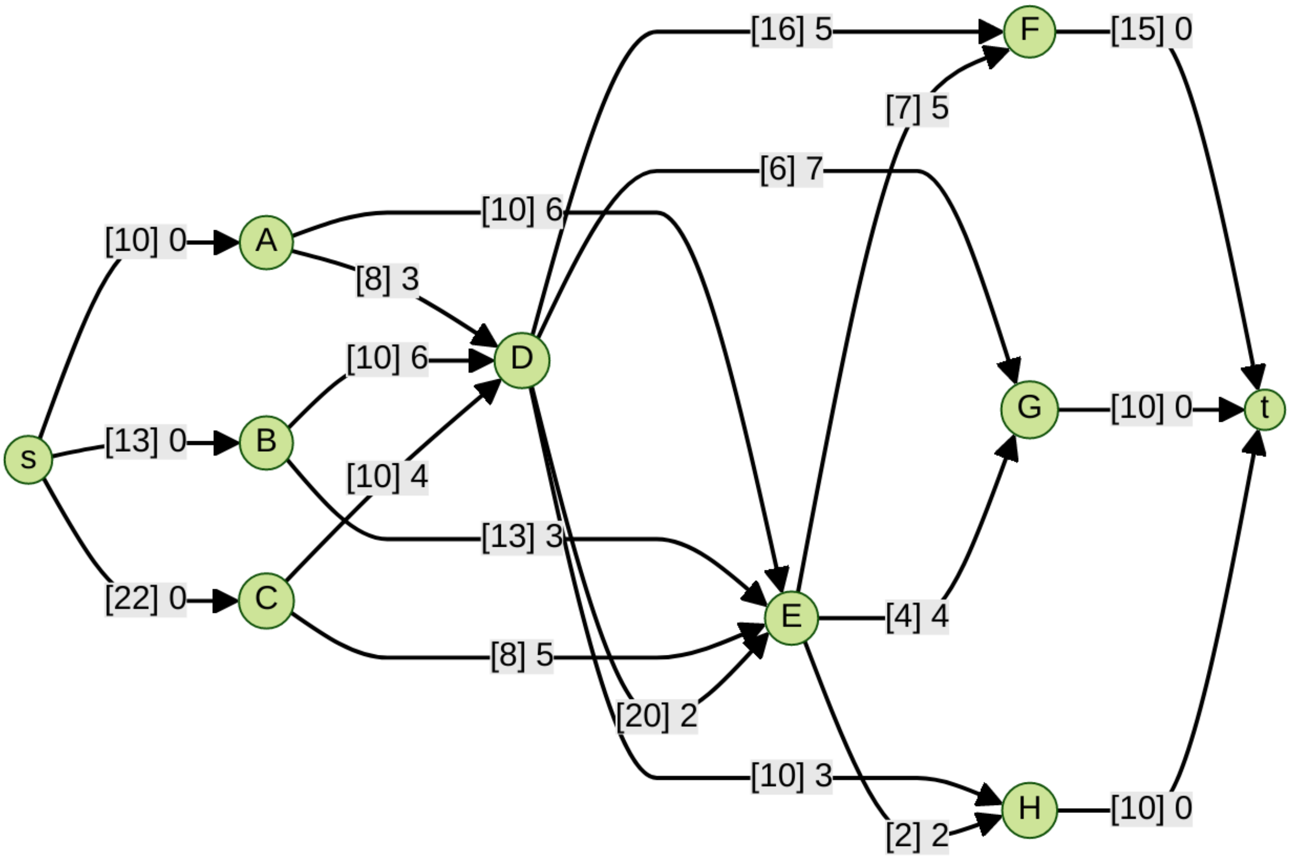

Figure 1: TODO

Znaleźć jak najlepsze rozwiązanie.

Najlepsze rozwiązanie znalezione algorytmicznie prowadzi do kosztu równego **296**.

from to	s	A	B	C	D	E	F	G	H	t
s	0	8	13	14	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	4	9	0	0	0	0
C	0	0	0	0	10	4	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	8	6	8	0
E	0	0	0	0	0	0	7	4	2	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

from	to	s	A	B	C	D	E	F	G	H	t
t		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

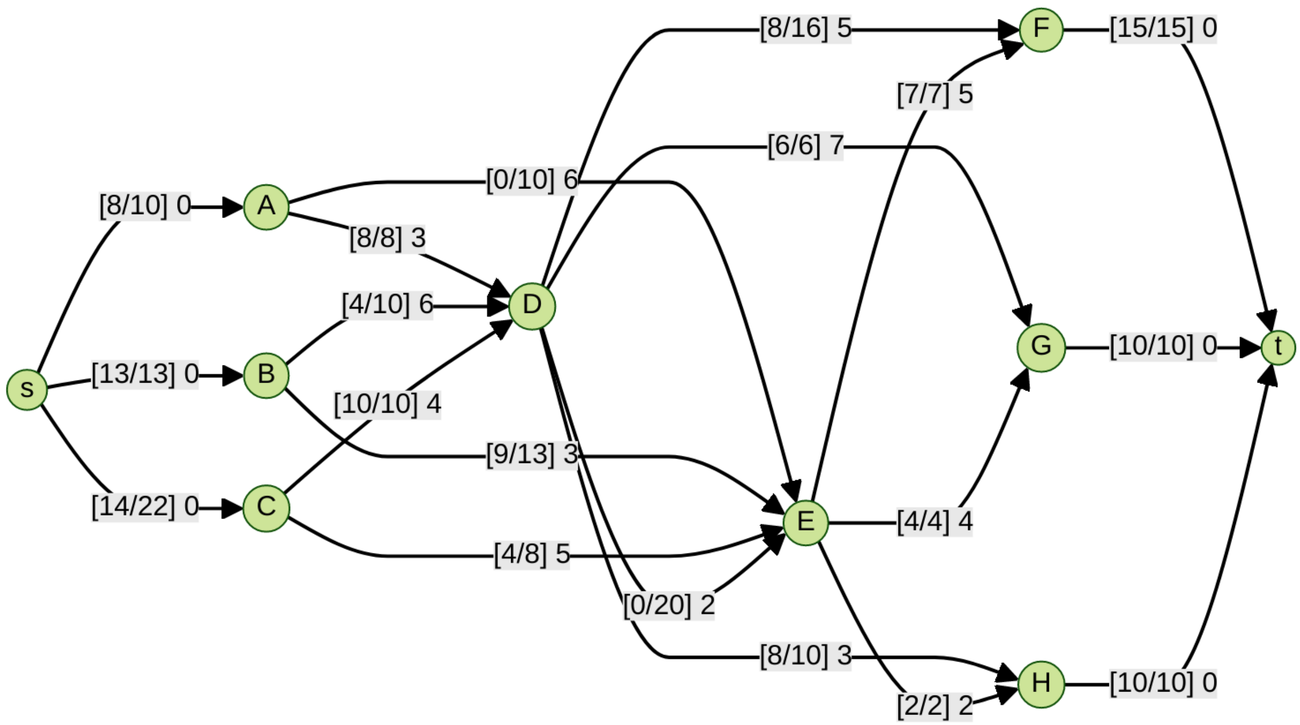

Figure 2: TODO

Zapisać odpowiadające zadanie programowania liniowego.

Zbiory

- $V = \{s, A, B, C, D, E, F, G, H, t\}$ - zbiór wszystkich węzłów sieci przepływowej,
- $U = V \setminus \{s, t\}$ - zbiór węzłów sieci przepływowej z wyłączeniem źródła s i ujścia t,
- $E \subset V \times V$ - zbiór łuków dostępnych w danej sieci przepływowej.

$$V = \{s, A, B, C, D, E, F, G, H, t\}$$

$$U = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$E = \{(A, D), (A, E),$$

$$(B, D), (B, E),$$

$$(C, D), (C, E),$$

$$(D, E), (D, F), (D, G), (D, H),$$

$$(E, F), (E, G), (E, H)\}$$

Parametry

- $F_{zadane} = 35$ - całkowite zapotrzebowanie dobowe węgla (w tys. ton).
- $c_{uv}\ dla(u, v) \in E$ - przepustowość ustalona dla każdego łuku rozpoczynającego się w węźle u i kończącego się w węźle v. W przypadku $(u, v) \notin E$ przyjmujemy $c_{uv} = 0$,

- d_{uv} $dla(u,v) \in E$ - koszt ustalony dla każdego łuku rozpoczynającego się w węźle u i kończącego się w węźle v. W przypadku $(u,v) \notin E$ przyjmujemy $d_{uv} = 0$.

$$c_{AD} = 8, c_{AE} = 10$$
$$c_{BD} = 10, c_{BE} = 13$$
$$c_{CD} = 10, c_{CE} = 8$$
$$c_{DE} = 20, c_{DF} = 16, c_{DG} = 6, c_{DH} = 10$$
$$c_{EF} = 7, c_{EG} = 4, c_{EH} = 2$$
$$c_{sA} = 10, c_{sB} = 13, c_{sC} = 22$$
$$c_{Ft} = 15, c_{Gt} = 10, c_{Ht} = 10$$

$$d_{AD} = 3, d_{AE} = 6$$
$$d_{BD} = 6, d_{BE} = 3$$
$$d_{CD} = 4, d_{CE} = 5$$
$$d_{DE} = 2, d_{DF} = 5, d_{DG} = 7, d_{DH} = 3$$
$$d_{EF} = 5, d_{EG} = 4, d_{EH} = 2$$

Zmienne decyzyjne

- f_{uv} $dla(u,v) \in E$ - przepływ przez łuk rozpoczynający się w węźle u i kończącego się w węźle v,
- D - zmienna pomocnicza - całkowity koszt wszystkich przepływów.

Funkcja oceny

- $min(D)$ - minimalizujemy całkowity koszt wszystkich przepływów.

Ograniczenia

- Przepływ nie może być negatywny:
$$\forall (u,v) \in E : f_{uv} \geq 0$$

- Całkowity koszt jest sumą kosztu wszystkich przepływów:
$$D = \sum_{(u,v)\in E} d_{uv} f_{uv}$$

- Ze źródła s wypływa F_{zadane} jednostek:
$$\sum_{z\in V} f_{sz} = F_{zadane}$$

- Suma wpływających jednostek i wypływających z danego węzła powinna być równa (wyjątkiem jest źródło s i ujście t):
$$\forall v \in U : \sum_{z\in V} f_{vz} = \sum_{u\in V} f_{uv}$$

- Przepływ przez dany łuk nie może przekroczyć maksymalnego przepływu:

$$\forall (u,v) \in E : f_{uv} \leq c_{uv}$$

Ponadto, należy sprawdzić, gdzie w sieci transportowej występuje wąskie gardło, które stanowiłoby ograniczenie w przypadku zwiększonego zapotrzebowania ze strony elektrowni (koszty transportu należy pominąć). W tym celu należy znaleźć przekrój o jak najmniejszej przepustowości; jaką informację niesie przepustowość wybranego przekroju?

TODO

Zadanie 2 - Zadanie przydziału

1. Planowanie realizacji portfela przy ograniczonych kompetencjach

Softwarehouse posiada portfel projektów oznaczonych 1-6 oraz zespoły programistyczne oznaczone A-F. Poniża tabela przedstawia kompetencje zespołów, gdzie „-„ oznacza brak kompetencji zespołu do realizacji danego projektu.

Kompetencje zespołów:

projekt	zespół	A	B	C	D	E	F
1		X	-	X	X	-	X
2		-	X	X	-	X	-
3		X	X	-	X	-	-
4		-	X	X	-	X	-
5		X	-	X	X	-	X
6		X	-	-	-	X	X

Należy dokonać przydziału zespołów programistycznych do poszczególnych projektów, przy założeniu, że jeden zespół może realizować tylko jeden projekt, a jeden projekt może być realizowany przez tylko jeden zespół. W tym celu:

- narysować model sieciowy problemu
- określić jaki problem należy rozwiązać i znaleźć ręcznie rozwiązanie
- na podstawie rozwiązania modelu sieciowego określić przydział zespołów do projektów

Narysować model sieciowy problemu

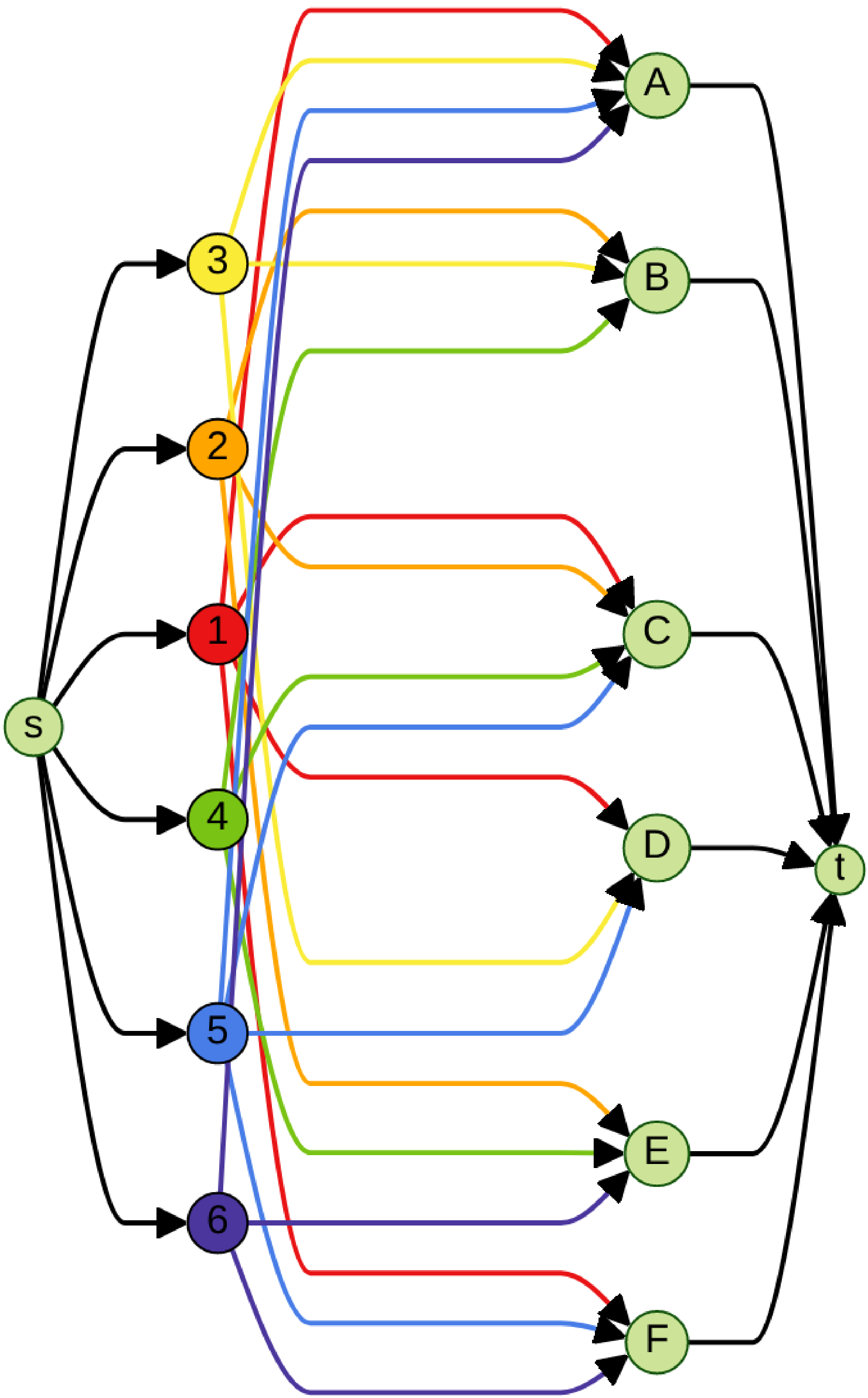

Figure 3: TODO

Każdy łuk ma maksymalną przepustowość równą **1**.

Określić jaki problem należy rozwiązać i znaleźć ręcznie rozwiązanie

Problem do rozwiązania w tym zadaniu to zadanie maksymalnego skojarzenia (przydziału).

- Przydzielamy projekty do zespołów
- Każdy projekt wymaga jednego zespołu
- Każdy zespół może realizować maksymalnie jeden projekt

Rozwiązanie znalezione ręcznie:

projekt	zespół	A	B	C	D	E	F
1		X	-	-	-	-	-
2		-	-	X	-	-	-
3		-	X	-	-	-	-
4		-	-	-	-	X	-
5		-	-	-	X	-	-
6		-	-	-	-	-	X

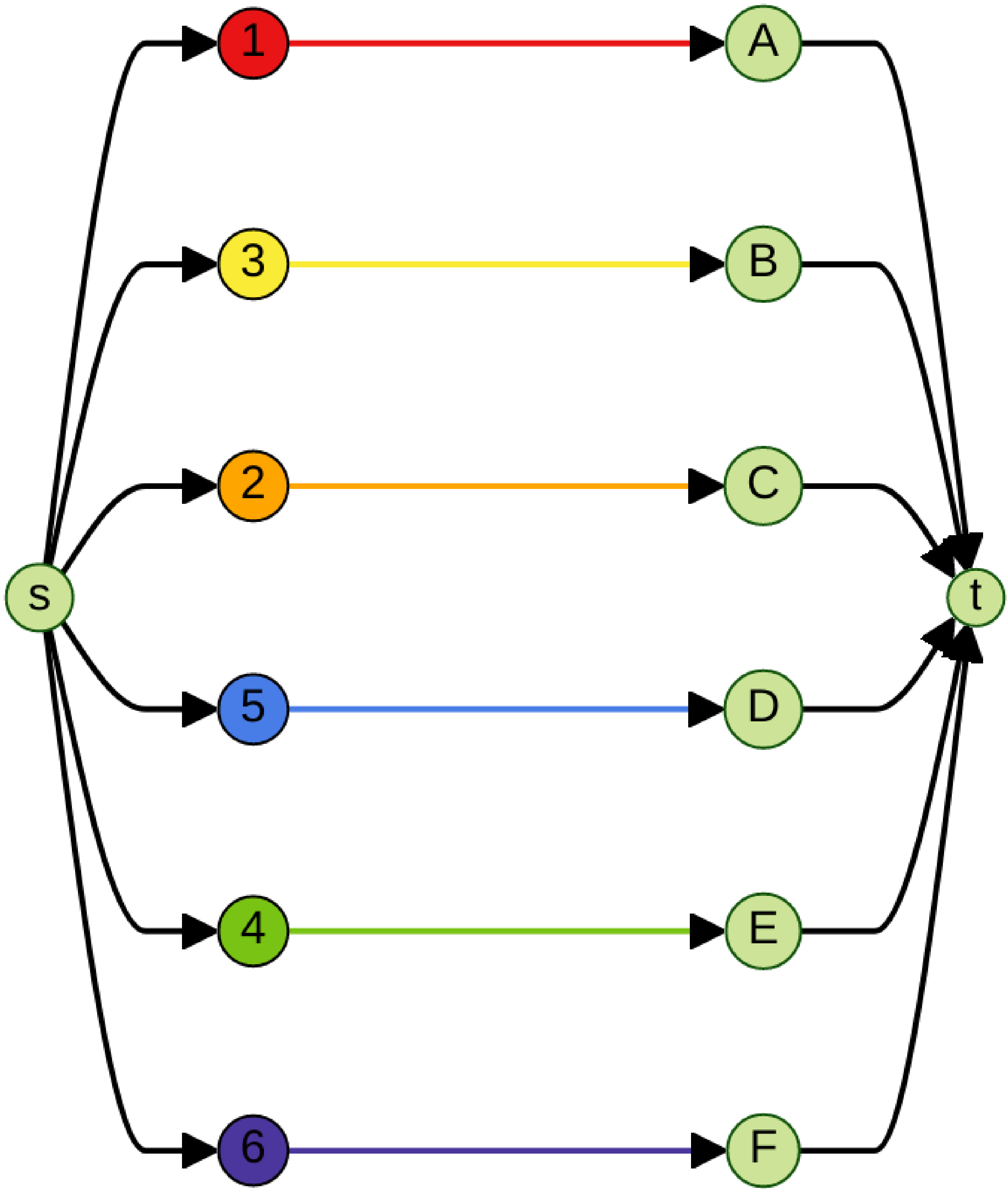

Figure 4: TODO

Na podstawie rozwiązania modelu sieciowego określić przydział zespołów do projektów

projekt	zespół
1	A
2	C
3	B
4	E
5	D
6	F

---

2. Minimalizacja kosztów realizacji projektów

Zakładamy, że firma wynajmuje zespoły do realizacji projektów. Koszty wynajmu są podane w poniższej tabeli.

Koszty wykonywania projektów przez poszczególne zespoły:

projekt	zespół	A	B	C	D	E	F
1		15	-	14	9	-	12
2		-	12	16	-	10	-
3		11	14	-	12	-	-
4		-	16	11	-	12	-
5		13	-	17	13	-	15
6		11	-	-	-	16	18

Należy dokonać przydziału zespołów programistycznych do projektów tak, aby minimalizować koszty najmu zespołów. Ograniczenia dotyczące jednego zespołu i jednego projektu pkt. 2.1 dalej obowiązują. W tym celu: - narysować model sieciowy problemu - określić jaki problem należy rozwiązać na tym modelu sieciowym - spróbować znaleźć jak najlepsze rozwiązanie

Narysować model sieciowy problemu

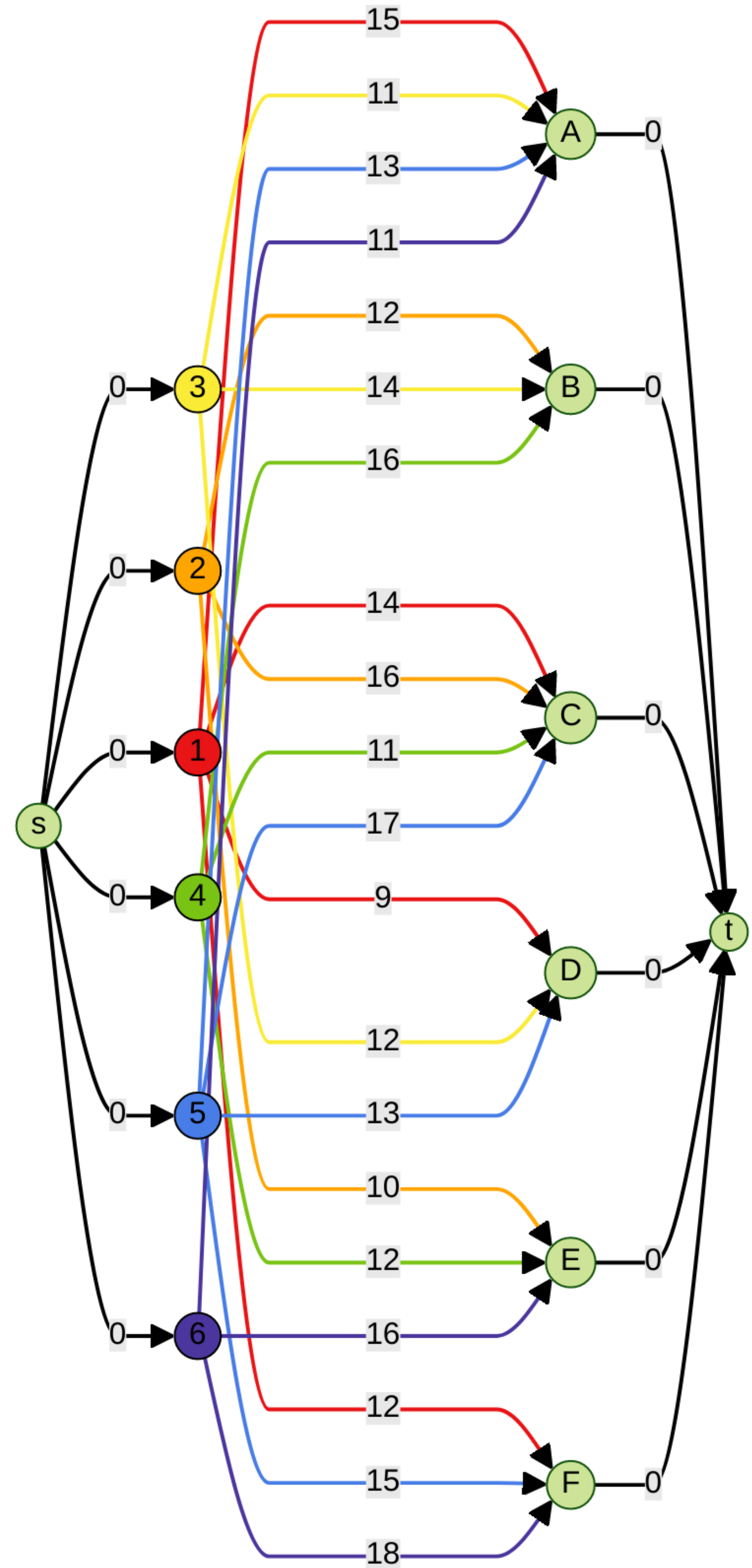

Figure 5: TODO

Każdy łuk ma maksymalną przepustowość równą **1**.

Określić jaki problem należy rozwiązać na tym modelu sieciowym

Problemem do rozwiązania jest **zadanie najtańszego skojarzenia**.

- Przydzielamy projekty do zespołów
- Każdy projekt wymaga jednego z zespołów
- Każdy zespół może realizować tylko jeden projekt
- Trzeba zrealizować wszystkie projekty
- Każdy zespół realizujący projekt ma ustaloną cenę za realizację tego projektu

Spróbować znaleźć jak najlepsze rozwiązanie

A	B	C	D	E	F	
1	-	-	-	9	-	-
2	-	-	-	-	10	-
3	-	14	-	-	-	-
4	-	-	11	-	-	-
5	-	-	-	-	-	15
6	11	-	-	-	-	-

Najlepszym znalezionym algorytmicznie rozwiązaniem jest przydział o koszcie całkowitym 70:

---

3. Minimalizacja terminu realizacji puli projektów

Załóżmy teraz, że dane podane w tabeli 2 to czasy (w miesiącach) realizacji projektów przez poszczególne zespoły. Ograniczenia dotyczące jednego zespołu i jednego projektu pkt. 2.1 dalej obowiązują. Zaproponować model programowania liniowego minimalizujący termin realizacji całego portfela projektów (jest to termin zdeterminowany przez najdłużej wykonywany projekt).

Zbiory

- $V = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C, D, E, F, t\}$ - zbiór wszystkich węzłów sieci przepływowej,
- $U = V \setminus \{s, t\}$ - zbiór węzłów sieci przepływowej z wyłączeniem źródła s i ujścia t,
- $E \subset V \times V$ - zbiór łuków dostępnych w danej sieci przepływowej.

$$V = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C, D, E, F, t\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C, D, E, F\}$$

$$\begin{gathered}
E = \{(s, 1), (s, 2), (s, 3), (s, 4), (s, 5), (s, 6), \\
(1, A), (1, C), (1, D), (1, F), \\
(2, B), (2, C), (2, E), \\
(3, A), (3, B), (3, D), \\
(4, B), (4, C), (4, E), \\
(5, A), (5, C), (5, D), (5, F), \\
(6, A), (6, E), (6, F), \\
(A, t), (B, t), (C, t), (D, t), (E, t), (F, t), \}
\end{gathered}$$

Parametry

- $F_{zadane} = 6$ - ilość projektów - każdy musi być zrealizowany.
- $c_{uv} = 1$ $dla(u, v) \in E$ - przepustowość ustalona dla każdego łuku rozpoczynającego się w węźle u i kończącego się w węźle v. W przypadku $(u, v) \notin E$ przyjmujemy $c_{uv} = 0$,
- d_{uv} $dla(u, v) \in E$ - czas realizacji (w miesiącach) ustalony dla każdego łuku rozpoczynającego się w węźle u i kończącego się w węźle v. W przypadku $(u, v) \notin E$ przyjmujemy $d_{uv} = 0$.

$$c_{s1} = 1, c_{s2} = 1, c_{s3} = 1, c_{s4} = 1, c_{s5} = 1, c_{s6} = 1,$$
$$c_{1A} = 1, c_{1C} = 1, c_{1D} = 1, c_{1F} = 1,$$
$$c_{2B} = 1, c_{2C} = 1, c_{2E} = 1,$$
$$c_{3A} = 1, c_{3B} = 1, c_{3D} = 1,$$
$$c_{4B} = 1, c_{4C} = 1, c_{4E} = 1,$$
$$c_{5A} = 1, c_{5C} = 1, c_{5D} = 1, c_{5F} = 1,$$
$$c_{6A} = 1, c_{6E} = 1, c_{6F} = 1,$$
$$c_{At} = 1, c_{Bt} = 1, c_{Ct} = 1, c_{Dt} = 1, c_{Et} = 1, c_{Ft} = 1$$

$$d_{s1} = 0, d_{s2} = 0, d_{s3} = 0, d_{s4} = 0, d_{s5} = 0, d_{s6} = 0,$$
$$d_{1A} = 15, d_{1C} = 14, d_{1D} = 9, d_{1F} = 12,$$
$$d_{2B} = 12, d_{2C} = 16, d_{2E} = 10,$$
$$d_{3A} = 11, d_{3B} = 14, d_{3D} = 12,$$
$$d_{4B} = 16, d_{4C} = 11, d_{4E} = 12,$$
$$d_{5A} = 13, d_{5C} = 17, d_{5D} = 13, d_{5F} = 15,$$
$$d_{6A} = 11, d_{6E} = 16, d_{6F} = 18,$$
$$d_{At} = 0, d_{Bt} = 0, d_{Ct} = 0, d_{Dt} = 0, d_{Et} = 0, d_{Ft} = 0,$$

Zmienne decyzyjne

- f_{uv} $dla(u, v) \in E$ - przepływ przez łuk rozpoczynający się w węźle u i kończącego się w węźle v,
- D - zmienna pomocnicza - całkowity czas realizacji.

Funkcja oceny

- $min(D)$ - minimalizujemy całkowity całkowity czas realizacji.

Ograniczenia

- Projekt w całości może być realizowany tylko przez jeden zespół - przepływ jest liczbą całkowitą z przedziału [0; 1]:
$$\forall (u, v) \in E : f_{uv} \in 0, 1$$
- Całkowity czas realizacji jest większy lub równy poszczególnym czasom realizacji projektów:
$$\forall (u, v) \in E : D \geq d_{uv} f_{uv}$$
- Zespoły muszą zrealizować F_{zadane} projektów - ze źródła s wypływa F_{zadane} jednostek:
$$\sum_{z \in V} f_{sz} = F_{zadane}$$

- Suma wpływających jednostek i wypływających z danego węzła powinna być równa (wyjątkiem jest źródło s i ujście t):

$$\forall v \in U : \sum_{z \in V} f_{vz} = \sum_{u \in V} f_{uv}$$

- Przepływ przez dany łuk nie może przekroczyć maksymalnego przepływu:

$$\forall (u, v) \in E : f_{uv} \leq c_{uv}$$

Wynik

Rozwiązaniem algorytmicznym otrzymujemy przydział prowadzący do realizacji w przeciągu **14** miesięcy:

projekt / zespół	A	B	C	D	E	F
1	-	-	-	-	-	X
2	-	-	-	-	X	-
3	-	X	-	-	-	-
4	-	-	X	-	-	-
5	-	-	-	X	-	-
6	X	-	-	-	-	-

projekt	zespół	czas realizacji
1	F	12
2	E	10
3	B	14
4	C	11
5	D	13
6	A	11

Zadanie 3