

# Modelowanie Matematyczne - Projekt 1

Bartłomiej Krawczyk

## Zadanie 1 - Sieć przepływowa

W centrum dyspozytorskim planuje się dostawy węgla z określonych kopalń do elektrowni. Rozważana jest możliwość dostaw węgla kamiennego z trzech kopalń A, B, C do trzech elektrowni F, G, H za pomocą sieci kolejowej z dwoma stacjami pośrednimi D i E.

- Jednostkowe koszty transportowe i przepustowości na poszczególnych odcinkach wynoszą (skierowanie łuku jest od wiersza do kolumny):
  - koszt:

	D	E	F	G	H
A	3	6	-	-	-
B	6	3	-	-	-
C	4	5	-	-	-
D	-	2	5	7	3
E	-	-	5	4	2

- przepustowość:

	D	E	F	G	H
A	8	10	-	-	-
B	10	13	-	-	-
C	10	8	-	-	-
D	-	20	16	6	10
E	-	-	7	4	2

- Zdolności wydobywcze kopalń wynoszą (w tys. ton):  $W_A = 10, W_B = 13, W_C = 22$ .
- Średnie zużycie dobowe węgla przez elektrownie wynosi (w tys. ton):  $Z_F = 15, Z_G = 10, Z_H = 10$ .

Zadanie polega na wyznaczeniu planu codziennych dostaw węgla zaspokajający zapotrzebowania elektrowni i minimalizujący sumaryczne koszty transportu. W tym celu należy: - sformułować i narysować model sieciowy (sieć przepływowa); Określić jaki problem na tej sieci należy rozwiązać (należy nazwać problem do rozwiązania, nie algorytm) - znaleźć jak najlepsze rozwiązanie (dowolną metodą ręcznie lub algorytmicznie) - zapisać odpowiadające zadanie programowania liniowego

Ponadto, należy sprawdzić, gdzie w sieci transportowej występuje wąskie gardło, które stanowiłoby ograniczenie w przypadku zwiększonego zapotrzebowania ze strony elektrowni (koszty transportu należy pominąć). W tym celu należy znaleźć przekrój o jak najmniejszej przepustowości; jaką informację niesie przepustowość wybranego przekroju?

Sformułować i narysować model sieciowy (sieć przepływową); Określić jaki problem na tej sieci należy rozwiązać

Problemem, który należy rozwiązać jest **problem najtańszego przepływu**.

Zapotrzebowanie dobowe wszystkich elektrowni wynosi  $F_{zadane} = Z_F + Z_G + Z_H = 35$ , zatem zadany przepływ to 35 jednostek (tys. ton).

Należy znaleźć przepływ ze źródła  $s$  do ujścia  $t$  o zadanej wielkości  $F_{zadane}$  i minimalnym sumarycznym koszcie.

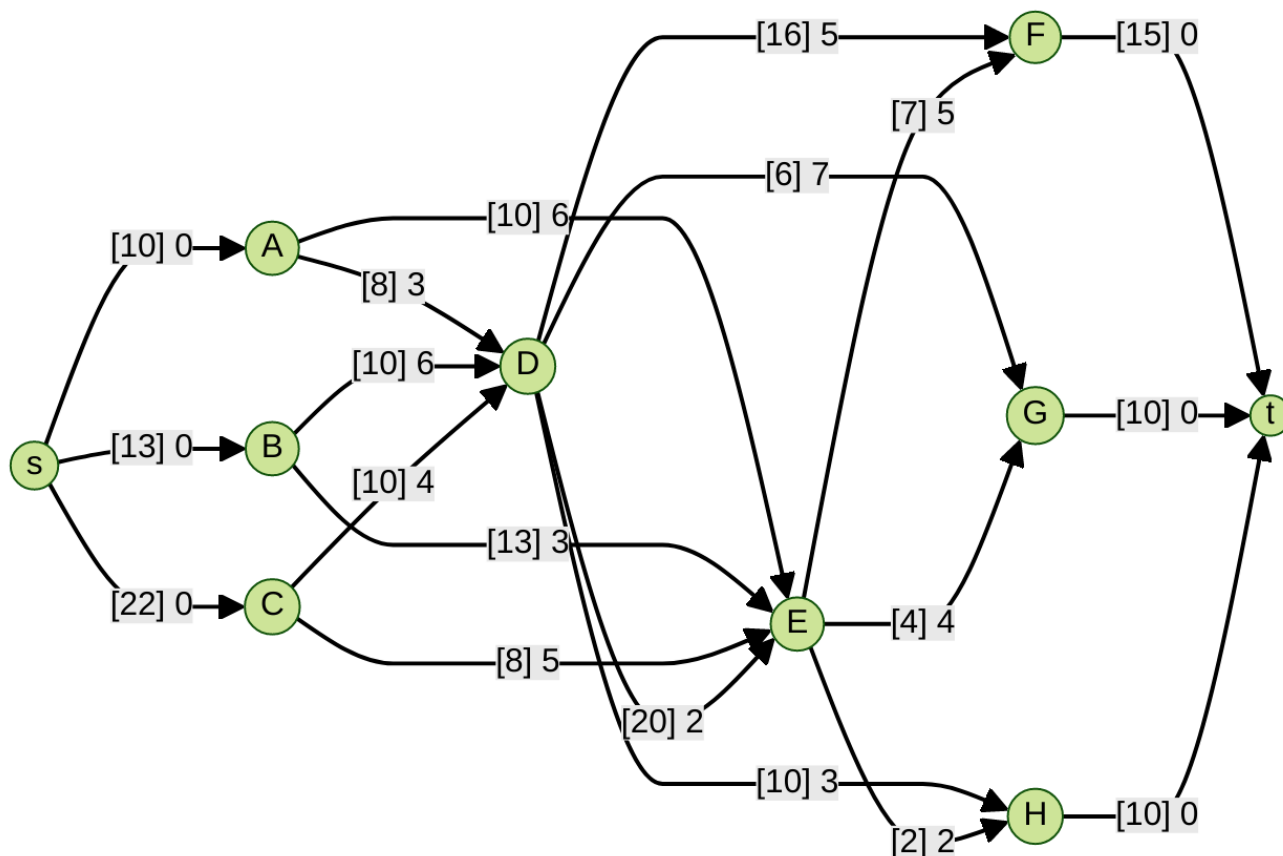


Figure 1: TODO

**Znaleźć jak najlepsze rozwiązanie.**

Najlepsze rozwiązanie znalezione algorytmicznie prowadzi do kosztu równego **296**.

from	to	s	A	B	C	D	E	F	G	H	t
s		0	8	13	14	0	0	0	0	0	0
A		0	0	0	0	8	0	0	0	0	0
B		0	0	0	0	4	9	0	0	0	0
C		0	0	0	0	10	4	0	0	0	0
D		0	0	0	0	0	0	8	6	8	0
E		0	0	0	0	0	0	7	4	2	0
F		0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
G		0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
H		0	0	0	0	0	0	0	0	0	10

from	to	s	A	B	C	D	E	F	G	H	t
t		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

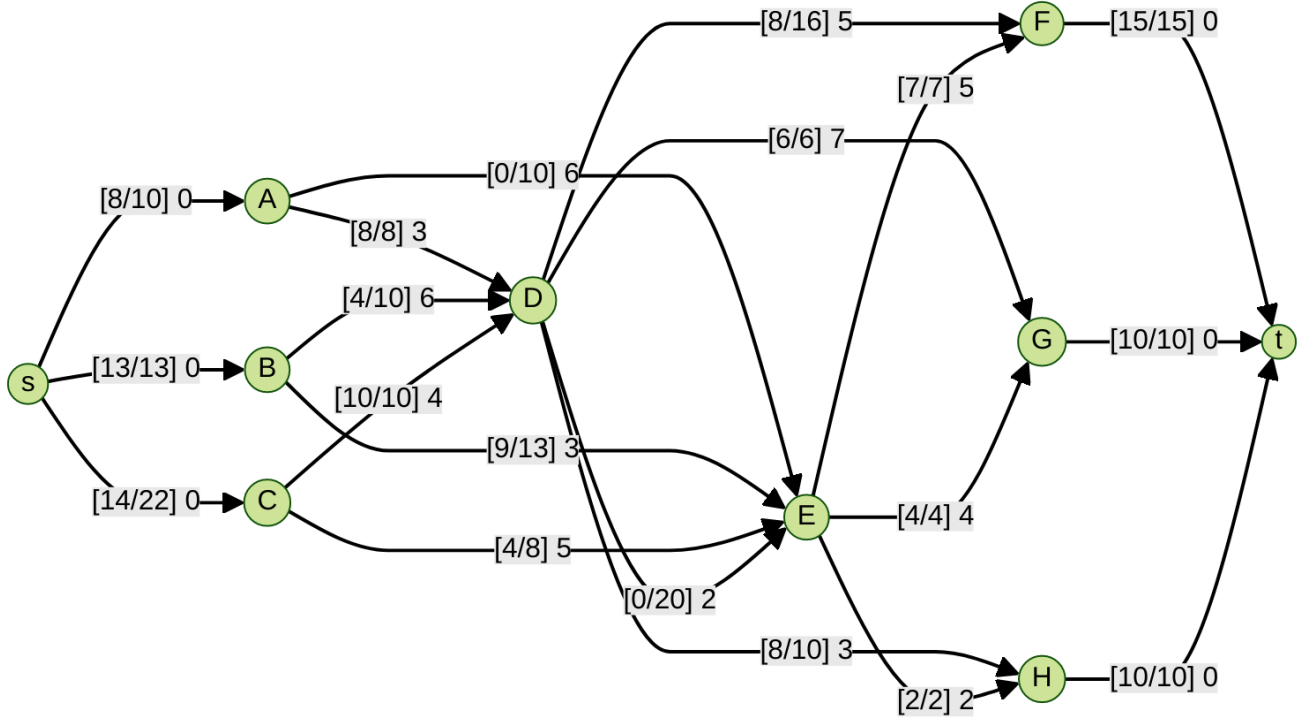


Figure 2: TODO

Zapisać odpowiadające zadanie programowania liniowego.

Zbiory

- $V = \{s, A, B, C, D, E, F, G, H, t\}$  - zbiór wszystkich węzłów sieci przepływowej,
- $U = V \setminus \{s, t\}$  - zbiór węzłów sieci przepływowej z wyłączeniem źródła  $s$  i ujścia  $t$ ,
- $E \subset V \times V$  - zbiór łuków dostępnych w danej sieci przepływowej.

$$V = \{s, A, B, C, D, E, F, G, H, t\}$$

$$U = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$$

$$E = \{(A, D), (A, E),$$

$$(B, D), (B, E),$$

$$(C, D), (C, E),$$

$$(D, E), (D, F), (D, G), (D, H),$$

$$(E, F), (E, G), (E, H)\}$$

Parametry

- $F_{zadane} = 35$  - całkowite zapotrzebowanie dobowe węgla (w tys. ton).
- $c_{uv}$  dla  $(u, v) \in E$  - przepustowość ustalona dla każdego łuku rozpoczynającego się w węźle  $u$  i kończącego się w węźle  $v$ . W przypadku  $(u, v) \notin E$  przyjmujemy  $c_{uv} = 0$ ,

- $d_{uv}$  dla  $(u, v) \in E$  - koszt ustalony dla każdego łuku rozpoczynającego się w węźle  $u$  i kończącego się w węźle  $v$ .  
W przypadku  $(u, v) \notin E$  przyjmujemy  $d_{uv} = 0$ .

$$c_{AD} = 8, c_{AE} = 10$$

$$c_{BD} = 10, c_{BE} = 13$$

$$c_{CD} = 10, c_{CE} = 8$$

$$c_{DE} = 20, c_{DF} = 16, c_{DG} = 6, c_{DH} = 10$$

$$c_{EF} = 7, c_{EG} = 4, c_{EH} = 2$$

$$c_{sA} = 10, c_{sB} = 13, c_{sC} = 22$$

$$c_{Ft} = 15, c_{Gt} = 10, c_{Ht} = 10$$

$$d_{AD} = 3, d_{AE} = 6$$

$$d_{BD} = 6, d_{BE} = 3$$

$$d_{CD} = 4, d_{CE} = 5$$

$$d_{DE} = 2, d_{DF} = 5, d_{DG} = 7, d_{DH} = 3$$

$$d_{EF} = 5, d_{EG} = 4, d_{EH} = 2$$

### Zmienne decyzyjne

- $f_{uv}$  dla  $(u, v) \in E$  - przepływ przez łuk rozpoczynający się w węźle  $u$  i kończącego się w węźle  $v$ ,
- $D$  - zmienna pomocnicza - całkowity koszt wszystkich przepływów.

### Funkcja oceny

- $\min(D)$  - minimalizujemy całkowity koszt wszystkich przepływów.

### Ograniczenia

- Przepływ nie może być negatywny:

$$\forall (u, v) \in E : f_{uv} \geq 0$$

- Całkowity koszt jest sumą kosztu wszystkich przepływów:

$$D = \sum_{(u,v) \in E} d_{uv} f_{uv}$$

- Ze źródła  $s$  wypływa  $F_{zadane}$  jednostek:

$$\sum_{z \in V} f_{sz} = F_{zadane}$$

- Suma wpływających jednostek i wypływających z danego węzła powinna być równa (wyjątkiem jest źródło  $s$  i ujście  $t$ ):

$$\forall v \in U : \sum_{z \in V} f_{vz} = \sum_{u \in V} f_{uv}$$

- Przepływ przez dany łuk nie może przekroczyć maksymalnego przepływu:

$$\forall (u, v) \in E : f_{uv} \leq c_{uv}$$

Ponadto, należy sprawdzić, gdzie w sieci transportowej występuje wąskie gardło, które stanowiłoby ograniczenie w przypadku zwiększonego zapotrzebowania ze strony elektrowni (koszty transportu należy pominąć). W tym celu należy znaleźć przekrój o jak najmniejszej przepustowości; jaką informację niesie przepustowość wybranego przekroju?

TODO

---

## Zadanie 2 - Zadanie przydziału

1. Planowanie realizacji portfela przy ograniczonych kompetencjach

Softwarehouse posiada portfel projektów oznaczonych 1-6 oraz zespoły programistyczne oznaczone A-F. Poniżej tabela przedstawia kompetencje zespołów, gdzie „-” oznacza brak kompetencji zespołu do realizacji danego projektu.

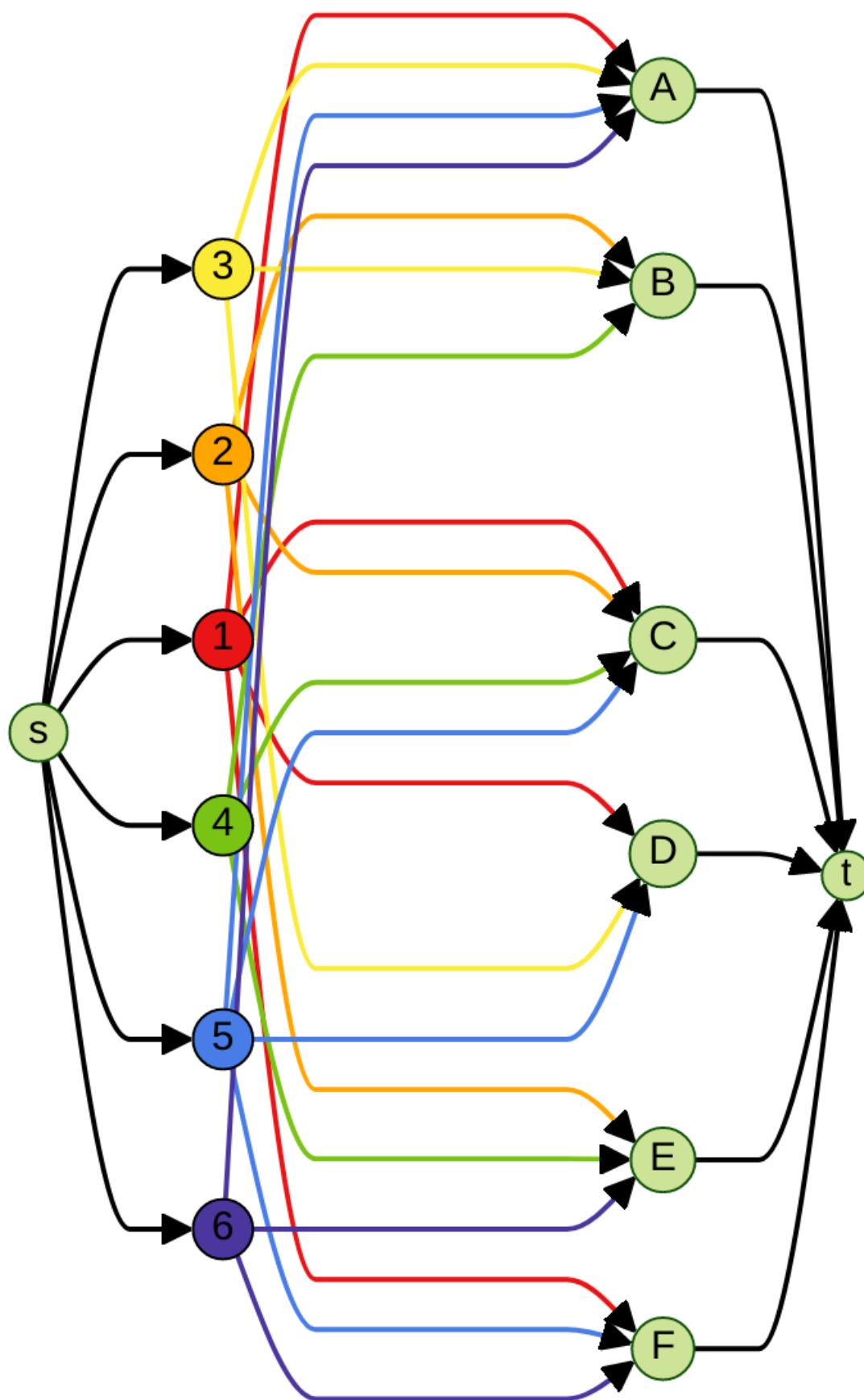
Kompetencje zespołów:

projekt	zespół	A	B	C	D	E	F
1		X	-	X	X	-	X
2		-	X	X	-	X	-
3		X	X	-	X	-	-
4		-	X	X	-	X	-
5		X	-	X	X	-	X
6		X	-	-	-	X	X

Należy dokonać przydziału zespołów programistycznych do poszczególnych projektów, przy założeniu, że jeden zespół może realizować tylko jeden projekt, a jeden projekt może być realizowany przez tylko jeden zespół. W tym celu:

- narysować model sieciowy problemu
- określić jaki problem należy rozwiązać i znaleźć ręcznie rozwiązanie
- na podstawie rozwiązania modelu sieciowego określić przydział zespołów do projektów

Narysować model sieciowy problemu



Każdy łuk ma maksymalną przepustowość równą 1.

**Określić jaki problem należy rozwiązać i znaleźć ręcznie rozwiązanie**

Problem do rozwiązania w tym zadaniu to zadanie maksymalnego skojarzenia (przydziału).

- Przydzielamy projekty do zespołów
- Każdy projekt wymaga jednego zespołu
- Każdy zespół może realizować maksymalnie jeden projekt

Rozwiązanie znalezione ręcznie:

projekt	zespół	A	B	C	D	E	F
1		X	-	-	-	-	-
2		-	-	X	-	-	-
3		-	X	-	-	-	-
4		-	-	-	-	X	-
5		-	-	-	X	-	-
6		-	-	-	-	-	X

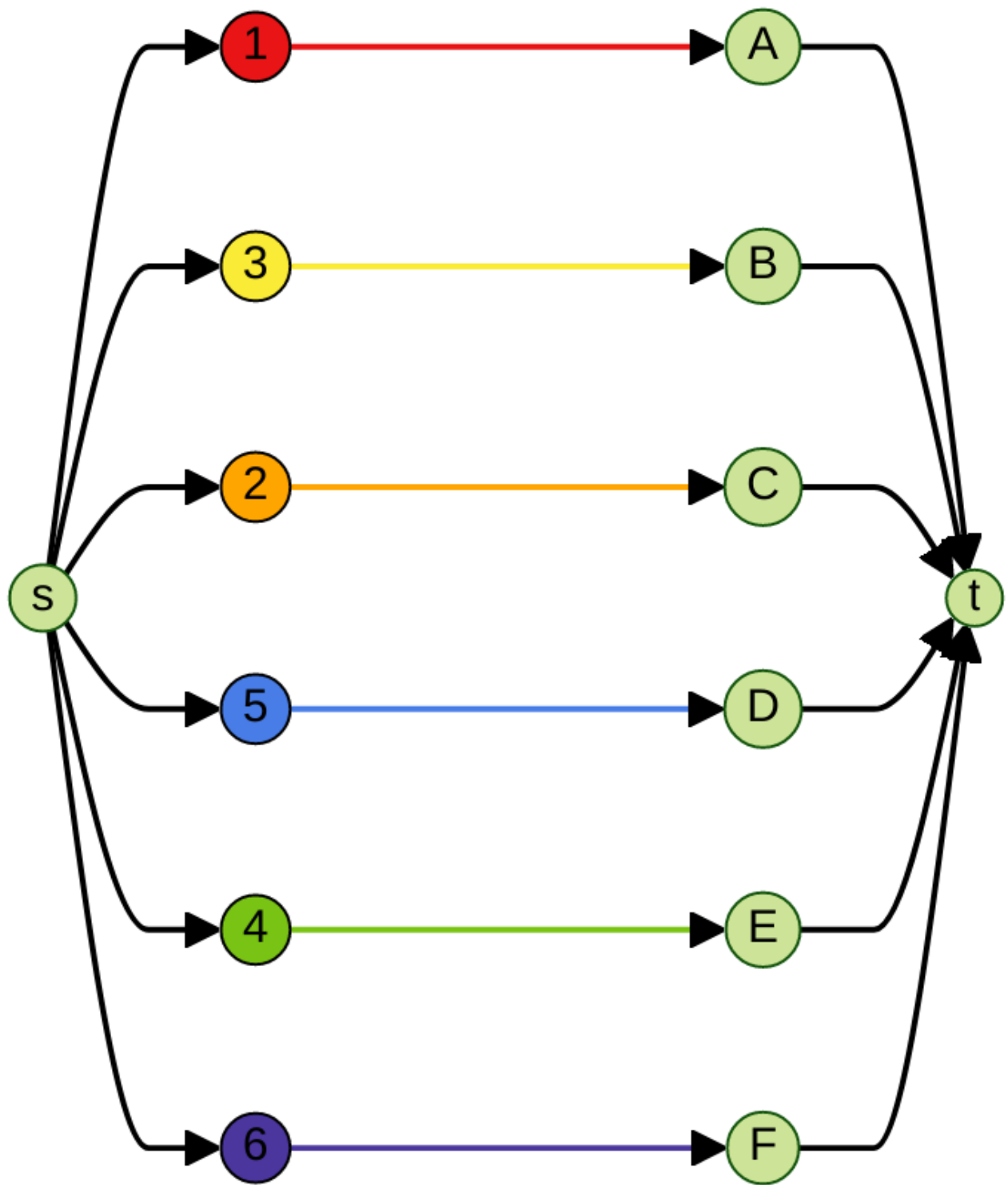


Figure 4: TODO

Na podstawie rozwiązania modelu sieciowego określić przydział zespołów do projektów



projekt	zespół
1	A
2	C
3	B
4	E
5	D
6	F

## 2. Minimalizacja kosztów realizacji projektów

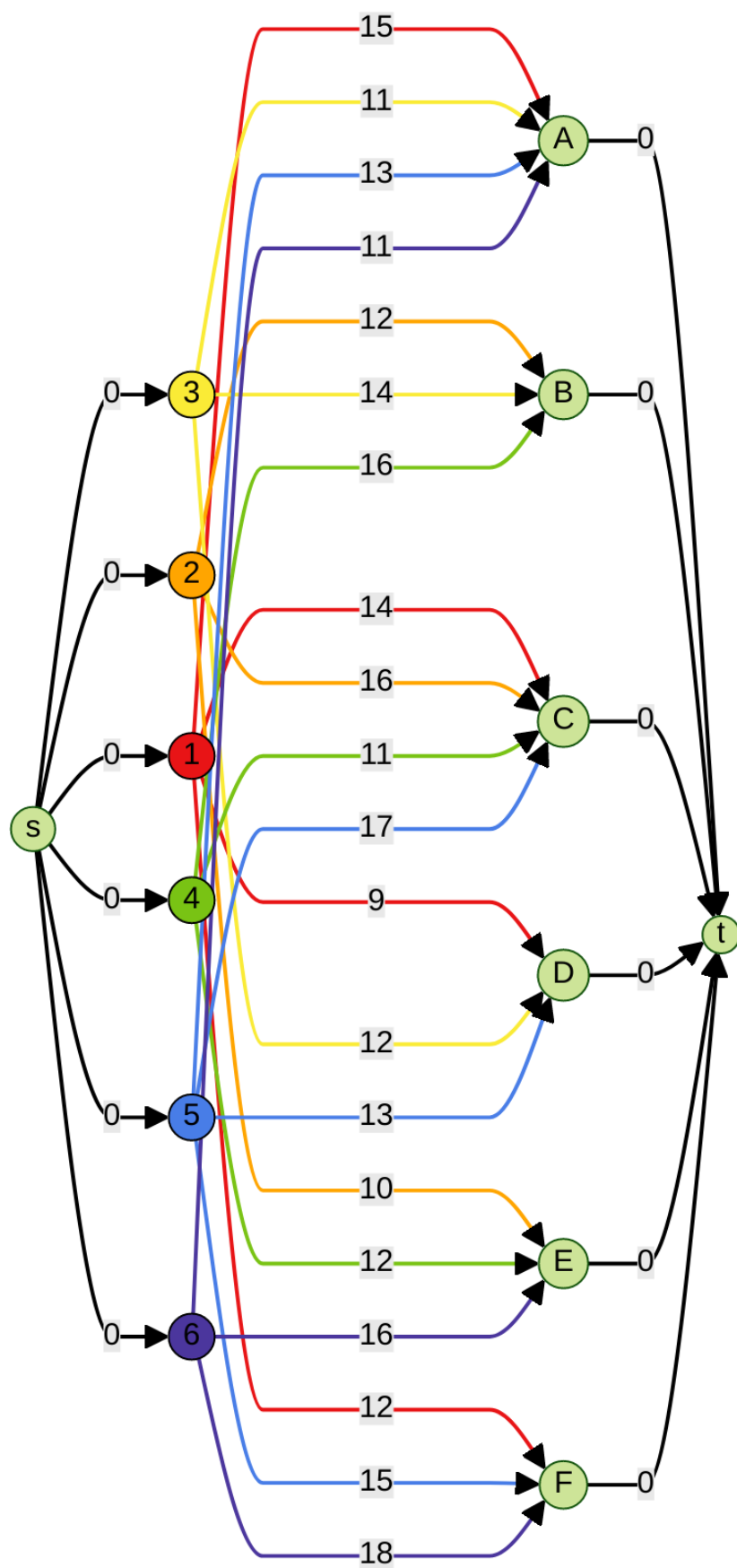
Zakładamy, że firma wynajmuje zespoły do realizacji projektów. Koszty wynajmu są podane w poniższej tabeli.

Koszty wykonywania projektów przez poszczególne zespoły:

projekt	zespół	A	B	C	D	E	F
1		15	-	14	9	-	12
2		-	12	16	-	10	-
3		11	14	-	12	-	-
4		-	16	11	-	12	-
5		13	-	17	13	-	15
6		11	-	-	-	16	18

Należy dokonać przydziału zespołów programistycznych do projektów tak, aby minimalizować koszty najmu zespołów. Ograniczenia dotyczące jednego zespołu i jednego projektu pkt. 2.1 dalej obowiązują. W tym celu: - narysować model sieciowy problemu - określić jaki problem należy rozwiązać na tym modelu sieciowym - spróbować znaleźć jak najlepsze rozwiązanie

Narysować model sieciowy problemu



Każdy łuk ma maksymalną przepustowość równą 1.

### Określić jaki problem należy rozwiązać na tym modelu sieciowym

Problemem do rozwiązania jest **zadanie najtańszego skojarzenia**.

- Przydzielamy projekty do zespołów
- Każdy projekt wymaga jednego z zespołów
- Każdy zespół może realizować tylko jeden projekt
- Trzeba zrealizować wszystkie projekty
- Każdy zespół realizujący projekt ma ustaloną cenę za realizację tego projektu

### Spróbować znaleźć jak najlepsze rozwiązanie

A	B	C	D	E	F
1	-	-	-	9	-
2	-	-	-	-	10
3	-	14	-	-	-
4	-	-	11	-	-
5	-	-	-	-	15
6	11	-	-	-	-

**Najlepszym znalezionym algorytmicznie rozwiązaniem jest przydział o koszcie całkowitym 70:**

### 3. Minimalizacja terminu realizacji puli projektów

Załóżmy teraz, że dane podane w tabeli 2 to czasy (w miesiącach) realizacji projektów przez poszczególne zespoły. Ograniczenia dotyczące jednego zespołu i jednego projektu pkt. 2.1 dalej obowiązują. Zaproponować model programowania liniowego minimalizujący termin realizacji całego portfela projektów (jest to termin zdeterminowany przez najdłużej wykonywany projekt).

### Zbiory

- $V = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C, D, E, F, t\}$  - zbiór wszystkich węzłów sieci przepływowej,
- $U = V \setminus \{s, t\}$  - zbiór węzłów sieci przepływowej z wyłączeniem źródła  $s$  i ujścia  $t$ ,
- $E \subset V \times V$  - zbiór łuków dostępnych w danej sieci przepływowej.

$$V = \{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C, D, E, F, t\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, A, B, C, D, E, F\}$$

$$E = \{(s, 1), (s, 2), (s, 3), (s, 4), (s, 5), (s, 6),$$

$$(1, A), (1, C), (1, D), (1, F),$$

$$(2, B), (2, C), (2, E),$$

$$(3, A), (3, B), (3, D),$$

$$(4, B), (4, C), (4, E),$$

$$(5, A), (5, C), (5, D), (5, F),$$

$$(6, A), (6, E), (6, F),$$

$$(A, t), (B, t), (C, t), (D, t), (E, t), (F, t), \}$$

## Parametry

- $F_{zadane} = 6$  - ilość projektów - każdy musi być zrealizowany.
- $c_{uv} = 1$  dla  $(u, v) \in E$  - przepustowość ustalona dla każdego łuku rozpoczynającego się w węźle  $u$  i kończącego się w węźle  $v$ . W przypadku  $(u, v) \notin E$  przyjmujemy  $c_{uv} = 0$ ,
- $d_{uv}$  dla  $(u, v) \in E$  - czas realizacji (w miesiącach) ustalony dla każdego łuku rozpoczynającego się w węźle  $u$  i kończącego się w węźle  $v$ . W przypadku  $(u, v) \notin E$  przyjmujemy  $d_{uv} = 0$ .

$$c_{s1} = 1, c_{s2} = 1, c_{s3} = 1, c_{s4} = 1, c_{s5} = 1, c_{s6} = 1,$$

$$c_{1A} = 1, c_{1C} = 1, c_{1D} = 1, c_{1F} = 1,$$

$$c_{2B} = 1, c_{2C} = 1, c_{2E} = 1,$$

$$c_{3A} = 1, c_{3B} = 1, c_{3D} = 1,$$

$$c_{4B} = 1, c_{4C} = 1, c_{4E} = 1,$$

$$c_{5A} = 1, c_{5C} = 1, c_{5D} = 1, c_{5F} = 1,$$

$$c_{6A} = 1, c_{6E} = 1, c_{6F} = 1,$$

$$c_{At} = 1, c_{Bt} = 1, c_{Ct} = 1, c_{Dt} = 1, c_{Et} = 1, c_{Ft} = 1$$

$$d_{s1} = 0, d_{s2} = 0, d_{s3} = 0, d_{s4} = 0, d_{s5} = 0, d_{s6} = 0,$$

$$d_{1A} = 15, d_{1C} = 14, d_{1D} = 9, d_{1F} = 12,$$

$$d_{2B} = 12, d_{2C} = 16, d_{2E} = 10,$$

$$d_{3A} = 11, d_{3B} = 14, d_{3D} = 12,$$

$$d_{4B} = 16, d_{4C} = 11, d_{4E} = 12,$$

$$d_{5A} = 13, d_{5C} = 17, d_{5D} = 13, d_{5F} = 15,$$

$$d_{6A} = 11, d_{6E} = 16, d_{6F} = 18,$$

$$d_{At} = 0, d_{Bt} = 0, d_{Ct} = 0, d_{Dt} = 0, d_{Et} = 0, d_{Ft} = 0,$$

## Zmienne decyzyjne

- $f_{uv}$  dla  $(u, v) \in E$  - przepływ przez łuk rozpoczynający się w węźle  $u$  i kończącego się w węźle  $v$ ,
- $D$  - zmienna pomocnicza - całkowity czas realizacji.

## Funkcja oceny

- $\min(D)$  - minimalizujemy całkowity czas realizacji.

## Ograniczenia

- Projekt w całości może być realizowany tylko przez jeden zespół - przepływ jest liczbą całkowitą z przedziału  $[0; 1]$ :

$$\forall (u, v) \in E : f_{uv} \in 0, 1$$

- Całkowity czas realizacji jest większy lub równy poszczególnym czasom realizacji projektów:

$$\forall (u, v) \in E : D \geq d_{uv} f_{uv}$$

- Zespoły muszą zrealizować  $F_{zadane}$  projektów - ze źródła  $s$  wypływa  $F_{zadane}$  jednostek:

$$\sum_{z \in V} f_{sz} = F_{zadane}$$

- Suma wpływających jednostek i wypływających z danego wężła powinna być równa (wyjątkiem jest źródło  $s$  i ujście  $t$ ):

$$\forall v \in U : \sum_{z \in V} f_{vz} = \sum_{u \in V} f_{uv}$$

- Przepływ przez dany łuk nie może przekroczyć maksymalnego przepływu:

$$\forall (u, v) \in E : f_{uv} \leq c_{uv}$$

## Wynik

Rozwiązaniem algorytmicznym otrzymujemy przydział prowadzący do realizacji w przeciągu **14** miesięcy:

projekt / zespół	A	B	C	D	E	F
1	-	-	-	-	-	X
2	-	-	-	-	X	-
3	-	X	-	-	-	-
4	-	-	X	-	-	-
5	-	-	-	X	-	-
6	X	-	-	-	-	-

projekt	zespół	czas realizacji
1	F	12
2	E	10
3	B	14
4	C	11
5	D	13
6	A	11

## Zadanie 3

Pewna firma FMCG planuje sprzedaż jednego produktu. Produkt jest dostarczany do 8 punktów sprzedaży. Na podstawie danych historycznych (lub prognozowanych) utworzony tzw. plan bazowy dostaw opisujący ilości produktu, które były (powinny być) dostarczane do każdego punktu. Jest on następujący:

punkt	1	2	3	4	5	6	7	8
ilość	240	385	138	224	144	460	198	200

Jednak ze względu na akcje marketingowe oraz różnego rodzaju umowy/ustalenia z handlowcami tego produktu wprowadzono różnego rodzaju modyfikacje ww. planu bazowego w formie zagregowanych ograniczeń eksperckich: 1. Suma towaru dostarczonego do punktów 1, 3, 8 ma być przynajmniej o 12% większa niż planie bazowym. 2. Suma towaru dostarczonego do punktów 3, 5 ma być przynajmniej o 7% mniejsza niż w planie bazowym. 3. Ilość towaru dostarczonego do punktu 3 ma stanowić przynajmniej 80% towaru dostarczonego do punktu 7.

Zakładając, że sumaryczna wielkość sprzedaży produktu we wszystkich punktach nie może zostać zmieniona, należy zaplanować wielkość sprzedaży w poszczególnych punktach minimalizującą względne odchylenie (upewnij się, że dobrze rozumiesz „względne odchylenie”) od planu bazowego (a dokładnie - wartość bezwzględną względnego odchylenia). Ponieważ jest 8 względnych odchyżeń (kryteriów), należy sformułować własną funkcję celu, która jest sumą ważoną dwóch składników: 1) maksymalnego względnego odchylenia pośród 8 odchyżeń, 2) sumy wszystkich względnych odchyżeń.

Należy zamodelować powyższy problem w postaci zadania programowania liniowego.

### Zbiory

- $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  - zbiór wszystkich punktów sprzedaży.

### Parametry

- $b_p$  dla  $p \in P$  - plan bazowy dostaw opisujący ilość, która powinna być dostarczana do punktu  $p$ ,
- $c_1$  - waga maksymalnego względnego odchylenia pośród 8 odchyłeń,
- $c_2$  - waga sumy wszystkich względnych odchyłeń.

$$b_1 = 240, b_2 = 385, b_3 = 138, b_4 = 224,$$

$$b_5 = 144, b_6 = 460, b_7 = 198, b_8 = 200$$

### Zmienne decyzyjne

- $x_p$  dla  $p \in P$  - planowana ilość do dostarczenia do punktu  $p$ ,
- $y_p$  dla  $p \in P$  - odchylenie planowanej wartości od bazowej, która powinna być dostarczona do punktu  $p$ ,
- $y_p^+$  dla  $p \in P$  - zmienna pomocnicza. Reprezentuje dodatnią część zmiennej  $y_p$ . Dla  $y_p < 0$   $y_p^+ = 0$ ,
- $y_p^-$  dla  $p \in P$  - zmienna pomocnicza. Reprezentuje ujemną część zmiennej  $y_p$ . Dla  $y_p > 0$   $y_p^- = 0$ ,
- $y_{max}$  - zmienna pomocnicza. Wartość większa lub równa od wartości bezwzględnych odchyłek  $|y_p|$  każdego z punktów  $p \in P$ ,
- $y_{sum}$  - zmienna pomocnicza. Równa jest sumie względnych odchyłeń od wszystkich planów bazowych punktów  $p \in P$ .

### Funkcja oceny

- $\min(c_1 y_{max} + c_2 y_{sum})$  - minimalizujemy sumę ważoną dwóch składników:  $y_{max}$  i  $y_{sum}$ .

### Ograniczenia

- Dostarczana ilość produktów nie może być ujemna:

$$\forall p \in P : x_p \geq 0$$

- Odchylenie od planowanej ilości bazowej to różnica ilości bazowej i planowanej:

$$\forall p \in P : y_p = b_p - x_p$$

- Odchyłka dodatnia nie może być ujemna:

$$\forall p \in P : y_p^+ \geq 0$$

- Odchyłka ujemna nie może być ujemna:

$$\forall p \in P : y_p^- \geq 0$$

- Odchylenie możemy zapisać jako różnicę odchyłek:

$$\forall p \in P : y_p = y_p^+ - y_p^-$$

- Maksymalne odchylenie jest większe równe wartości bezwzględnej każdego z odchyłeń:

$$\forall p \in P : y_{max} \geq y_p^+ + y_p^-$$

- Suma względnych odchyłeń jest równa sumie wartości bezwzględnych każdego z odchyłeń:

$$y_{sum} = \sum p \in Py_p^+ + y_p^-$$

- Suma towaru dostarczonego do punktów 1, 3, 8 ma być przynajmniej o 12% większa niż w planie bazowym:

$$x_1 + x_3 + x_8 \geq 1.2(b_1 + b_3 + b_8)$$

- Suma towaru dostarczonego do punktów 3, 5 ma być przynajmniej o 7% mniejsza niż w planie bazowym:

$$x_3 + x_5 \leq 0.93(b_3 + b_5)$$

- Ilość towaru dostarczonego do punktu 3 ma stanowić przynajmniej 80% towaru dostarczonego do punktu 7:

$$x_3 \geq 0.8x_7$$

## Wyniki

Wyniki dla podanego zadania zależą od przyjętych wag w funkcji oceny.

Dla przyjętego  $c_1 = 1, c_2 = 0.001$  - preferujemy minimalizację maksymalnego względnego odchylenia nad minimalizacją sumy odchyłeń. Otrzymujemy w rezultacie plan o maksymalnym odchyleniu  $y_{max} = 29.7$  i sumie odchyłeń równej  $y_{sum} = 112.11$ .

punkt	1	2	3	4	5	6	7	8
bazowy plan	240	385	138	224	144	460	198	200
plan	269.7	385	147.96	224	114.3	460	184.95	229.7
odchylenie	-29.7	0	-9.96	0	29.7	0	13.05	-29.7

Dla przyjętego  $c_1 = 0.001, c_2 = 1$  - preferujemy minimalizację sumy względnych odchyłeń nad minimalizacją maksymalnego względnego odchylenia. Otrzymujemy w rezultacie plan o maksymalnym odchyleniu  $y_{max} = 40.14$  i sumie odchyłeń równej  $y_{sum} = 109.5$ .

punkt	1	2	3	4	5	6	7	8
bazowy plan	240	385	138	224	144	460	198	200
plan	248.82	385	158.4	224	103.86	460	198	240.14
odchylenie	-8.82	0	-20.4	0	40.14	0	0	-40.14