

Modelowanie Matematyczne - Projekt 3

Bartłomiej Krawczyk, 310774

Zadanie

Zestaw 6_JG

Opis modelowanego problemu:

Przedsiębiorstwo produkuje trzy produkty P_1 , P_2 , P_3 (sztuki). Każdy z tych produktów potrzebuje trzech różnych składników S_1 , S_2 , S_3 (kg/jednostkę). Każdy z produktów ma inną ceną jednostkową sprzedaży C_{P_1} , C_{P_2} , C_{P_3} (tyś.PLN/jednostkę). Firma zwraca uwagę na ekologię i szacuje jednostkowy poziom zanieczyszczeń emitowanych dla poszczególnych produktów Z_{P_1} , Z_{P_2} , Z_{P_3} (kg/jednostkę). Dostępne są również jednostkowe koszty produkcji K_{P_1} , K_{P_2} , K_{P_3} (tyś.PLN/jednostkę).

Ograniczenia:

1. Nie można użyć więcej niż 110 kg składnika S_1 , ale 100 kg jest akceptowalne.
2. Zaleca się użycie 50 kg składnika S_2 , ale zużycie powyżej 55 kg nie jest akceptowalne.
3. Nie jest akceptowalne zużycie składnika S_3 powyżej 50 kg.
4. Zakłada się, że produkcja produktu P_1 powinna być nie mniejsza niż 3 sztuki, a produktu P_3 nie mniejsza niż 5 sztuk.

Cele postawione przez zarządzających firmą:

1. Maksymalizacja zysków; dążenie do zysku na poziomie 150 tys. PLN, ale akceptowalny jest zysk na poziomie 130 tys PLN.
2. Minimalizacja emisji zanieczyszczeń; dążenie do emisji na poziomie 30 kg, ale poziom 35 kg jest akceptowalny.
3. Minimalizacja kosztów produkcji; dążenie do kosztów na poziomie 70 tys. PLN, ale koszty na poziomie 80 tys. są akceptowalne.

Polecenia do wykonania:

1. (2) Sformułować i opisać wielokryterialny model planowania produkcji z wykorzystaniem metody punktu odniesienia.
2. (3) Sformułować i opisać wielokryterialny model optymalnego planowania produkcji z wykorzystaniem zbiorów rozmytych.
3. (10) Sformułować równoważne zadanie optymalizacji dla zadania 2 z wykorzystaniem zbiorów rozmytych adaptując podejście Zimmermana dla więcej niż jednego kryterium.
4. (3) Zapisz zadanie/zadania sformułowane w punkcie 1 w postaci do rozwiązania z wykorzystaniem wybranego narzędzia implementacji (np. AMPL, AIMMS) i rozwiąż to zadanie/zadania. W przypadku niedopuszczalności zadania zaproponuj zmianę celów i/lub innych parametrów.
5. (7) Zapisz zadania sformułowane w punkcie 3 w postaci do rozwiązania z wykorzystaniem wybranego narzędzia implementacji (np. AMPL, AIMMS) i rozwiąż te zadania. W przypadku niedopuszczalności zadania zaproponuj zmianę celów i/lub innych parametrów.
6. (3) Porównaj rozwiązania zadań z poprzednich dwóch punktów.
7. (2) Rozwiąż zadanie z punktu 2 za pomocą pakietu R – FuzzyLP. Należy w obliczeniach rozpatrywać niezależnie każde z kryteriów.
8. (3) Zaproponuj i zastosuj graficzną formę analizy rozwiązań.

9. (2) Opisz zalety i wady modelowania opisanego problemu z wykorzystaniem zbiorów rozmytych.

Dane:

produkt	S1	S2	S3	Cx	Zx	Kx
P1	2	8	4	9	1	1
P2	10	1	0	21	1	3
P3	4	4	2	11	3	3

produkt [sztuki] \ składniki [kg/jednostkę]	S1	S2	S3
P1	2	8	4
P2	10	1	0
P3	4	4	2

produkt [sztuki] \ cena jednostkowa [tyś.PLN/jednostkę]	Cx
P1	9
P2	21
P3	11

produkt [sztuki] \ emitowane zanieczyszczenia [kg/jednostkę]	Zx
P1	1
P2	1
P3	3

produkt [sztuki] \ koszty produkcji [tyś.PLN/jednostkę]	Kx
P1	1
P2	3
P3	3

Opracowany domyślny model

Został przygotowany bazowy model na bazie, który w zależności od podpunktu zadania został rozbudowany o dodatkowe zbiory, parametry, zmienne decyzyjne, ograniczenia i funkcje oceny.

Zbiory

- $PRODUCTS = \{P1, P2, P3\}$ - zbiór możliwych do wyprodukowania produktów,
- $COMPONENTS = \{S1, S2, S3\}$ - zbiór składników, z których wytwarzane są produkty,
- $OBJECTIVES = \{S1, S2, income, emissions, cost\}$ - zbiór nazwanych zmiennych decyzyjnych, dla których ustalone są aspiracje. Tak zdefiniowany zbiór pozwala na uproszczenie zapisu niektórych ograniczeń.

Parametry

- $PRODUCT_INCOME[p]$, $p \in PRODUCTS$ - jednostkowa cena sprzedaży produktów p (tyś.PLN/jednostkę),

$PRODUCTS$	$PRODUCT_INCOME[p]$
P1	9
P2	21
P3	11

- $EMITTED_POLLUTANTS[p]$, $p \in PRODUCTS$ - jednostkowy poziom zanieczyszczeń emitowanych dla poszczególnych produktów p (kg/jednostkę),

$PRODUCTS$	$EMITTED_POLLUTANTS[p]$
P1	1
P2	1
P3	3

- $PRODUCTION_COST[p]$, $p \in PRODUCTS$ - jednostkowe koszty produkcji produktu p (tyś.PLN/jednostkę),

$PRODUCTS$	$PRODUCTION_COST[p]$
P1	1
P2	3
P3	3

- $PRODUCT_COMPONENTS[p][c]$, $p \in PRODUCTS$, $c \in COMPONENTS$ - wymagana ilość składnika c do wytworzenia produktu p .

$PRODUCT_COMPONENTS[p][c]$	S1	S2	S3
P1	2	8	4
P2	10	1	0
P3	4	4	2

Dodatkowe parametry wynikające z zadanych ograniczeń:

- $COMPONENT_USAGE_HARD_LIMIT[c]$, $c \in COMPONENTS$ - maksymalna ilość składnika c jaką można wykorzystać,

$COMPONENTS$	$COMPONENT_USAGE_HARD_LIMIT[c]$
S1	110
S2	55

<i>COMPONENTS</i>	<i>COMPONENT_USAGE_HARD_LIMIT[c]</i>
S3	50

- *MINIMAL_PRODUCTION[p]*, $p \in PRODUCTS$ - minimalna ilość sztuk produktu p jaką należy wyprodukować,

<i>PRODUCTS</i>	<i>MINIMAL_PRODUCTION[p]</i>
P1	3
P2	0
P3	5

- *MIN_INCOME* = 130 - minimalny akceptowalny poziom zarobków,
- *MAX_EMISSIONS* = 35 - maksymalny akceptowalny poziom emisji zanieczyszczeń,
- *MAX_COST* = 80 - maksymalny akceptowalny koszt wytwarzania wszystkich produktów.

Parametry wynikające z zadanych aspiracji:

- *ASPIRATIONS[o]*, $o \in OBJECTIVES$ - aspiracje ustalone dla poszczególnych zmiennych decyzyjnych.

<i>OBJECTIVES</i>	<i>ASPIRATIONS[o]</i>
S1	100
S2	50
income	150
emissions	30
cost	70

Zmienne decyzyjne

- *production[p]*, $p \in PRODUCTS$ - zmienna reprezentująca ilość wyprodukowanych produktów typu p ,
- *component_usage[c]*, $c \in COMPONENTS$ - reprezentuje całkowite wykorzystanie składnika typu c do produkcji wszystkich produktów,
- *income* - zmienna pomocnicza oznaczająca całkowity zysk ze sprzedaży produktów,
- *emissions* - całkowite zanieczyszczenia wyemitowane podczas produkcji wszystkich produktów,
- *cost* - sumaryczne koszty produkcji wyrobów.

W celu prostszego zapisu wzorów na zadane aspiracje został zdefiniowany dodatkowy wektor zmiennych decyzyjnych:

- *objectives[o]*, $o \in OBJECTIVES$ - zmienna agregująca wartości kilku innych zmiennych decyzyjnych. W ramach tej zmiennej zostały także zdefiniowane odpowiednie ograniczenia:

$$objectives[S1] = component_usage[S1]$$

$$objectives[S2] = component_usage[S2]$$

$$objectives[income] = income$$

$$objectives[emissions] = emissions$$

$$objectives[cost] = cost$$

W celu prostszego zapisu wzorów na zadane nieakceptowalne poziomy został zdefiniowany dodatkowy wektor zmiennych decyzyjnych:

- *hard_limits[o]*, $o \in OBJECTIVES$ - zmienna agregująca wartości kilku innych parametrów. W ramach tej zmiennej zostały także zdefiniowane odpowiednie ograniczenia:

$$hard_limits[S1] = COMPONENT_USAGE_HARD_LIMIT[S1];$$

$$hard_limits[S2] = COMPONENT_USAGE_HARD_LIMIT[S2];$$

$$hard_limits[income] = MIN_INCOME;$$

$$hard_limits[emissions] = MAX_EMISSIONS;$$

$$hard_limits[cost] = MAX_COST;$$

Ograniczenia

Ograniczenia wynikające z treści:

- Poszczególne składniki są wykorzystywane do produkcji różnych produktów w różnych proporcjach:

$$\forall c \in COMPONENTS :$$

$$component_usage[c] = \sum_{p \in PRODUCTS} PRODUCT_COMPONENTS[p, c] \cdot production[p]$$

- Na całkowity zysk składają się zarobki ze sprzedaży wyprodukowanych wyrobów pomniejszone o koszty produkcji:

$$income = \left(\sum_{p \in PRODUCTS} PRODUCT_INCOME[p] \cdot production[p] \right) - cost$$

- Całkowity emisje są rezultatem zanieczyszczeń wytworzonych podczas produkcji poszczególnych produktów:

$$emissions = \sum_{p \in PRODUCTS} EMITTED_POLLUTANTS[p] \cdot production[p]$$

- Całkowite koszty produkcji składają się z kosztów wytworzenia poszczególnych produktów:

$$cost = \sum_{p \in PRODUCTS} PRODUCTION_COST[p] \cdot production[p]$$

Ograniczenia wynikające z zadanych ograniczeń:

- Zadane są limity wykorzystania poszczególnych składników, których przekroczenie jest nieakceptowalne:

$$\forall c \in COMPONENTS : component_usage[c] \leq COMPONENT_USAGE_HARD_LIMIT[c]$$

- Narzucona jest minimalna produkcja poszczególnych produktów:

$$\forall p \in PRODUCTS : production[p] \geq MINIMAL_PRODUCTION[p]$$

- Oczekujemy minimalnych zysków na poziomie MIN_INCOME :

$$income \geq MIN_INCOME$$

- Można wyprodukować maksymalnie $MAX_EMISSIONS$ zanieczyszczeń:

$$emissions \leq MAX_EMISSIONS$$

- Koszty produkcji nie mogą przekroczyć MAX_COST :

$$cost \leq MAX_COST$$

Funkcja oceny

Funkcje oceny, które są optymalizowane będą zdefiniowane oddzielnie w zależności od rozwiązywanego podpunktu.

1. Sformułować i opisać wielokryterialny model planowania produkcji z wykorzystaniem metody punktu odniesienia.

Model bazuje na przygotowanym modelu podstawowym. W tym rozdziale zostaną zdefiniowane jedynie dodatkowe parametry, ograniczenia, i zmienne decyzyjne. Zostały one zdefiniowane, by wykorzystać metodę punktu odniesienia.

Zbiory

- $RANGE = \{utopia, nadir\}$ - zbiór pozwalający na ustalenie zakresu dla zmiennych celu.

Parametry

- $\beta = 10^{-3}$ - parametr pozwalający na ograniczenie wzrostu wartości funkcji oceny dla zmiennych decyzyjnych ponad zadany poziom aspiracji. Funkcja oceny dla parametrów, które ten poziom osiągnęły będzie rosła o β wolniej, niż dla tych zmiennych, które tego poziomu nie osiągnęły,
- $\varepsilon = 10^{-4}/5 = 2 \cdot 10^{-5}$ - parametr z wagą jaką będziemy przyjmować dla sumy zmiennych celu. Zapewnia on, że każde otrzymane rozwiązanie będzie efektywne,
- $OBJECTIVE_RANGE[o][r]$, $o \in OBJECTIVES$, $r \in RANGE$ - wyliczone na podstawie bazowego modelu dla każdej zmiennej celu wartości utopii i nadiru:

$OBJECTIVE_RANGE[o][r]$	utopia	nadir
S1	64	106
S2	48	55
income	208	134
emissions	22	28
cost	30	42

Zmienne decyzyjne

- $\lambda[o]$, $o \in OBJECTIVES$ - parametry normalizujące zakres zmienności kryteriów. Wyliczone na bazie wartości utopii i nadiru dla poszczególnych celów o ,
- $accomplishment[o]$, $o \in OBJECTIVES$ - wyznaczony poziom zadowolenia z osiągnięcia poszczególnych wartości zmiennych celu o ,
- $lower_bound$ - dolne ograniczenie wszystkich poziomów zadowolenia z osiągnięcia aspiracji.

Ograniczenia

- Wyliczamy parametr normalizujący λ na bazie wartości utopii i nadiru:

$$\lambda[o] = 1/(OBJECTIVE_RANGE[o][utopia] - OBJECTIVE_RANGE[o][nadir])$$

- Wprowadzamy zmienną $lower_bound$, która będzie mniejsza niż każde z poziomów zadowolenia:

$$\forall o \in OBJECTIVES : lower_bound \leq accomplishment[o]$$

- Poziom zadowolenia dla wartości przekraczających aspirację będzie pomniejszony o β :

$$\forall o \in OBJECTIVES : accomplishment[o] \leq \beta \cdot \lambda[o] \cdot (objectives[o] - ASPIRATIONS[o])$$

- Poziom zadowolenia będzie rósł liniowo zgodnie z wartościami celu, do osiągnięcia poziomu aspiracji:

$$\forall o \in OBJECTIVES : accomplishment[o] \leq \lambda[o] \cdot (objectives[o] - ASPIRATIONS[o])$$

Funkcja oceny

- W pierwszej kolejności maksymalizujemy najmniejszy poziom zadowolenia, a z mniejszą wagą maksymalizujemy całkowite zadowolenie:

$$\max(lower_bound + \varepsilon \cdot \sum_{o \in OBJECTIVES} accomplishment[o])$$

2. Sformułować i opisać wielokryterialny model optymalnego planowania produkcji z wykorzystaniem zbiorów rozmytych.

Model bazuje na przygotowanym modelu podstawowym. W tym rozdziale zostaną zdefiniowane jedynie dodatkowe parametry, ograniczenia, ograniczenia rozmyte, zmienne decyzyjne i cele rozmyte. Zostały one zdefiniowane, by wykorzystać metodę zbiorów rozmytych.

Zmienne decyzyjne

- $tolerance[o]$, $o \in OBJECTIVES$ - zmienna reprezentująca rozmycie ograniczeń (wartość stała). Zostało przyjęte, że dla zmiennych z górnym nieakceptowalnym ograniczeniem wartość jest dodatnia, a z dolnym ograniczeniem wartość ujemna.

Ograniczenia

- Przyjęty poziom tolerancji możemy osiągnąć poprzez odjęcie od ustalonych nieprzekraczalnych limitów naszych aspiracji:

$$\forall o \in OBJECTIVES : tolerance[o] = hard_limits[o] - ASPIRATIONS[o]$$

Ograniczenia rozmyte

- Nie powinniśmy wykorzystać więcej składnika $S1$ niż zadany poziom aspiracji z poziomem tolerancji równym $|tolerance[S1]|$:

$$component_usage[S1] \underset{\sim}{\leq} ASPIRATIONS[S1]$$

- Nie powinniśmy wykorzystać więcej składnika $S2$ niż zadany poziom aspiracji z poziomem tolerancji równym $|tolerance[S2]|$:

$$component_usage[S2] \underset{\sim}{\leq} ASPIRATIONS[S2]$$

Cele rozmyte

- Celujemy by zysk przekroczył poziom aspiracji z poziomem tolerancji równym $|tolerance[income]|$:

$$income \underset{\sim}{\leq} ASPIRATIONS[income]$$

- Celujemy by emisja zanieczyszczeń była mniejsza niż zadany poziom aspiracji z poziomem tolerancji równym $|tolerance[emissions]|$:

$$emissions \underset{\sim}{\leq} ASPIRATIONS[emissions]$$

- Celujemy by całkowite koszty były mniejsze niż zadany poziom aspiracji z poziomem tolerancji równym $|tolerance[cost]|$:

$$cost \underset{\sim}{\leq} ASPIRATIONS[cost]$$

3. Sformułować równoważne zadanie optymalizacji dla zadania 2 z wykorzystaniem zbiorów rozmytych adaptując podejście Zimmermana dla więcej niż jednego kryterium.

Model bazuje na przygotowanym modelu podstawowym. W tym rozdziale zostaną zdefiniowane jedynie dodatkowe parametry, ograniczenia, zmienne decyzyjne i funkcje oceny. Zostały one zdefiniowane, by wykorzystać metodę zbiorów rozmytych z podejściem Zimmermana dla więcej niż jednego kryterium.

Zmienne decyzyjne

- α - zmienna decyzyjna dla α -przekrojów,
- $tolerance[o], o \in OBJECTIVES$ - zmienna reprezentująca rozmycie ograniczeń (wartość stała). Zostało przyjęte, że dla zmiennych z górnym nieakceptowalnym ograniczeniem wartość jest dodatnia, a z dolnym ograniczeniem wartość ujemna.

Ograniczenia

- Zmienna α może przyjmować wartości z zakresu $[0; 1]$. Warto tutaj zwrócić uwagę, że przez narzucone górne ograniczenie na wartość α w efekcie możemy otrzymać rozwiązanie, które nie będzie najlepszym jeśli byśmy brali pod uwagę także inne kryteria:

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

- Przyjęty poziom tolerancji możemy osiągnąć poprzez odjęcie od ustalonych nieprzekraczalnych limitów naszych aspiracji:

$$\forall o \in OBJECTIVES : tolerance[o] = hard_limits[o] - ASPIRATIONS[o]$$

Definiujemy rozmyte ograniczenia:

- Ograniczenia dla celów, które maksymalizujemy (znak dla $tolerance[o]$ zależy od przyjętych założeń):

$$\forall o \in OBJECTIVES, tolerance[o] \leq 0 :$$

$$objectives[o] \geq ASPIRATIONS[o] + tolerance[o] \cdot (1 - \alpha)$$

- Ograniczenia dla celów, które minimalizujemy (znak dla $tolerance[o]$ zależy od przyjętych założeń):

$$\forall o \in OBJECTIVES, tolerance[o] \geq 0 :$$

$$objectives[o] \leq ASPIRATIONS[o] + tolerance[o] \cdot (1 - \alpha)$$

Przygotowany bazowy model

4. Zapisz zadanie/zadania sformułowane w punkcie 1 w postaci do rozwiązania z wykorzystaniem wybranego narzędzia implementacji (np. AMPL, AIMMS) i rozwiąż to zadanie/zadania. W przypadku niedopuszczalności zadania zaproponuj zmianę celów i/lub innych parametrów.

5. Zapisz zadania sformułowane w punkcie 3 w postaci do rozwiązania z wykorzystaniem wybranego narzędzia implementacji (np. AMPL, AIMMS) i rozwiąż te zadania. W przypadku niedopuszczalności zadania zaproponuj zmianę celów i/lub innych parametrów.

6. Porównaj rozwiązania zadań z poprzednich dwóch punktów.

7. Rozwiąż zadanie z punktu 2 za pomocą pakietu R – FuzzyLP. Należy w obliczeniach rozpatrywać niezależnie każde z kryteriów.

8. Zaproponuj i zastosuj graficzną formę analizy rozwiązań.

9. Opisz zalety i wady modelowania opisanego problemu z wykorzystaniem zbiorów rozmytych.

Zalety	Wady
TODO	TODO