Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka

Bartłomiej Krawczyk, 310774

Zadanie

Rozważamy następujące zagadnienie planowania produkcji: Przedsiębiorstwo wytwarza 4 produkty P_1, P_2, P_3, P_4 na następujących maszynach:

- 4 szlifierkach,
- 2 wiertarkach pionowych,
- 3 wiertarkach poziomych,
- 1 frezarce
- 1 tokarce.

Wymagane czasy produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki zostały przedstawione w poniższej tabeli:

proces	P1	P2	P3	P4
Szlifowanie	0.4	0.6	-	-
Wiercenie pionowe	0.2	0.1	-	0.6
Wiercenie poziome	0.1	-	0.7	-
Frezowanie	0.06	0.04	-	0.05
Toczenie	-	0.05	0.02	-

Dochody ze sprzedaży produktów (w zł/sztukę) modelują składowe wektora losowego $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)^T$. Wektor losowy R opisuje 4-wymiarowy rozkład t-Studenta z 4 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału $[5; 12]$. Parametry μ oraz Σ niezawężonego rozkładu t-Studenta są następujące:

$$\mu = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Istnieją ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu:

miesiąc	P1	P2	P3	P4
Styczeń	200	0	100	200
Luty	300	100	200	200
Marzec	0	300	100	200

Jeżeli w danym miesiącu jest sprzedawany produkt P_1 lub P_2, to musi być również sprzedawany produkt P_4 w liczbie sztuk nie mniejszej niż suma sprzedawanych produktów P_1 i P_2.

Istnieje możliwość składowania do 200 sztuk każdego produktu w danym czasie w cenie 1 zł/sztukę za miesiąc. Aktualnie firma nie posiada żadnych zapasów, ale jest pożądane mieć po 50 sztuk każdego produktu pod koniec marca.

Przedsiębiorstwo pracuje 6 dni w tygodniu w systemie dwóch zmian. Każda zmiana trwa 8 godzin. Można założyć, że każdy miesiąc składa się z 24 dni roboczych.

---

1. Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.

2. Jako rozszerzenie powyższego zaproponować dwukryterialny model zysku i ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku i odchyleniem przeciętnym jako miarą ryzyka. Dla decyzji $x \in Q$ odchylenie przeciętne jest definiowane jako $\delta(x) = \sum_{t=1}^{T} |\mu(x) - r_t(x)| p_t$, gdzie $\mu(x)$ oznacza wartość średnią, $r_t(x)$ realizację dla scenariusza t, p_t prawdopodobieństwo scenariusza t.

   - Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–zysk.
   - Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko–zysk?
   - Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

Jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku

Analityczne sformułowanie modelu

Model jednokryterialny ma za zadanie opisać proces produkcyjny przedsiębiorstwa. Pozwoli on na optymalizację zysków z produkcji, zarządzanie sprzedażą oraz efektywne magazynowanie produktów.

Dochody ze sprzedaży produktów modelują składowe wektora losowego R. W przypadku jednokryterialnego modelu wyboru w warunkach ryzyka bazującym na maksymalizacji wartości oczekiwanej zysku możemy przyjąć oczekiwane dochody ze sprzedaży poszczególnych produktów jako oczekiwane wartości wektora R.

Ze względu, że suma jest funkcją liniową, wartość oczekiwana sumy jest równa sumie wartości oczekiwanych. Pozwala to na wyliczenie całkowitego zysku jako sumę oczekiwanych wartości zysków ze sprzedaży produktów w czasie pomniejszoną o sumaryczne oczekiwane koszty magazynowania produktów.

Wartość oczekiwana zawężonego rozkładu t-Studenta wektora losowego R

Zmienna losowa R ma niestandardowy rozkład t-Studenta z 4 stopniami swobody zawężony do przedziału $[5; 12]$. Rozkład t-Studenta jest ciągły, więc wartość oczekiwana na przedziale domkniętym jest taka sama jak na przedziale otwartym. Wartości oczekiwane wektora R zostały policzone ze wzoru:

$$E(R) = \mu + \sigma \frac{\Gamma((v-1)/2)((v+a^2)^{-(v-1)/2} - (v+b^2)^{-(v-1)/2})v^{v/2}}{2(F_v(b) - F_v(a))\Gamma(v/2)\Gamma(1/2)} dla\ v > 1$$

gdzie:

- $\Gamma(.)$ - funkcja gamma Eulera,
- μ - wartość oczekiwana niezawężonego rozkładu t-Studenta:

$$\mu = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Σ - macierz kowariancji niezawężonego rozkładu t-Studenta:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\alpha = 5$ - lewy kraniec przedziału,
- $\beta = 12$ - prawy kraniec przedziału,
- R_i - rozkłady poszczególnych składowych wektora R:

$$R_1 \sim Tt_{(5;12)}(9, 16; 4)$$
$$R_2 \sim Tt_{(5;12)}(8, 9; 4)$$
$$R_3 \sim Tt_{(5;12)}(7, 4; 4)$$
$$R_4 \sim Tt_{(5;12)}(6, 1; 4)$$

- $a = \frac{\alpha-\mu}{\sigma},\ b = \frac{\beta-\mu}{\sigma}$

Wyliczona wartość oczekiwana rozkładu wartości po podstawieniu do wzoru:

$$E(R_1) = 8.6274568376001$$
$$E(R_2) = 8.304864144322744$$
$$E(R_3) = 7.605077266035032$$
$$E(R_4) = 6.421595377441505$$

Ostatecznie wychodzi, że oczekiwane dochody ze sprzedaży poszczególnych produktów wynoszą odpowiednio:

produkt	oczekiwany dochód ze sprzedaży
P1	8.6274568376001 zł/sztukę
P2	8.304864144322744 zł/sztukę
P3	7.605077266035032 zł/sztukę
P4	6.421595377441505 zł/sztukę

Specyfikacja problemu decyzyjnego

Przyjęta konwencja:

- UPPER_CASE - nazewnictwo zbiorów i stałych parametrów,
- snake_case - nazewnictwo zmiennych decyzyjnych,
- pojedyncze litery - nazewnictwo poszczególnych elementów należących do zbioru.

Dostępne zbiory

- $PRODUCTS = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ - zbiór produktów,
- $PROCESSES$ - zbiór procesów,

$$PROCESSES = \{szlifowanie, wiercenie\_pionowe, wiercenie\_poziome, frezowanie, toczenie\}$$

- $MONTHS = \{styczeń, luty, marzec\}$ - zbiór dostępnych miesięcy,
- $MONTH\_PREDECESSORS = \{(grudzień, styczeń), (styczeń, luty), (luty, marzec)\}$ - zbiór miesięcy oraz ich poprzedników.

Parametry

- $HOURS\_IN\_A\_SHIFT = 8$ - zmiany trwają po 8h,
- $NUMBER\_OF\_SHIFTS = 2$ - przedsiębiorstwo pracuje w systemie dwóch zmian,
- $WORKING\_DAYS\_IN\_A\_MONTH = 24$ - każdy miesiąc składa się z 24 dni roboczych,
- $WORKING\_HOURS\_IN\_A\_MONTH = 384$ - całkowita liczba przepracowanych godzin w miesiącu,

$$WORKING\_HOURS\_IN\_A\_MONTH =$$

$$HOURS\_IN\_A\_SHIFT \cdot NUMBER\_OF\_SHIFTS \cdot WORKING\_DAYS\_IN\_A\_MONTH$$

- $PRODUCT\_STORAGE\_LIMIT = 200$ - przedsiębiorstwo ma możliwość składowania do 200 sztuk każdego produktu,
- $MONTHLY\_PRODUCT\_STORAGE\_COST = 1$ - cena składowania produktu to 1 zł/sztukę,
- $PRODUCT\_MINIMAL\_LEFT\_OVER = 50$ - pożądany zapas każdego produktu pod koniec marca to 50 produktów,
- $PROCESS\_TOOLS[p]$ *dla* $p \in PROCESSES$ - liczba maszyn pozwalających na równoległe wytwarzanie w ramach danego procesu p:

$p \in PROCESSES$	$PROCESS\_TOOLS[p]$
szlifowanie	4
wiercenie_pionowe	2
wiercenie_poziome	3
frezowanie	1
toczenie	1

- $PRODUCTION\_TIME[i][p]$ dla $p \in PRODUCTS,\ i \in PROCESSES$ - wymagany czas produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki:

$PRODUCTION\_TIME[i][p]$	P1	P2	P3	P4
szlifowanie	0.4	0.6	-	-
wiercenie_pionowe	0.2	0.1	-	0.6
wiercenie_poziome	0.1	-	0.7	-
frezowanie	0.06	0.04	-	0.05
toczenie	-	0.05	0.02	-

- $EXPECTED\_INCOME\_PER\_PRODUCT[p]$ dla $p \in PRODUCTS$ - średni dochód ze sprzedaży produktów (w zł/sztukę):

$p \in PRODUCTS$	$EXPECTED\_INCOME\_PER\_PRODUCT[p]$
P1	$E(R_1)$
P2	$E(R_2)$
P3	$E(R_3)$
P4	$E(R_4)$

- $SELL\_LIMIT[m][p]$ dla $p \in PRODUCTS,\ m \in MONTHS$ - ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu:

$SELL\_LIMIT$	P1	P2	P3	P4
styczen	200	0	100	200
luty	300	100	200	200
marzec	0	300	100	200

Zmienne decyzyjne

- $production[p][m]$ dla $p \in PRODUCTS,\ m \in MONTHS$ - ilość danego produktu p wytworzona w ciągu miesiąca m,
- $sale[p][m]$ dla $p \in PRODUCTS,\ m \in MONTHS$ - oczekiwana ilość produktu p, która powinna zostać sprzedana w ciągu miesiąca m,
- $left\_over[p][m]$ dla $p \in PRODUCTS,\ m \in MONTHS \cup \{grudzień\}$ - ilość produktu p, która pozostanie w magazynie na koniec miesiąca m,
- $income$ - zmienna reprezentująca oczekiwany całkowity dochód. Dodanie tej zmiennej pozwala na uproszczenie funkcji oceny.

Ograniczenia

- Czas produkcji wszystkich przedmiotów w miesiącu nie może przekroczyć dostępności maszyn w miesiącu:

$$\forall m \in MONTHS,\ i \in PROCESSES :$$

$$\sum_{p \in PRODUCTS} (production[p][m] \cdot PRODUCTION\_TIME[i][p]) \leq$$

$$WORKING\_HOURS\_IN\_A\_MONTH \cdot PROCESS\_TOOLS[i]$$

- Pozostałości ze sprzedaży są różnicą sumy produktów przechowywanych z poprzedniego miesiąca, produktów wyprodukowanych oraz sprzedanych:

$$\forall (s, c) \in MONTH\_PREDECESSORS,\ p \in PRODUCTS :$$

$$left\_over[p][c] = production[p][c] + left\_over[p][s] - sale[p][c]$$

- Firma na początku stycznia nie posiada żadnych zapasów, więc pozostałości przedmiotów z grudnia są równe 0:

$$\forall p \in PRODUCTS: \; left\_over[p][grudzie\acute{n}] = 0$$

- Oczekiwanym dochodem całkowitym jest suma wartości oczekiwanych ze sprzedaży poszczególnych produktów w różnych miesiącach pomniejszonym o sumaryczne koszty magazynowania produktów w tym czasie:

$$income = \sum_{p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS}$$

$$(sale[p][m] \cdot EXPECTED\_INCOME\_PER\_PRODUCT[p] -$$

$$left\_over[p][m] \cdot MONTHLY\_PRODUCT\_STORAGE\_COST)$$

- Ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu nie mogą zostać przekroczone:

$$\forall p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS: \; sale[p][m] \leq SELL\_LIMIT[m][p]$$

- Produkt P_4 w danym miesiącu musi być sprzedawany w liczbie sztuk nie mniejszej niż suma sprzedawanych produktów P_1 i P_2:

$$\forall m \in MONTHS: \; sale[P_4][m] \geq sale[P_1][m] + sale[P_2][m]$$

- Istnieje możliwość składowania do $PRODUCT\_STORAGE\_LIMIT$ sztuk każdego produktu na koniec miesiąca:

$$\forall p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS: \; left\_over[p][m] \leq PRODUCT\_STORAGE\_LIMIT$$

- Pożądane jest, aby pod koniec marca firma posiadała po $PRODUCT\_MINIMAL\_LEFT\_OVER$ sztuk każdego produktu:

$$\forall p \in PRODUCTS: \; left\_over[p][marzec] \geq PRODUCT\_MINIMAL\_LEFT\_OVER$$

- Produkcja poszczególnych produktów w miesiącu nie może być negatywna:

$$\forall p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS: \; production[p][m] \geq 0$$

- Sprzedaż poszczególnych produktów w miesiącu nie może być negatywna:

$$\forall p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS: \; sale[p][m] \geq 0$$

- Pozostałości w magazynach na koniec miesiąca nie mogą być negatywne:

$$\forall p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS: \; left\_over[p][m] \geq 0$$

- Produkty są niepodzielne - produkcja, sprzedaż i pozostałości muszą być całkowitoliczbowe:

$$\forall p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS: \; production[p][m] \in \mathbb{N}$$

$$\forall p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS: \; sale[p][m] \in \mathbb{N}$$

$$\forall p \in PRODUCTS, \; m \in MONTHS: \; left\_over[p][m] \in \mathbb{N}$$

gdzie, $\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych.

Funkcja oceny

Firma chce osiągnąć największy oczekiwany zysk. Maksymalizujemy oczekiwany dochód z produkcji, zatem funkcją oceny jest:

$$max(income)$$

Sformułowanie modelu

Implementacja modelu jednokryterialnego została przygotowana z wykorzystaniem języka AMPL oraz biblioteki CPLEX.

Wszelkie ograniczenia, parametry, zmienne decyzyjne i funkcje oceny zostały zdefiniowane w ramach pliku *task.mod*:

```
set PRODUCTS;
set PROCESSES;
set MONTHS;
set MONTHS_WITH_DECEMBER;
set ALL_MONTHS;
set MONTH_PREDECESSORS within MONTHS_WITH_DECEMBER cross MONTHS;

param WORKING_HOURS_IN_A_MONTH;
param PRODUCT_STORAGE_LIMIT;
param MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST;
param PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER;

param PROCESS_TOOLS{p in PROCESSES};

param PRODUCTION_TIME{i in PROCESSES, p in PRODUCTS};

param EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT{p in PRODUCTS};

param SELL_LIMIT{m in MONTHS, p in PRODUCTS};

###########################################################################

# Produkcja nie może być negatywna:
var production{p in PRODUCTS, m in MONTHS} integer >= 0;

# Sprzedaż nie może być negatywna:
var sale{p in PRODUCTS, m in MONTHS} integer >= 0;

# Pozostałości w magazynach nie mogą być negatywne:
var left_over{p in PRODUCTS, m in ALL_MONTHS} integer >= 0;

var income;

###########################################################################

# Czas produkcji wszystkich przedmiotów w miesiącu nie może przekroczyć
# dostępności maszyn w miesiącu:
subject to production_time_constraint{m in MONTHS, i in PROCESSES}:
    sum{p in PRODUCTS}
        (production[p, m] * PRODUCTION_TIME[i, p])
        <= WORKING_HOURS_IN_A_MONTH * PROCESS_TOOLS[i];

# Pozostałości ze sprzedaży są różnicą sumy produktów przechowywanych
# z poprzedniego miesiąca i wyprodukowanych oraz sprzedanych:
subject to left_over_constraint{(s, c) in MONTH_PREDECESSORS, p in PRODUCTS}:
```

```
    left_over[p, c] = production[p, c] + left_over[p, s] - sale[p, c];

# Firma na początku stycznia nie posiada żadnych zapasów,
# więc pozostałości przedmiotów z grudnia są równe 0:
subject to december_left_over_constraint{p in PRODUCTS}:
    left_over[p, "grudzien"] = 0;

# Dochodem całkowitym jest różnica dochodu ze sprzedaży oraz kosztu
# magazynowania:
subject to income_constraint:
    income = sum{p in PRODUCTS, m in MONTHS} (
        sale[p, m] * EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT[p]
        - left_over[p, m] * MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST
    );

# Ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów
# w danym miesiącu nie mogą być przekroczone:
subject to sale_limit_constraint{p in PRODUCTS, m in MONTHS}:
    sale[p, m] <= SELL_LIMIT[m, p];

# Produkt P4 musi być sprzedawany w liczbie sztuk nie mniejszej
# niż suma sprzedawanych produktów P1 i P2:
subject to product_sell_limit_constraint{m in MONTHS}:
    sale["P4", m] >= sale["P1", m] + sale["P2", m];

# Istnieje możliwość składowania do PRODUCT_STORAGE_LIMIT
# sztuk każdego produktu:
subject to product_storage_limit_constraint{p in PRODUCTS, m in MONTHS}:
    left_over[p, m] <= PRODUCT_STORAGE_LIMIT;

# Pożądane jest, aby pod koniec marca firma posiadała
# po PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER sztuk każdego produktu pod koniec marca:
subject to product_minimal_left_over_constraint{p in PRODUCTS}:
    left_over[p, "marzec"] >= PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER;

##############################################################################

maximize max_income:
    income;
```

Dane z zadania zostały umieszczone w pliku *parameters.mod*:

```
data;

set PRODUCTS := P1 P2 P3 P4;
set PROCESSES := szlifowanie wiercenie_pionowe wiercenie_poziome frezowanie toczenie;
set MONTHS = styczen luty marzec;
set MONTHS_WITH_DECEMBER = grudzien styczen luty;
set ALL_MONTHS = grudzien styczen luty marzec;
set MONTH_PREDECESSORS := (grudzien, styczen) (styczen, luty) (luty, marzec);

param WORKING_HOURS_IN_A_MONTH := 384;
param PRODUCT_STORAGE_LIMIT := 200;
param MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST := 1;
param PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER := 50;

param PROCESS_TOOLS :=
```

```
    szlifowanie       4,
    wiercenie_pionowe 2,
    wiercenie_poziome 3,
    frezowanie        1,
    toczenie          1;

param PRODUCTION_TIME
    :                 P1   P2   P3   P4   :=
    szlifowanie       0.4  0.6  0    0
    wiercenie_pionowe 0.2  0.1  0    0.6
    wiercenie_poziome 0.1  0    0.7  0
    frezowanie        0.06 0.04 0    0.05
    toczenie          0    0.05 0.02 0    ;

param EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT :=
    P1 8.6274568376001   ,
    P2 8.304864144322744 ,
    P3 7.605077266035032 ,
    P4 6.421595377441505 ;

param SELL_LIMIT
    :        P1   P2   P3   P4  :=
    styczen  200  0    100  200
    luty     300  100  200  200
    marzec   0    300  100  200 ;

end;
```

Do uruchamiania modelu został przygotowany oddzielny plik *task.run*:

```
reset;

model task.mod;
data parameters.dat;

option solver cplex;
solve;

display production;
display sale;
display left_over;
display income;
```

Wartości oczekiwane rozkładu zostały wyliczone za pomocą skryptu bazującego na udostępnionym nam dokumencie *wo_tStudent.pdf*:

```
from math import gamma, sqrt
from scipy.stats import t
from typing import Callable

def calculate_expected_value_for_truncated_t_student_distribution(
    mu: float,
    sigma: float,
    v: float,
    alpha: float,
    beta: float
) -> float:
    f_v: Callable[[float], float] = lambda x: t(v).cdf(x)  # type: ignore
```

```python
    a = (alpha - mu) / sigma
    b = (beta - mu) / sigma
    exponent = -(v - 1) / 2
    return (
        mu + sigma * (
            gamma((v - 1) / 2)
            * ((v + a**2)**exponent - (v + b**2)**exponent)
            * (v**(v/2))
        ) / (
            2
            * (f_v(b) - f_v(a))  # type: ignore
            * gamma(v / 2)
            * gamma(1 / 2)
        )
    )

mu = [9, 8, 7, 6]

SIGMA = [
    [16, -2, -1, -3],
    [-2, 9, -4, -1],
    [-1, -4, 4, 1],
    [-3, -1, 1, 1],
]

LOWER = 0
UPPER = 1
BOUNDS = [5, 12]

DEGREES_OF_FREEDOM = 4

if __name__ == '__main__':
    for i, row in enumerate(SIGMA):
        sigma = sqrt(SIGMA[i][i])
        expected = calculate_expected_value_for_truncated_t_student_distribution(
            mu=mu[i],
            sigma=sigma,
            v=DEGREES_OF_FREEDOM,
            alpha=BOUNDS[LOWER],
            beta=BOUNDS[UPPER]
        )
        print(f"E(R_{i+1}) = {expected}")
```

Testy poprawności implementacji

W celu weryfikacji poprawności rozwiązania zostały zweryfikowane ograniczenia z zadania po podstawieniu wartości zmiennych decyzyjnych otrzymanych dla tego rozwiązania efektywnego.

1. Ilości produkcji nie przekraczają ograniczeń rynkowych.
2. Sprzedaż produktu P_4 jest większa niż suma produktów P_1 i P_2.
3. Składowanie przedmiotów w magazynie nie przekracza 200 przedmiotów.
4. Firma na koniec marca posiada w magazynie po 50 sztuk każdego z przedmiotów.
5. Czas produkcji przedmiotów nie przekracza dostępności maszyn w miesiącu.
6. Na początku stycznia (pod koniec grudnia) magazyny są puste.
7. W danym miesiącu sprzedaż oraz ilość towaru magazynowana na koniec miesiąca jest równa sumie produkcji i towarów magazynowanych.

Następnie, by dalej zweryfikować poprawność modelu został on uruchomiony na bazie różnych zmodyfikowanych danych np. testowano magazynowanie produktów - została obniżona ilość dostępnego czasu pracy na maszynach oraz został obniżony do zera limit sprzedaży produktów w styczniu. W rezultacie w styczniu wszystkie produkty wytworzone trafiły do magazynów w celu sprzedaży w kolejnym miesiącu.

Wyniki

Znalezione rozwiązanie efektywne prowadzi do oczekiwanego zysku równego 11806.90 zł.

Zmienne decyzyjne dla tego rozwiązania wynoszą odpowiednio:

- Produkcja:

production	P1	P2	P3	P4
styczen	200	0	100	200
luty	200	0	200	200
marzec	50	250	150	250

- Sprzedaż:

sale	P1	P2	P3	P4
styczen	200	0	100	200
luty	200	0	200	200
marzec	0	200	100	200

- Magazynowane produkty pod koniec miesiąca:

left_over	P1	P2	P3	P4
grudzien	0	0	0	0
styczen	0	0	0	0
luty	0	0	0	0
marzec	50	50	50	50

Można zauważyć, że dla tak zdefiniowanych danych nie opłaca się magazynowanie produktów między kolejnymi miesiącami. Magazynowanie na koniec marca wynika jedynie z konieczności spełnienia ograniczenia.

Dwukryterialny model zysku i ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku i odchyleniem przeciętnym jako miarą ryzyka

Analityczne sformułowanie modelu

Model dwukryterialny został utworzony na bazie modelu jednokryterialnego. Przy rozwiązywaniu kolejnych podpunktów zostały zastosowane dwa sposoby optymalizacji rozwiązania:

- maksymalizacja średniego zysku przy ustalonym maksymalnym poziomie ryzyka,
- minimalizacja ryzyka przy ustalonym minimalnym poziomie oczekiwanego zysku.

Zastosowane metody dla poszczególnych podpunktów są lepiej opisane w sekcji $Wyniki$.

Model dwukryterialny bazuje na dwóch kryteriach:

- oczekiwanej wartości dochodu - miara zysku,
- odchyleniu przeciętnym wartości oczekiwanej dla poszczególnych realizacji scenariuszy od wartości średniej - miara ryzyka.

Miarę ryzyka możemy wyliczyć ze wzoru:

$$\delta(x) = \sum_{t=1}^{T} |\mu(x) - r_t(x)| p_t$$

gdzie:

- $\mu(x)$ - wartość średnia,
- $r_t(x)$ - realizacja scenariusza t,
- p_t - prawdopodobieństwo scenariusza t.

W celu zamodelowania rozwiązania zostało wygenerowane 100 jednakowo prawdopodobnych scenariuszy z zadanego rozkładu zmiennej losowej R. Generacja jednakowo prawdopodobnych scenariuszy pozwala na zastosowanie zwykłej średniej zamiast średniej ważonej z ustalonymi prawdopodobieństwami każdego scenariusza.

Dodatkowo możemy zamodelować wartość bezwzględną jako sumę dodatniej i ujemnej odchyłki:

$$|x| = x^+ + x^-$$

gdzie:

- $x = x^+ - x^-$ - różnica odchyłek jest równa wartości tej liczby,
- $x^+ \geq 0$ - odchyłka dodatnia jest nieujemna,
- $x^- \geq 0$ - odchyłka ujemna jest nieujemna,
- jeśli odchyłka x^+ jest różna 0 to odchyłka x^- jest równa 0 i na odwrót, jeśli odchyłka x^- jest różna 0 to odchyłka x^+ jest równa 0 - możemy to zapewnić dodając pewną wagę dla poszczególnych odchyłek przy minimalizacji w funkcji oceny.

Zastosowanie obu tych sposobów pozwoli na uproszczenie wyliczania odchylenia przeciętnego.

Specyfikacja problemu decyzyjnego

Model dwukryterialny w większości bazuje na zbiorach, parametrach, zmiennych decyzyjnych i ograniczeniach zdefiniowanych dla modelu jednokryterialnego.

Konwencja zapisu matematycznego modelu jest tożsama z konwencją wykorzystaną przy modelu w zadaniu 1.

Zbiory

W modelu dwukryterialnym dochodzą dwa zbiory:

- $SCENARIOS = \{1, 2, ..., 100\}$ - zbiór liczb reprezentujących kolejne scenariusze,
- $DEVIATION\_MULTIPLIERS = \{1, -1\}$ - pomocniczy zbiór pozwalający na uproszczenie zapisu realizacji odchyłek.

Parametry

- $SCENARIOS\_NO = 100$ - liczba wszystkich testowanych scenariuszy,

Pozbywamy się wcześniej ustalonych parametrów $EXPECTED\_INCOME\_PER\_PRODUCT$ oraz wszystkich ograniczeń, w których te parametry były wykorzystane. Tym razem definiujemy zysk oddzielnie dla poszczególnych realizacji scenariuszy:

- $SCENARIOS\_INCOME\_PER\_PRODUCT[s][p]\ dla\ s \in SCENARIOS,\ p \in PRODUCTS$ - dochód ze sprzedaży produktu p przy realizacji scenariusza s. Wartości tego parametru zostały wygenerowane z obciętego rozkładu t-studenta.

Zmienne decyzyjne

Zmienna decyzyjna *income* została zastąpiona przez zysk wyliczany dla poszczególnych scenariuszy:

- $scenario\_income[s],\ s \in\ SCENARIOS$ - całkowity zysk osiągalny w przypadku danego scenariusza s,
- $deviation[s][d],\ s \in\ SCENARIOS,\ d \in\ DEVIATION\_MULTIPLIERS$ - macierz dodatnich i ujemnych odchyłek dochodów z poszczególnych scenariuszy s od średniej dochodów na bazie wszystkich scenariuszy. Wartości tych odchyłek są potrzebne przy wyliczaniu wartości bezwzględnej różnicy zysków przy realizacji scenariuszy i średnich zysków,
- mad_risk - (MAD - ang. Mean Absolute Deviation) miara ryzyka wyliczona na bazie przeciętnego odchylenia zysku ze scenariuszy i średniego zysku. Dzięki wprowadzeniu ryzyka jako zmiennej decyzyjnej upraszcza się zapis funkcji oceny.

Ograniczenia

- Dochodem dla danego scenariusza jest różnica dochodu ze sprzedaży oraz kosztu magazynowania produktów w tym czasie:
$$\forall s \in SCENARIOS : scenario\_income[s] =$$
$$\sum_{p \in PRODUCTS, m \in MONTHS} (sale[p][m] \cdot SCENARIOS\_INCOME\_PER\_PRODUCT[s][p] -$$
$$left\_over[p][m] \cdot MONTHLY\_PRODUCT\_STORAGE\_COST)$$

- W przypadku tego zadania oczekiwany zysk jest wyliczany jako średnia dochodów ze wszystkich scenariuszy. Scenariusze są jednakowo prawdopodobne, więc możemy zastosować zwykłą średnią:
$$average\_income = 1/SCENARIOS\_NO \cdot \sum_{s \in SCENARIOS} scenario\_income[s]$$

- Wyliczenie odchyłek zysków przy realizacji scenariusza od wartości średniej. Pozwoli to zamodelować wartość bezwzględną modelem liniowym. Korzystamy tutaj ze zdefiniowanego zbioru $DEVIATION\_MULTIPLIERS$, w którym zdefiniowane są odpowiednie mnożniki dla odchyłek:
$$\forall s \in SCENARIOS :$$
$$\sum d \in DEVIATION\_MULTIPLIERS\ deviation[s][d] \cdot d = average\_income - scenario\_income[s]$$

- Ustalenie przeciętnego odchylenia, jako średniej wartości bezwzględnej odchyleń zysków ze scenariuszy i średniego zysku. Wartość bezwzględną odchyleń jesteśmy wstanie wyliczyć sumując dodatnie i ujemne odchyłki dla poszczególnych scenariuszy. Całkowitą miarę ryzyka wyliczamy jako średnia tych wartości bezwzględnych odchylenia. Wszystkie scenariusze są jednakowo prawdopodobne, więc wzór zostaje uproszczony do:
$$mad\_risk = 1/SCENARIO\_NO \cdot \sum_{s \in SCENARIOS, d \in DEVIATION\_MULTIPLIERS} deviation[s, d]$$

- Zgodnie z ustaleniami w $Analitycznym\ sformułowaniu\ modelu$ wymagamy, aby poszczególne odchyłki były nieujemne:
$$\forall s \in SCENARIOS, d \in DEVIATION\_MULTIPLIERS : deviation[s][d] \geq 0$$

Dodatkowo w zależności od podpunktu zostały zdefiniowane następujące ograniczenia:

- Został zdefiniowany warunek na zadany poziom minimalnych zysków $MIN\_AVERAGE\_INCOME$. Warunek ten został wykorzystany w ramach podpunktu:
  - *a*) w celu wizualizacji rozwiązań efektywnych na wykresie,
  - *b*), aby znaleźć rozwiązanie efektywne maksymalnego zysku. Symulujemy optymalizację leksykograficzną poprzez wywołanie dwóch optymalizacji. Najpierw maksymalizujemy zysk, a następnie dodajemy warunek na ustalony poziom maksymalnego zysku i zastępujemy funkcję maksymalizującą zysk przez minimalizację ryzyka,
  - *c*) w celu wizualizacji poszczególnych rozwiązań na wykresie.

$$average\_income \geq MIN\_AVERAGE\_INCOME$$

- Został zdefiniowany warunek na zadany poziom maksymalnego ryzyka MAX_MAD_RISK. Warunek ten został wykorzystany w ramach podpunktu:
  - *b*) w celu znalezienia rozwiązania efektywnego minimalnego ryzyka. Wykonujemy optymalizację leksykograficzną poprzez wywołanie dwóch niezależnych optymalizacji. Najpierw minimalizujemy ryzyko, a następnie dodajemy ten warunek na ustalony poziom minimalnego ryzyka i następnie ustalamy funkcję oceny na maksymalizację zysku.

$$mad\_risk \leq MAX\_MAD\_RISK$$

Funkcje oceny

Funkcje oceny podobnie jak powyższe ograniczenia zależą od rozwiązywanego podpunktu.

W podpunktach *a*) i *c*) stosujemy minimalizację ryzyka (przy zadanym poziomie zysku):

$$min(mad\_risk)$$

W podpunkcie *b*) w celu wyznaczenia efektywnego rozwiązania maksymalnego zysku stosujemy najpierw maksymalizację zysku:

$$max(average\_income)$$

a następnie poszukujemy rozwiązania minimalnego ryzyka (przy zadanym maksymalnym poziomie zysku):

$$min(mad\_risk)$$

W podpunkcie *b*) w celu wyznaczenia efektywnego rozwiązania minimalnego ryzyka stosujemy najpierw minimalizację ryzyka:

$$min(mad\_risk)$$

a następnie poszukujemy rozwiązania maksymalnego zysku (przy zadanym minimalnym poziomie ryzyka):

$$max(average\_income)$$

Sformułowanie modelu

Podobnie jak w przypadku modelu jednokryterialnego, model dwukryterialny został opracowany przy pomocy AMPL-a z wykorzystaniem biblioteki CPLEX.

Model bazowy został umieszczony w jednym pliku *task.mod*. Jest on modyfikacją pliku opracowanego na potrzeby modelu jednokryterialnego:

```
set PRODUCTS;
set PROCESSES;
set MONTHS;
set MONTHS_WITH_DECEMBER;
set ALL_MONTHS;
set MONTH_PREDECESSORS within MONTHS_WITH_DECEMBER cross MONTHS;
set SCENARIOS;
```

```
set DEVIATION_MULTIPLIERS;

param WORKING_HOURS_IN_A_MONTH;
param PRODUCT_STORAGE_LIMIT;
param MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST;
param PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER;
param SCENARIOS_NO;

param PROCESS_TOOLS{p in PROCESSES};

param PRODUCTION_TIME{i in PROCESSES, p in PRODUCTS};

param SCENARIOS_INCOME_PER_PRODUCT{s in SCENARIOS, p in PRODUCTS};

param SELL_LIMIT{m in MONTHS, p in PRODUCTS};

##############################################################################

# Produkcja nie może być negatywna:
var production{p in PRODUCTS, m in MONTHS} integer >= 0;

# Sprzedaż nie może być negatywna:
var sale{p in PRODUCTS, m in MONTHS} integer >= 0;

# Pozostałości w magazynach nie mogą być negatywne:
var left_over{p in PRODUCTS, m in ALL_MONTHS} integer >= 0;

# Dochód dla danego scenariusza
var scenario_income{s in SCENARIOS};

# Średni zysk na podstawie wszystkich scenariuszy
var average_income;

# Zmienne pomocnicze reprezentujące dodatnie
# i ujemne odchyłki zysku z danego scenariusza od zysku średniego
var deviation{s in SCENARIOS, d in DEVIATION_MULTIPLIERS} >= 0;

# MAD (Mean Absolute Deviation) - ryzyko wyliczone na bazie przeciętnego odchylenia
var mad_risk >= 0.0;

##############################################################################

# Czas produkcji wszystkich przedmiotów w miesiącu nie może przekroczyć
# dostępności maszyn w miesiącu:
subject to production_time_constraint{m in MONTHS, i in PROCESSES}:
    sum{p in PRODUCTS}
        (production[p, m] * PRODUCTION_TIME[i, p])
        <= WORKING_HOURS_IN_A_MONTH * PROCESS_TOOLS[i];

# Pozostałości ze sprzedaży są różnicą sumy produktów przechowywanych
# z poprzedniego miesiąca i wyprodukowanych oraz sprzedanych:
subject to left_over_constraint{(s, c) in MONTH_PREDECESSORS, p in PRODUCTS}:
    left_over[p, c] = production[p, c] + left_over[p, s] - sale[p, c];

# Firma na początku stycznia nie posiada żadnych zapasów,
# więc pozostałości przedmiotów z grudnia są równe 0:
```

```
subject to december_left_over_constraint{p in PRODUCTS}:
    left_over[p, "grudzien"] = 0;

# Ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów
# w danym miesiącu nie mogą być przekroczone:
subject to sale_limit_constraint{p in PRODUCTS, m in MONTHS}:
    sale[p, m] <= SELL_LIMIT[m, p];

# Produkt P4 musi być sprzedawany w liczbie sztuk nie mniejszej
# niż suma sprzedawanych produktów P1 i P2:
subject to product_sell_limit_constraint{m in MONTHS}:
    sale["P4", m] >= sale["P1", m] + sale["P2", m];

# Istnieje możliwość składowania do PRODUCT_STORAGE_LIMIT
# sztuk każdego produktu:
subject to product_storage_limit_constraint{p in PRODUCTS, m in MONTHS}:
    left_over[p, m] <= PRODUCT_STORAGE_LIMIT;

# Pożądane jest, aby pod koniec marca firma posiadała
# po PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER sztuk każdego produktu pod koniec marca:
subject to product_minimal_left_over_constraint{p in PRODUCTS}:
    left_over[p, "marzec"] >= PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER;

# Dochodem dla danego scenariusza jest różnica dochodu ze sprzedaży
# oraz kosztu magazynowania:
subject to scenario_income_constraint{s in SCENARIOS}:
    scenario_income[s] = sum{p in PRODUCTS, m in MONTHS} (
        sale[p, m] * SCENARIOS_INCOME_PER_PRODUCT[s, p]
        - left_over[p, m] * MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST
    );

# Średni zysk jest wyliczany jako średnia zarobków ze wszystkich scenariuszy:
subject to average_income_constraint:
    average_income = 1 / SCENARIOS_NO * sum{s in SCENARIOS} scenario_income[s];

# Wyliczenie pomocniczych odchyłek:
subject to income_deviation{s in SCENARIOS}:
    sum{d in DEVIATION_MULTIPLIERS} deviation[s, d] * d = average_income - scenario_income[s];

# Wyliczenie przeciętnego odchylenia:
subject to mean_absolute_deviation_constraint:
    mad_risk = 1 / SCENARIOS_NO * sum{s in SCENARIOS, d in DEVIATION_MULTIPLIERS} deviation[s, d];
```

Wygenerowane scenariusze oraz parametry zadane w zadaniu zostały umieszczone w pliku *parameters.dat*:

```
data;

set PRODUCTS := P1 P2 P3 P4;
set PROCESSES := szlifowanie wiercenie_pionowe wiercenie_poziome frezowanie toczenie;
set MONTHS = styczen luty marzec;
set MONTHS_WITH_DECEMBER = grudzien styczen luty;
set ALL_MONTHS = grudzien styczen luty marzec;
set MONTH_PREDECESSORS := (grudzien, styczen) (styczen, luty) (luty, marzec);
param SCENARIOS_NO = 100;
set SCENARIOS := 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31
    32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63
    64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94
```

```
    95 96 97 98 99 100;
set DEVIATION_MULTIPLIERS := 1 -1;

param WORKING_HOURS_IN_A_MONTH := 384;
param PRODUCT_STORAGE_LIMIT := 200;
param MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST := 1;
param PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER := 50;

param PROCESS_TOOLS :=
    szlifowanie       4,
    wiercenie_pionowe 2,
    wiercenie_poziome 3,
    frezowanie        1,
    toczenie          1;

param PRODUCTION_TIME
    :                 P1   P2   P3   P4   :=
    szlifowanie       0.4  0.6  0    0
    wiercenie_pionowe 0.2  0.1  0    0.6
    wiercenie_poziome 0.1  0    0.7  0
    frezowanie        0.06 0.04 0    0.05
    toczenie          0    0.05 0.02 0    ;

param SCENARIOS_INCOME_PER_PRODUCT
    :   P1                  P2                  P3                  P4                :=
    1   5.960250565536346   6.620516349521006   8.271945393291409   6.343364440770844
    2   7.6114623575112414  6.758277808334496   8.311528345980657   6.147864954838646
    3   8.572971451357985   8.051017232190578   6.736950247170757   5.776993586881051
    4   5.957796920725859   7.376190676205629   8.63694182990552    7.081990268922777
    5   9.868520110302276   6.408480689957209   8.655947547916115   6.48757587855462
    6   7.396557663448765   11.696937010888597  7.123126162484644   6.384441705749067
    7   10.392648885868665  6.363971145196862   6.816532088067845   5.487941907978033
    8   8.416073922838173   9.487658881379051   6.735253862490817   5.931433763751572
    9   10.391029529223333  7.317823789979513   8.158085225926204   5.757969214453118
    10  11.375142385953257  7.327642642827694   5.1764135128817905  6.411146164414913
    11  7.019974560311418   10.079300565222418  5.436385550589269   5.0136187701312345
    12  7.620598049928493   10.920189431843736  5.460606021649118   6.295523917060416
    13  6.417200993113861   5.06427032590458    9.00945850770707    6.319069595127209
    14  11.173752125819592  8.64499309478987    6.7398825844647385  5.654810697390717
    15  5.705630314525935   6.845247932937921   6.40269995819412    5.6212590883812075
    16  7.292761043388573   9.275048244067364   7.7700260637933685  6.346825671760367
    17  11.355824804065447  10.91165394319128   9.227894744749914   6.7314497060816345
    18  9.351361767934591   9.628895864830142   8.13539627484673    5.938598104656824
    19  10.681388705554102  11.52300920068299   5.351443891944426   5.742082929028576
    20  6.269571711084351   5.036470522212186   8.079062835290962   7.479411445731055
    21  5.623786352269283   7.7924827030997745  7.461828440160279   7.222980522400739
    22  9.322050687652705   11.355636656671384  6.45093456025773    5.558563167414042
    23  7.65895401097416    10.528251621985975  6.054074249326454   6.410648718656018
    24  8.352226209753724   6.69814880777855    9.272090540576489   6.359953055759471
    25  7.931617537276033   8.389878627165901   5.6795329981540945  5.600412180073086
    26  10.324851961698712  5.4353095254203545  7.246075923114471   5.791214732443766
    27  7.71540996728905    6.9122532429878305  6.95211900866604    6.724739672587517
    28  11.179943282788441  9.271924331523627   7.9005471349535625  5.945538689009041
    29  7.253712032635898   5.6179795918755175  5.547564687833653   6.274989586984117
    30  11.090792075535292  8.588621880200717   6.423718200767437   5.678578238523611
    31  9.012994885813054   9.914772042645751   6.4055297189374     5.762050426742214
```

32	8.042786303203583	9.372490510533215	11.496810238148456	6.472360406893424
33	10.342825874303031	7.099635748642302	7.645376116696015	5.9177071215424055
34	5.539155313851332	10.723426713649992	6.63284527477891	5.905015900207138
35	10.683458958840932	6.517375995609174	7.154278156033246	6.103917457970703
36	9.059730011630213	10.39023750749643	5.025985417305412	5.195369459982557
37	11.387123897653419	8.247477663680435	7.218706410893428	5.153347739041958
38	8.360900471954945	5.894222311403237	7.807525371620756	6.144026729103583
39	6.3505782261884125	5.07406577551896	10.303386742436526	6.94841683930481
40	8.916775531053233	8.458180695309446	10.38262373293692	5.101445697685534
41	7.789941440623069	10.4148013445872	7.475497288723355	6.491372088489662
42	9.542673768558634	10.125949526553757	7.29205900030939	5.279257770002051
43	6.715378751859211	8.674805856113219	10.30972918593491	6.323411761546579
44	6.676067749499435	8.702558654334	6.161159640573443	5.917083244039279
45	10.864600712362678	8.485661155390774	5.89177439459503	5.33942435270896
46	11.752632138122118	7.211027971925921	8.001956512833937	7.630824571695633
47	7.324533434784597	9.894669980650704	6.1675355829510305	5.669828715457208
48	5.691466265684207	8.138254824347873	7.3432196510521095	6.797183125457987
49	8.820821801861724	9.850415624696062	7.713299472685498	5.871136941709576
50	7.763609609457593	10.51347862783891	6.908112015201237	6.329431976354768
51	11.775438957638153	9.008115968511813	6.3144888556722005	5.523227635179108
52	5.597040255116843	10.07418935801677	6.045098915404082	6.6377742021984085
53	7.686475902693955	9.102804956622798	10.0437196273855	6.937720078725477
54	7.334380998338579	7.888991065421581	7.356486045271376	6.060358945542126
55	9.928706728947553	9.078931072183389	9.202031981444339	5.653030346711494
56	9.691667822826524	11.194596851507091	5.255796085007353	6.242384106235532
57	6.163326996006508	9.053756125594845	6.869159463571598	6.976815448237011
58	6.403671171132324	11.065176518868595	5.229482885240276	5.605524760112093
59	9.695591242072936	6.600247366057703	6.883924527376545	5.751188099476095
60	8.861854486083297	7.219601155800853	6.540701606348316	5.808077108823616
61	9.272397136570964	8.935260484184198	10.089343253759521	5.108891782581416
62	10.725918239065722	11.735684585898305	5.113611530740737	5.033117509430975
63	7.377511504329387	7.074027997963988	8.760717670101423	7.207705847128262
64	11.341273056271808	5.912661671652133	6.319772245601453	5.789961969990472
65	7.5108476720975625	10.632471954246693	5.219213915396457	6.2282282324613085
66	8.72525286747934	5.11227691074063	10.130432525521012	7.650525682171032
67	5.226983397835531	9.991425256135269	5.978320328514912	6.737188231835256
68	7.3201475520242605	11.291901406073311	7.456816218577332	5.444117372224595
69	8.87468749585732	5.271827461458423	9.301659647079868	7.499425420159329
70	9.05623710023421	7.267876537511236	11.693202621460479	7.188601688610902
71	10.529545577873312	7.149840910506118	5.937470972602723	5.556371698264654
72	7.52596392247929	8.191751963488805	5.843403239066313	6.011783463949572
73	8.370563216722635	5.662206136953003	9.268993022798512	5.961382292277595
74	10.600027196379898	5.989583492128589	9.549437816130844	6.55814671254703
75	6.352423023983956	6.7102229314426864	6.26198192873279	7.407272499256924
76	8.404161871661541	7.710057482372532	6.144342826192112	5.8843365019035065
77	11.923219237130802	10.843810999609111	6.826931478963841	5.538125691649853
78	7.0474657946948	9.13758623679804	5.657185595847437	6.057244815348783
79	9.538145827538976	8.434972855429058	7.013258355836791	6.3053661388973925
80	10.601919917398105	9.344064147425325	7.934088425645262	5.039697260607259
81	10.051846118420631	6.5890903929549705	5.8830011310052726	5.950980966384342
82	6.088014905975497	6.626896076774456	8.061380166566103	7.142116256051944
83	11.685138279349228	5.467406990117354	9.046727121290974	5.60915117524769
84	7.683216752004342	6.381394144917997	6.969684704016052	5.908010099873617
85	5.084353063064844	5.37266069379954	10.902818696267508	8.568158056933576
86	10.480530226350005	6.552491671584935	9.267356162552172	6.0630386499031195
87	8.818558070567338	7.910770842454347	8.12930956171789	5.983947686219014

```
    88  10.655054740876164      5.040437470127338       10.542625306449239      6.908934874324395
    89  5.216776906800764       9.025635998911344       7.115679418559571       6.6389121850623765
    90  9.75520678222459        9.34385957983616        6.693525090689017       5.511419864737105
    91  7.753901200661337       7.356930499012723       9.174340380969142       6.527298792218839
    92  9.22121377335797        5.244779783299842       8.061077648681831       5.796789642647019
    93  9.28732262723147        10.160643210659435      7.532731194840968       5.101861177733823
    94  5.078140581340137       9.401197796387242       6.110132870539984       6.394398075758065
    95  10.900641291881376      7.4948915781322585      7.915837830579795       5.986931867606632
    96  8.918446786309321       8.467085413661547       5.2558627720010085      5.9693076530877285
    97  10.224179644541625      8.737410169120047       5.5015957980651455      6.555403639369928
    98  10.403174983694901      8.286416545902087       6.160816748782014       5.372285197327394
    99  8.012204264290347       8.600150403912492       8.27619530245689        5.988203662148001
    100 10.387914217978414      10.08875869645766       8.639382773029997       5.659832293159043;

param SELL_LIMIT
    :        P1   P2   P3   P4  :=
    styczen  200  0    100  200
    luty     300  100  200  200
    marzec   0    300  100  200 ;

end;
```

Następnie zostały przygotowane pliki rozwiązujące poszczególne podpunkty z zadania 2a-start.run:

```
reset;

option solver cplex;
option cplex_options "time=180";

param MIN_AVERAGE_INCOME;

model task.mod;
data parameters.dat;

#############################################################################

# Warunek na minimalny zadany poziom zarobków:
subject to min_average_income_constraint:
    average_income >= MIN_AVERAGE_INCOME;

#############################################################################

# Minimalizujemy ryzyko przy zadanym poziomie zarobków:
minimize min_mad_risk:
    mad_risk;

#############################################################################

param MIN_DETERMINED_INCOME = -200;
param MAX_DETERMINED_INCOME = 11553;

param STEP := 100;
param SAMPLES = 119;

param value;

for {i in 0..(SAMPLES - 1)} {
```

```
    let value := MIN_DETERMINED_INCOME + i * STEP;
    let MIN_AVERAGE_INCOME := if value > MAX_DETERMINED_INCOME then MAX_DETERMINED_INCOME else value;
    solve;
    display MIN_AVERAGE_INCOME;
    display average_income;
    display mad_risk;
}
```

W ramach podpunktu *b*) zostały przygotowane dwa pliki 2b-max-income.run:

```
reset;

option solver cplex;
option cplex_options "time=180";

model task.mod;
data parameters.dat;

############################################################################

maximize max_income_constraint:
    average_income;

############################################################################

solve;

display average_income;
display mad_risk;

############################################################################

purge max_income_constraint;

############################################################################

param MIN_AVERAGE_INCOME;

############################################################################

# Warunek na minimalny zadany poziom zarobków:
subject to min_average_income_constraint:
    average_income >= MIN_AVERAGE_INCOME;

############################################################################

minimize min_mad_risk:
    mad_risk;

############################################################################

let MIN_AVERAGE_INCOME := average_income;

solve;

display average_income;
display mad_risk;
```

oraz plik 2b-min-risk.run:

```
reset;

option solver cplex;
option cplex_options "time=180";

model task.mod;
data parameters.dat;


############################################################################

minimize min_mad_risk:
    mad_risk;

############################################################################

solve;

display average_income;
display mad_risk;

############################################################################

purge min_mad_risk;

############################################################################

param MAX_MAD_RISK;

############################################################################

# Warunek na maksymalny zadany poziom ryzyka:
subject to max_mad_risk_constraint:
    mad_risk <= MAX_MAD_RISK;

############################################################################

maximize max_income_constraint:
    average_income;

############################################################################

let MAX_MAD_RISK := mad_risk;

solve;

display average_income;
display mad_risk;
```

W ramach podpunktu *c*) został zdefiniowany plik 2c-paramters.dat zawierający wybrane ograniczenia dla 3 rozwiązań:

```
data;

set SOLUTIONS := S1 S2 S3;

param MIN_INCOME_TARGETS :=
```

```
    S1 5000,
    S2 11450,
    S3 11550;
end;
```

oraz plik startowy 2c-comparison.run:

```
reset;

option solver cplex;
option cplex_options "time=180";

param MIN_AVERAGE_INCOME;

model task.mod;
data parameters.dat;

##############################################################################

# Warunek na minimalny zadany poziom zarobków:
subject to min_average_income_constraint:
    average_income >= MIN_AVERAGE_INCOME;

##############################################################################

# Minimalizujemy ryzyko przy zadanym poziomie zarobków:
minimize min_mad_risk:
    mad_risk;

##############################################################################

set SOLUTIONS;
param MIN_INCOME_TARGETS{s in SOLUTIONS};

data 2c-parameters.dat;

for {s in SOLUTIONS} {
    let MIN_AVERAGE_INCOME := MIN_INCOME_TARGETS[s];
    solve;
    display MIN_AVERAGE_INCOME;
    display average_income;
    display mad_risk;
    for {i in SCENARIOS} {
        printf "%f, ", scenario_income[i];
    }
    printf "\n";
}
```

Scenariusze były generowane na bazie kodu opracowanego w ramach repozytorium Sampling from Truncated Multivariate Normal and t Distributions under linear inequality constraints. Kod jest dostępny w repozytorium: https://github.com/ralphma1203/trun_mvnt

Kod generujący 100 scenariuszy wylosowanych z obciętego rozkładu t-Studenta:

```
from trun_mvnt import rtmvt

import numpy as np

n = 100
```

```python
Mean = np.array([9, 8, 7, 6])
Sigma = np.array([
    [16, -2, -1, -3],
    [-2, 9, -4, -1],
    [-1, -4, 4, 1],
    [-3, -1, 1, 1]
])
df = 4
D = np.diag(np.ones(4))
lower = np.array([5, 5, 5, 5])
upper = np.array([12, 12, 12, 12])

random_sample = rtmvt(  # type: ignore
    n=n,
    Mean=Mean,
    Sigma=Sigma,
    nu=df,
    D=D,
    lower=lower,
    upper=upper
)

print("""param SCENARIOS_INCOME_PER_PRODUCT
    :   P1                       P2                       P3                       P4              :=""")
for y, row in enumerate(random_sample, start=1):
    print(f"    {y:<4}", end='\t')
    for element in row:
        print(f"{element:<24}", end='\t')
    print()
```

Testy poprawności implementacji

Na starcie została zweryfikowana poprawność generacji scenariuszy z zadanego rozkładu. W ramach poprzedniego zadania zostały wyliczone wartości oczekiwane:

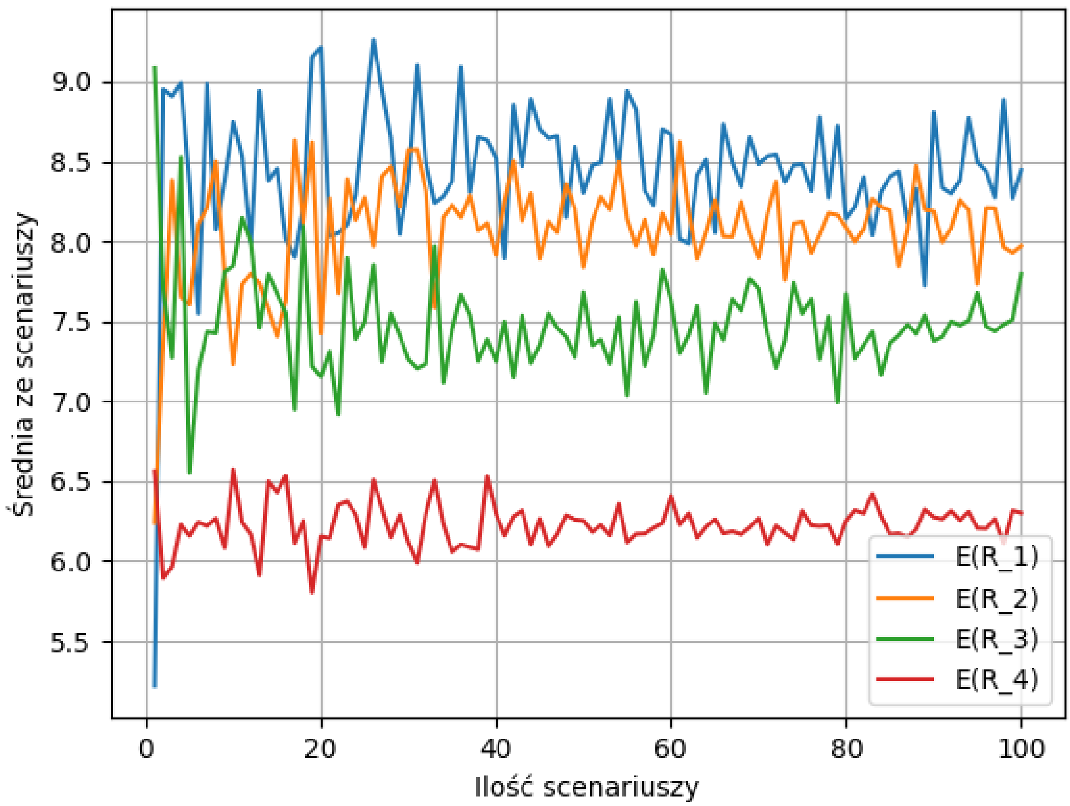
$$E(R_1) = 8.6274568376001$$

$$E(R_2) = 8.304864144322744$$

$$E(R_3) = 7.605077266035032$$

$$E(R_4) = 6.421595377441505$$

W celu weryfikacji, czy wyliczone wartości oczekiwane są zbieżne z wyznaczonymi wartościami oczekiwanymi na bazie wylosowanych próbek, został przygotowany wykres. Na wykresie zostały wyznaczone wyliczone średnie z próbek o zadanej wielkości:



Rysunek 1: Wykres średnich wartości próbek wylosowanych z zadanego rozkładu

Jak można zauważyć wartości na wykresie zbiegają do wartości wyliczonych ze wzoru.

Wyniki

Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–zysk.

W celu wyznaczenia możliwych rozwiązań efektywnych dwukryterialnego zadania w przestrzeni ryzyko-zysk podzielono zadanie na kilka mniejszych zadań optymalizacyjnych.

Chcąc zwizualizować rozwiązania poszczególnych zadań na wykresie został zdefiniowany nowy parametr $MIN\_AVERAGE\_INCOME$ oraz zostało dodane dodatkowe ograniczenie na średni poziom zysku:

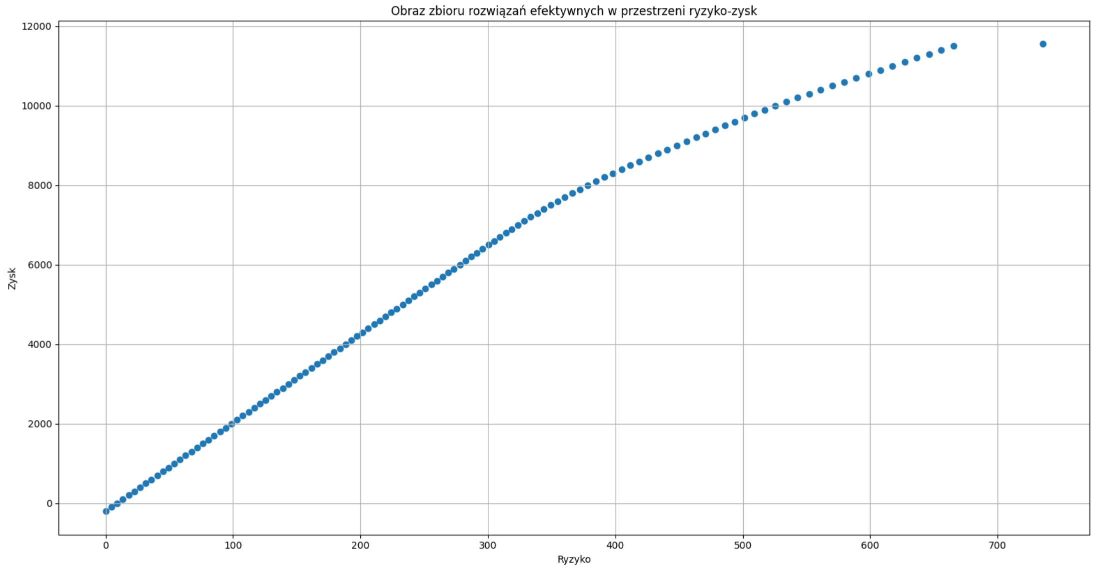
$$average\_income \geq MIN\_AVERAGE\_INCOME$$

Iteracja po równo odległych osiągalnych poziomach zysku z zakresu [-200; 11553] pozwala zwizualizować te rozwiązania efektywne w przestrzeni.

Dla tak zdefiniowanych poszczególnych zadań została ustalona funkcja oceny na minimalizację miary ryzyka:

$$min(mad\_risk)$$

Na wykresie zostały przedstawione 119 rozwiązania efektywne zadania:



Rysunek 2: Obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–zysk

---

Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko–zysk?

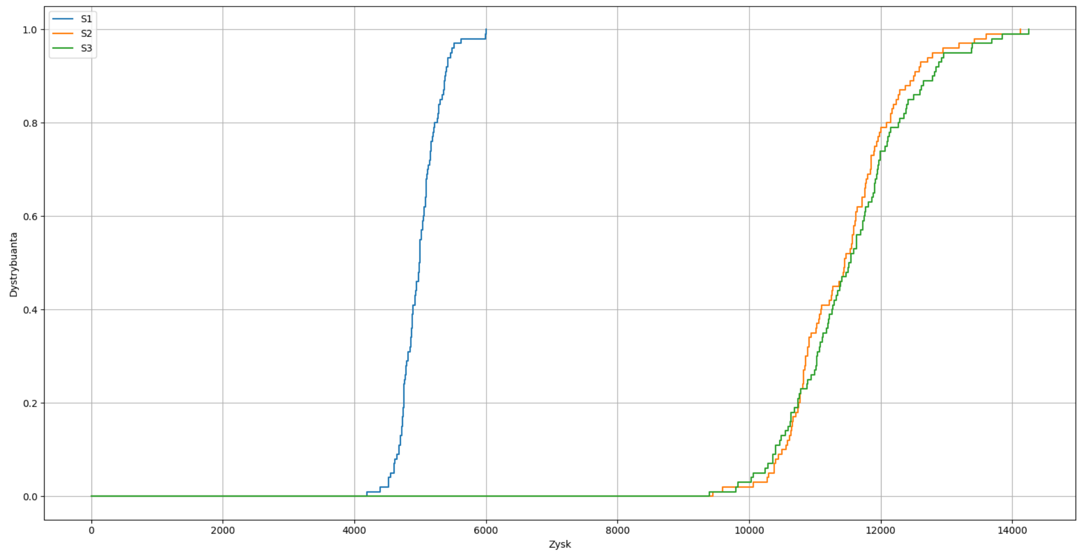
typ \ wartość	zysk	ryzyko
minimalne ryzyko	-200	0
maksymalny zysk	11553	735.498

Rozwiązania te zostały osiągnięte poprzez ustalenie funkcji celu odpowiednio na minimalizację ryzyka w pierwszym przypadku i maksymalizację zysku w drugim przypadku. Następnie, aby zapobiec wyborze nie efektywnego rozwiązania ustalono poziom ryzyka (w pierwszym przypadku) i zysku (w drugim przypadku) na stały poziom ustalony w poprzednim kroku i uruchomiono ponownie optymalizację. Tym razem w pierwszym przypadku maksymalizując zysk przy stałym ryzyku i w drugim przypadku minimalizując ryzyko przy stałym zysku.

Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

Zostały wybrane trzy zadane poziomy zysku, dla których następnie były wyliczone rozwiązania efektywne. Wyliczono wartości oczekiwanego zysku oraz miary ryzyka, a rozkład zysku w zależności od scenariusza został przedstawiony na Rysunku 2.

nazwa	zadany poziom zysku (w zł)	oczekiwany zysk (w zł)	wyliczona miara ryzyka (w zł)
S1	5000	5000.13	233.011
S2	11450	11452.1	660.965
S3	11550	11550	728.842



Rysunek 3: Dystrybuanta dla trzech rozwiązań efektywnych

Rozwiązanie $S1$ jest zdominowane przez rozwiązania $S2$ i $S3$ w sensie FSD.

W przypadku rozwiązań $S2$ i $S3$ dystrybuanty się przecinają, oznacza to że nie występuje między nimi dominacja w sensie FSD.

W ogólnym przypadku dla dwóch rozwiązań efektywnych o dużej różnicy w oczekiwanym zysku rozwiązanie o wyższej średniej zysku dominuje w sensie FSD rozwiązanie o niższym oczekiwanym zysku. Dla rozwiązań efektywnych nieznacznie różniących się oczekiwanymi zyskami dominacja może zajść, ale nie musi.

Dodatek: poprawa modelu dwukryterialnego

W celu poprawy rozwiązań efektywnych modelu dwukryterialnego została zdefiniowana nowa zmienna decyzyjna $safety\_indicator$ reprezentująca miarę bezpieczeństwa.

Korzystamy z wiedzy, że dolne odchylenie przeciętne jest równe połowie odchylenia przeciętnego. Możemy wyliczyć współczynnik ze wzoru:

$$\delta(y) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}|\mu(y) - y_i| = \frac{1}{m}\sum_{i:y_i<\mu(y)}[\mu(y) - y_i]$$

Wtedy miarą bezpieczeństwa będzie różnica średnich zysków i połowy przeciętnego odchylenia przemnożonej przez pewny stały współczynnik ($lambda = 1$):

$$safety\_indicator = average\_income - lambda \cdot mad\_risk/2$$

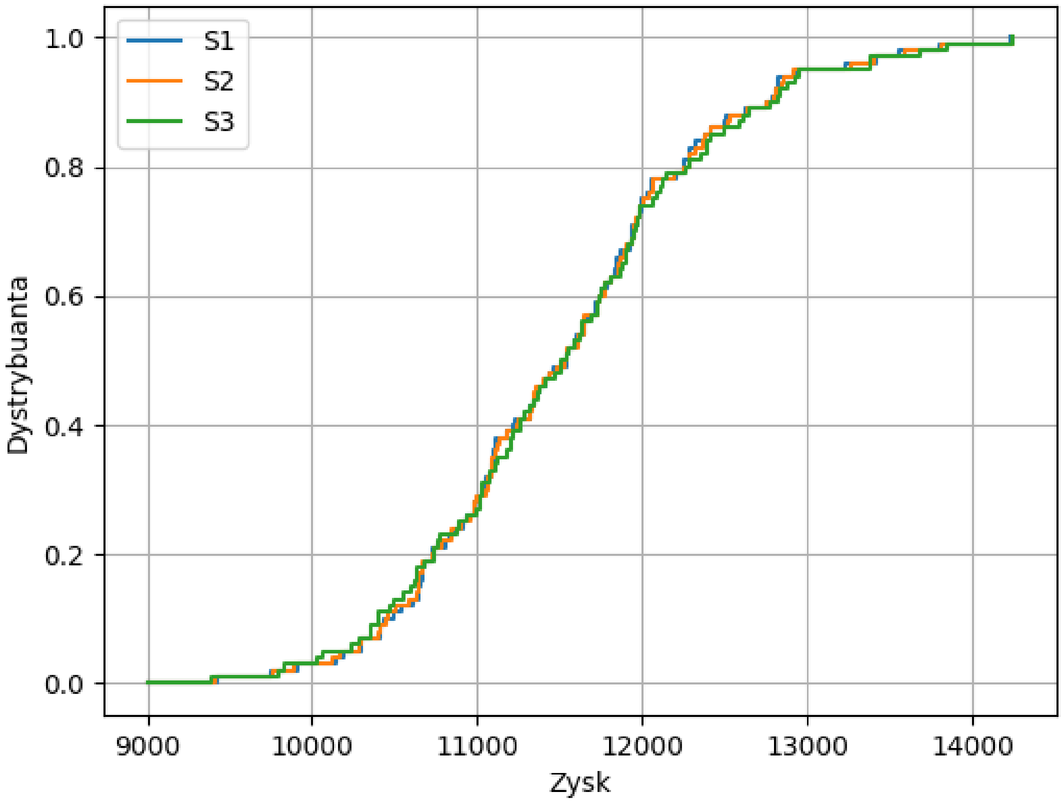
Do tak zdefiniowanego parametru dodajemy funkcję oceny maksymalizującą współczynnik bezpieczeństwa:

$$max(safety\_indicator)$$

Po tych modyfikacjach otrzymane rozwiązanie powinno być rozwiązaniem wyrównująco efektywnym lub może być wyrównująco zdominowane przez alternatywne rozwiązanie optymalne o tych samych wartościach $\mu(f(x))$ i $\delta(f(x))$.

W celu wizualizacji rozwiązania zostały wybrane 3 rozwiązania efektywne za pomocą wymuszenia zadanego poziomu zysku:

nazwa	zadany poziom zysku (w zł)	oczekiwany zysk (w zł)	wyliczona miara ryzyka (w zł)	wyliczona miara bezpieczeństwa (w zł)
S1	5000	11539.8	706.794	11186.4
S2	11542	11542.3	712.076	11186.3
S3	11550	11550	728.842	11185.6



Rysunek 4: Dystrybuanta dla trzech poprawionych rozwiązań efektywnych

Tym razem wszystkie dystrybuanty rozwiązań efektywnych się przecinają. Oznacza to, że żadne z tych rozwiązań nie dominuje w sensie FSD innego rozwiązania.

Implementacja

Dodatek bazuje na podstawowej implementacji modelu, a dodatkowo zostały zdefiniowane pliki z danymi 2-additional.dat:

```
data;

set SOLUTIONS := S1 S2 S3;

param MIN_INCOME_TARGETS :=
    S1 5000,
    S2 11542,
    S3 11550;
end;
```

oraz plik startowy 2-additional.run:

```
reset;

option solver cplex;
option cplex_options "time=180";

param MIN_AVERAGE_INCOME;

model task.mod;
data parameters.dat;

var safety_indicator;
param lambda = 1;

##############################################################################

# Warunek na minimalny zadany poziom zarobków:
subject to min_average_income_constraint:
    average_income >= MIN_AVERAGE_INCOME;

##############################################################################

# Warunek na współczynnik bezpieczeństwa:
subject to safety_indicator_constraint:
    safety_indicator = average_income - lambda * mad_risk / 2;

##############################################################################

# Minimalizujemy ryzyko przy zadanym poziomie zarobków:
maximize safety_indicator_maximization:
    safety_indicator;

##############################################################################

set SOLUTIONS;
param MIN_INCOME_TARGETS{s in SOLUTIONS};

data 2-additional.dat;

for {s in SOLUTIONS} {
    let MIN_AVERAGE_INCOME := MIN_INCOME_TARGETS[s];
    solve;
    display MIN_AVERAGE_INCOME;
    display average_income;
    display mad_risk;
    display safety_indicator;
    for {i in SCENARIOS} {
        printf "%f, ", scenario_income[i];
    }
    printf "\n";
}
```