

Wspomaganie decyzji w warunkach ryzyka

Bartłomiej Krawczyk, 310774

Zadanie

Rozważamy następujące zagadnienie planowania produkcji: Przedsiębiorstwo wytwarza 4 produkty P_1, P_2, P_3, P_4 na następujących maszynach:

- 4 szlifierkach,
- 2 wiertarkach pionowych,
- 3 wiertarkach poziomych,
- 1 frezarce
- 1 tokarce.

Wymagane czasy produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki zostały przedstawione w poniższej tabeli:

proces	P1	P2	P3	P4
Szlifowanie	0.4	0.6	-	-
Wiercenie pionowe	0.2	0.1	-	0.6
Wiercenie poziome	0.1	-	0.7	-
Frezowanie	0.06	0.04	-	0.05
Toczenie	-	0.05	0.02	-

Dochody ze sprzedaży produktów (w zł/sztukę) modelują składowe wektora losowego $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)^T$. Wektor losowy R opisuje 4-wymiarowy rozkład t-Studenta z 4 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału $[5; 12]$. Parametry μ oraz Σ niezawężonego rozkładu t-Studenta są następujące:

$$\mu = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Istnieją ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu:

miesiąc	P1	P2	P3	P4
Styczeń	200	0	100	200
Luty	300	100	200	200
Marzec	0	300	100	200

Jeżeli w danym miesiącu jest sprzedawany produkt P_1 lub P_2 , to musi być również sprzedawany produkt P_4 w liczbie sztuk nie mniejszej niż suma sprzedawanych produktów P_1 i P_2 .

Istnieje możliwość składowania do 200 sztuk każdego produktu w danym czasie w cenie 1 zł/sztukę za miesiąc. Aktualnie firma nie posiada żadnych zapasów, ale jest pożądane mieć po 50 sztuk każdego produktu pod koniec marca.

Przedsiębiorstwo pracuje 6 dni w tygodniu w systemie dwóch zmian. Każda zmiana trwa 8 godzin. Można założyć, że każdy miesiąc składa się z 24 dni roboczych.

-
1. Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.
 2. Jako rozszerzenie powyższego zaproponować dwukryterialny model zysku i ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku i odchyleniem przeciętnym jako miarą ryzyka. Dla decyzji $x \in Q$ odchylenie przeciętne jest definiowane jako $\delta(x) = \sum_{t=1}^T |\mu(x) - r_t(x)|p_t$, gdzie $\mu(x)$ oznacza wartość średnią, $r_t(x)$ realizację dla scenariusza t , p_t prawdopodobieństwo scenariusza t .
 - Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–zysk.
 - Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakim odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko–zysk?
 - Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

Jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku

Analityczne sformułowanie modelu

Model jednokryterialny ma za zadanie opisać proces produkcyjny przedsiębiorstwa. Pozwoli on na optymalizację zysków z produkcji, zarządzanie sprzedażą oraz efektywne magazynowanie produktów.

Dochody ze sprzedaży produktów modelują składowe wektora losowego R . W przypadku jednokryterialnego modelu wyboru w warunkach ryzyka bazującym na maksymalizacji wartości oczekiwanej zysku możemy przyjąć oczekiwane dochody ze sprzedaży poszczególnych produktów jako oczekiwane wartości wektora R .

Ze względu, że suma jest funkcją liniową, wartość oczekiwana sumy jest równa sumie wartości oczekiwanych. Pozwala to na wyliczenie całkowitego zysku jako sumę oczekiwanych wartości zysków ze sprzedaży produktów w czasie pomniejszoną o sumaryczne oczekiwane koszty magazynowania produktów.

Wartość oczekiwana zawężonego rozkładu t-Studenta wektora losowego R

Zmienna losowa R ma niestandardowy rozkład t-Studenta z 4 stopniami swobody zawężony do przedziału $[5; 12]$. Rozkład t-Studenta jest ciągły, więc wartość oczekiwana na przedziale domkniętym jest taka sama jak na przedziale otwartym. Wartości oczekiwane wektora R zostały policzone ze wzoru:

$$E(R) = \mu + \sigma \frac{\Gamma((v-1)/2)((v+a^2)^{-(v-1)/2} - (v+b^2)^{-(v-1)/2})v^{v/2}}{2(F_v(b) - F_v(a))\Gamma(v/2)\Gamma(1/2)} \text{ dla } v > 1$$

gdzie:

- $\Gamma(\cdot)$ - funkcja gamma Eulera,
- μ - wartość oczekiwana niezawężonego rozkładu t-Studenta:

$$\mu = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Σ - macierz kowariancji niezawężonego rozkładu t-Studenta:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 16 & -2 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\alpha = 5$ - lewy kraniec przedziału,
- $\beta = 12$ - prawy kraniec przedziału,
- R_i - rozkłady poszczególnych składowych wektora R :

$$R_1 \sim Tt_{(5;12)}(9, 16; 4)$$

$$R_2 \sim Tt_{(5;12)}(8, 9; 4)$$

$$R_3 \sim Tt_{(5;12)}(7, 4; 4)$$

$$R_4 \sim Tt_{(5;12)}(6, 1; 4)$$

- $a = \frac{\alpha - \mu}{\sigma}$, $b = \frac{\beta - \mu}{\sigma}$

Wyliczona wartość oczekiwana rozkładu wartości po podstawieniu do wzoru:

$$E(R_1) = 8.6274568376001$$

$$E(R_2) = 8.304864144322744$$

$$E(R_3) = 7.605077266035032$$

$$E(R_4) = 6.421595377441505$$

Ostatecznie wychodzi, że oczekiwane dochody ze sprzedaży poszczególnych produktów wynoszą odpowiednio:

produkt	oczekiwany dochód ze sprzedaży
P1	8.6274568376001 zł/sztukę
P2	8.304864144322744 zł/sztukę
P3	7.605077266035032 zł/sztukę
P4	6.421595377441505 zł/sztukę

Specyfikacja problemu decyzyjnego

Przyjęta konwencja:

- *UPPER_CASE* - nazewnictwo zbiorów i stałych parametrów,
- *snake_case* - nazewnictwo zmiennych decyzyjnych,
- pojedyncze litery - nazewnictwo poszczególnych elementów należących do zbioru.

Dostępne zbiory

- *PRODUCTS* = $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ - zbiór produktów,
- *PROCESSES* - zbiór procesów,

$$PROCESSES = \{\textit{szlifowanie}, \textit{wiercenie_pionowe}, \textit{wiercenie_poziome}, \textit{frezowanie}, \textit{toczenie}\}$$

- *MONTHS* = $\{\textit{styczeń}, \textit{luty}, \textit{marzec}\}$ - zbiór dostępnych miesięcy,
- *MONTH_PREDECESSORS* = $\{(\textit{grudzień}, \textit{styczeń}), (\textit{styczeń}, \textit{luty}), (\textit{luty}, \textit{marzec})\}$ - zbiór miesięcy oraz ich poprzedników.

Parametry

- *HOURS_IN_A_SHIFT* = 8 - zmiany trwają po 8h,
- *NUMBER_OF_SHIFTS* = 2 - przedsiębiorstwo pracuje w systemie dwóch zmian,
- *WORKING_DAYS_IN_A_MONTH* = 24 - każdy miesiąc składa się z 24 dni roboczych,
- *WORKING_HOURS_IN_A_MONTH* = 384 - całkowita liczba przepracowanych godzin w miesiącu,

$$WORKING_HOURS_IN_A_MONTH =$$

$$HOURS_IN_A_SHIFT * NUMBER_OF_SHIFTS * WORKING_DAYS_IN_A_MONTH$$

- *PRODUCT_STORAGE_LIMIT* = 200 - przedsiębiorstwo ma możliwość składowania do 200 sztuk każdego produktu,
- *MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST* = 1 - cena składowania produktu to 1 zł/sztukę,
- *PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER* = 50 - pożądany zapas każdego produktu pod koniec marca to 50 produktów,
- *PROCESS_TOOLS*[*p*] dla $p \in PROCESSES$ - liczba maszyn pozwalających na równoległe wytwarzanie w ramach danego procesu *p*:

$p \in PROCESSES$	<i>PROCESS_TOOLS</i> [<i>p</i>]
szlifowanie	4
wiercenie_pionowe	2
wiercenie_poziome	3
frezowanie	1
toczenie	1

- $PRODUCTION_TIME[i][p]$ dla $p \in PRODUCTS$, $i \in PROCESSES$ - wymagany czas produkcji 1 sztuki produktu (w godzinach) w danym procesie obróbki:

$PRODUCTION_TIME[i][p]$	P1	P2	P3	P4
szlifowanie	0.4	0.6	-	-
wiercenie_pionowe	0.2	0.1	-	0.6
wiercenie_poziome	0.1	-	0.7	-
frezowanie	0.06	0.04	-	0.05
toczenie	-	0.05	0.02	-

- $EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT[p]$ dla $p \in PRODUCTS$ - średni dochód ze sprzedaży produktów (w zł/sztukę):

$p \in PRODUCTS$	$EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT[p]$
P1	$E(R_1)$
P2	$E(R_2)$
P3	$E(R_3)$
P4	$E(R_4)$

- $SELL_LIMIT[m][p]$ dla $p \in PRODUCTS$, $m \in MONTHS$ - ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu:

$SELL_LIMIT$	P1	P2	P3	P4
styczen	200	0	100	200
luty	300	100	200	200
marzec	0	300	100	200

Zmienne decyzyjne

- $production[p][m]$ dla $p \in PRODUCTS$, $m \in MONTHS$ - ilość danego produktu p wytworzona w ciągu miesiąca m ,
- $sale[p][m]$ dla $p \in PRODUCTS$, $m \in MONTHS$ - oczekiwana ilość produktu p , która powinna zostać sprzedana w ciągu miesiąca m ,
- $left_over[p][m]$ dla $p \in PRODUCTS$, $m \in MONTHS \cup \{grudzień\}$ - ilość produktu p , która pozostanie w magazynie na koniec miesiąca m ,
- $income$ - zmienna reprezentująca oczekiwany całkowity dochód. Dodanie tej zmiennej pozwala na uproszczenie funkcji oceny.

Ograniczenia

- Czas produkcji wszystkich przedmiotów w miesiącu nie może przekroczyć dostępności maszyn w miesiącu:

$$\forall m \in MONTHS, i \in PROCESSES :$$

$$\sum_{p \in PRODUCTS} (production[p][m] * PRODUCTION_TIME[i][p]) \leq WORKING_HOURS_IN_A_MONTH * PROCESS_TOOLS[i]$$

- Pozostałości ze sprzedaży są różnicą sumy produktów przechowywanych z poprzedniego miesiąca, produktów wyprodukowanych oraz sprzedanych:

$$\forall (s, c) \in MONTH_PREDECESSORS, p \in PRODUCTS :$$

$$left_over[p][c] = production[p][c] + left_over[p][s] - sale[p][c]$$

- Firma na początku stycznia nie posiada żadnych zapasów, więc pozostałości przedmiotów z grudnia są równe 0:

$$\forall p \in PRODUCTS : left_over[p][grudzień] = 0$$

- Oczekiwanym dochodem całkowitym jest suma wartości oczekiwanych ze sprzedaży poszczególnych produktów w różnych miesiącach pomniejszonym o sumaryczne koszty magazynowania produktów w tym czasie:

$$income = \sum_{p \in PRODUCTS, m \in MONTHS} (sale[p][m] * EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT[p] - left_over[p][m] * MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST)$$

- Ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów w danym miesiącu nie mogą zostać przekroczone:

$$\forall p \in PRODUCTS, m \in MONTHS : sale[p][m] \leq SELL_LIMIT[m][p]$$

- Produkt P_4 w danym miesiącu musi być sprzedawany w liczbie sztuk nie mniejszej niż suma sprzedawanych produktów P_1 i P_2 :

$$\forall m \in MONTHS : sale[P_4][m] \geq sale[P_1][m] + sale[P_2][m]$$

- Istnieje możliwość składowania do $PRODUCT_STORAGE_LIMIT$ sztuk każdego produktu na koniec miesiąca:

$$\forall p \in PRODUCTS, m \in MONTHS : left_over[p][m] \leq PRODUCT_STORAGE_LIMIT$$

- Pożądane jest, aby pod koniec marca firma posiadała po $PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER$ sztuk każdego produktu:

$$\forall p \in PRODUCTS : left_over[p][marzec] \geq PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER$$

- Produkcja poszczególnych produktów w miesiącu nie może być negatywna:

$$\forall p \in PRODUCTS, m \in MONTHS : production[p][m] \geq 0$$

- Sprzedaż poszczególnych produktów w miesiącu nie może być negatywna:

$$\forall p \in PRODUCTS, m \in MONTHS : sale[p][m] \geq 0$$

- Pozostałości w magazynach na koniec miesiąca nie mogą być negatywne:

$$\forall p \in PRODUCTS, m \in MONTHS : left_over[p][m] \geq 0$$

- Produkty są niepodzielne - produkcja, sprzedaż i pozostałości muszą być całkowitoliczbowe:

$$\forall p \in PRODUCTS, m \in MONTHS : production[p][m] \in \mathbb{N}$$

$$\forall p \in PRODUCTS, m \in MONTHS : sale[p][m] \in \mathbb{N}$$

$$\forall p \in PRODUCTS, m \in MONTHS : left_over[p][m] \in \mathbb{N}$$

gdzie, \mathbb{N} - zbiór liczb naturalnych.

Funkcja oceny

Firma chce osiągnąć największy oczekiwany zysk. Maksymalizujemy oczekiwany dochód z produkcji, zatem funkcją oceny jest:

$$\max(\text{income})$$

Sformułowanie modelu

Implementacja modelu jednokryterialnego została przygotowana z wykorzystaniem języka AMPL oraz biblioteki CPLEX.

Wszelkie ograniczenia, parametry, zmienne decyzyjne i funkcje oceny zostały zdefiniowane w ramach pliku *task.mod*:

```
set PRODUCTS;
set PROCESSES;
set MONTHS;
set MONTHS_WITH_DECEMBER;
set ALL_MONTHS;
set MONTH_PREDECESSORS within MONTHS_WITH_DECEMBER cross MONTHS;

param WORKING_HOURS_IN_A_MONTH;
param PRODUCT_STORAGE_LIMIT;
param MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST;
param PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER;

param PROCESS_TOOLS{p in PROCESSES};

param PRODUCTION_TIME{i in PROCESSES, p in PRODUCTS};

param EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT{p in PRODUCTS};

param SELL_LIMIT{m in MONTHS, p in PRODUCTS};

#####

# Produkcja nie może być negatywna:
var production{p in PRODUCTS, m in MONTHS} integer >= 0;

# Sprzedaż nie może być negatywna:
var sale{p in PRODUCTS, m in MONTHS} integer >= 0;

# Pozostałości w magazynach nie mogą być negatywne:
var left_over{p in PRODUCTS, m in ALL_MONTHS} integer >= 0;

var income;

#####

# Czas produkcji wszystkich przedmiotów w miesiącu nie może przekroczyć
# dostępności maszyn w miesiącu:
subject to production_time_constraint{m in MONTHS, i in PROCESSES}:
    sum{p in PRODUCTS}
        (production[p, m] * PRODUCTION_TIME[i, p])
        <= WORKING_HOURS_IN_A_MONTH * PROCESS_TOOLS[i];

# Pozostałości ze sprzedaży są różnicą sumy produktów przechowywanych
# z poprzedniego miesiąca i wyprodukowanych oraz sprzedanych:
subject to left_over_constraint{(s, c) in MONTH_PREDECESSORS, p in PRODUCTS}:
```



```

left_over[p, c] = production[p, c] + left_over[p, s] - sale[p, c];

# Firma na początku stycznia nie posiada żadnych zapasów,
# więc pozostałości przedmiotów z grudnia są równe 0:
subject to december_left_over_constraint{p in PRODUCTS}:
    left_over[p, "grudzien"] = 0;

# Dochodem całkowitym jest różnica dochodu ze sprzedaży oraz kosztu
# magazynowania:
subject to income_constraint:
    income = sum{p in PRODUCTS, m in MONTHS} (
        sale[p, m] * EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT[p]
        - left_over[p, m] * MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST
    );

# Ograniczenia rynkowe na liczbę sprzedawanych produktów
# w danym miesiącu nie mogą być przekroczone:
subject to sale_limit_constraint{p in PRODUCTS, m in MONTHS}:
    sale[p, m] <= SELL_LIMIT[m, p];

# Produkt P4 musi być sprzedawany w liczbie sztuk nie mniejszej
# niż suma sprzedawanych produktów P1 i P2:
subject to product_sell_limit_constraint{m in MONTHS}:
    sale["P4", m] >= sale["P1", m] + sale["P2", m];

# Istnieje możliwość składowania do PRODUCT_STORAGE_LIMIT
# sztuk każdego produktu:
subject to product_storage_limit_constraint{p in PRODUCTS, m in MONTHS}:
    left_over[p, m] <= PRODUCT_STORAGE_LIMIT;

# Pożądane jest, aby pod koniec marca firma posiadała
# po PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER sztuk każdego produktu pod koniec marca:
subject to product_minimal_left_over_constraint{p in PRODUCTS}:
    left_over[p, "marzec"] >= PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER;

#####

maximize max_income:
    income;

Dane z zadania zostały umieszczone w pliku parameters.mod:

data;

set PRODUCTS := P1 P2 P3 P4;
set PROCESSES := szlifowanie wiercenie_pionowe wiercenie_poziome frezowanie toczenie;
set MONTHS = styczen luty marzec;
set MONTHS_WITH_DECEMBER = grudzien styczen luty;
set ALL_MONTHS = grudzien styczen luty marzec;
set MONTH_PREDECESSORS := (grudzien, styczen) (styczen, luty) (luty, marzec);

param WORKING_HOURS_IN_A_MONTH := 384;
param PRODUCT_STORAGE_LIMIT := 200;
param MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST := 1;
param PRODUCT_MINIMAL_LEFT_OVER := 50;

param PROCESS_TOOLS :=

```

```

    szlifowanie      4,
    wiercenie_pionowe 2,
    wiercenie_poziome 3,
    frezowanie       1,
    toczenie         1;

param PRODUCTION_TIME
:      P1   P2   P3   P4   :=
szlifowanie      0.4  0.6  0   0
wiercenie_pionowe 0.2  0.1  0   0.6
wiercenie_poziome 0.1  0   0.7  0
frezowanie       0.06 0.04 0   0.05
toczenie         0   0.05 0.02 0 ;

param EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT :=
    P1 8.6274568376001 ,
    P2 8.304864144322744 ,
    P3 7.605077266035032 ,
    P4 6.421595377441505 ;

param SELL_LIMIT
:      P1   P2   P3   P4   :=
styczen 200  0   100  200
luty    300  100  200  200
marzec  0   300  100  200 ;

end;

```

Do uruchamiania modelu został przygotowany oddzielny plik *task.run*:

```

reset;

model task.mod;
data parameters.dat;

option solver cplex;
solve;

display production;
display sale;
display left_over;
display income;

```

Wartości oczekiwane rozkładu zostały wyliczone za pomocą skryptu bazującego na udostępnionym nam dokumencie *wo_tStudent.pdf*:

```

from math import gamma, sqrt
from scipy.stats import t
from typing import Callable

def calculate_expected_value_for_truncated_t_student_distribution(
    mu: float,
    sigma: float,
    v: float,
    alpha: float,
    beta: float
) -> float:
    f_v: Callable[[float], float] = lambda x: t(v).cdf(x) # type: ignore

```

```

a = (alpha - mu) / sigma
b = (beta - mu) / sigma
exponent = -(v - 1) / 2
return (
    mu + sigma * (
        gamma((v - 1) / 2)
        * ((v + a**2)**exponent - (v + b**2)**exponent)
        * (v**(v/2))
    ) / (
        2
        * (f_v(b) - f_v(a)) # type: ignore
        * gamma(v / 2)
        * gamma(1 / 2)
    )
)

mu = [9, 8, 7, 6]

SIGMA = [
    [16, -2, -1, -3],
    [-2, 9, -4, -1],
    [-1, -4, 4, 1],
    [-3, -1, 1, 1],
]

LOWER = 0
UPPER = 1
BOUNDS = [5, 12]

DEGREES_OF_FREEDOM = 4

if __name__ == '__main__':
    for i, row in enumerate(SIGMA):
        sigma = sqrt(SIGMA[i][i])
        expected = calculate_expected_value_for_truncated_t_student_distribution(
            mu=mu[i],
            sigma=sigma,
            v=DEGREES_OF_FREEDOM,
            alpha=BOUNDS[LOWER],
            beta=BOUNDS[UPPER]
        )
        print(f"E(R_{i+1}) = {expected}")

```

Testy poprawności implementacji

W celu weryfikacji poprawności rozwiązania zostały zweryfikowane ograniczenia z zadania po podstawieniu wartości zmiennych decyzyjnych otrzymanych dla tego rozwiązania efektywnego.

1. Ilości produkcji nie przekraczają ograniczeń rynkowych.
2. Sprzedaż produktu P_4 jest większa niż suma produktów P_1 i P_2 .
3. Składowanie przedmiotów w magazynie nie przekracza 200 przedmiotów.
4. Firma na koniec marca posiada w magazynie po 50 sztuk każdego z przedmiotów.
5. Czas produkcji przedmiotów nie przekracza dostępności maszyn w miesiącu.
6. Na początku stycznia (pod koniec grudnia) magazyny są puste.
7. W danym miesiącu sprzedaż oraz ilość towaru magazynowana na koniec miesiąca jest równa sumie produkcji i towarów magazynowanych.

Następnie, by dalej zweryfikować poprawność modelu został on uruchomiony na bazie różnych zmodyfikowanych

danych np. testowano magazynowanie produktów - została obniżona ilość dostępnego czasu pracy na maszynach oraz został obniżony do zera limit sprzedaży produktów w styczniu. W rezultacie w styczniu wszystkie produkty wytworzone trafiły do magazynów w celu sprzedaży w kolejnym miesiącu.

Wyniki

Znalezione rozwiązanie efektywne prowadzi do oczekiwanego zysku równego 11806.90 zł.

Zmienne decyzyjne dla tego rozwiązania wynoszą odpowiednio:

- Produkcja:

production	P1	P2	P3	P4
styczen	200	0	100	200
luty	200	0	200	200
marzec	50	250	150	250

- Sprzedaż:

sale	P1	P2	P3	P4
styczen	200	0	100	200
luty	200	0	200	200
marzec	0	200	100	200

- Magazynowane produkty pod koniec miesiąca:

left_over	P1	P2	P3	P4
grudzien	0	0	0	0
styczen	0	0	0	0
luty	0	0	0	0
marzec	50	50	50	50

Można zauważyć, że dla tak zdefiniowanych danych nie opłaca się magazynowanie produktów między kolejnymi miesiącami. Magazynowanie na koniec marca wynika jedynie z konieczności spełnienia ograniczenia.

Dwukryterialny model zysku i ryzyka z wartością średnią jako miarą zysku i odchyleniem przeciętnym jako miarą ryzyka

Analityczne sformułowanie modelu

Model dwukryterialny został utworzony na bazie modelu jednokryterialnego. Przy rozwiązywaniu kolejnych podpunktów zostały zastosowane dwa sposoby optymalizacji rozwiązania:

- maksymalizacja średniego zysku przy ustalonym maksymalnym poziomie ryzyka,
- minimalizacja ryzyka przy ustalonym minimalnym poziomie oczekiwanego zysku.

Zastosowane metody dla poszczególnych podpunktów są lepiej opisane w sekcji *Wyniki*.

Model dwukryterialny bazuje na dwóch kryteriach:

- oczekiwanej wartości dochodu - miara zysku,
- odchyleniu przeciętnym wartości oczekiwanej dla poszczególnych realizacji scenariuszy od wartości średniej - miara ryzyka.

Miarę ryzyka możemy wyliczyć ze wzoru:

$$\delta(x) = \sum_{t=1}^T |\mu(x) - r_t(x)| p_t$$

gdzie:

- $\mu(x)$ - wartość średnia,
- $r_t(x)$ - realizacja scenariusza t ,
- p_t - prawdopodobieństwo scenariusza t .

W celu zamodelowania rozwiązania zostało wygenerowane 100 jednakowo prawdopodobnych scenariuszy z zadanego rozkładu zmiennej losowej R . Generacja jednakowo prawdopodobnych scenariuszy pozwala na zastosowanie zwykłej średniej zamiast średniej ważonej z ustalonymi prawdopodobieństwami każdego scenariusza.

Dodatkowo możemy zamodelować wartość bezwzględną jako sumę dodatniej i ujemnej odchyłki:

$$|x| = x^+ + x^-$$

gdzie:

- $x = x^+ - x^-$ - różnica odchyłek jest równa wartości tej liczby,
- $x^+ \geq 0$ - odchyłka dodatnia jest nieujemna,
- $x^- \geq 0$ - odchyłka ujemna jest nieujemna,
- jeśli odchyłka x^+ jest różna 0 to odchyłka x^- jest równa 0 i na odwrót, jeśli odchyłka x^- jest różna 0 to odchyłka x^+ jest równa 0 - możemy to zapewnić dodając pewną wagę dla poszczególnych odchyłek przy minimalizacji w funkcji oceny.

Zastosowanie obu tych sposobów pozwoli na uproszczenie wyliczania odchylenia przeciętnego.

Specyfikacja problemu decyzyjnego

Model dwukryterialny w większości bazuje na zbiorach, parametrach, zmiennych decyzyjnych i ograniczeniach zdefiniowanych dla modelu jednokryterialnego.

Konwencja zapisu matematycznego modelu jest tożsama z konwencją wykorzystaną przy modelu w zadaniu 1.

Zbiory

W modelu dwukryterialnym dochodzą dwa zbiory:

- $SCENARIOS = \{1, 2, \dots, 100\}$ - zbiór liczb reprezentujących kolejne scenariusze,
- $DEVIATION_MULTIPLIERS = \{1, -1\}$ - pomocniczy zbiór pozwalający na uproszczenie zapisu realizacji odchyłek.

Parametry

- $SCENARIOS_NO = 100$ - liczba wszystkich testowanych scenariuszy,

Pozbywamy się wcześniej ustalonych parametrów $EXPECTED_INCOME_PER_PRODUCT$ oraz wszystkich ograniczeń, w których te parametry były wykorzystane. Tym razem definiujemy zysk oddzielnie dla poszczególnych realizacji scenariuszy:

- $SCENARIOS_INCOME_PER_PRODUCT[s][p]$ dla $s \in SCENARIOS$, $p \in PRODUCTS$ - dochód ze sprzedaży produktu p przy realizacji scenariusza s . Wartości tego parametru zostały wygenerowane z obciętego rozkładu t-studenta.

Zmienne decyzyjne

Zmienna decyzyjna $income$ została zastąpiona przez zysk wyliczany dla poszczególnych scenariuszy:

- $scenario_income[s]$, $s \in SCENARIOS$ - całkowity zysk osiągalny w przypadku danego scenariusza s ,
- $deviation[s][d]$, $s \in SCENARIOS$, $d \in DEVIATION_MULTIPLIERS$ - macierz dodatnich i ujemnych odchyłek dochodów z poszczególnych scenariuszy s od średniej dochodów na bazie wszystkich scenariuszy. Wartości tych odchyłek są potrzebne przy wyliczaniu wartości bezwzględnej różnicy zysków przy realizacji scenariuszy i średnich zysków,
- mad_risk - (MAD - ang. Mean Absolute Deviation) miara ryzyka wyliczona na bazie przeciętnego odchylenia zysku ze scenariuszy i średniego zysku. Dzięki wprowadzeniu ryzyka jako zmiennej decyzyjnej upraszcza się zapis funkcji oceny.

Ograniczenia

- Dochodem dla danego scenariusza jest różnica dochodu ze sprzedaży oraz kosztu magazynowania produktów w tym czasie:

$$\forall s \in SCENARIOS : scenario_income[s] = \sum_{p \in PRODUCTS, m \in MONTHS} (sale[p][m] * SCENARIOS_INCOME_PER_PRODUCT[s][p] - left_over[p][m] * MONTHLY_PRODUCT_STORAGE_COST)$$

- W przypadku tego zadania oczekiwany zysk jest wyliczany jako średnia dochodów ze wszystkich scenariuszy. Scenariusze są jednakowo prawdopodobne, więc możemy zastosować zwykłą średnią:

$$average_income = 1/SCENARIOS_NO * \sum_{s \in SCENARIOS} scenario_income[s]$$

- Wyliczenie odchyłek zysków przy realizacji scenariusza od wartości średniej. Pozwoli to zamodelować wartość bezwzględną modelem liniowym. Korzystamy tutaj ze zdefiniowanego zbioru $DEVIATION_MULTIPLIERS$, w którym zdefiniowane są odpowiednie mnożniki dla odchyłek:

$$\forall s \in SCENARIOS :$$

$$\sum d \in DEVIATION_MULTIPLIERS deviation[s][d] * d = average_income - scenario_income[s]$$

- Ustalenie przeciętnego odchylenia, jako średniej wartości bezwzględnej odchyłek zysków ze scenariuszy i średniego zysku. Wartość bezwzględną odchyłek jesteśmy w stanie wyliczyć sumując dodatnie i ujemne odchyłki dla poszczególnych scenariuszy. Całkowitą miarę ryzyka wyliczamy jako średnia tych wartości bezwzględnych odchylenia. Wszystkie scenariusze są jednakowo prawdopodobne, więc wzór zostaje uproszczony do:

$$mad_risk = 1/SCENARIO_NO * \sum_{s \in SCENARIOS, d \in DEVIATION_MULTIPLIERS} deviation[s, d]$$

- Zgodnie z ustaleniami w *Analitycznym sformułowaniu modelu* wymagamy, aby poszczególne odchyłki były nieujemne:

$$\forall s \in SCENARIOS, d \in DEVIATION_MULTIPLIERS : deviation[s][d] \geq 0$$

Dodatkowo w zależności od podpunktu zostały zdefiniowane następujące ograniczenia:

- Został zdefiniowany warunek na zadany poziom minimalnych zysków *MIN_AVERAGE_INCOME*. Warunek ten został wykorzystany w ramach podpunktu:
 - a) w celu wizualizacji rozwiązań efektywnych na wykresie,
 - b), aby znaleźć rozwiązanie efektywne maksymalnego zysku. Symulujemy optymalizację leksykograficzną poprzez wywołanie dwóch optymalizacji. Najpierw maksymalizujemy zysk, a następnie dodajemy warunek na ustalony poziom maksymalnego zysku i zastępujemy funkcję maksymalizującą zysk przez minimalizację ryzyka,
 - c) w celu wizualizacji poszczególnych rozwiązań na wykresie.

$$average_income \geq MIN_AVERAGE_INCOME$$

- Został zdefiniowany warunek na zadany poziom maksymalnego ryzyka *MAX_MAD_RISK*. Warunek ten został wykorzystany w ramach podpunktu:
 - b) w celu znalezienia rozwiązania efektywnego minimalnego ryzyka. Wykonujemy optymalizację leksykograficzną poprzez wywołanie dwóch niezależnych optymalizacji. Najpierw minimalizujemy ryzyko, a następnie dodajemy ten warunek na ustalony poziom minimalnego ryzyka i następnie ustalamy funkcję oceny na maksymalizację zysku.

$$mad_risk \leq MAX_MAD_RISK$$

Funkcje oceny

Funkcje oceny podobnie jak powyższe ograniczenia zależą od rozwiązywanego podpunktu.

W podpunktach a) i c) stosujemy minimalizację ryzyka (przy zadanym poziomie zysku):

$$\min(mad_risk)$$

W podpunkcie b) w celu wyznaczenia efektywnego rozwiązania maksymalnego zysku stosujemy najpierw maksymalizację zysku:

$$\max(average_income)$$

a następnie poszukujemy rozwiązania minimalnego ryzyka (przy zadanym maksymalnym poziomie zysku):

$$\min(mad_risk)$$

W podpunkcie b) w celu wyznaczenia efektywnego rozwiązania minimalnego ryzyka stosujemy najpierw minimalizację ryzyka:

$$\min(mad_risk)$$

a następnie poszukujemy rozwiązania maksymalnego zysku (przy zadanym minimalnym poziomie ryzyka):

$$\max(average_income)$$

Sformułowanie modelu

Testy poprawności implementacji

Na starcie została zweryfikowana poprawność generacji scenariuszy z zadanego rozkładu. W ramach poprzedniego zadania zostały wyliczone wartości oczekiwane:

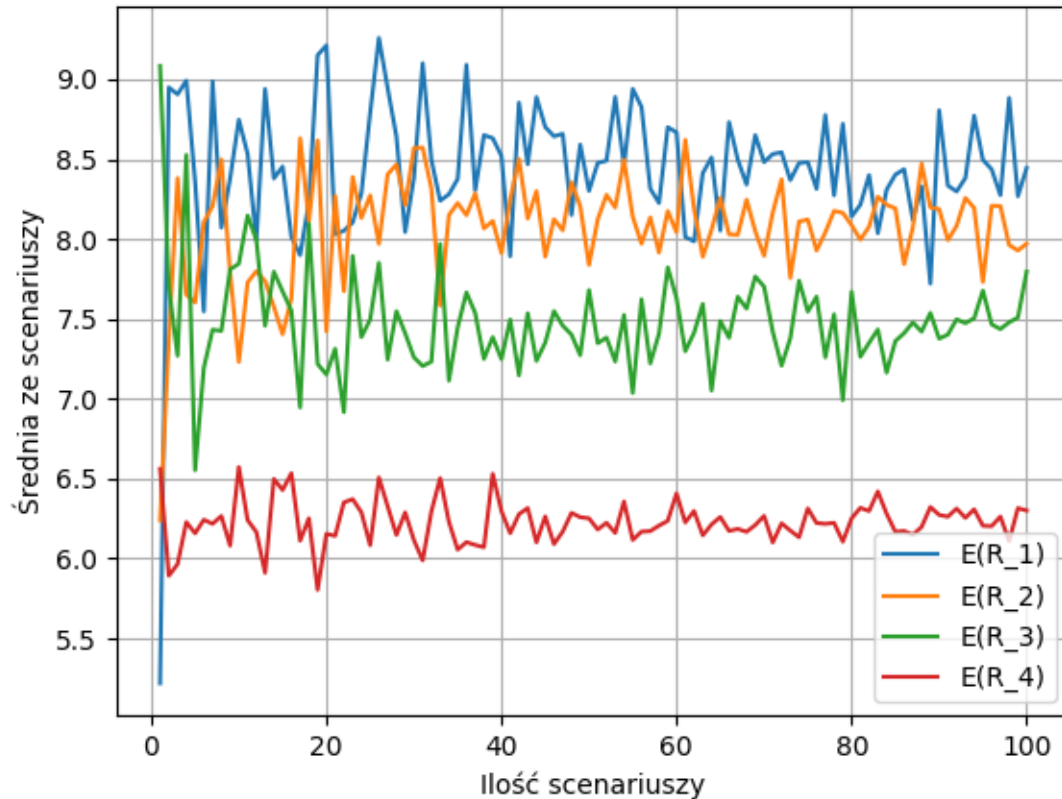
$$E(R_1) = 8.6274568376001$$

$$E(R_2) = 8.304864144322744$$

$$E(R_3) = 7.605077266035032$$

$$E(R_4) = 6.421595377441505$$

W celu weryfikacji, czy wyliczone wartości oczekiwane są zbliżone z wyznaczonymi wartościami oczekiwanymi na bazie wylosowanych próbek, został przygotowany wykres. Na wykresie zostały wyznaczone wyliczone średnie z próbek o zadanej wielkości:



Rysunek 1: Wykres

Jak można zauważyć wartości na wykresie zbiegają do wartości wyliczonych ze wzoru.

Wyniki

Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–zysk.

W celu wyznaczenia możliwych rozwiązań efektywnych dwukryterialnego zadania w przestrzeni ryzyko-zysk podzielono zadanie na kilka mniejszych zadań optymalizacyjnych.

Chcąc zwizualizować rozwiązania poszczególnych zadań na wykresie został zdefiniowany nowy parametr *MIN_AVERAGE_INCOME* oraz zostało dodane dodatkowe ograniczenie na średni poziom zysku:

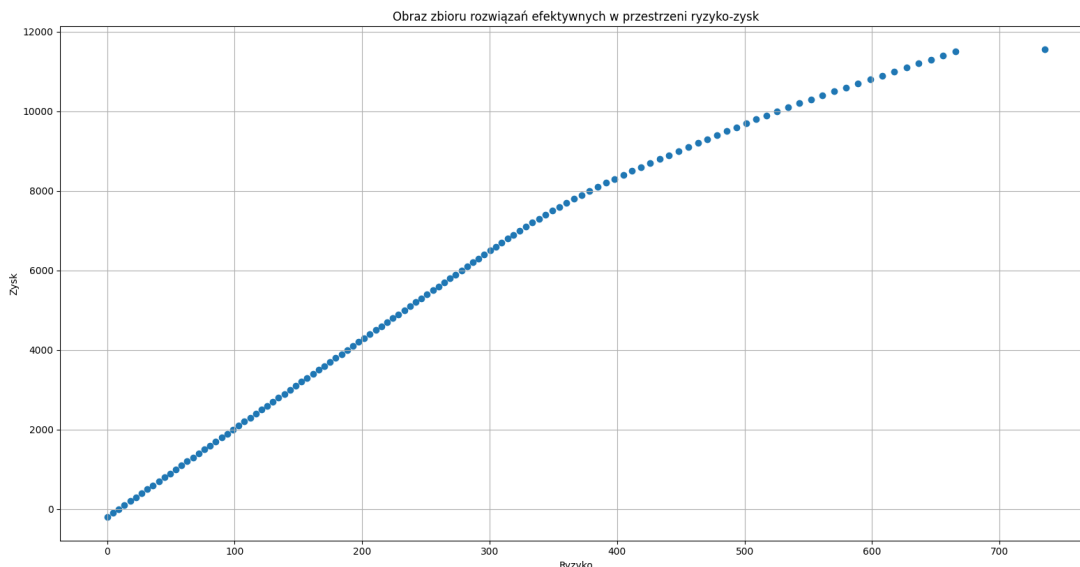
$$average_income \geq MIN_AVERAGE_INCOME$$

Iteracja po równo odległych osiągalnych poziomach zysku z zakresu [-200; 11553] pozwala zwizualizować te rozwiązania efektywne w przestrzeni.

Dla tak zdefiniowanych poszczególnych zadań została ustalona funkcja oceny na minimalizację miary ryzyka:

$$min(mad_risk)$$

Na wykresie zostały przedstawione 119 rozwiązań efektywne zadania:



Rysunek 2: Obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–zysk

Wskażać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakim odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko–zysk?

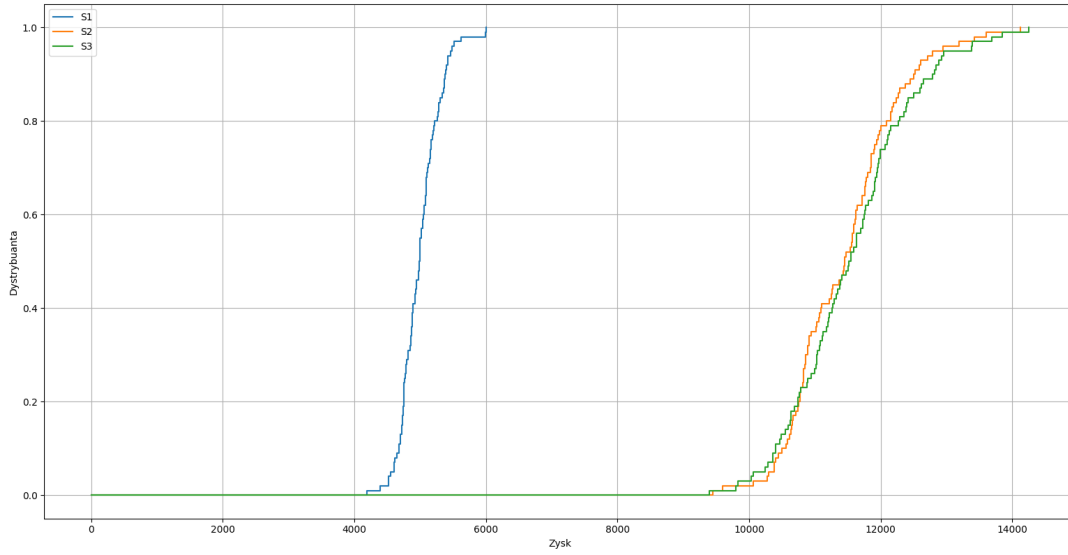
typ \ wartość	zysk	ryzyko
minimalne ryzyko	-200	0
maksymalny zysk	11553	735.498

Rozwiązania te zostały osiągnięte poprzez ustalenie funkcji celu odpowiednio na minimalizację ryzyka w pierwszym przypadku i maksymalizację zysku w drugim przypadku. Następnie, aby zapobiec wyborze nie efektywnego rozwiązania ustalono poziom ryzyka (w pierwszym przypadku) i zysku (w drugim przypadku) na stały poziom ustalony w poprzednim kroku i uruchomiono ponownie optymalizację. Tym razem w pierwszym przypadku maksymalizując zysk przy stałym ryzyku i w drugim przypadku minimalizując ryzyko przy stałym zysku.

Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.

Zostały wybrane trzy zadane poziomy zysku, dla których następnie były wyliczone rozwiązania efektywne. Wyliczono wartości oczekiwanego zysku oraz miary ryzyka, a rozkład zysku w zależności od scenariusza został przedstawiony na Rysunku 2.

nazwa	zadany poziom zysku (w zł)	oczekiwany zysk (w zł)	wyliczona miara ryzyka (w zł)
S1	5000	5000.13	233.011
S2	11450	11452.1	660.965
S3	11550	11550	728.842



Rysunek 3: Dystrybuanta dla trzech rozwiązań efektywnych

Rozwiązanie $S1$ jest zdominowane przez rozwiązania $S2$ i $S3$ w sensie FSD.

W przypadku rozwiązań $S2$ i $S3$ dystrybuanty się przecinają, oznacza to że nie występuje między nimi dominacja w sensie FSD.

W ogólnym przypadku dla dwóch rozwiązań efektywnych o dużej różnicy w oczekiwanym zysku rozwiązanie o wyższej średniej zysku dominuje w sensie FSD rozwiązanie o niższym oczekiwanym zysku. Dla rozwiązań efektywnych nieznacznie różniących się oczekiwanymi zyskami dominacja może zajść, ale nie musi.

Dodatek: poprawa modelu dwukryterialnego

W celu poprawy rozwiązań efektywnych modelu dwukryterialnego została zdefiniowana nowa zmienna decyzyjna *safety_indicator* reprezentująca miarę bezpieczeństwa.

Korzystamy z wiedzy, że dolne odchylenie przeciętne jest równe połowie odchylenia przeciętnego. Możemy wyliczyć współczynnik ze wzoru:

$$\delta(y) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m |\mu(y) - y_i| = \frac{1}{m} \sum_{i: y_i < \mu(y)} [\mu(y) - y_i]$$

Wtedy miarą bezpieczeństwa będzie różnica średnich zysków i połowy przeciętnego odchylenia przemnożonej przez pewny stały współczynnik ($\lambda = 1$):

$$safety_indicator = average_income - \lambda * mad_risk/2$$

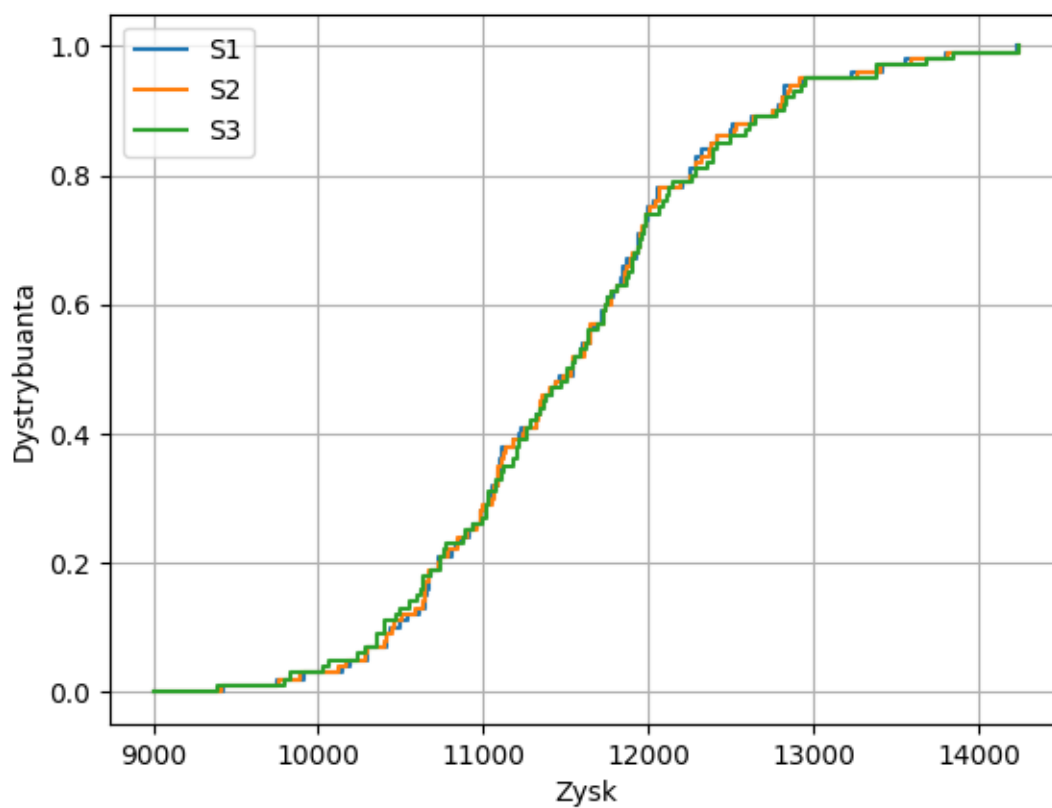
Do tak zdefiniowanego parametru dodajemy funkcję oceny maksymalizującą współczynnik bezpieczeństwa:

$$max(safety_indicator)$$

Po tych modyfikacjach otrzymane rozwiązanie powinno być rozwiązaniem wyrównująco efektywnym lub może być wyrównująco zdominowane przez alternatywne rozwiązanie optymalne o tych samych wartościach $\mu(f(x))$ i $\delta(f(x))$.

W celu wizualizacji rozwiązania zostały wybrane 3 rozwiązania efektywne za pomocą wymuszenia zadanego poziomu zysku:

	zadany poziom zysku (w zł)	oczekiwany zysk (w zł)	wyliczona miara ryzyka (w zł)	wyliczona miara bezpieczeństwa (w zł)
S1	5000	11539.8	706.794	11186.4
S2	11542	11542.3	712.076	11186.3
S3	11550	11550	728.842	11185.6



Rysunek 4: Dystrybuanta dla trzech poprawionych rozwiązań efektywnych

Tym razem wszystkie dystrybuanty rozwiązań efektywnych się przecinają. Oznacza to, że żadne z tych rozwiązań nie dominuje w sensie FSD innego rozwiązania.