第13章 光的衍射

目录

-CONTENTS----

- 1 光的衍射 惠更斯-菲涅耳原理
- 2 单缝夫琅禾费衍射
- 3 衍射光栅
- 4. 圆孔衍射光学仪器的分辨率
- 5 X射线的衍射



13.1

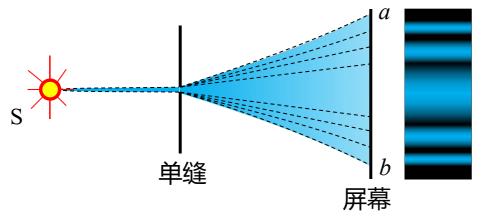
光的衍射

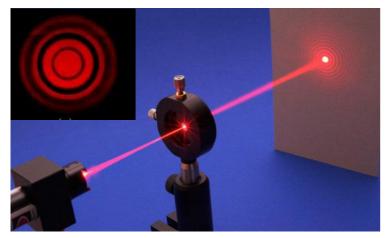
惠更斯-菲涅耳原理



■ 13.1.1 光的衍射现象及分类

光的衍射现象:光在传播中遇到障碍物,使波面受到限制时,能 够**绕过障碍物**继续前进,且在障碍物背后的几何阴影区**光强重新分布**的现 象。



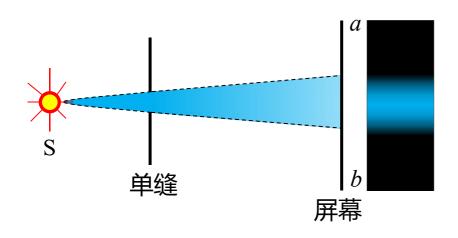


光不再是直线传播,而有光进入障碍物 后的几何阴影区, 表明光具有波动的性 质。

光所到达的区域, 其强度分布也不均匀。

13.1.1 光的衍射现象及分类

衍射现象显著与否取决于孔隙(或障碍物)的线度与波长的比值。



自维 自维 屏幕

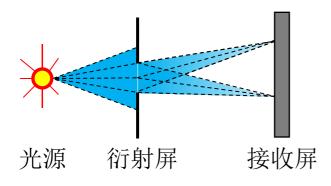
缝的宽度远大于光的波长, 衍射不明显,直线传播的几何光 学可以解释。 缝的宽度(减小到*a* ≤1000λ ,约10⁻⁴m及更小时)接近光的波 长,缝后几何阴影区的光屏上将 出现衍射条纹,衍射现象显著, 几何光学无法解释。如何解释呢?



13.1.1 光的衍射现象及分类

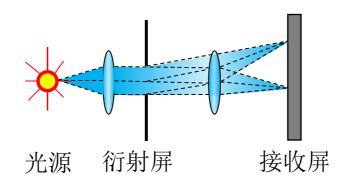
衍射系统一般由**光源、衍射屏、接收屏**组成,通常按三者的相对位置将衍射分为两大类:

菲涅耳衍射



衍射屏、光源和接收屏之间 (或二者之一)均为有限远。 近场衍射

夫琅禾费衍射



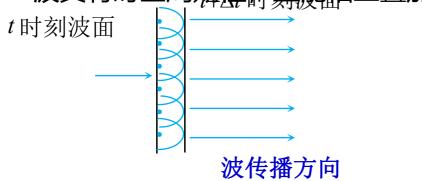
衍射屏与光源和接收屏三者 之间均为无限远。

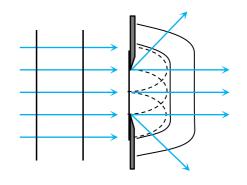
远场衍射

(实际上是:入射光为平行光,出射光亦为平行光→ 用透镜获取平行光→再用透镜汇聚平行光于光屏。)

惠更斯原理:波阵面上的每一点都可看成是发射<mark>子波</mark>的新波源,任 波动有两个基本特性, 意时刻<u>子波</u>的包迹即为新的波阵面。 波是振动的传播。

波具有时空周期性时显能相互叠加。



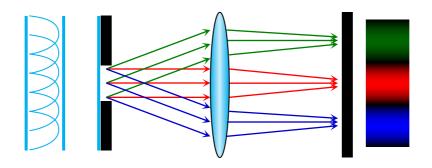


能解释光波的传播

能解释光波绕过障碍物

"子波"的概念不涉及波动的时、空周期性,因而不能说明光强的明暗分布,即不能完全解释光的衍射。

菲涅耳在惠更斯提出的子波假设基础上,补充了描述子波基本特征的时空周期的物理量:相位和振幅,及波的叠加。认为:从同一波阵面上各点发出的子波,都是相干波,在传播过程中相遇时,也能相互叠加而产生干涉现象,空间各点波的强度,由各子波在该点的相干叠加所决定。这就是惠更斯—菲涅耳原理。



惠更斯-菲涅耳原理:从同一波阵面上各点发出的子波,在传播过程中相遇时,也能相互叠加而产生干涉现象,空间各点波的强度,由各子波在该点的相干叠加所决定。

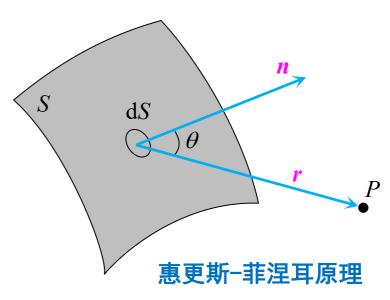
为定量计算出明暗相间条纹的分布区 域和能量分布情况, 菲涅耳提出, 每一面 元dS发出的子波在P点引起的振动的振幅:

$$dE_0 \propto \frac{k(\theta)}{r} dS$$

 $dE_0 \propto dS$,即正比于面元dS

 $dE_0 \propto 1/r$,反比于dS到P点的距离 r

 $dE_0 \propto K(\theta)$,与r和dS的法线n之间的夹角 θ 有关。



(倾斜因子) 为随 θ 角的增大而减小的函数, 表示dE₀随 θ 角的增 大而单调减少。

方向系数:
$$K(\theta)$$
 $\begin{cases} \theta = 0, K = K_{\text{max}} \\ \theta \uparrow \to K(\theta) \downarrow \end{cases}$ $\theta \geq \frac{\pi}{2}, K = 0$ 即无倒退的子波。

$$\theta \ge \frac{\pi}{2}$$
, $K = 0$ 即无倒退的子波。

振幅

dS在P点引起的光振动的相位,由dS到P点的光程 r决定。

若取t=0时波阵面S上各点的初相位为零。

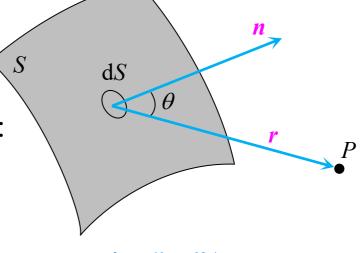
dS 发出的子波在 点引起的光振动可表示为:

$$dE = C \frac{K(\theta)}{r} \cos 2\pi (\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}) dS$$

所有dS 发出的子波在P 点引起的合振动

惠更斯-菲涅耳原理的数学表达式

$$E = \int dE = \int C \frac{K(\theta)}{r} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) dS$$



惠更斯-菲涅耳原理



- (1) P点的振动为无限多个振动源相干叠加的结果,所以变成了一个无限多光束的干涉问题。
- (2) 原则上,菲涅耳公式可以讨论一般衍射问题。但只对某些简单情况才能精确求解。
- (3) 由于直接积分很复杂,所以常常利用"**半波带法**"(代数加法)和"振幅矢量加法"(图解法)。



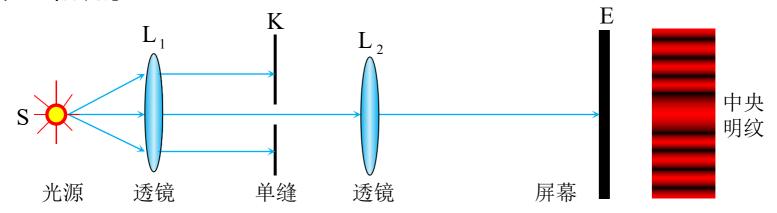
13.2

单缝夫琅禾费衍射





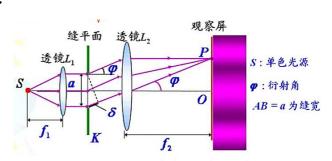
1、装置和现象



单缝衍射实验装置

单缝衍射图样的主要规律:

- (1)衍射图样是一组与狭缝平行的明暗相间的条纹
- (2)中央亮纹最亮,宽度是其他亮纹宽度的两倍; 其他亮纹的宽度相同,亮度逐级下降。
- (3) 缝宽a越小,条纹越宽。(即衍射越厉害)
- (4)波长λ越大,条纹越宽。



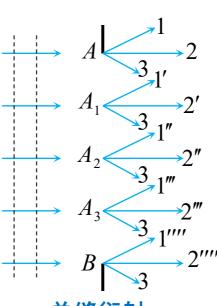
- 2、惠更斯 菲涅耳原理分析衍射过程
 - 1)平行衍射光的获得

设平行入射光垂直投射到缝K上,其波前与缝平面AB重合。按惠更斯原理,波前上的每一点都可看成发射球形子波的波源,而每个子波源都可以向前方各个方向发出无穷多束光线,统称为衍射光,如图中A点的1,

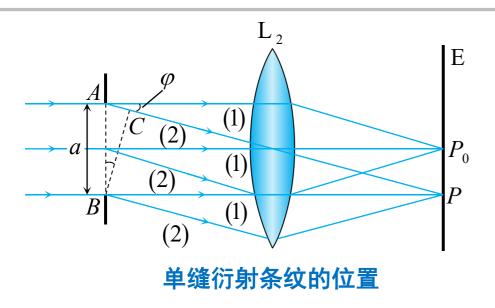
2,3...光线都是衍射光线。

每个子波源所发出的沿同一方向的 平行光构成了一束**平行**衍射光。

如光线系1,光线系2,…等构成 无穷多束平行衍射光。



单缝衍射



2)平行衍射光的方向

每一个方向的平行光与单缝法 线方向之间的夹角用φ表示, φ 称为衍射角。

衍射角 φ 的变化范围为 $0 \rightarrow \pm \pi/2$

3)平行衍射光在焦平面上相干汇聚

每一束平行光经透镜L₂汇聚后,聚焦于L₂焦平面上的一点。 对同一束平 行光而言,它们来自同一波前上的各个子波,因此满足相干条件。

每一束平行光都在光屏上进行相干叠加,其相干叠加后的振幅,则由他们的光程差决定。

显然,对于φ=0的一束,其中每条光线的光程都相等,因而叠加结果相互加强,即为中央亮纹。

3、用半波带理论分析衍射条件

①衍射角为φ的一束平行衍射光的光程差:

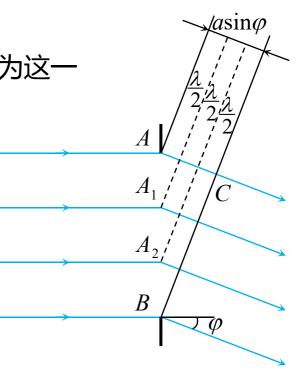
考虑一束平行衍射光,作AC_BC,则AC段即为这一束平行光的最大光程差。

$$\Delta = AC = a \sin \varphi$$
 (式中a为缝宽)

②半波带方法:

用一系列平行于BC的平面,两相邻平面间相 距λ/2,将光程差AC分割成n个相等的部分 ,同时这些平面也将波面AB分割成n个相等 的部分AA_{1,}A₁A₂…它们称之为波带。

$$AC = a\sin\varphi = n\frac{\lambda}{2}$$



菲涅耳半波带法

由于每相邻波带对应点如 $AA_{1,}$ $A_{1}A_{2}...$ 向 φ 方向发出的光波的光程差逐一相差半个波长,故称之为"半波带"。

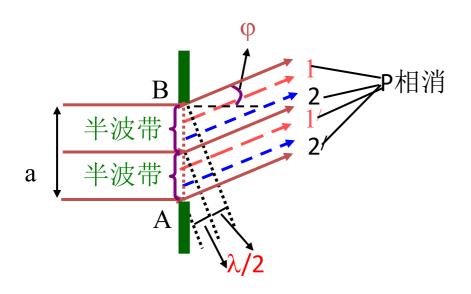
③用半波带方法解释衍射:

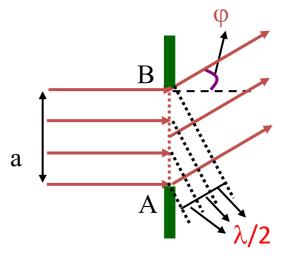
两相邻波带的对应点(如边缘,中点)在P点引起的振动的光程差均为 λ / 2 , 其位相差是 π 。

各半波带的面积相等,各波带上的子波源的数目也相等。所以相邻两带在 P点振动的贡献相互削弱,即为干涉相消。

故在给定的衍射角φ中,若AC刚好截成<mark>偶数个半波带</mark>,则P点为相消干涉而 出现<mark>暗纹</mark>;

若AC刚好截成<mark>奇数个半波带</mark>,则P点为相长干涉而出现<mark>亮纹</mark>(多余的一个 半波带不能被抵消);





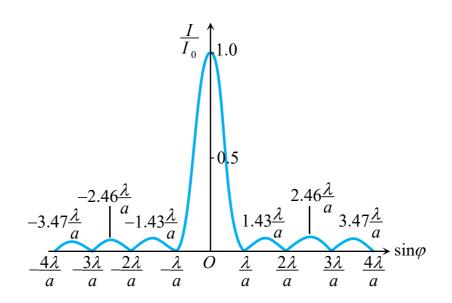
两个半波带发的光在p处干涉

相消形成暗纹

剩一个半波带发的光在 P 点 处叠加为亮纹

$$a\sin\varphi = \begin{cases} 0 & \text{中央明纹中心} \\ \pm k\lambda & \text{暗条纹} \\ \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2} & \text{明条纹} \end{cases}$$

若AC不为半波长的整数倍,则P点的亮度介于极大和极小之间。



单缝衍射光强分布

各级亮纹强度分布是不均匀的,当衍射角增加时,光强的极大值迅速衰减。

4.单缝衍射条纹特点

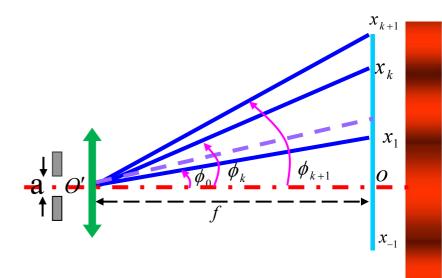
(1) 明、暗条纹在屏上的位置

$$x = f \tan \varphi \approx f \varphi \approx f \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{x}{f}$$

暗条纹在屏上的位置

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda$$
 $\Rightarrow x = \pm k \frac{f\lambda}{a}$



明条纹在屏上的位置

$$a \sin \varphi = \pm (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$
 $\Rightarrow x = \pm (2k+1)\frac{f\lambda}{2a}$

(2) 条纹宽度

中央明纹的角宽度(即条纹对透镜中心的张角)

$$2\varphi_0 \approx 2\frac{\lambda}{a}$$

半角宽度

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{\alpha}$$

衍射的反比律

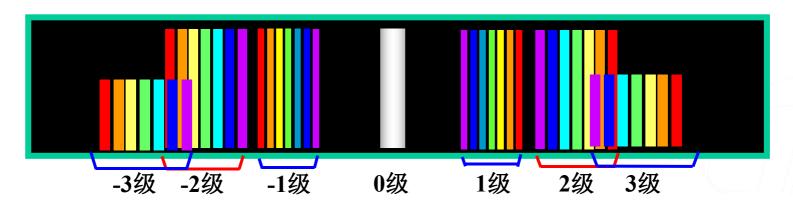
中央明纹的线宽度(为正负第一暗纹间距)

$$\Delta x_0 = 2 f \tan \varphi_0 = 2 \frac{\lambda}{a} f$$

其他各级明纹的角宽度
$$\Delta \varphi = (k+1)\frac{\lambda}{a} - k\frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{a}$$
 线宽度 $\Delta x = \frac{\lambda}{a}f$

中央明纹的线宽度为其他各级明纹线宽度的2倍。

当白光入射时,中央明纹中部仍为白色,其他各级由紫至红,一般 第2、3级即开始重叠。



各级明条纹的亮度随着级数的增大而迅速减小,若φ角越大,则AC越长,n越大,因而半波带数目越多,而缝宽AB=a为常数,因而每个半波带的面积要减少(即每个半波带上携带的光能量减少),于是级数越高,明条纹亮度越低,最后成模糊一片。

$$AC = a\sin\varphi = n\frac{\lambda}{2}$$

(3) 影响衍射图样的a和λ

由暗纹条件: $a \sin \varphi = k\lambda$

若 λ 一定时, $\sin \varphi \propto \frac{1}{a}$: 缝越窄,衍射越显著,但a不能小于 λ (a小于 λ 时也有衍射,但此时半波带理论不成立) ; 缝越宽,衍射越不明显,条纹向中心靠近,逐渐变成直线传播。

若a一定时, $\sin \varphi \propto \lambda$: λ 越大,衍射越显著。

■ 例 题



用波长为 λ 的单色光照射狭缝,得到单缝的夫琅禾费衍射图样,第 3级暗纹位于屏上的P处,问:

- (1) 若将狭缝宽度缩小一半,那么P处是明纹还是暗纹?
- (2) 若用波长为 1.5λ 的单色光照射狭缝,P处是明纹还是暗纹?

解用半波带法直接求解

与暗纹对应的半波带数为偶数 2k(k=1,2,L) 为暗纹级数)

与中央明纹除外的明纹对应的半波带数为奇数

2k+1(k=1,2,L) 为明纹级数)

在屏上P处出现第3级暗纹,所以对于P位置,狭缝处的波面可划分为6个半波带。

■ 例 题

- (1) 缝宽减小到一半,对于P 位置,狭缝处波面可分为3个半波带,则在P处出现第1级明纹。
- (2) 改用波长为 1.5λ 的单色光照射,则狭缝处波面可划分的半波带数变为原来的一点五分之一,对于P位置,半波带数变为4个,所以在P处将出现第2级暗纹。





波长 λ = 600 nm的单色光垂直入射到缝宽 a= 0.2 mm的单缝上,缝后用焦距 f= 50 cm的会聚透镜将衍射光会聚于屏幕上。求:(1)中央明条纹的角宽度、线宽度;(2)第1级明条纹的位置及单缝处波面可分为几个半波带?(3)第1级明条纹宽度。

 \mathbf{m} (1) 第1级暗条纹对应的衍射角 φ_0 为

$$\sin \varphi_0 = \frac{\lambda}{a} = \frac{6 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-4}} = 3 \times 10^{-3}$$

因 $\sin \varphi_0$ 很小,可知中央明条纹的角宽度为

$$2\varphi_0 \approx 2\sin\varphi_0 = 6 \times 10^{-3} \text{rad}$$

第1级暗条纹到中央明条纹中心O的距离为

$$x_1 = f \tan \varphi_0 \approx f \varphi_0 = 0.5 \times 3 \times 10^{-3} \text{m} = 1.5 \times 10^{-3} \text{m} = 1.5 \text{mm}$$

中央明条纹的线宽度为

$$\Delta x_0 = 2x_1 = 2 \times 1.5 \text{mm}$$

(2) 第1级明条纹对应的衍射角 φ 满足

$$\sin \varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2a} = \frac{3 \times 6 \times 10^{-7}}{2 \times 2 \times 10^{-4}} = 4.5 \times 10^{-3}$$

第1级明条纹中心到中央明条纹中心的距离为

$$x = f \tan \varphi \approx f \sin \varphi_0 = 0.5 \times 4.5 \times 10^{-3} \text{mm} = 2.25 \times 10^{-3} \text{m} = 2.25 \text{mm}$$

对应于该 φ 值,单缝处波面可分的半波带数为

$$2k+1=3$$

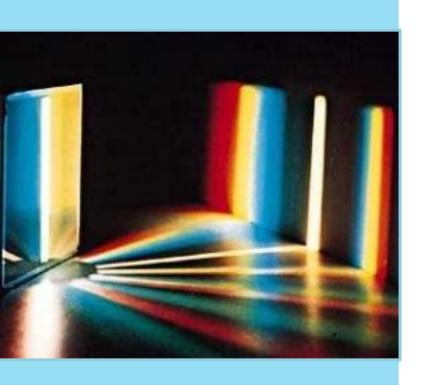
(3) 设第2级暗条纹到中央明条纹中心 O 的距离为 x_2 ,对应的衍射角为 φ_2 ,故第1级明条纹的线宽度为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = f \tan \varphi_2 - f \tan \varphi_1$$

$$\approx f \left(\frac{2\lambda}{a} - \frac{\lambda}{a} \right) = \frac{\lambda}{a} f = \frac{6 \times 10^{-7} \times 0.5}{2 \times 10^{-4}} \text{m} = 1.5 \times 10^{-3} \text{m} = 1.5 \text{mm}$$

第1级明条纹的宽度约为中央明纹宽度的一半。

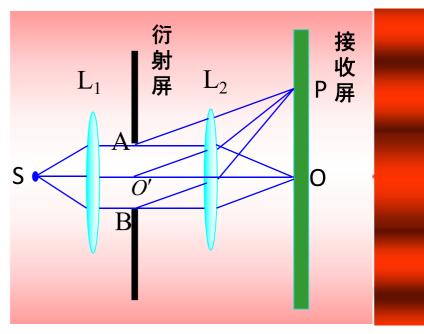
13.3



衍射光栅



第一个问题:单缝衍射时,缝宽不变, 将单缝上、下平移,但仍使缝的法线方向 与透镜主光轴平行,那么这时单缝衍射的 中央极大值和其它各级衍射条纹位置如何 变化?



由几何光学知识可知:

凡平行于主光轴的光线都汇聚于主光轴上,

凡平行于副光轴的且倾角相同的光线都汇聚于焦平面上同一点。

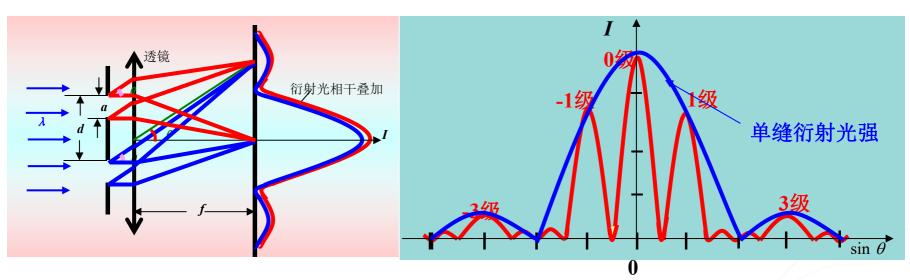
这就是说:单缝衍射的花样只与衍射角有关,而与单缝主光轴的上、下方无

关,上下移动单缝不改变衍射花样。

$$a \cdot \sin \varphi = n \frac{\lambda}{2}$$

第二个问题:在双缝干涉中,如果双缝干涉的装置也符合夫琅禾费衍射的条件,即每缝的宽度足够小,那么这时的双缝干涉图样将怎样变化?

答:假设先每次只打开一个缝,则由第一个问题的结果可知:两个缝单独形成的衍射条纹都在同一位置上。因此,当两个缝同时打开时,这两个完全一样的单缝衍射条纹就会重叠在一起,而且是相干叠加。



即这时在原来单缝衍射的明纹处,叠加后又会出现明、暗相间的干涉条纹;但在原来是单缝衍射极小的地方,两束光叠加后依然是极小,即依然是暗纹。

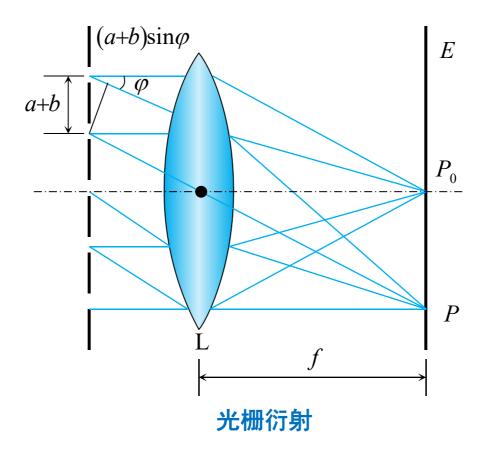
由大量等间距、等宽度的平行狭缝所组成的光学元件称为衍射光栅。



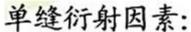
光栅常数 a+b

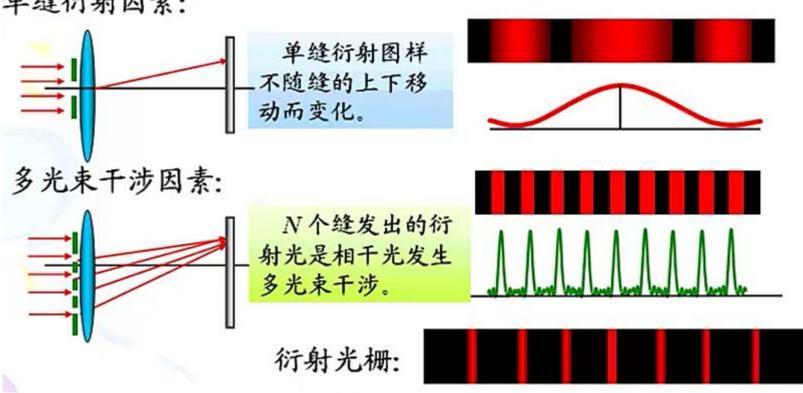
数量级约为 $10^{-5} \sim 10^{-6} \,\mathrm{m}$,即 $10^{5} - 10^{6} \,\mathrm{g/m}$,或 $100 - 1000 \,\mathrm{g/mm}$ 。电子束刻制可达几万条/mm(d $\sim 10^{-1} \,\mathrm{\mu m}$)。

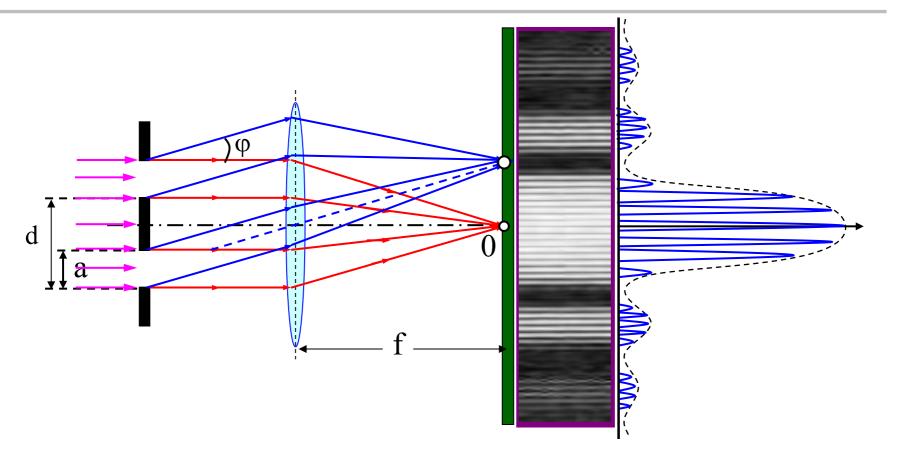
条纹的特点:明条纹很亮很窄,相邻明纹间的暗区很宽,衍射图样十分清晰。



光栅衍射条纹的成因







光栅衍射是各缝之间的干涉

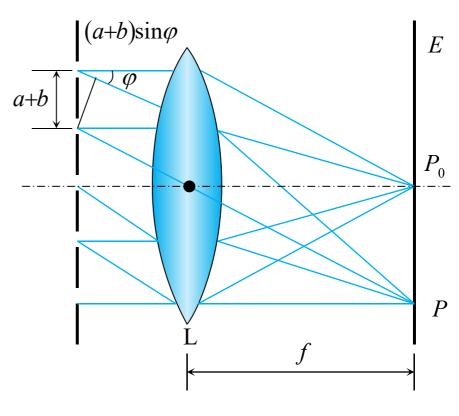
和每缝自身的夫琅禾费衍射的总效果。

13.3.2 光栅衍射规律

1. 光栅衍射规律

多光束干涉

设单色平行光垂直照射光栅,则每个缝均向各方向发出衍射光,各缝具有相同衍射角φ的一组平行光都会聚于屏上同一点,这些光波彼此相干叠加产生干涉,称多光束干涉(多缝干涉)。



光栅衍射

①相邻两缝中对应相同衍射角的平行衍射光线的 光程差为 $\triangle = (a+b)\sin \varphi = d\sin \varphi$

13.3.2 光栅衍射规律

② 光栅干涉(即多光束干涉)的主极大的必要条件为

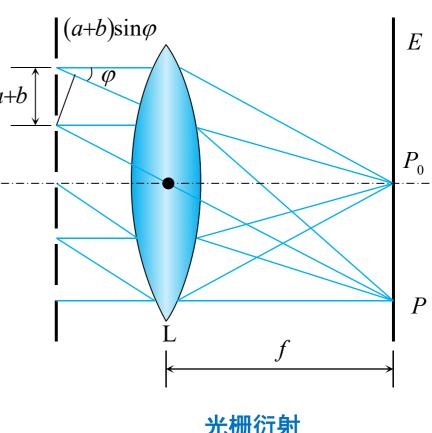
平行单色光垂直入射时, 明条纹 的位置满足

光栅公式

$$(a+b)\sin \varphi_0$$
 水 $k=0,\pm 1,\pm 2,L$ 明条纹级数

k=0 零级主极大

$$k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, L$$



光栅衍射

正负第 / 级主极大,以光栅法线为起点,逆时针为正级次;顺时针为负级次。

■ 13.3.2 光栅衍射规律

主极大光强分布

因为主极大处是各衍射光束同相加强,所以,合振幅是每一个单缝发光振

幅的N倍,即,
$$A_P = \sum_i A_i = NA$$
 $\therefore I_p = N^2 I_0$

即叠加后的明纹亮度为原来每缝光强的N²倍,即亮纹光强与光栅缝数 N的平方成正比(入射光一定)

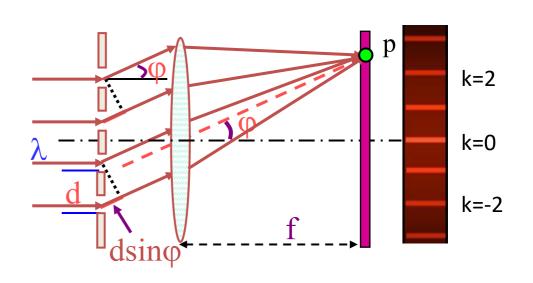
主极大位置

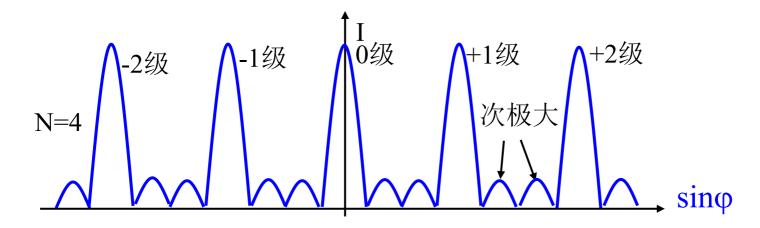
λ, d 一定时主极大(亮纹)位置由φ

决定,
$$(a+b)\sin \varphi = k\lambda$$

$$\sin \varphi = 0, \pm \frac{\lambda}{d}, \pm 2\frac{\lambda}{d}, \pm 3\frac{\lambda}{d}, \cdots$$

与缝数N无关 (λ, d 一定)





主极大数目

$$d \cdot \sin \varphi = k\lambda$$

$$\overline{m}\sin\varphi \leq 1$$

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{d} \le 1$$

主极大的最大数目

$$k \leq \frac{d}{\lambda}$$

与λ及d有关

λ越大, 视场中主极大的总数越少。

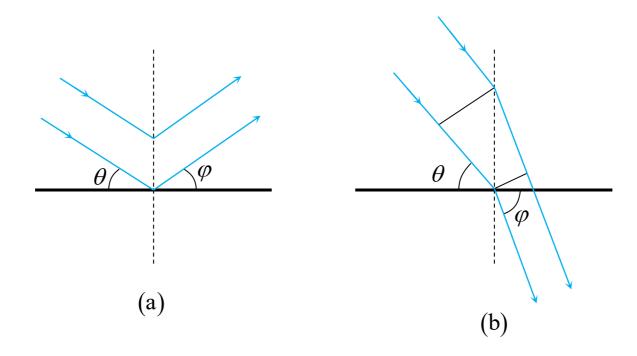
λ≥d时,除0级外,无其他主极大。

■ 13.3.2 光栅衍射规律

平行单色光倾斜入射时

光栅公式
$$(a+b)(\sin \varphi \pm \sin \theta) = k\lambda$$
 $k=0,\pm 1,\pm 2,L$

斜入射可以获得更高级次的条纹,而高级次的条纹分辨率高。



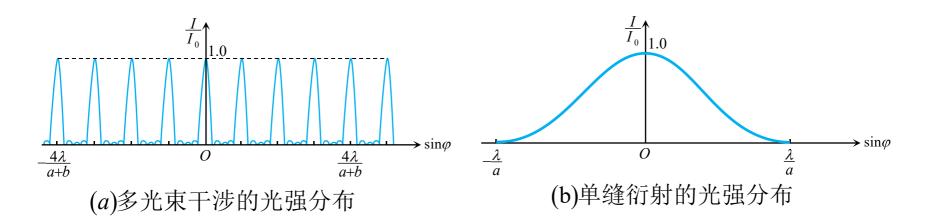
平行单色光的倾斜入射

2. 暗纹条件

在两主极大之间有 (N一),个干涉极小,因此缝数 N 越多,两亮纹间的次极小越多,而主极大的中心位置不变,因此亮纹更加细、窄,且明纹更加明亮。

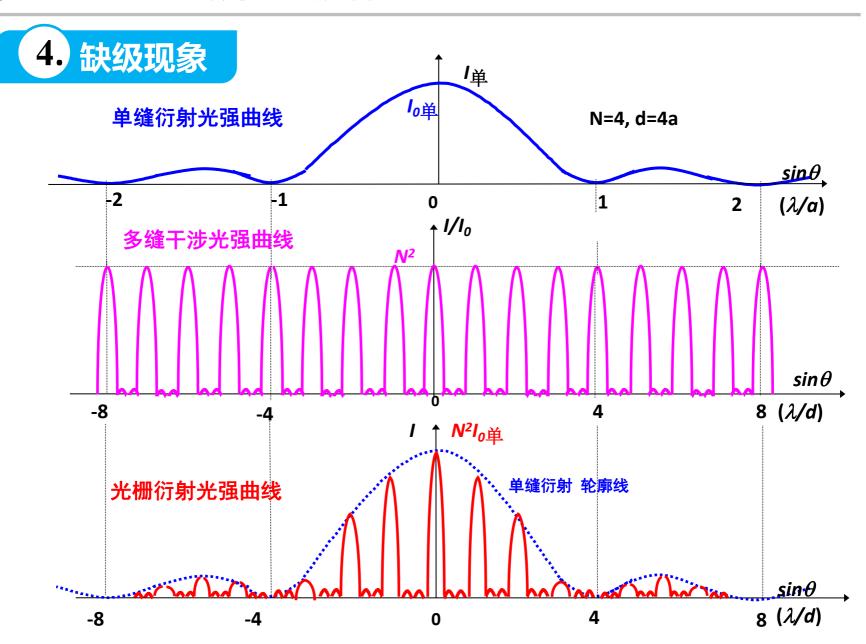


3. 单缝衍射对光强分布的影响



 $\frac{\frac{\lambda}{I_0}}{\frac{4\lambda}{a+b}} = 0$ $\frac{\frac{\lambda}{a}}{\frac{4\lambda}{a+b}} \Rightarrow \sin \varphi$ (c) 光 栅 衍 射 的 光 强 分 布

光栅衍射光强分布示意图



■ 13.3.2 光栅衍射规律

4. 缺级现象

多缝干涉主极大位置
$$(a+b)\sin \varphi = k\lambda$$
 相比单缝衍射的暗纹位置 $a\sin \varphi = k'\lambda$

在同一衍射角中,既满足单缝衍射极小,又满足光栅干涉主极大时,将会出现**缺级现象**:

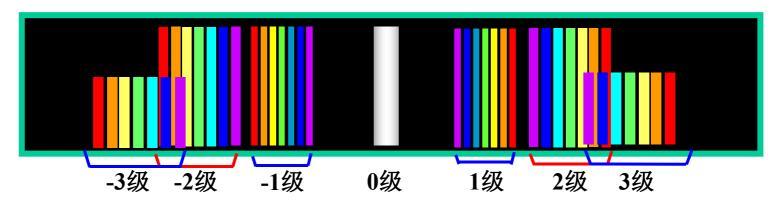
应出现某k级明条纹的位置,实际上却是暗条纹,即k级明条纹不出现。

缺级条件
$$k=k'\frac{a+b}{a}$$
 $k=1,2,3,L$

 $\frac{a+b}{a}$ 为整数比时,则对应的k 级明条纹位置出现缺级现象。

13.3.3 光栅光谱

- *当复色光入射时,屏幕上除零级主极大明条纹由各种波长的光混合仍为白色外,其他各级不同波长的同一级主极大的位置将错开。
- *短波的靠近中央一点;长波的远离中央一点。



- *其两侧将形成各级由紫到红对称排列的彩色光带。
- *错开的距离随级次的增高而增大。

某波长的一个主极大叫作一条谱线。

不同波长的同级(主极大)谱线组成一级衍射光谱。

衍射和干涉的比较

单缝衍射

$$a\sin\varphi = k\lambda$$

暗纹

$$a\sin\varphi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

明纹

多缝干涉

$$\Delta = (a+b)(\sin \varphi \pm \sin \theta) = k\lambda$$

明纹

$$\Delta = (a+b)(\sin\varphi \pm \sin\theta) = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

暗纹

①根据惠----菲原理,衍射和干涉在本质上是一样的,都是波动振幅的相干叠加。

一。衍射和干涉的比较

②但在叠加机制上是不同的。

若参与叠加的各光束的传播行为可近似用几何光学的<u>直线传播描述时</u>,为纯干涉问题。

若参与叠加的各光束本身明显<mark>不符合直线传播</mark>,就每一束光而言存在着衍射,而各衍射光束间存在干涉。

干涉是有限几束光的叠加(粗略的),衍射是无数条相干光叠加的结果(精细的)。

- ③光强分布不同。干涉条纹间距均匀,衍射条纹相对集中。
- ④数学处理方法不同。





用波长为590nm的钠光垂直照射到每厘米刻有5 000条缝的光栅上,在光栅后放置一焦距为20 cm的会聚透镜,试求: (1) 第1级与第3级明条纹的距离; (2) 最多能看到第几级明条纹; (3) 若光线以入射角30° 斜入射时,最多能看到第几级明条纹? 并确定零级主极大条纹中心的位置。

解 (1) 光栅常数

$$a+b=\frac{L}{N}=\frac{1\times10^{-2}}{5\,000}$$
m=2×10⁻⁶m

$$\tan \varphi = \frac{x}{f}$$
 第1级与第3级明条纹之间的距离为

$$\Delta x = x_3 - x_1 = f(\tan \varphi_3 - f \tan \varphi_1)$$

$$=f\left(\frac{\sin\varphi_3}{\sqrt{1-\sin^2\varphi_3}}-\frac{\sin\varphi_1}{\sqrt{1-\sin^2\varphi_1}}\right)=0.32m$$

(2)
$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda$$
 $k = \frac{(a+b)\sin\varphi}{\lambda}$

$$k$$
的最大值出现在 $\sin \varphi = 1$ 处 $k < \frac{2 \times 10^{-6}}{5.9 \times 10^{-7}} = 3.4$

因为 φ =90°时实际看不到条纹,所以k应取小于该值的最大整数,故最多能看到第3级明条纹。

(2) 光线以30°角斜入射时

$$(a+b)(\sin \varphi \pm \sin \theta) = k\lambda \qquad k = \frac{(a+b)(\sin \varphi + \sin \theta)}{\lambda}$$

$$\theta = 30^{\circ}, \varphi = 90^{\circ}$$

$$k < \frac{2 \times 10^{-6}}{5.9 \times 10^{-7}} (1 + \sin 30^{\circ}) = 51$$

零级主极大条纹的位置
$$(a+b)(\sin \varphi - \sin \theta) = k\lambda = 0$$

$$\varphi = \theta = 30^{\circ}$$

$$x = f \tan 30^\circ = 0.2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \text{m} = 0.115 \text{m}$$



【例 题】

在垂直入射于光栅的平行光中,有 λ_1 和 λ_2 两种波长。已知 λ_1 的第3级光谱线(第3级明纹)与 λ_2 的第4级光谱线恰好重合在离中央明条纹为5 mm处,而 λ_2 =486.1 nm,并发现 λ_1 的第5级光谱线缺级。透镜的焦距为0.5 m。试求: (1) λ_1 为多少,光栅常数(a+b) 为多少; (2) 光栅的最小缝宽a 为多少。

解 (1) 由光栅方程 $(a+b)\sin\varphi = k\lambda$ 和题意可知 $(a+b)\sin\varphi = k_1\lambda_1 = k_2\lambda_2$ $\lambda_1 = \frac{k_2}{k_1}\lambda_2 = \frac{4}{3} \times 486.1 \text{nm} = 648.1 \text{nm}$ $\frac{x}{f} = \tan\varphi \approx f\sin\varphi$

$$a+b = \frac{k_2 \lambda_2}{\sin \varphi} = \frac{f}{x} k_2 \lambda_2 = \frac{50 \times 4 \times 486.1 \times 10^{-9}}{5 \times 10^{-1}} \text{cm} = 1.94 \times 10^{-4} \text{cm}$$

(2) 当第 k 级缺级时满足

$$(a+b)\sin\varphi = k\lambda$$
 \Rightarrow $a\sin\varphi = k'\lambda$ \Rightarrow $a=\frac{k'}{k}(a+b)$

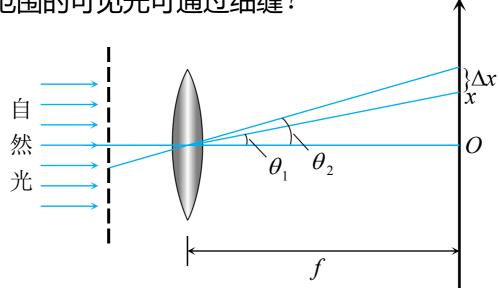
最小缝宽相应于k'=1,即第k级因落在第1级单缝衍射暗纹上而缺级。

$$a_{\min} = \frac{1 \times 1.94 \times 10^{-4}}{5} \text{ cm} = 0.388 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

■ 例 题



一个每厘米均匀刻有200条刻线的光栅,用白光照射,在光栅后放一焦距为 f=500cm的透镜,在透镜的焦平面处有一个屏幕,如果在屏幕上开一个 $\Delta x=1$ mm宽的细缝,细缝的内侧边缘离中央极大中心5.0 cm。 试求什么波长范围的可见光可通过细缝?



解 利用光栅方程和衍射光路图求出在 Δx 范围内的衍射光的波长范围。此方法给出了一种选择和获得准单色光的方法。

例 题

光栅常数
$$a+b = \frac{1 \times 10^{-2}}{200} \text{m} = 5.0 \times 10^{-5} \text{m}$$

 $\sin \theta \approx \tan \theta$ 根据光栅方程

$$\sin \theta_1 = \frac{k_1 \lambda_1}{a+b} \approx \frac{x}{f}$$
 $\sin \theta_2 = \frac{k_2 \lambda_2}{a+b} \approx \frac{x + \Delta x}{f}$

$$k_1 \lambda_1 = \frac{x}{f} (a+b) = \frac{5.0 \times 5.0 \times 10^{-5}}{500} \text{m} = 0.5 \times 10^{-6} \text{m} = 500 \text{nm}$$

$$k_2 \lambda_2 = \frac{x + \Delta x}{f} (a+b) = \frac{(5.0 + 0.1) \times 5.0 \times 10^{-5}}{500} \text{m} = 0.51 \times 10^{-6} \text{m} = 510 \text{nm}$$

在可见光范围内, k_1 和 k_2 都只能取1,所以可通过细缝的可见光波波长范围为

$$500\text{nm} \leq \lambda \leq 510\text{nm}$$





一束单色光垂直入射在光栅上,衍射光谱中共出现5条明纹,若已知此光栅缝宽与不透明部分宽度相等,那么在中央明纹一侧的两条明纹分别是第 级和第 级谱线。

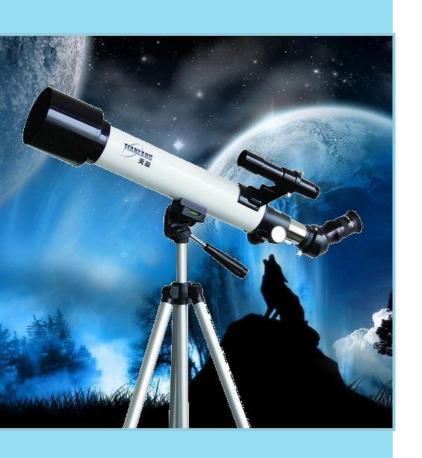
解 Q a = b, 故有缺级

$$a\sin\varphi=k'\lambda$$
, $(a+b)\sin\varphi=k\lambda$ $(a+b)=\frac{k'}{a}=\frac{k'}{k'}=2$

k'=1,则k=2,即第二级缺级。

故k=2k'时缺级。

故应为第1级和第3级谱线。



13.4

圆孔衍射 光学仪器的分辨率

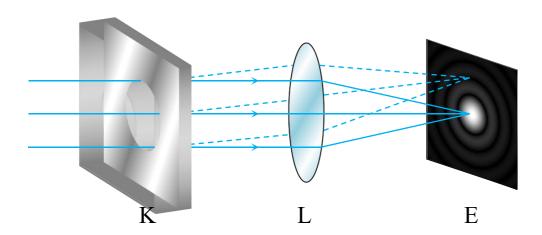


■ 13.4.1 圆孔衍射

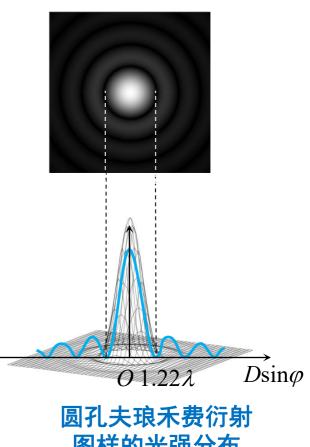
艾里斑: 夫琅禾费圆孔衍 射中,中央为亮圆斑,即第一暗 环所包围的中央圆斑。

艾里斑光强: 占总入射光

强的80%以上。



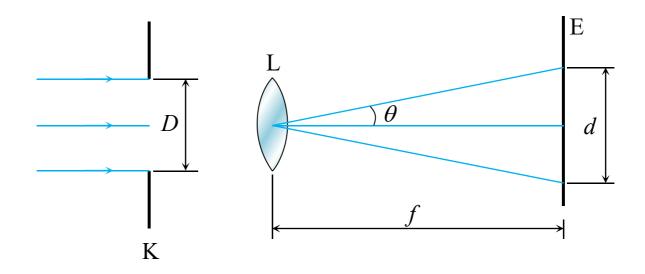
用圆孔代替狭缝、产生衍射现象



图样的光强分布

13.4.1 圆孔衍射

艾里斑的半角宽度: 艾里斑的直径为d,其半径对透镜 L光心的张角 θ 。



$$\theta \approx \sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} = \frac{\frac{d}{2}}{f}$$

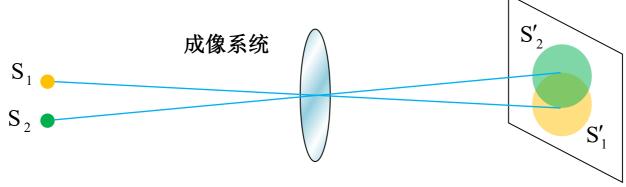
圆孔衍射对成像质量的影响

几何光学:一个物点对应一个像点。

波动光学:一个物点对应一个艾里斑。

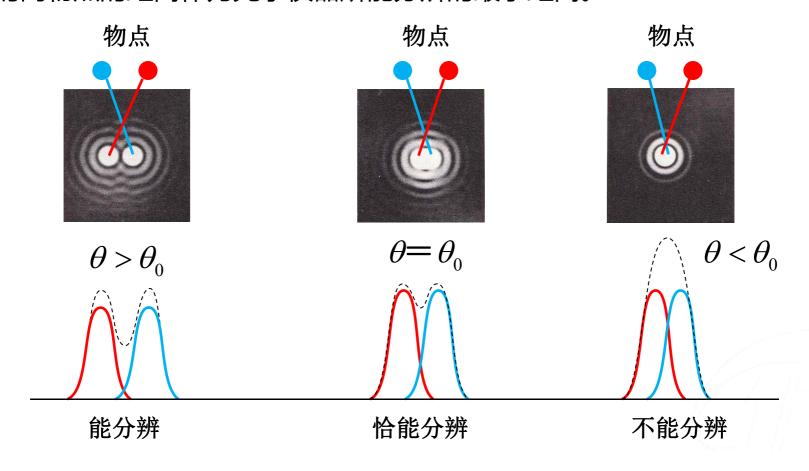
因此,当两个物点的艾里斑重叠到一定程度时,这两个物点在底片上将不能区分,故艾里斑的存在就引发了一个光学仪器的分辨率问题。

光学仪器的分辨率问题



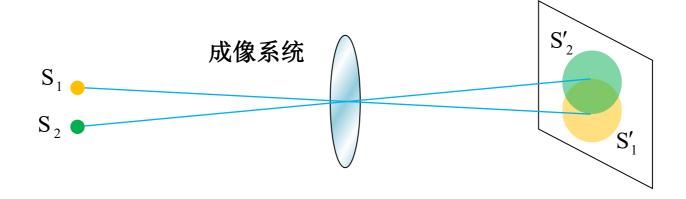
什么情况下,两个物点可以通过成像系统能分辨?

瑞利指出:两**光强相同**的**非相干**物点,其像点相互靠近,如果某一物点像斑(即艾里斑)的中心恰好落在另一物点像斑的边缘,这样所定出的两物点的距离作为光学仪器所能分辨的最小距离。



最小分辨角:人的眼睛**刚好**能判断出两个物点的像时,这两物点对透镜光心的张角。

$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



光学仪器的分辨率:最小分辨角的倒数。

$$R = \frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda}$$



■ 13.4.2 光学仪器的分辨率



讨论: 如何提高仪器分辨率 (提高成像质量) ?

光学仪器的分辨率 $\frac{1}{\theta_0} = \frac{D}{1.22\lambda}$

方法一: 使透镜镜头直径加大 入射光波长不可选择,可提高镜头口径

天文望远镜:探索宇宙奥秘的武器



哈勃望远镜(口径2.4米)



中国贵州Fast工程 (口径500米)

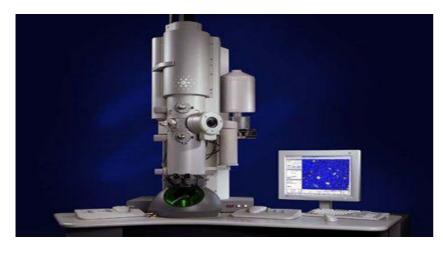


方法二:降低入射光的波长。

显微镜: 口径不能很大,可减小入射光波长。

电子显微镜: 电子的波长为0.01~0.1 nm, 分辨本领很高,可观察物质结构。

人眼: 对 $\lambda = 550 \text{ nm}$ 的光,在 9 m远处可分辨相距 2 mm的两个点。



电子显微镜





在通常的亮度下,人眼瞳孔的直径约为3 mm,在可见光中,人眼感受最灵敏的波长是550 mm的黄绿光。问: (1) 人眼的最小分辨角是多大?

(2) 如果在黑板上画两根平行直线,相距2 mm,问坐在距黑板多远处的同学恰能分辨?

解 (1) 根据 θ_0 =1.22 $\frac{\lambda}{D}$,可得人眼的最小分辨角为 θ_0 =1.22 $\frac{\lambda}{D}$ =1.22 $\times \frac{5.5 \times 10^{-7}}{3 \times 10^{-3}}$ rad =2.2 $\times 10^{-4}$ rad

(2) 设人离开黑板的距离为x,平行线间距为l,两线对人眼的张角为

$$\theta \approx \frac{l}{x}$$
 $\theta = \theta_0$ $\theta = \frac{l}{\theta_0} = \frac{2 \times 10^{-3}}{2.2 \times 10^{-4}} = 9.1 \text{m}$





一直径为2 mm的氦氖激光束射向月球表面,其波长为632.8 nm,已知月球和地面的距离为3.84×10⁵ km。试求: (1) 在月球上得到的光斑的直径有多大? (2) 如果这激光束经扩束器扩展成直径为2 m,则在月球表面上得到的光斑直径将为多大? 在激光测距仪中,通常采用激光扩束器,这是为什么?

 $oldsymbol{\mathbf{H}}$ (1) 光斑直径 D_1 月球到地球的距离 L 激光束的直径 d_1 波长 λ

$$\theta_0 = 1.22 \frac{\lambda}{d_1}, \quad \theta \approx \tan \theta_0 = \frac{\frac{D_1}{2}}{L} \longrightarrow \frac{D_1}{2} = 1.22 \frac{\lambda}{d_1} L$$

例 题

$$D_1 = \frac{2 \times 1.22 \lambda L}{d_1} = \frac{2 \times 1.22 \times 632.8 \times 10^{-9} \times 3.84 \times 10^{8}}{2 \times 10^{-3}} \text{m} = 2.96 \times 10^{5} \text{m}$$

(2) 由 (1) 中所述可知

$$D_2 = \frac{d_1}{d_2} D_1 = \frac{2 \times 10^{-3} \times 2.96 \times 10^5}{2} \text{m} = 296 \text{m}$$

激光通过扩束后,其方向性大为改善,强度大大提高。





汽车两盏前灯相距 l ,与观察者相距 $s=10~{\rm km}$ 。夜间人眼瞳孔直径 $d=5.0{\rm mm}$ 。人眼敏感波长为 $\lambda=550~{\rm nm}$,若只考虑人眼的圆孔衍射,则人眼可分辨出汽车两前灯的最小间距 l=m 。

解

$$\theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$$\frac{l}{s} = \tan \theta \approx \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

$$l=1.22\frac{\lambda}{D}s = \frac{1.22 \times 5.5 \times 10^{-7} \times 10^4}{5 \times 10^{-3}} = 1.34$$
m