

第11章 变化的电磁场

目录

—CONTENTS—

1

电磁感应定律

2

动生电动势与感生电动势

3

自感应与互感应

4

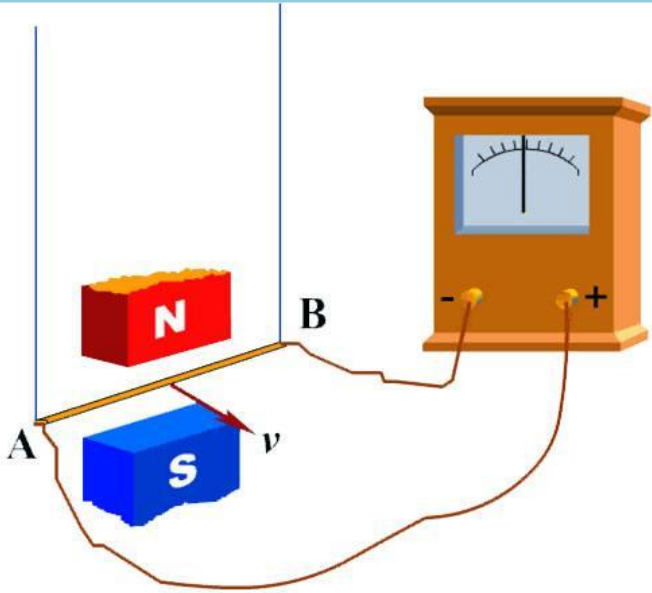
磁场能量

5

位移电流 麦克斯韦方程组

11.1

电磁感应定律



电磁感应定律

引言:

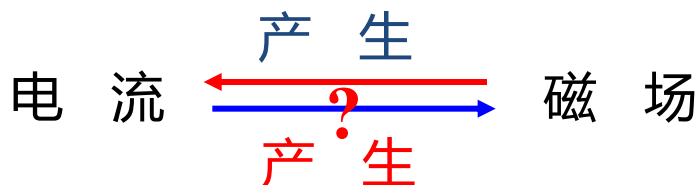
1820年Oersted发现的电流的磁效应第一次证明了电现象和磁现象之间的联系。电磁学立即进入了一个崭新的发展时期，Faraday后来评价这一发现时说：“它猛然打开了一个科学领域的大门，那里过去是一片漆黑，如今充满光明。”有人说奥斯特的电流磁效应是“偶然地发现了磁针转动”，当然也不无道理，但是法国的巴斯德说得好：“**在观察的领域中，机遇只偏爱那种有准备的头脑。**”

从发现电流的磁效应之日起，人们便关心它的逆效应，磁的电效应。Faraday认为，既然磁铁能使附近的铁块感应具有磁性，电流也能使附近的线圈感应而产生电流。Faraday和其他科学家在静止或恒定条件下所作的种种实验均以失败告终。

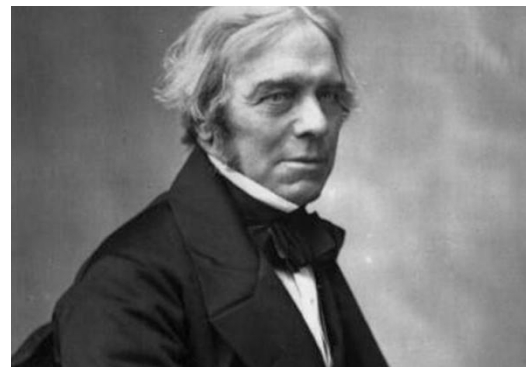
电磁感应定律



1820年, Ørsted发现: **电流的磁效应**

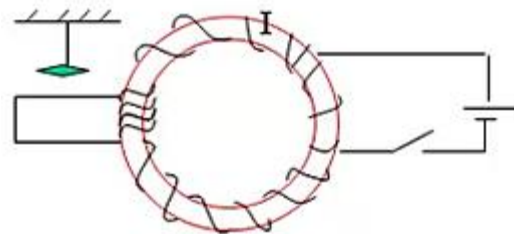


对称性 → **磁的电效应?**



Faraday经过十年不懈的探索, 发现了**电磁感应现象**, 电磁感应定律的发现, 进一步揭示了电与磁之间的相互联系及转化规律.

1831年8月29日 Faraday记录了如下实验当开关闭合或打开时, 小磁针发生了明显的振动, 并最终静止在原来的位置, 他立即意识到, 这就是他寻找十年之久的磁产生电流的现象。

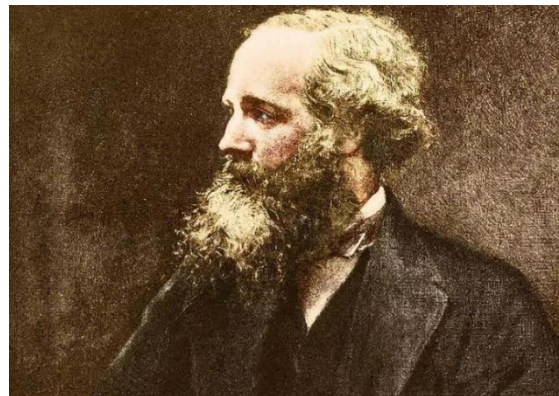


1831年11月24日 Faraday在英国皇家学会宣读了他发现电磁感应现象的论文。

电磁感应定律

1843年Lenz发现Lenz定律。指出电磁感应遵守能量守恒定律。

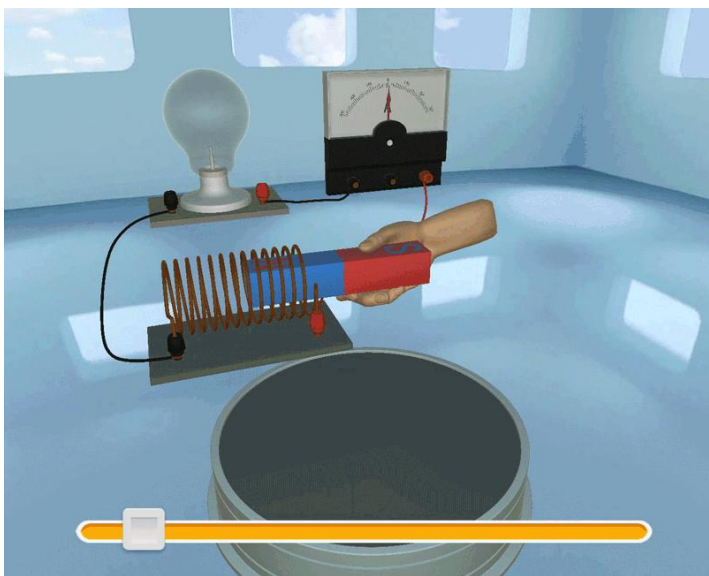
1845年Neumann和Weber分别给出电磁感应的定量表达式。



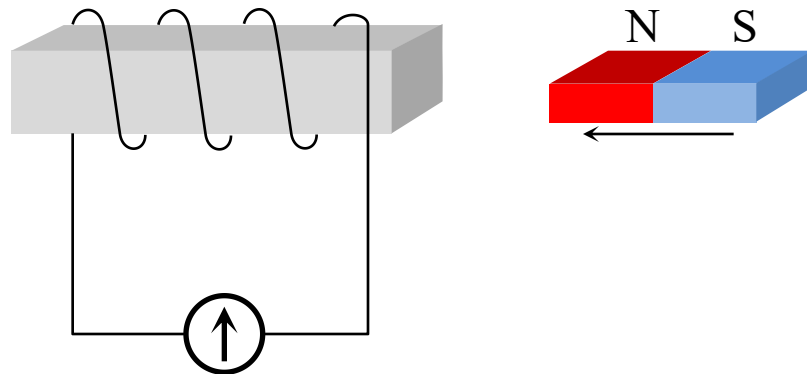
1861-1864年麦克斯韦提出了“**感生电场**”和“**位移电流**”两个假说，从而建立了完整的电磁场理论体系——麦克斯韦方程组，概括了所有宏观电磁现象的规律，同时预言了电磁波的存在，并揭示出光的电磁本质。

11.1.1 法拉第电磁感应定律

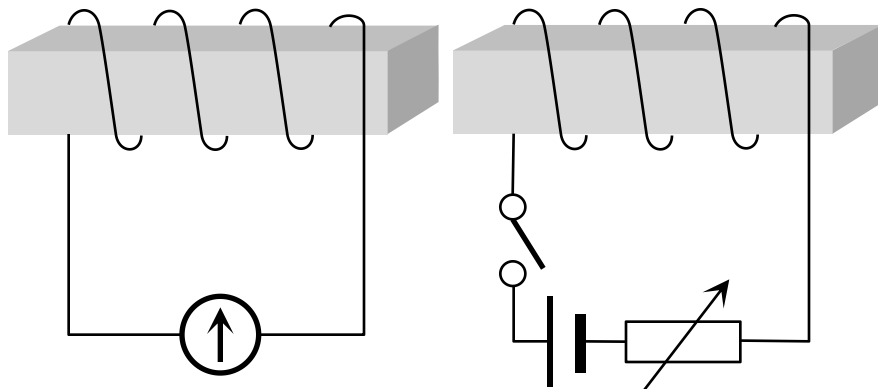
电磁感应现象：在导体回路中由于磁通量变化而产生感应电流的现象。



电磁感应



磁铁相对线圈运动产生电流



附近通电线圈电流变化产生电流

11.1.1 法拉第电磁感应定律

法拉第总结出：当穿过闭合导体回路所围面积的磁通量发生变化时，无论是何种原因引起的，都会在回路中产生电流，这种电流称为**感应电流**。感应电流的出现说明回路中有电动势存在，这种电动势称为**感应电动势**。

当穿过闭合导体回路的磁通量发生变化时，回路中产生感应电流，而感应电动势与穿过回路的磁通量对时间的变化率的负值成正比。

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$

式中的**负号**反映了感应电动势的**方向**与磁通量变化的关系

11.1.1 法拉第电磁感应定律

回顾电动势

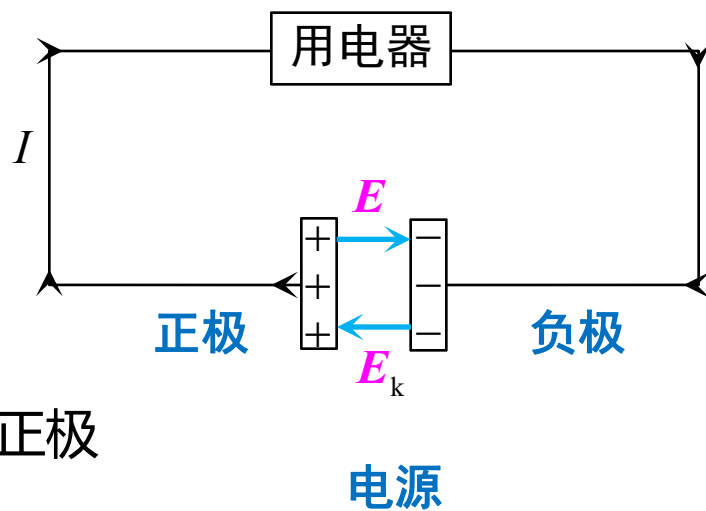
非静电力 F_k : 能把正电荷从电势较低的点(如电源负极板)送到电势较高的点(如电源正极板)的作用力

非静电场场强 E_k $E_k = \frac{F_k}{q}$

电动势: 把单位正电荷从负极通过电源内部移到正极时, 电源中的非静电力所做的功

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} E_k \cdot gdl$$

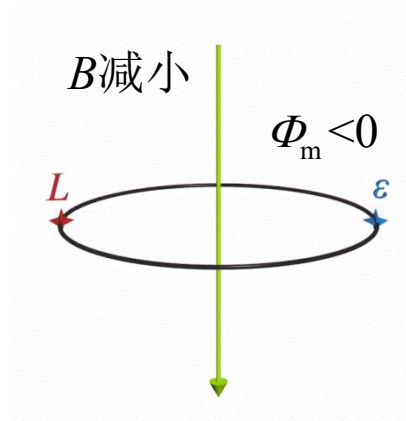
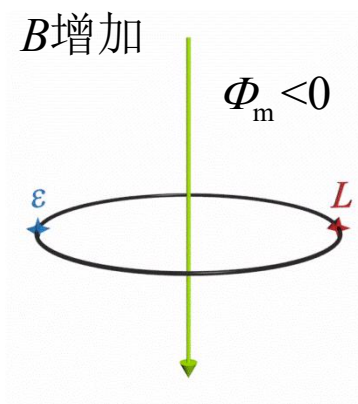
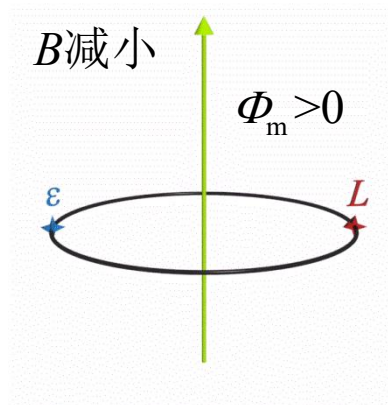
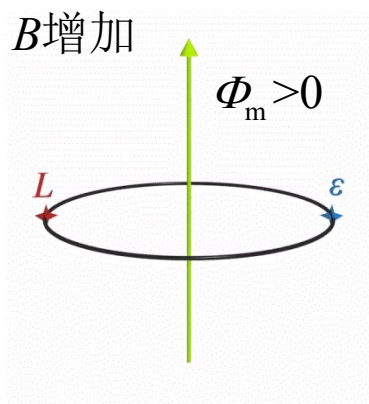
$$\varepsilon = \oint_L E_k \cdot gdl$$



电动势的正方向: 自负极经电源内部到正极

11.1.1 法拉第电磁感应定律

回路中磁场线的方向与规定的绕行正方向**满足右手螺旋关系**，穿过回路所围面积的磁通量为**正值**，反之则为负值。



感应电动势的方向与磁通量变化的关系

11.1.1 法拉第电磁感应定律

回路中的感应电流

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}$$

通过截面的感应电量

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_{m1}}^{\Phi_{m2}} d\Phi_m = \frac{1}{R} (\Phi_{m1} - \Phi_{m2})$$



磁通计

在一段时间内通过导线任一截面的电量与这段时间内导线所包围的面积磁通量的变化量成正比，而与磁通量变化的快慢无关。

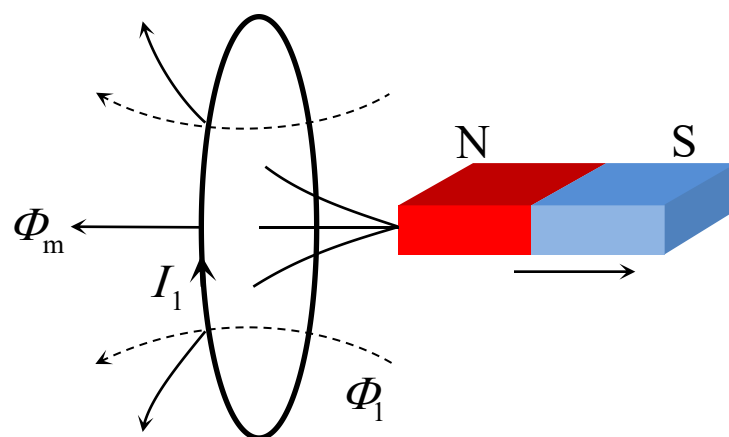
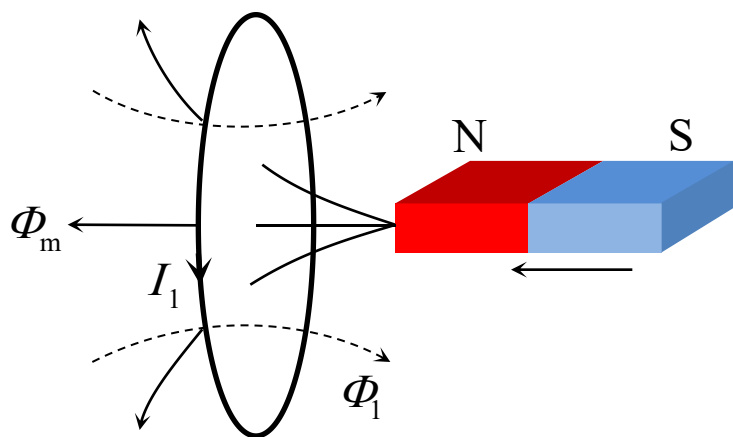
N 匝线圈中总的感应电动势

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d\Psi_m}{dt}$$

磁链 $\Psi_m = N\Phi_m$

11.1.2 楞次定律

楞次定律 (1833年楞次总结)： 闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场去**反抗**引起感应电流的磁通量的**变化**（增大或减小）。



感应电流激发的磁场总是反抗引起感应电流的磁通量的变化

11.1.2 楞次定律

判断感应电流方向的步骤

- ①判明穿过闭合回路的磁场沿什么方向，磁通量发生什么变化。**增加还是减少**
- ②判定感应电流激发的磁场的方向:**与原磁场反向还是同向**。
- ③用**右手螺旋定则**从感应电流产生的磁场方向确定感应电流的方向。

注意

- ★感应电流产生的磁场所反抗的不是原磁场，而是原磁通的变化。
- ★感应电流的方向取楞次定律所规定的方向是能量守恒的必然结果。
- ★楞次定律的实质:电磁感应现象遵守能量守恒定律。



例 题



【例 题】

如图所示，空间分布着均匀磁场 $B=B_0\sin\omega t$ 。一旋转半径为 r 、长为 l 的矩形导体线圈以匀角速度 ω 绕与磁场垂直的轴 OO' 旋转， $t=0$ 时，线圈的法向 n 与 B 之间夹角 $\varphi_0=0$ 。求线圈中的感应电动势。

解 设 φ 表示 t 时刻 n 与 B 之间的夹角，则

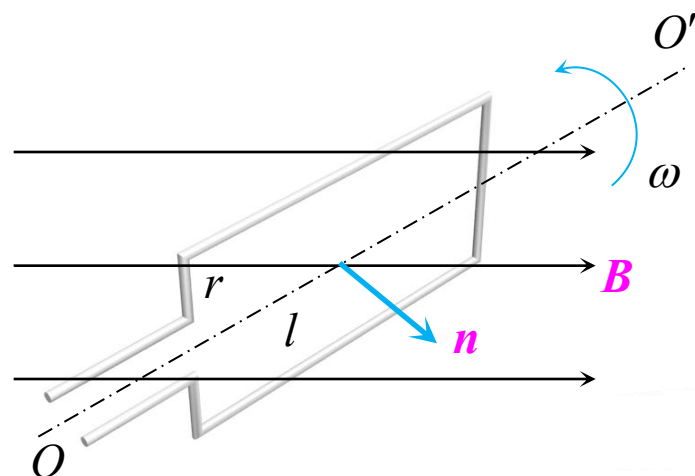
$$\varphi = \omega t + \varphi_0 = \omega t$$

t 时刻通过矩形导体线圈的磁通量

$$\Phi_m = B \cdot S = B S \cos \omega t$$

$$= B_0 2rl \sin \omega t \cos \omega t = B_0 rl \sin 2\omega t$$

线圈中的感应电动势 $\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -2\omega B_0 rl \cos 2\omega t$



例 题

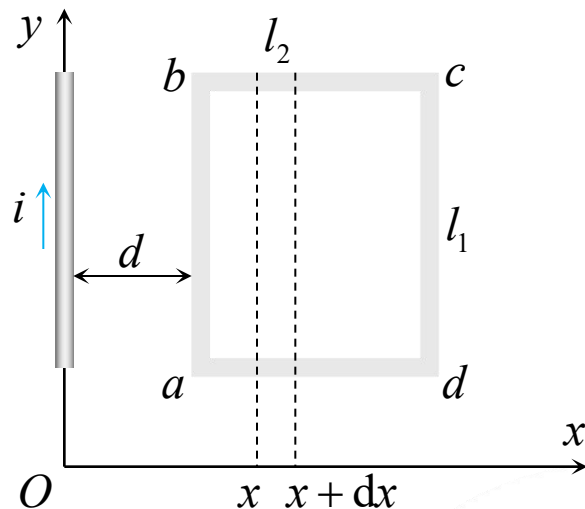


【例 题】

一根无限长的直导线载有交流电流 $i = I_0 \sin \omega t$ 。旁边有一共面矩形线圈 $abcd$ ，如图所示。 $ab = l_1, bc = l_2, ab$ 与直导线平行且相距为 d 。求线圈中的感应电动势。

解 取矩形线圈沿顺时针 $abcda$ 方向为回路正绕向

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_d^{d+l_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} l_1 dx \\ &= \frac{\mu_0 i l_1}{2\pi} \ln \frac{d+l_2}{d}\end{aligned}$$



$$\text{线圈中的感应电动势 } \varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 l_1 \omega}{2\pi} I_0 \cos \omega t \ln \frac{d+l_2}{d}$$

例 题



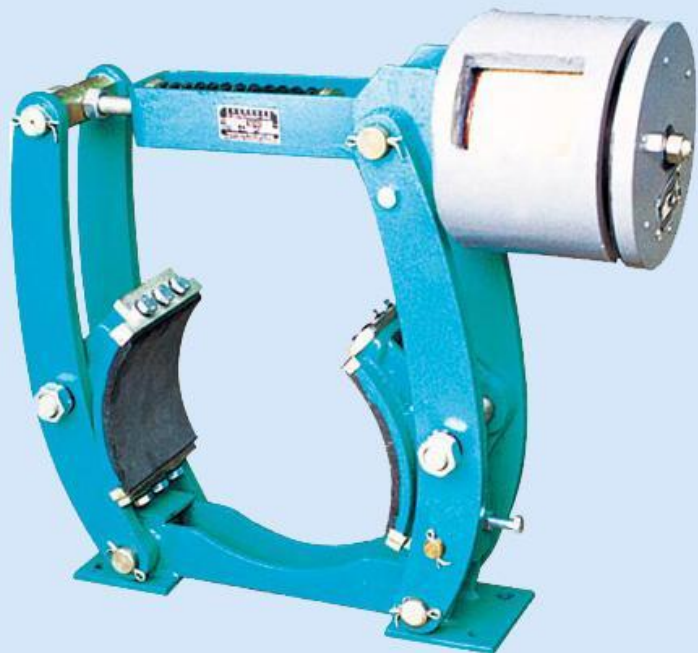
补充例题

将形状完全相同的铜环和木环静止放置，并使通过两环面的磁通量随时间的变化率相等，则不计自感时： **D**]

- (A) 铜环中有感应电动势，木环中无感应电动势
- (B) 铜环中感应电动势大，木环中感应电动势小
- (C) 铜环中感应电动势小，木环中感应电动势大
- (D) 两环中感应电动势相等

11.2

动生电动势与 感生电动势



11.2 动生电动势与感生电动势

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} \\ &= -(\vec{S} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} + \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt})\end{aligned}$$

磁通量变化



感应电动势

磁场不变，回路或其一部分在磁场中有相对磁场的运动而产生的感应电动势。

动生电动势

感生电动势

回路不动，因磁场随时间变化而产生的感应电动势。

11.2.1 动生电动势

1. 动生电动势的非静电力—洛伦兹力

电子受到的洛伦兹力

$$\mathbf{f} = (-e) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

将这段导线视为电源，那么非静电力为洛伦兹力，非静电场定义为

$$\mathbf{E}_k = \frac{\mathbf{f}}{-e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$a \rightarrow b$ 为积分方向，则

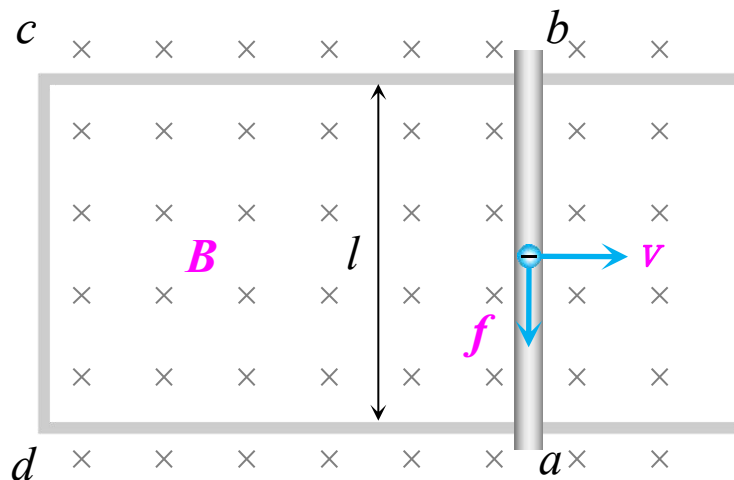
$$\text{动生电动势} \quad \varepsilon_{ab} = \int_a^b \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b v B \sin \theta_1 \cdot dl \cos \theta_2$$

θ_1 为 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 的夹角， θ_2 为 $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角

在整个线圈 L 中产生的动生电动势

$$\varepsilon = \int_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

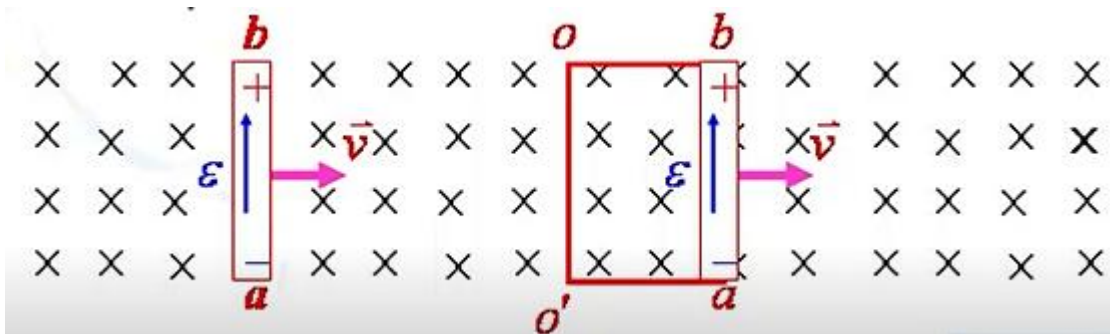


动生电动势

11.2.1 动生电动势

动生电动势的方向

- 1) 电动势的方向就是非静电场强 $E_k = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 的方向。
- 2) 由楞次定律确定。



动生电动势是洛伦兹力沿导线方向移动电子而产生的。

洛伦兹力究竟作不作功呢？



11.2.1 动生电动势

2. 能量关系

电子受到的总洛伦兹力

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -e(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{B} \\ &= -e\mathbf{u} \times \mathbf{B} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{f}' + \mathbf{f} \end{aligned}$$

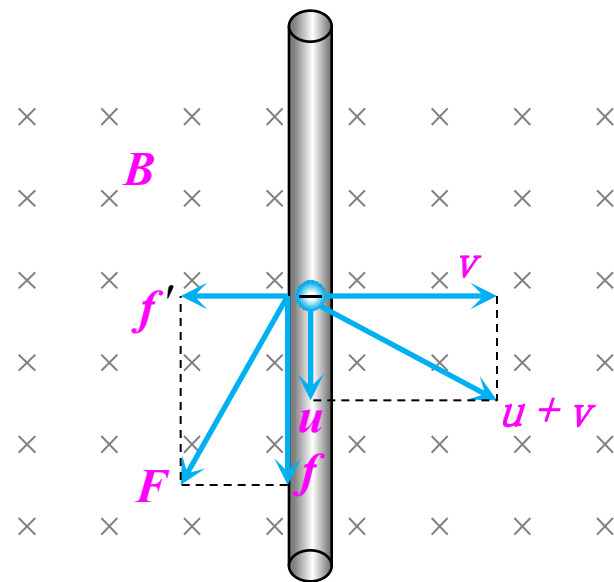
总洛伦兹力功率

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{f}' + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} \\ &= \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} = +e v B u - e v B u = 0 \end{aligned}$$

总的洛伦兹力的功率为零，即总的洛伦兹力仍然不做功。

$$\mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{f}' \cdot \mathbf{v} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$$

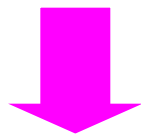
外力克服洛伦兹力的一个分量所做的功的功率等于通过洛伦兹力的另一个分量对电子的定向运动做正功的功率，外力做的功全部转化为感应电流的能量。洛伦兹力起到了**能量转化**的传递作用。



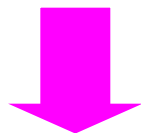
洛伦兹力不做功

11.2.1 动生电动势

外力做功输入机械能



洛伦兹力的一个分力做负功吸收机械能非静电力做正功输出电能



动生电动势

洛伦兹力不提供能量而只是传递能量。

我们不生产水，我们只是大自然的搬运工

——农夫山泉

11.2.1 动生电动势

注意:

①动生电动势只存在于运动导体中。

②当任意闭合回路在磁场中运动时, $\varepsilon = \oint_L (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 式中 \mathbf{v} 为 $d\mathbf{l}$ 处的速度, \mathbf{B} 为 $d\mathbf{l}$ 处的磁感应强度。不同 $d\mathbf{l}$ 处的 \mathbf{B} 可能不同。

计算步骤:建坐标;算 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (写大小, 标方向);定 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 与 $d\mathbf{l}$ 的夹角;作点乘;再积分。

③当导体的运动方向与磁场方向平行时,导体中不会产生动生电动势。

④当直线导体在均匀磁场中运动, 且 \mathbf{B} 、 \mathbf{v} 、 \mathbf{l} 两两垂直, 动生电动势为 $\varepsilon = Bvl$

⑤动生电动势也可由 $\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ 求。

⑥动生电动势是由于洛伦兹力对运动电荷做功而产生的。但它与洛伦兹力对运动电荷不作功并不矛盾。

例 题



【例 题】

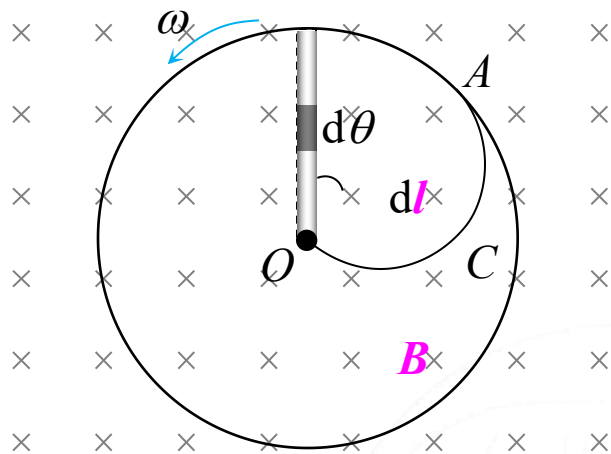
如图所示，长度为 L 的铜棒在磁感应强度为 B 的均匀磁场中以角速度 ω 绕过 O 点的轴沿逆时针方向转动。求：（1）棒中感应电动势的大小和方向，（2）直径为 OA 的半圆弧导体 \widehat{OCA} 以同样的角速度 ω 绕 O 轴转动时，导体 \widehat{OCA} 上的感应电动势。

解 （1）方法一：

用 $\varepsilon = \int_O^A (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ 求解。

在 OA 上取 $d\mathbf{l}$ 距轴为 l ，其速度 \mathbf{v} 与 \mathbf{B} 垂直且 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 与 $d\mathbf{l}$ 方向相反，故

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = vB dl \cos\pi = -\omega B l dl$$



例 题

$$\varepsilon_{OA} = \int_O^A (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_0^L -\omega B l dl = -\frac{1}{2} \omega B L^2$$

感应电动势 ε 的实际方向从 A 指向 O 。

方法二：用法拉第电磁感应定律求解。

设 OA 在 dt 时间内转了 $d\theta$ 角，则 OA 扫过的面积 $S = \frac{1}{2} L^2 d\theta$ ，
穿过 S 的磁通量为

$$d\Phi_m = BS = \frac{1}{2} BL^2 d\theta$$

由法拉第电磁感应定律，面积为 S 的回路中，只有半径 OA 在切割磁感线，所以 OA 上感应电动势大小

$$|\varepsilon_{OA}| = \left| \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \frac{1}{2} BL^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} B\omega L^2$$

ε 的方向与第一种方法相同。

例 题

(2) 因为由半径 OA 和半圆弧 \widehat{ACO} 组成的闭合导体回路在磁场中以角速度 ω 旋转时穿过回路的磁通量不变，所以整个半圆形回路的感应电动势 $\varepsilon=0$ 。

$$\varepsilon = \varepsilon_{OA} + \varepsilon_{\widehat{ACO}}$$



$$\varepsilon_{\widehat{OCA}} = \varepsilon_{OA} = -\frac{1}{2}\omega BL^2$$

ε_i 的实际方向由 A 点沿半圆弧指向 O 点。



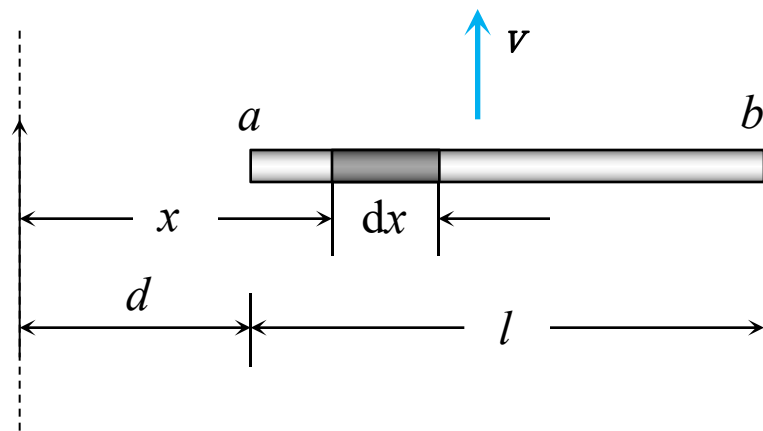
例 题



【例 题】

无限长直导线中通有电流 $I=10\text{A}$ ，另一长 $l=0.20\text{m}$ 的导体棒 ab 以速率 $v=2.0\text{m/s}$ 平行于长直导线做匀速运动。棒与长直导线共面且正交，如图所示。棒的 a 端距长直导线的距离 $d=0.1\text{m}$ ，求棒中的动生电动势。

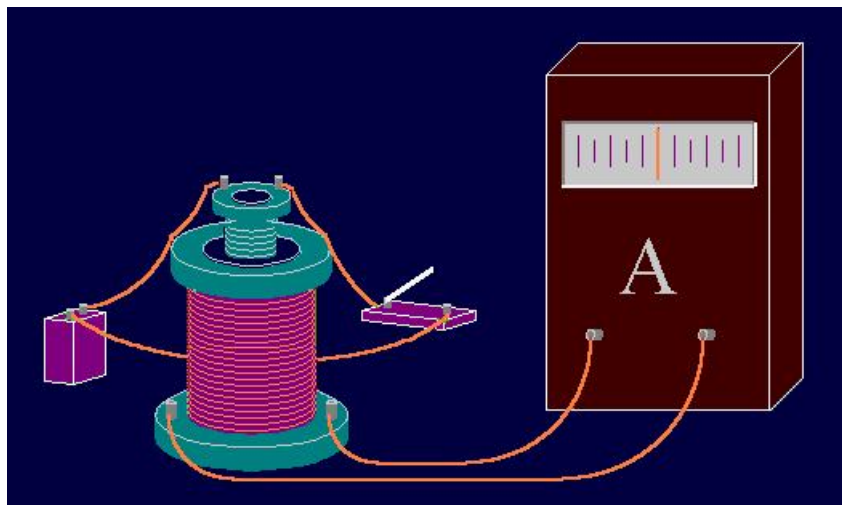
解 棒 ab 在电流 I 产生的非均匀磁场中做切割磁场线运动，产生动生电动势。在棒 ab 上如图所示取线元 dx ，在长度范围内磁场可视为均匀场且 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$ 。



$$\begin{aligned}\varepsilon_{ab} &= \int_a^b (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x} = - \int_a^b v B dx = - \int_d^{d+l} v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = - \frac{\mu_0 I}{2\pi} v \ln \frac{d+l}{d} \\ &= 4.4 \times 10^{-6} \text{ V} = U_{ab}\end{aligned}$$

11.2.2 感生电动势

感生电场的提出



导体中的自由电荷是在什么力的驱动下运动呢？

不是**电荷的电场力**：

周围没有静电场源。

不是**洛伦兹力**：

先有电荷运动，
才有洛伦兹力。

电磁感应 { 动生电动势 $\xrightarrow{\text{非静电力}}$ 洛伦兹力
感生电动势 $\xrightarrow{\text{非静电力}}$?

实验表明，非静电力只能是**磁场变化**引起。

而这种非静电力能对**静止电荷**有作用力，因此，应该是一种与电场力类似的力。

11.2.2 感生电动势

1861年，麦克斯韦假设：

变化的磁场在其周围空间激发出一种新的涡旋状电场，不管其周围空间有无导体，也不管周围空间有否介质还是真空，并称其为**感生电场**（**涡旋电场**），记为 E_r 。

涡旋电场是一种客观存在的物质，它对电荷有作用力，引入涡旋电场场强

$$E_r = \frac{F_{\text{非}}}{q} = \frac{F_{\text{涡}}}{q}$$

感生电动势 $\xrightarrow{\text{非静电力}}$ 感生电场力

11.2.2 感生电动势

1. 感生（涡旋）电场的性质

(1) 只要有变化的磁场，就有涡旋电场。涡旋电场不是由电荷激发的。

(2) 涡旋电场的电力线是环绕磁感应线的闭合曲线，因此涡旋电场的环流不为零。 $\oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} \neq 0$

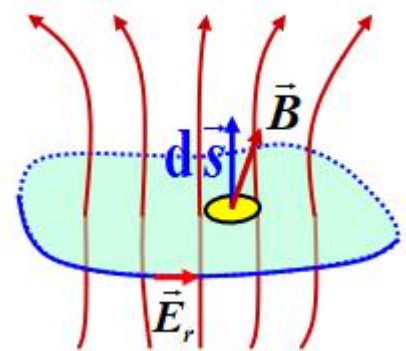
电动势 $\varepsilon = \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l}$ 和法拉第电磁感应定律 $\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt}$

$$\varepsilon = \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \downarrow \quad \Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{感生电动势 } \varepsilon = \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\text{闭合回路 } L \text{ 不动} \quad \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

可见，只要 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$ ，涡旋电场的环流就不为0



11.2.2 感生电动势

法拉第电磁感应定律的积分形式

$$\oint_L \vec{E}_r \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

楞次定律的数学表示

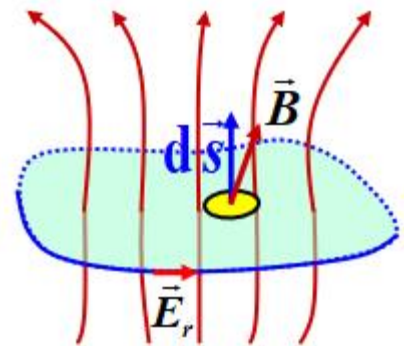
(1) 上式反映变化的磁场产生感生电场。

(2) S 是以 l 为边界的任意面积。

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 是面元 $d\vec{S}$ 上磁感应强度的变化率。不是积分线元 $d\vec{l}$ 上的磁感应强度的变化率。

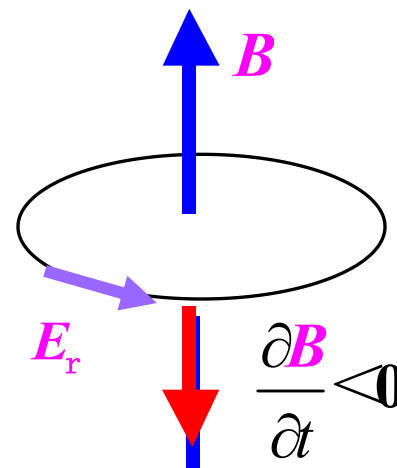
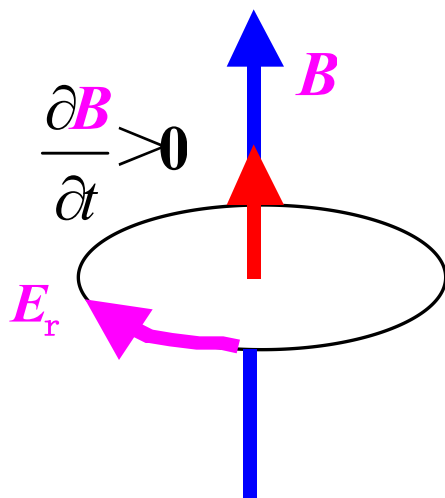
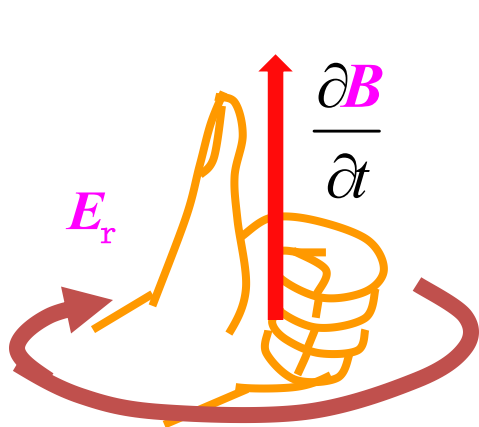
(3) 负号是楞次定律的数学表示

\vec{E}_r 与 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ 构成左手螺旋关系。



11.2.2 感生电动势

即用左手四指表示 E_r 的回绕方向，则大姆指表示 $\frac{\partial B}{\partial t}$ 的方向。



注意：是 E_r 与 $\frac{\partial B}{\partial t}$ ，而不是与 B 组成左螺旋。

11.2.2 感生电动势

若同时存在静电场，则

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_e \\ \oint_L \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

麦克斯韦方程组基本方程之一

11.2.2 感生电动势

感生电场与静电场的比较

相同点：这两种电场都对电荷有作用。

不同点：

	静电场	感生电场
起源	静止电荷激发	变化磁场激发
场线	始于正电荷 止于负电荷	无头无尾 闭合曲线
性质	有源场 $\oint_S \boldsymbol{E}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0}$ 无旋场 $\oint_L \boldsymbol{E}_e \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$	无源场 $\oint_S \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ 有旋场 $\oint_L \boldsymbol{E}_r \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = - \int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

11.2.2 感生电动势

感生电场的计算

$$\oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

\mathbf{E}_r 具有某种对称性的才有可能计算出来

感生电动势计算方法

方法1：运用法拉第电磁感应定律 即

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

即先求线圈所在处的磁通，再求磁通的变化率。

方法2：运用 \mathbf{E}_r 的环流定理 即

$$\varepsilon = \oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

例 题



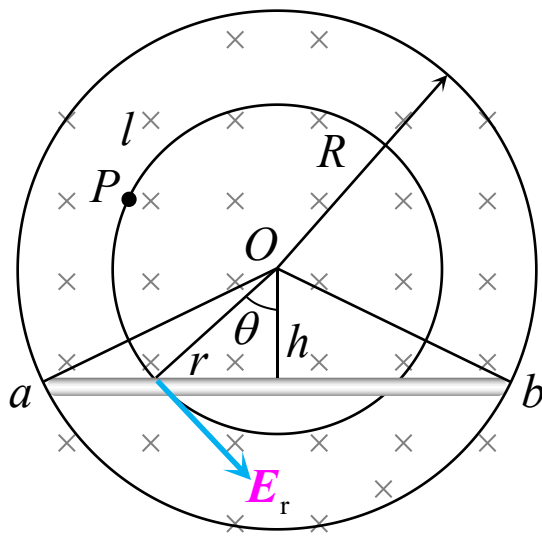
【例 题】

半径为 R 的圆柱形空间内分布有沿圆柱轴线方向的均匀磁场，磁场方向垂直纸面向里，其变化率为 $\frac{dB}{dt}$ 。试求：

(1) 圆柱形空间内、外涡旋电场 E_r 的分布；

(2) 若 $\frac{dB}{dt} > 0$ ，把长为 L 的导体 ab 放在圆柱截面上，则 \mathcal{E}_{ab} 等于多少？

解 (1) 根据磁场分布的轴对称性可知，空间的涡旋电场的电场线应是围绕圆柱轴线且在圆柱截面上的一系列同心圆。过圆柱体内任一点 P 在截面上作半径为 r 的圆形回路 l ，并设 l 的回转方向与 B 的方向构成右手螺旋关系，即设图中沿 l 的顺时针切线方向为 E_r 的正方向。



例 题

$$\oint \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$



$$E_r 2\pi r = - \frac{dB}{dt} \pi r^2 \quad \longrightarrow \quad E_r = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$

$\frac{dB}{dt} > 0$ 时, $E_r < 0$ 沿逆时针方向。

$\frac{dB}{dt} < 0$ 时, $E_r > 0$ 沿逆时针方向。

同理, 在圆柱外一点 ($r > R$)

$$E_r = - \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} \quad (r > R)$$

例 题

(2) 方法一：用电动势定义求解。

由 (1) 结论知，在 $r < R$ 区域 $E_r = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$ 。当 $\frac{dB}{dt} > 0$ 时， E_r 为逆时针方向。所以

$$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} dl \cos \theta = \int_0^L \frac{h}{2} \frac{dB}{dt} dl = \boxed{\frac{Lh}{2} \frac{dB}{dt}} \quad a \rightarrow b$$

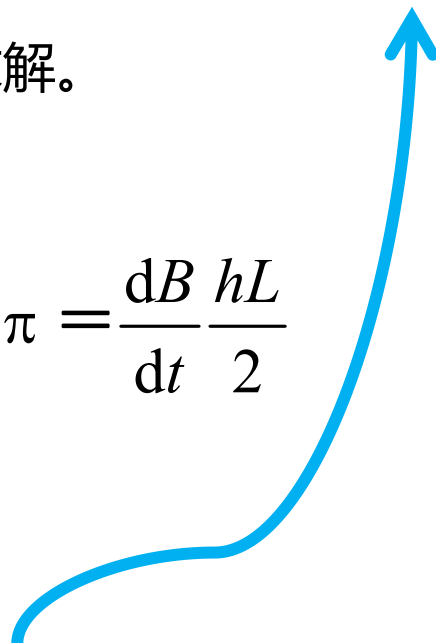
方法二：用法拉第电磁感应定律求解。

作闭合回路 $OabO$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\int_S \frac{dB}{dt} dS \cos \pi = \frac{dB}{dt} \frac{hL}{2}$$

$$\text{Q } \varepsilon_{Oa} = \varepsilon_{bO} = 0$$

$$\therefore \varepsilon_{ab} = \varepsilon - \varepsilon_{Oa} - \varepsilon_{bO} = \boxed{\frac{Lh}{2} \frac{dB}{dt}}$$



11.2.3 电子感应加速器

电子感应加速器的原理：电磁铁线圈中交变电流产生交变磁场，交变磁场又在真空室内激发涡旋电场，涡旋电场对电子加速。

$$\oint_L \mathbf{E}_r \cdot d\mathbf{r} = E_r 2\pi r$$

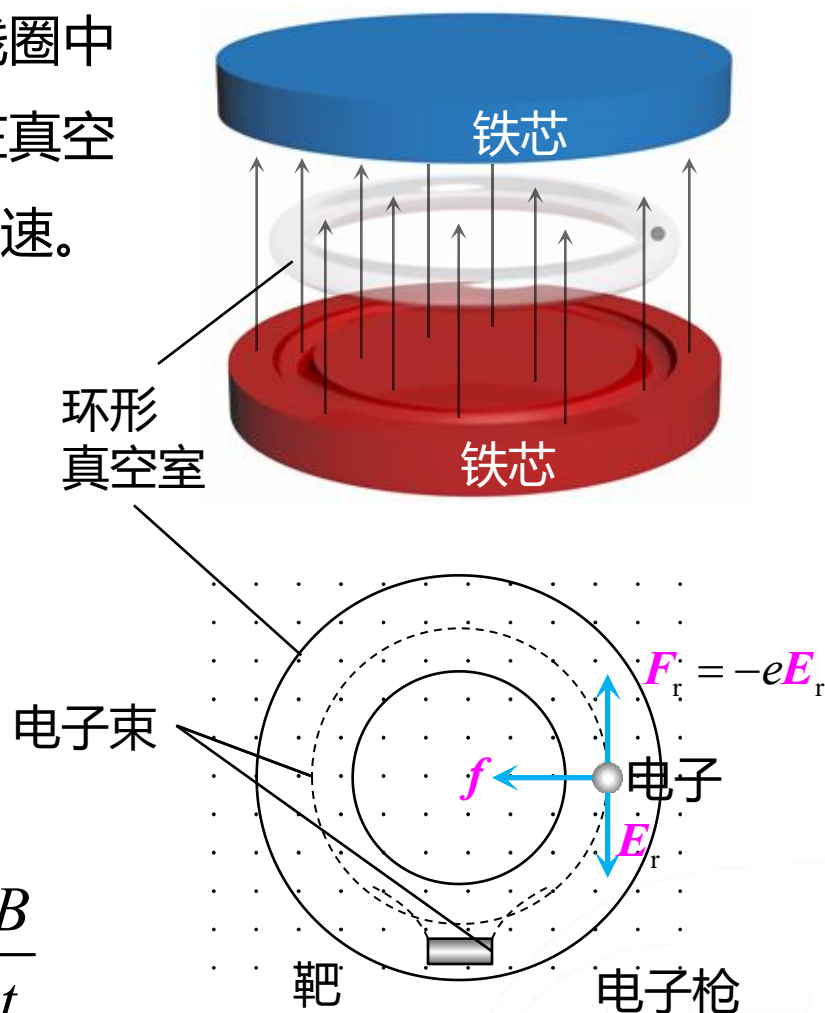
$$\Phi = \bar{B} S = \bar{B} g \pi r^2 \quad E_r = \frac{r}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

电子的运动方程

$$\frac{dm v}{dt} = e E_r = \frac{er}{2} \frac{d\bar{B}}{dt}$$

$$m v = er \bar{B} \xrightarrow{\text{对 } t \text{ 求导}} \frac{d(m v)}{dt} = er \frac{d\bar{B}}{dt}$$

$$\bar{B} = \frac{1}{2} B$$

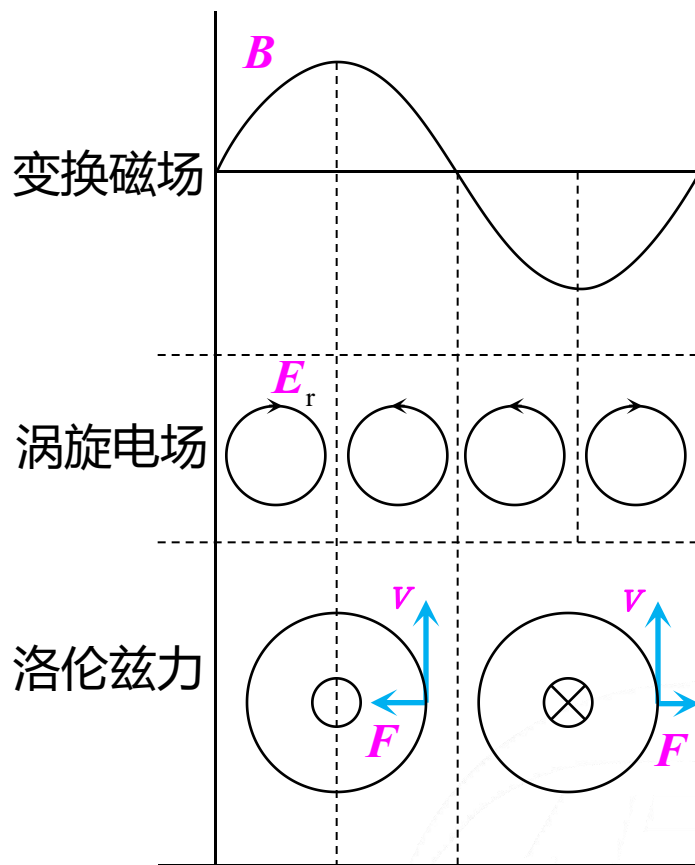


11.2.3 电子感应加速器

交变电流激发交变磁场：可加速的时间只能为交变电流周期的四分之一。

小型电子感应加速器可把电子加速到 $0.1 \sim 1\text{MeV}$ ，用来产生x射线。

大型的加速器可使电子能量达数百 MeV ，即可把电子加速到 $0.99998c$ ，百分之几秒其在加速器内的行程达几千米，用于科学研究、医疗和工业生产中。

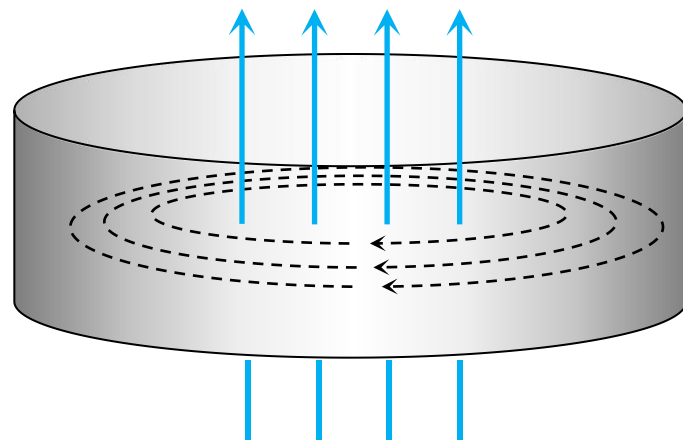


11.2.4 涡电流 趋肤效应

当大块金属导体放在交变磁场中，金属中的自由电子会受到变化磁场产生的感生电动势的作用，从而在金属中形成涡旋状的感生电流，称为**涡旋电流**（简称**涡流**）。

涡电流的弊端是消耗能量，散发热量。

例如在各种电机、变压器中，就必须尽量减少铁芯中的涡流，以免过热而烧毁电气设备。



为此，常用增大铁芯的电阻来减小涡电流，如把铁芯做成层状，用薄层的绝缘材料（如绝缘漆）把各层铁芯隔开。更有效的是用粉末状的铁芯，各粉末间相互绝缘。

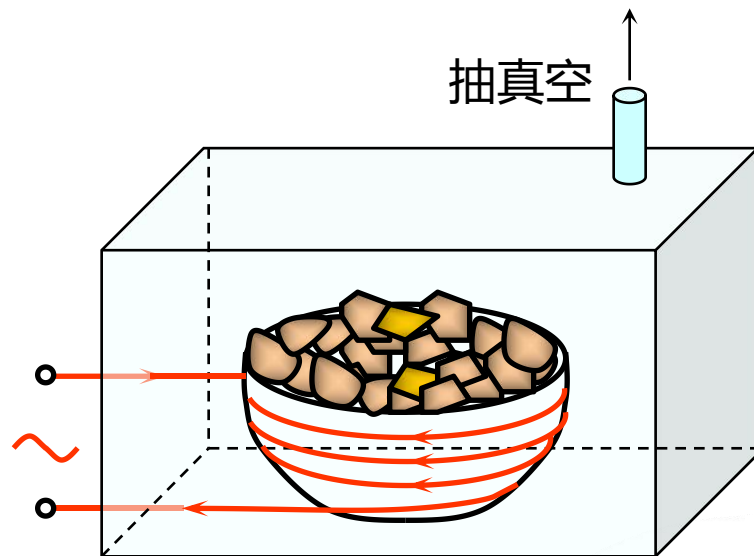
11.2.4 涡电流 趋肤效应

涡电流的应用

(1) 可用作一些特殊要求的热源

电磁感应炉：使被加热物体当中感生出涡电流，利用涡流的热效应加热物体，因此只能加热导体。

在冶金工业中，熔化某些活泼的稀有金属时，在高温下容易氧化，将其放在真空环境中的坩埚中，坩埚外绕着通有交流电的线圈，对金属加热，防止氧化。



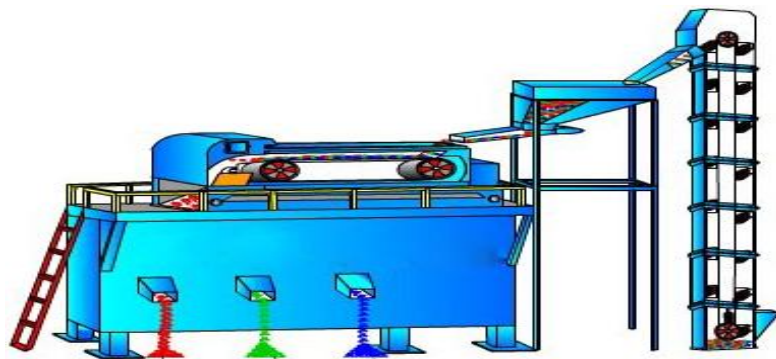
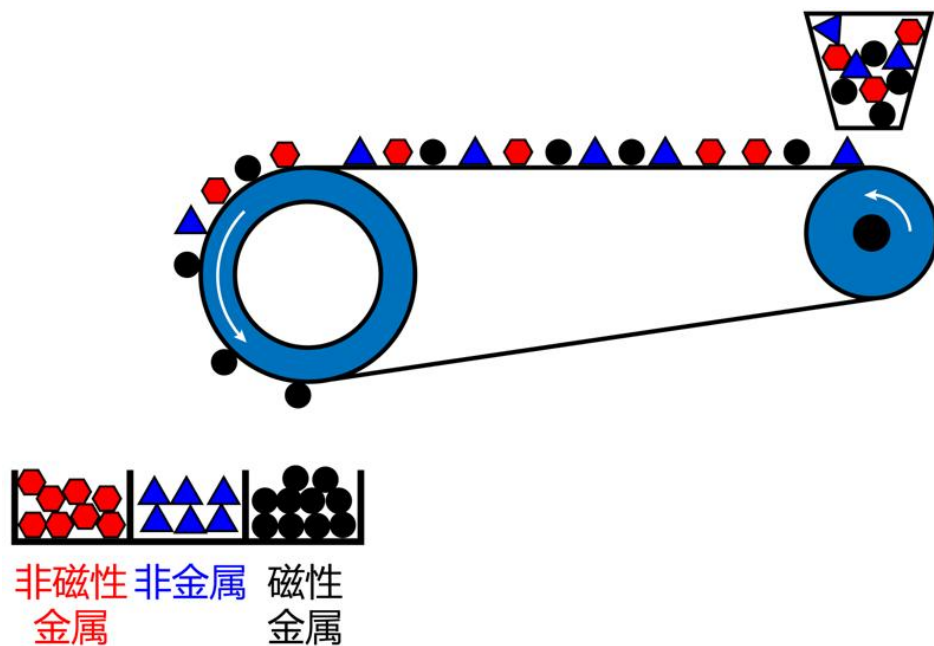
电磁感应炉的优点：加热速度快，温度均匀，材料不受污染且易于控制。

11.2.4 涡电流 趋肤效应

涡电流的应用

(2) 涡电流分选机

工作时，在分选磁辊表面产生高频交变的强磁场，当非磁性金属经过磁场时，会在内部产生涡电流，此涡电流本身会产生与原磁场方向相反的磁场，非磁性金属因磁场的排斥力作用而沿其输送方向向前飞跃，实现与其它非金属类物质的分离。



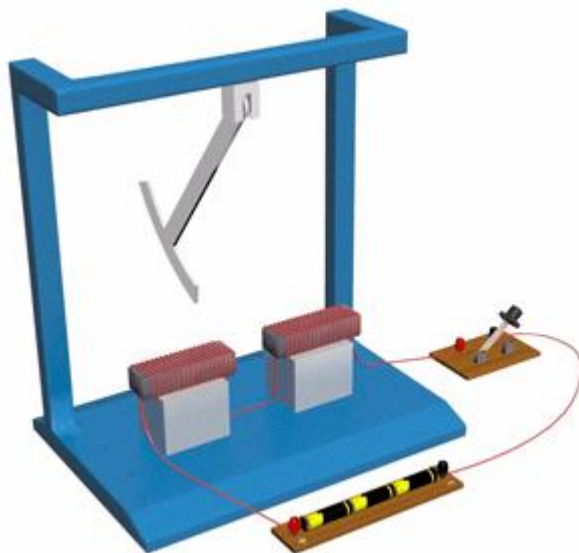
11.2.4 涡电流 趋肤效应

涡电流的应用

(3) 利用涡电流产生的阻尼作用

起源于电磁感应的阻尼，称为电磁阻尼。

应用于各式仪表中，如电气机车和电车中所用的电磁制动器。

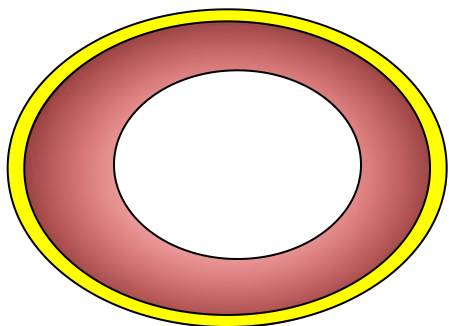


阻尼摆



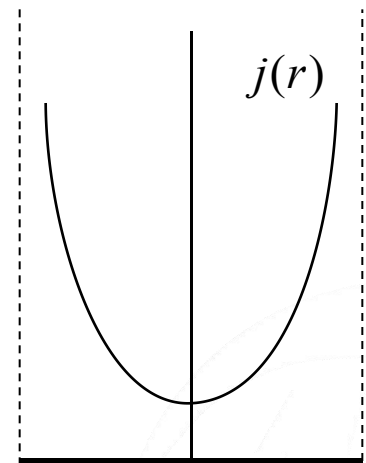
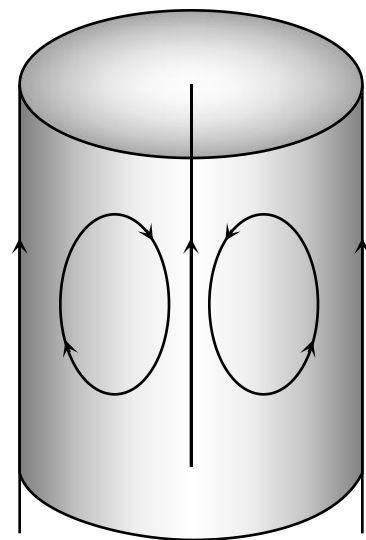
11.2.4 涡电流 趋肤效应

在柱状导体中通以交流电时，在导体中产生的涡流使交流电在导体内的横截面中不均匀，越靠近表面电流密度越大，这种交变电流集中于导体表面的效应，叫作**趋肤效应**。



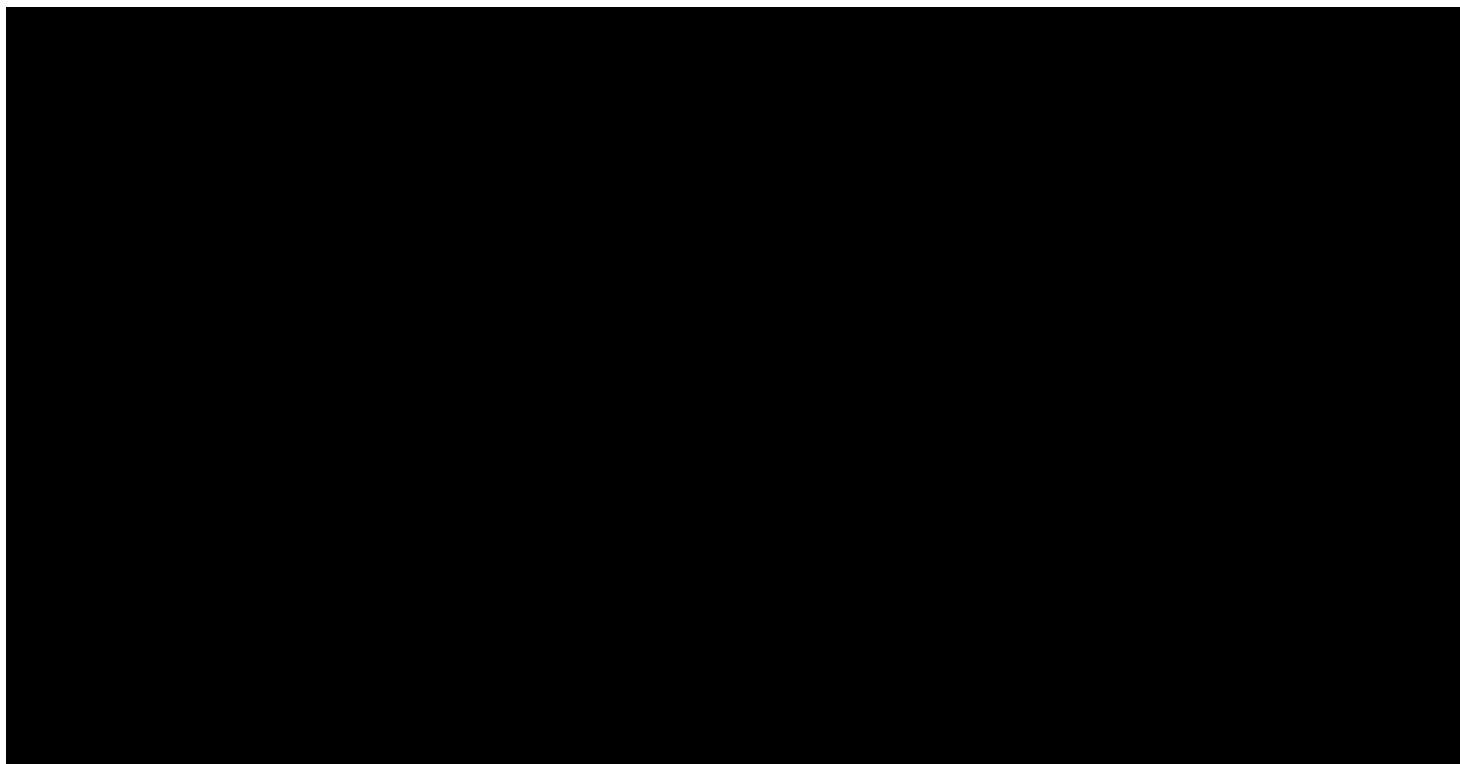
空心导线：节省材料

表面镀银：减小电阻



趋肤效应

11.2.4 涡电流 趋肤效应



趋肤效应



11.3

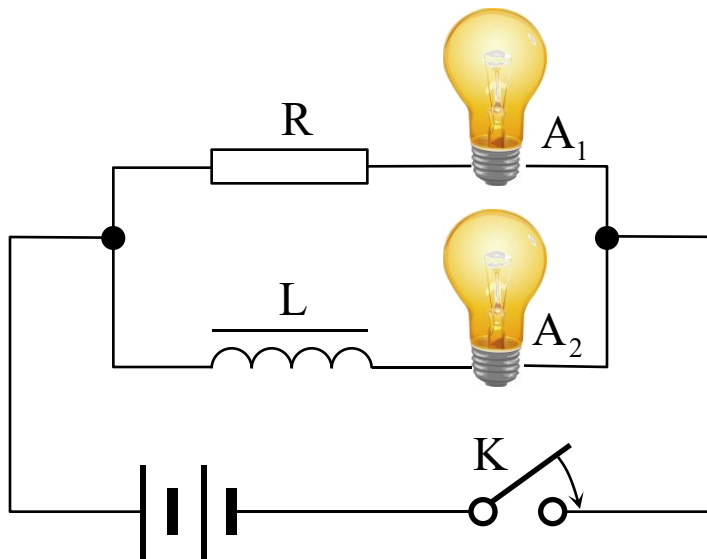
自感应与互感应



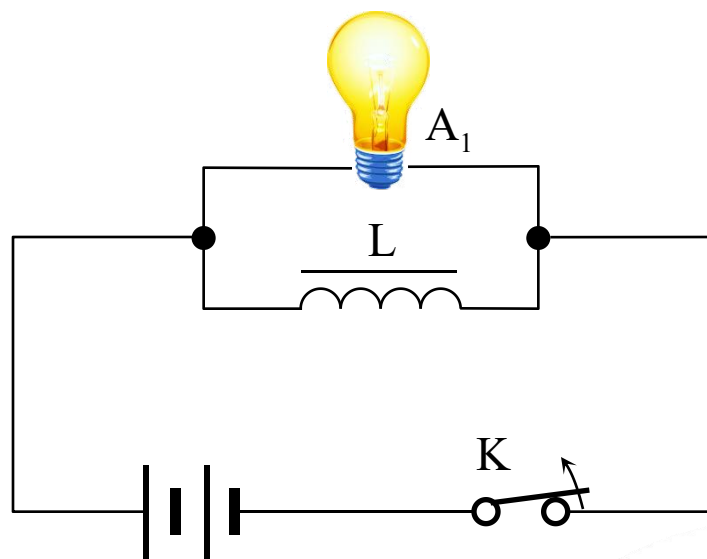
11.3.1 自感应

感生电动势：自感电动势、互感电动势。

电流流过线圈时，其磁感线将穿过线圈本身，因而给线圈提供了磁通。如果电流随时间而变化，线圈中就会因磁通量变化而产生感生电动势，这种现象叫自感现象。



电流增大时的自感现象



电流减小时的自感现象

11.3.1 自感应

自感系数

$$\varepsilon_{\text{自}} = -N \frac{d\Phi_{\text{m自}}}{dt} = -\frac{d(N\Phi_{\text{m自}})}{dt}$$



线圈的自感磁链 $\Psi_{\text{m自}} = N\Phi_{\text{m自}}$

$$\varepsilon_{\text{自}} = -\frac{d\Psi_{\text{m自}}}{dt}$$

根据毕奥-萨伐尔定律 $\Psi_{\text{m自}} \propto I$



等式

若无铁磁质
线圈不变形
介质不变化

$$\Psi_{\text{m自}} = \boxed{L}I$$

线圈的自感系数（自感）

L 等于当线圈中通有单位电流时，穿过线圈的全磁通

$$L = \frac{\Psi_{\text{自}}}{I}$$

11.3.1 自感应

(1)L反映的是自感线圈自身性质的物理量。只与线圈本身的形状、大小、线圈匝数、磁导率有关;与电流无关(铁心线圈除外)。

(2)SI制中, L的单位是亨利(H)。



约瑟夫·亨利 (美), 1830年观察到自感现象, 1832年7月发表题为《长螺线管中的电自感》的论文。亨利与法拉第是各自独立地发现电磁感应的, 但发表稍晚些。

亨利的贡献很大, 因未能立即发表而失去了许多发明专利权和发现优先权。但人们没有忘记这些杰出的贡献, 为了纪念亨利, 用他的名字命名了自感系数和互感系数的单位, 简称“**亨**”。

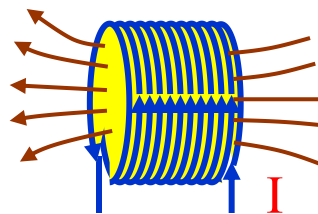
11.3.1 自感应

自感电动势

$$\varepsilon_{\text{自}} = - \frac{d\Psi_{\text{m自}}}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt} = -L \frac{dI}{dt} - I \frac{dL}{dt}$$

若回路几何形状、尺寸不变，周围介质的磁导率不变，则L为常量。

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_{\text{自}} = -L \frac{dI}{dt}$$



(1) 负号是楞次定律的数学表示：自感电动势的方向总是**阻碍**回路电流的变化

$$\frac{dI}{dt} < 0 \quad \varepsilon_{\text{自}} > 0$$

则 $\varepsilon_{\text{自}}(I_{\text{感}})$ 阻碍电流I的减小， $\varepsilon_{\text{自}}(I_{\text{感}})$ 与I的方向相同；

$$\frac{dI}{dt} > 0 \quad \varepsilon_{\text{自}} < 0$$

则 $\varepsilon_{\text{自}}(I_{\text{感}})$ 阻碍电流I的增大， $\varepsilon_{\text{自}}(I_{\text{感}})$ 与I的方向相反；

11.3.1 自感应

(2) 因为 $\varepsilon_{\text{自}} \propto L$, L 的存在总是阻碍电流的**变化**

若 $\frac{dI}{dt}$ 一定, $L \uparrow, |\varepsilon_{\text{自}}| \uparrow$ 线圈阻碍 I 变化能力越强.

L : **描述线圈电磁惯性的大小.**

自感电动势 $\varepsilon_{\text{自}}$ 是反抗电流的变化, 而不是反抗电流本身。

$\therefore L$ 对交流电流有感抗, 但对直流电流畅通。

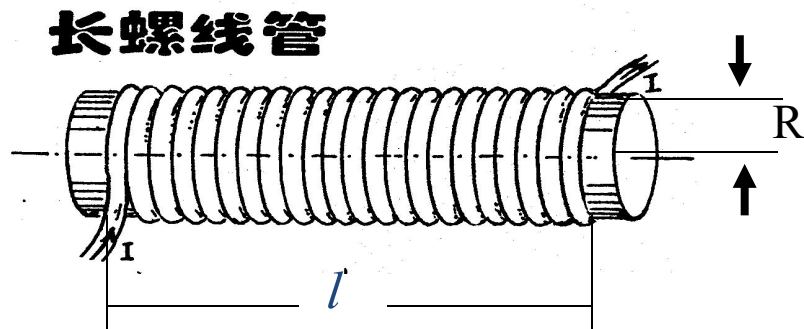
$$\varepsilon_{\text{自}} = -L \frac{dI}{dt}$$

例 题



【例 题】

计算长直螺线管（长 l 、截面半径 R 、单位匝数 n 、充满磁导率 μ 的磁介质）的自感系数。



$$L = \frac{\Psi_{\text{自}}}{I}$$

解： $\because B = \mu nI$

因为是均匀磁场 $\therefore \Psi = N\Phi = NSB = nl \cdot S \cdot \mu nI$

于是 $L = \frac{\Psi}{I} = \mu n^2 l S = \mu n^2 V$

11.3.1 自感应

自感现象的应用



滤波器



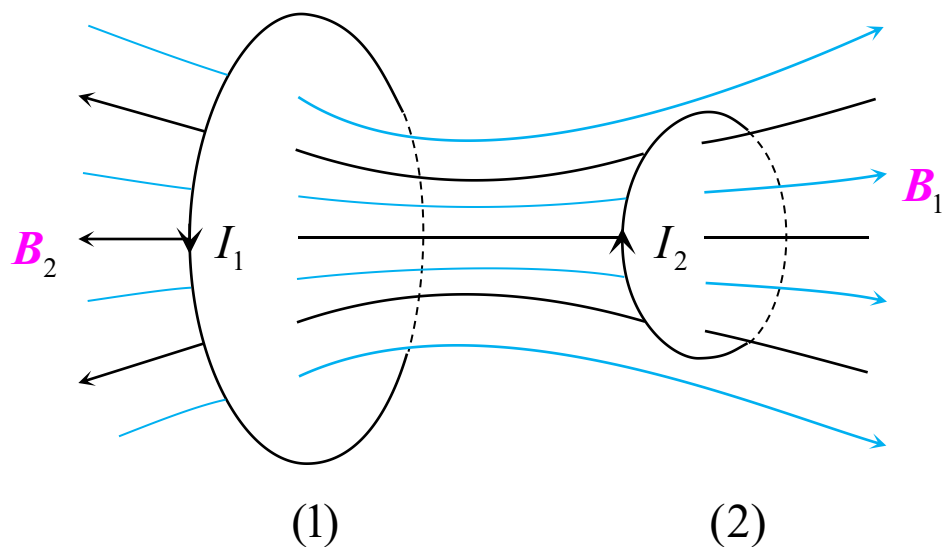
镇流器



油开关

11.3.2 互感应

因两个载流线圈中的电流变化而相互在对方线圈中激起感应电动势的现象叫互感应现象。



互感现象

11.3.2 互感应

互感系数

当两线圈的形状、匝数、互相位置保持不变时，根据毕奥-萨伐尔定律

$$\Psi_{m21} = M_{21} I_1$$

同理 $\Psi_{m12} = M_{12} I_2$

$$M_{21} = M_{12} = M$$

两线圈的互感系数，简称**互感**。

$$M = M_{21} = \frac{\Psi_{m21}}{I_1} = M_{12} = \frac{\Psi_{m12}}{I_2}$$

(1) M 反映了两个线圈磁场的相互影响程度。

只与线圈本身的形状、大小；匝数；相对位置；磁导率有关；与电流无关(铁心的线圈除外)。

(2) 在SI制中， M 的单位是亨利(H).

11.3.2 互感应

互感电动势

电流 I_1 的变化在线圈 (2) 中产生的互感电动势

$$\varepsilon_{21} = - \frac{d \Psi_{m21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

电流 I_2 的变化在线圈 (1) 中产生的互感电动势

$$\varepsilon_{12} = - \frac{d \Psi_{m12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

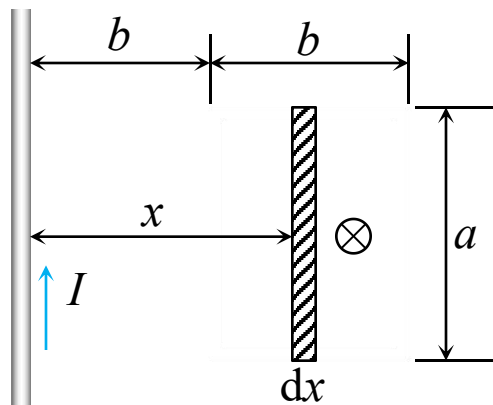
- (1) 互感电动势的大小与 M 成正比, 与相对应的线圈中电流的变化率成正比。
- (2) 负号是楞次定律的数学表示。

例 题

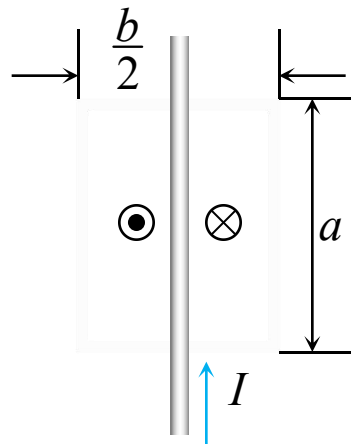


【例 题】

一矩形线圈长为 a ，宽为 b ，由100匝表面绝缘的导线组成，放在一根很长的导线旁边并与之共面。求图 (a)、(b) 两种情况下线圈与长直导线之间的互感。



(a)



(b)

解 如图 (a) 所示，已知长导线在矩形线圈 x 处磁感应强度为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

例 题

通过线圈的磁通链数为

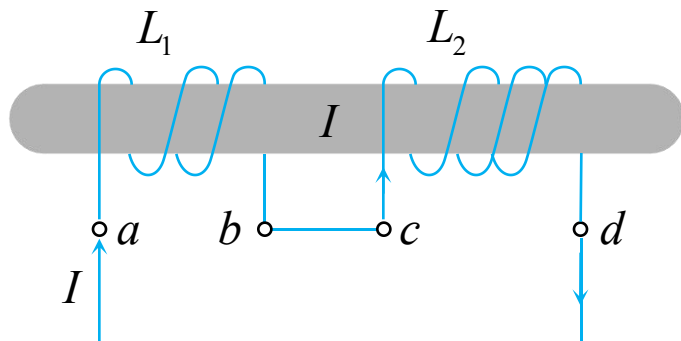
$$\Psi_m = \int_b^{2b} \frac{N\mu_0 I}{2\pi x} a dx = \frac{N\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{2b}{b}$$

线圈与长导线的互感为

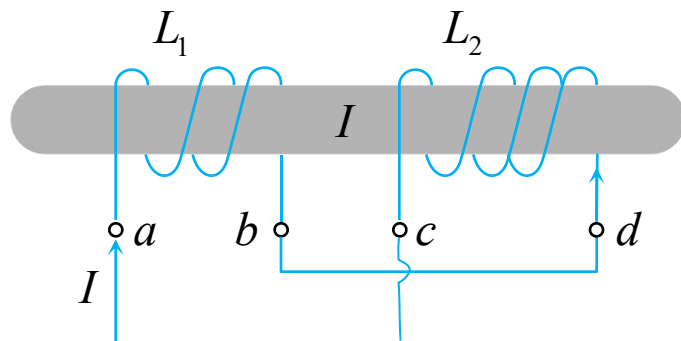
$$M = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\mu_0 a}{2\pi} \ln 2$$

图 (b) 中，直导线两边的磁感应强度方向相反且以导线为轴对称分布，通过矩形线圈的磁通链为零，所以 $M=0$ 。这是消除互感的方法之一。

11.3.2 互感应



顺接



逆接

$$\text{全磁通量 } \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = (L_1 + L_2 + 2M)I$$

顺接的等效自感

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_1 I + M I$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} + \Psi_{21} = L_2 I + M I$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = L_1 + L_2 + 2M$$

逆接的等效自感

$$L = L_1 + L_2 - 2M$$

$$\Psi_1 = \Psi_{11} - \Psi_{12} = L_1 I - M I$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} - \Psi_{21} = L_2 I - M I$$

$$L = \frac{\Psi}{I} = L_1 + L_2 - 2M$$

例 题



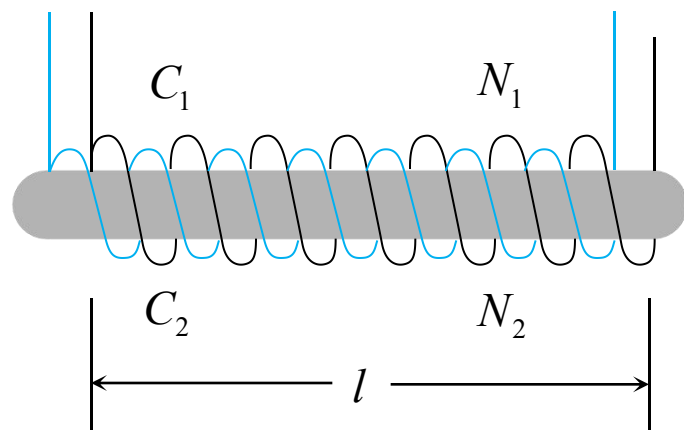
【例 题】

如图所示, C_1 表示一长螺线管 (称为原线圈), 长为 l , 截面积为 S , 共有 N_1 匝, C_2 表示另一长螺线管 (称为副线圈), 长度和截面积与 C_1 相同, 并 C_1 与共轴, 共有 N_2 匝, 螺线管内磁介质的磁导率为 μ 。求: (1) 这两个共轴螺线管的互感系数; (2) 两个螺线管的自感系数与互感系数的关系。

解 (1) 设原线圈中通有电流 I_1 , 可知管内的磁场的磁感应强度为

$$B = \mu \frac{N_1 I_1}{l}$$

通过副线圈的磁通链数 $\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = \mu \frac{N_1 N_2 I_1}{l} S$



例 题

原线圈自感系数 $M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu \frac{N_1 N_2 S}{l}$

(2) 设原线圈中通有电流 I_1 时

原线圈的磁通链数 $L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \mu \frac{N_1^2 S}{l}$

副线圈自感系数 $L_2 = \mu \frac{N_2^2 S}{l}$

$M^2 = L_1 L_2, M = \sqrt{L_1 L_2}$ 在无磁漏的情况下的结果。

在考虑磁漏的情况下 $M = K \sqrt{L_1 L_2}, K \leq 1$ 称为耦合系数。

11.4

磁场能量



11.4.1 自感磁能

当开关接上瞬时，线圈中产生
与电流方向相反的自感电动势

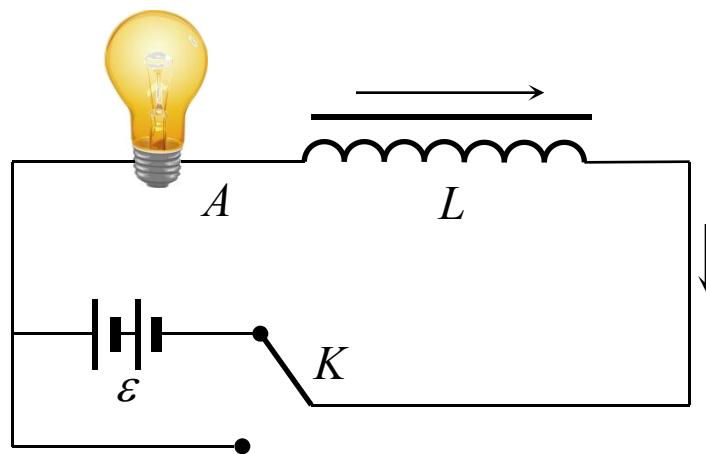
自感电动势 $\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$ 做负功

由全电路欧姆定律有

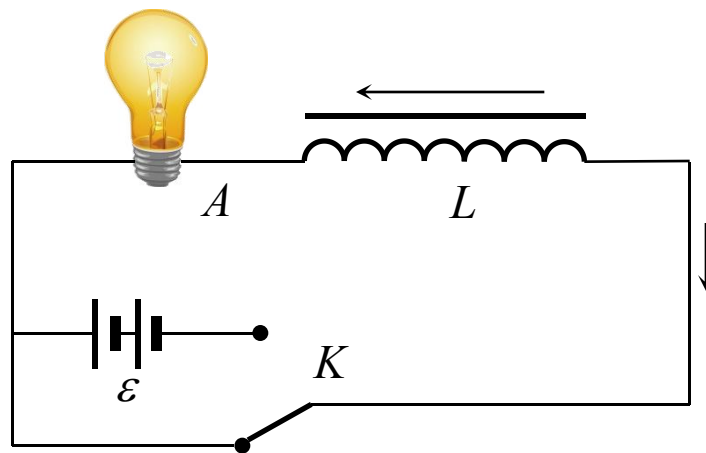
$$\varepsilon - L \frac{di}{dt} = iR \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = L \frac{di}{dt} + iR$$

在 dt 时间内，电源电动势所做元功为

$$\begin{aligned} dW &= \varepsilon \cdot i dt \\ &= Li \frac{di}{dt} \cdot dt + i^2 R dt \end{aligned}$$



电流增大时，自感电动
势阻碍电流增大



电流减小时，自感电动势补偿电流

11.4.1 自感磁能

$0 \rightarrow T$, 电流从 $0 \rightarrow I = \varepsilon/R$

$$W = \int dW = \int_0^T \varepsilon i dt = \int_0^I L i di + \int_0^T i^2 R dt$$

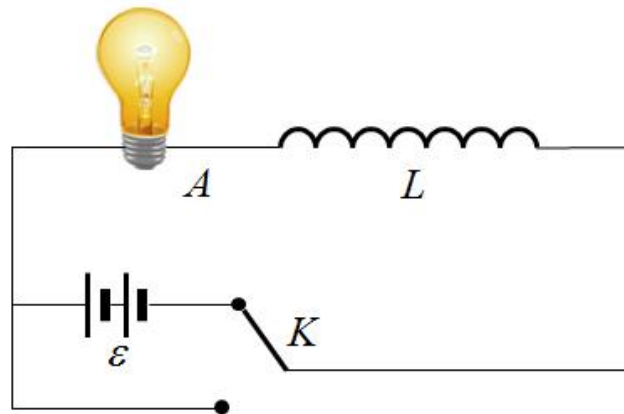
$$W = \frac{1}{2} L I^2 + \int_0^T i^2 R dt$$

电源做功分为两部份：

R 的焦耳热 $Q = \int_0^T i^2 R dt$

电源反抗自感电动势做功 $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

由能量守恒律，电源反抗自感电动势所做的功转化为储存在线圈中的能量，称为**自感磁能**。



$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

11.4.2 磁场能量

与电能一样，磁能也是存在于整个磁场分布的空间中

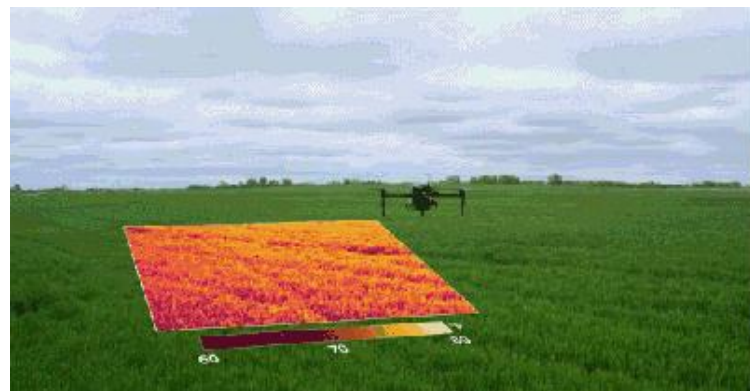
通电螺线管的自感系数 $L = \mu n^2 V$ 磁导率

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V I^2$$



$$H = nI, B = \mu nI$$

$$W_m = \frac{1}{2} \mu n I n I V = \frac{1}{2} B H V$$



遥感技术——农业遥感无人机

磁场能量密度 $w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{1}{2} B H$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$$

$$\frac{1}{2} L I^2 = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV = W_m$$

磁能法定义自感 $L = \frac{2W_m}{I^2}$

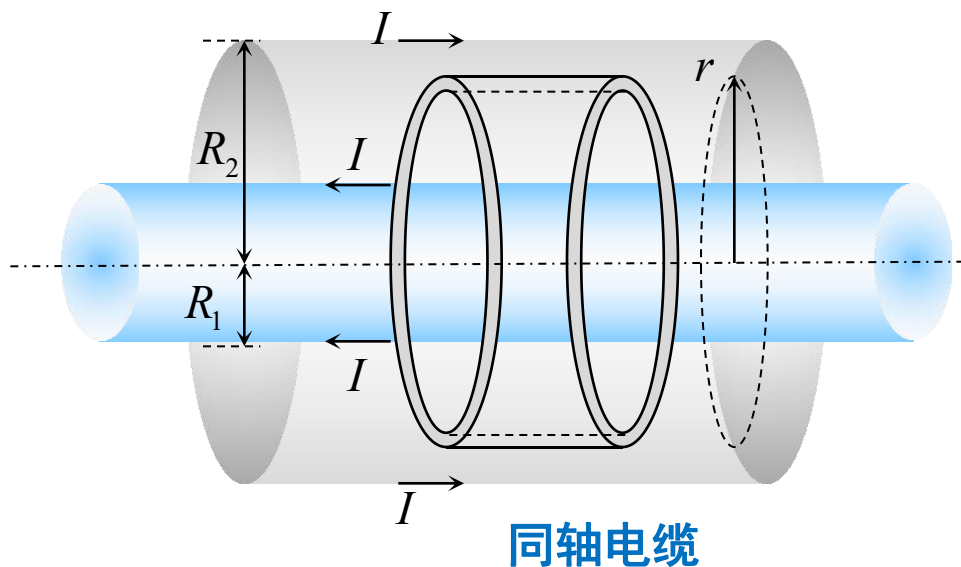
例 题



【例 题】

求无限长圆柱形同轴电缆长为 l 的一段中磁场的能量及自感。设内、外导体的截面半径分别为 R_1 、 R_2 ($R_2 > R_1$)，电缆通有电流 I ，两导体之间磁介质的磁导率假设为 μ_0 。

解 作为传输超高频信号(如微波)的同轴电缆如图所示，由于趋肤效应，磁场只存在于两导体之间，即 $R_1 < r < R_2$ 的空间内。



例 题

利用安培环路定理求得磁场分布为

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

磁场能量密度 $w_m = \frac{1}{2} BH = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$

在长为 l 的一段同轴电缆内总的磁场能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} l 2\pi r dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的圆柱形同轴电缆的自感 $L_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

11.5

位移电流 麦克斯韦方程组



麦克斯韦电磁理论的产生

1854年，23岁的麦克斯韦在剑桥大学毕业，接受了汤姆孙(L.Kelvin)的忠告(多读Faraday著作)，通读了法拉第的三卷论文集《电磁学的实验研究》。继承了法拉第的场的观念。他也认真读了安培、韦伯等人的超距作用的电磁理论，一方面给予应有的肯定，同时也深刻地洞察其内在矛盾、困难和不协调。从而坚定了以场作为基本量描述电磁规律。与超距作用相比，指导思想、提出的问题、研究对象、研究方法截然不同。

他知道:电场的高斯定理+环路定理等价于库仑定律+叠加原理,磁场的高斯定理+环路定理等价于比-萨定律+叠加原理。将要建立的电磁场理论应该用高斯定理和环路定理表示。麦克斯韦善于正确地历史地审查物理学已有的重大成果及其基础，天才地发现问题的核心和关键。扎实的数学基础使他的理论工作得心应手、扎实可靠。

11.5.1 位移电流

1. 电磁场的基本规律

静电场

高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sum q_i$$

静电场环流定理

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$$

恒稳磁场

高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0$$

安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \sum I_i$$

变化的磁场:

法拉第电磁感应定律

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

11.5.1 位移电流

麦克斯韦为了解释感生电动势对应的非静电力，提出了“涡旋电场”假说，得到

$$\varepsilon = \oint_l \mathbf{E}_{\text{感}} \mathrm{d}\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathrm{d}\mathbf{S}$$

由此可得到普遍情况下电场的环路定理

$$\oint_l \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathrm{d}\mathbf{S} \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{静}} + \mathbf{E}_{\text{感}}$$

$$\oint_l \mathbf{E}_{\text{静}} \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$$

静电场的环路定理是上式的特例。

麦克斯韦分析了静电场的高斯定理和稳恒磁场的高斯定理之后没有发现什么问题。麦克斯韦假设它们在普遍情况下仍成立。实验也证实了这一点。

然而，当麦克斯韦把稳恒磁场的环路定理应用到非稳恒情况时，却遇到了困难。为了解决这一矛盾，他提出了“位移电流”的假设。

11.5.1 位移电流

2. 传导电流和位移电流

在稳恒条件下的安培环路定理

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i = \int_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}$$

电流的连续性方程

$$\oint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq}{dt}$$

导体内各处的电流密度都不随时间变化的电流叫**稳恒电流**。

$$\oint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0$$

在稳恒电流情况下，导体内电荷的分布不随时间改变。不随时间改变的电荷分布产生不随时间改变的电场，这种电场称为**稳恒电场**。

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

11.5.1 位移电流

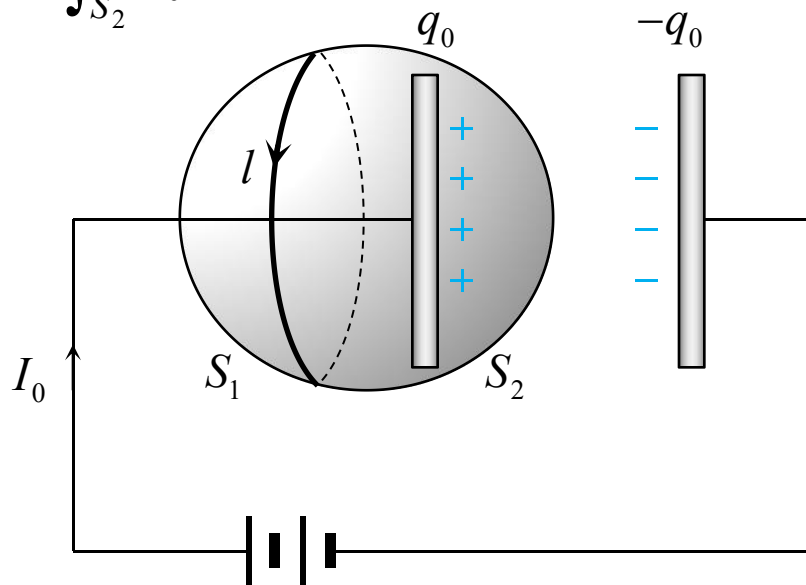
将 稳恒磁场的安培环路定理 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i = \int_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}$ 用于如图所示的非稳恒电路，则

电流在电容器处不连续，环路定理出现矛盾

$$\text{对 } S_1: \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = I_0$$

$$\text{对 } S_2: \oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_2} \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = 0$$

互相矛盾



可见在非稳恒情况下 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i = \int_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S}$ 不再适用

11.5.1 位移电流

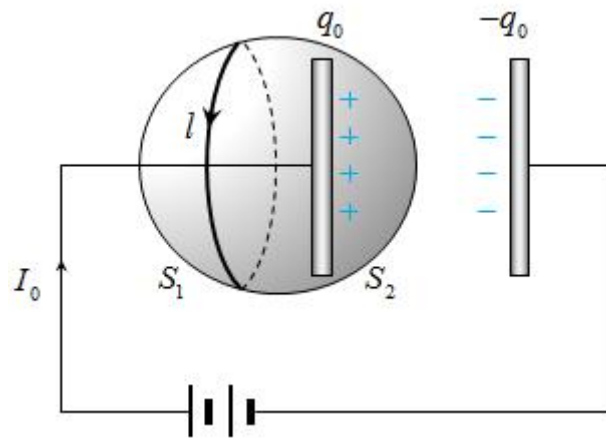
环路定理是表示矢量场主要性质的方程，当磁场确定后，其环流必定是确定的。在变化电流的情况下：

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S ? \cdot d\mathbf{S}$$

普遍情况下安培环路定理的形式如何？

解决问题的方案：矛盾的根源在于传导电流在电容器极板间中断了，因而整个电路传导电流是不连续的，虽然电容器极板上积累的电荷不能跨越极板而形成传导电流，但它在极板间产生了电场，下面研究这个电场如何随时间变化。

$$\oint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dq_0}{dt}$$



11.5.1 位移电流

根据麦克斯韦的假设

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_0 \xrightarrow{\text{两边微商}} \frac{d}{dt} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \frac{dq_0}{dt}$$

$$\downarrow \quad \text{代入} \quad \oint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_0}{dt}$$

$$\oint_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\oint_S \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{或} \quad \int_{S_1} \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

11.5.1 位移电流

位移电流密度 $\mathbf{j}_D = \frac{d\mathbf{D}}{dt}$

位移电流 $I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S}$

通过某一截面的传导电流和位移电流之代数和称作为通过该截面的**全电流**，即

$$I = I_0 + I_D = \int_S \mathbf{j}_0 \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{j}_D \cdot d\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$$

11.5.2 全电流定律

麦克斯韦的**全电流定律**：在普遍情况下，磁场强度 \mathbf{H} 沿任一闭合回路 l 的积分等于穿过以该回路为边界的任意曲面的全电流。

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i + \int_s \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

麦克斯韦位移电流假设：假设在普遍情况下，即对于任意变化的电磁场，上式都成立，并假设是普遍情况下安培环路定理。其物理意义在于说明**位移电流和传导电流激发磁场的规律是相同的**。

① 式中 s 是以 l 为周界所围的面积

② 位移电流假说的本质是：**“变化的电场激发磁场”**

11.5.2 全电流定律

位移电流与传导电流的比较

相同点：都能激发磁场，单位(SI)为安培。

不同点：

	$I_0 = \frac{dQ}{dt}$	$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt}$
产生根源	q 定向运动	E 的变化
存在于	实物（导体）	实物（导体、介质）或“真空”
热效应	产生焦耳热	不产生焦耳热
磁效应	产生磁场	产生磁场

11.5.3 麦克斯韦方程组

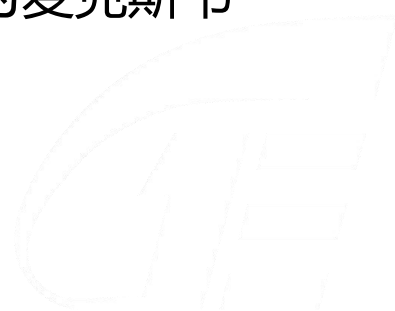
设空间既有自由电荷和稳恒传导电流，又有变化的电场和磁场，还有电介质和磁介质。

则空间中的总电场和总磁场为：

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{静(含稳恒电场)}} + \mathbf{E}_{\text{感}}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{传(含磁化电流)}} + \mathbf{B}_{\text{位}}$$

麦克斯韦将电磁现象的普遍规律概括为四个方程，称之为麦克斯韦方程组



11.5.3 麦克斯韦方程组

(1) 通过任意闭合面的电位移通量等于该曲面所包围的自由电荷的**代数和**。 高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_i$$

(2) 电场强度沿任意闭合曲线的线积分（环量）等于以该曲线为边界的任意曲面的磁通量对时间变化率的**负值**。 法拉第电磁感应定律

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

(3) 通过任意闭合曲面的磁通量恒等于**零**。 磁场的高斯定理

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(4) 磁场强度沿任意闭合曲线的线积分（环量）等于穿过以该曲线为边界的曲面的**全电流**。 位移电流假设

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

11.5.3 麦克斯韦方程组

积分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \sum q_i \\ \oint_V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \\ \oint_V \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \end{array} \right.$$

微分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_0 \\ \nabla \times \mathbf{D} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_0 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$



麦克斯韦方程组的科学价值

01

它完整地反映和概括了电磁场的运动规律，能推断和解释一切电磁现象，且逻辑体系严密、数学形式简洁。

02

它预言了光的电磁本性，将**光学**和**电磁学**统一起来。

03

电磁场是最简单的规范场，蕴藏着完美的对称结构：**时空对称**、**电磁对称**，为相对论的产生提供了雏形。

04

它在技术上的应用促进了电子技术和生产力的高度发展，可以说近代一切电报、无线电、雷达、电视、电子计算机等都只不过是麦克斯韦方程的应用而已。

例 题



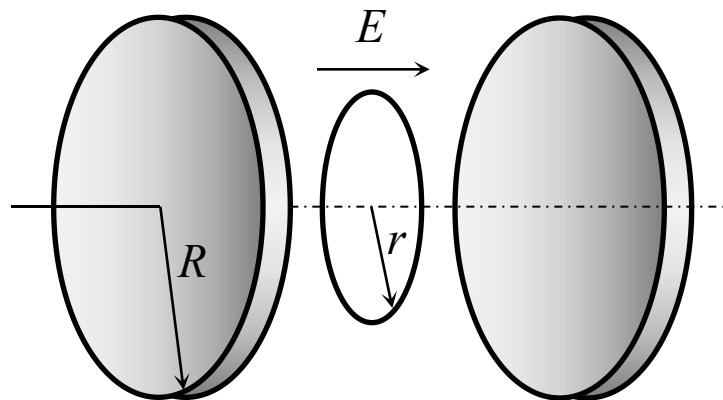
【例 题】

如图所示, 半径 $R=0.1\text{m}$ 的两块圆板构成平板电容器, 以匀速充电使电容器两板间电场的变化率为 $\frac{dE}{dt}=1\times 10^{13}\text{V}/(\text{mgs})$, 求电容器两板间的位移电流, 并计算电容器内离两板中心连线 $r(r<R)$ 处的磁感应强度 B_r 和 $r=R$ 处的磁感应强度 B_R 。

解 据位移电流的定义知

$$I_d = \frac{d\Phi_d}{dt} = S \frac{dD}{dt} = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} = 2.8\text{A}$$

两板之外有传导电流, 两板之间有位移电流, 产生的磁场对于两板中心连线具有对称性, 做半径为 r 的圆形回路。



例 题

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I_i + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

即 $H \cdot 2\pi r = \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \pi r^2$



$$H_r = \frac{\varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt} \quad B_r = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} r \frac{dE}{dt}$$

$r=R$ 时

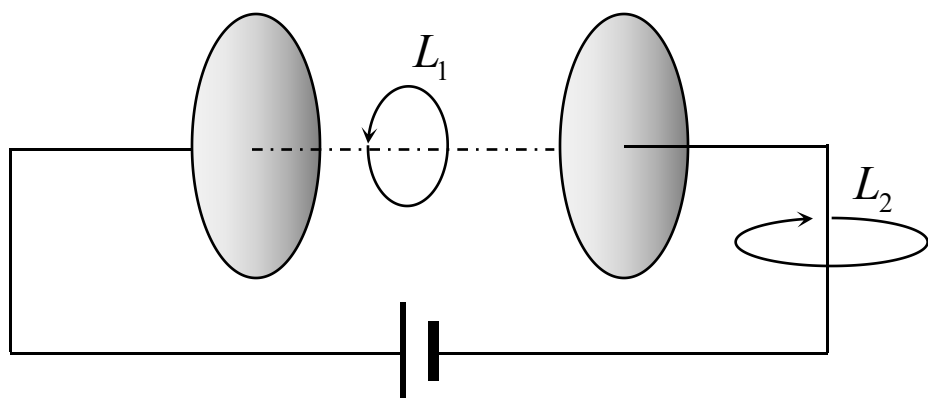
$$B_R = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} R \frac{dE}{dt} = 5.6 \times 10^{-6} \text{ T}$$

例 题



补充例题

如图所示，平板电容器（忽略边缘效应）充电时，沿环路 L_1 、 L_2 磁场强度 H 的环流中，必有（C）。



解

$$\oint_{L_1} H \, dl = I_D = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$\oint_{L_2} H \, dl = I_{\text{传}}$$

A. $\oint_{L_1} H \, dl > \int_{L_2} H \, dl$

B. $\oint_{L_1} H \, dl = \int_{L_2} H \, dl$

C. $\oint_{L_1} H \, dl < \int_{L_2} H \, dl$

D. $\oint_{L_1} H \, dl = 0$