Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Bartosz Rogowski, II rok, 303793

1 marca 2020

Metody numeryczne

Sprawozdanie nr 1 z zajęć laboratoryjnych

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji

1. Wstęp teoretyczny

Układy równań liniowych są matematyczną reprezentacją pewnych rzeczywistych własności. Jednym z nich jest np. ruch oscylatora harmonicznego. Z kursu fizyki wiadomo, że równanie takiego oscylatora ma postać:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t), \tag{1}$$

gdzie x(t) – wychylenie zależne od czasu; k – współczynnik sprężystości; m – masa ciała; ω – częstość kołowa. Aby znaleźć zależność x(t), trzeba obliczyć równanie różniczkowe drugiego rzędu (np. całkując je), jednak zamiast tego można przybliżyć pochodną z powyższego wzoru (1) poprzez iloraz różnicowy w następujący sposób:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}. \tag{2}$$

Zmienna Δt to odstęp czasowy (krok). Korzystając z równań (1) oraz (2) można otrzymać wzór rekurencyjny (3), który jest pomocny w wyznaczeniu kolejnych wyrazów, a także pozwoli sprowadzić ten problem do postaci macierzowej:

$$x_{i+1} + (\omega^2 \cdot (\Delta t)^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \tag{3}$$

Potrzebna jest jednak znajomość warunków początkowych, tzn.: $x_0 = A$ oraz $(x_1 - x_0)/h = = v_0$, gdzie v_0 to początkowa prędkość ciała, A – początkowe wychylenie ciała.

Mając te informacje oraz przyjmując $\alpha = \omega^2 \cdot (\Delta t)^2 - 2$, można zapisać układ równań za pomocą macierzy w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v_0 \cdot \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

lub krócej:

$$\boldsymbol{M}\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \boldsymbol{M}^{-1}\vec{b}$$

Teraz głównym zadaniem jest rozwiązanie układu równań, czyli znalezienie wektora $\vec{x}$. W tym celu pomocna jest **metoda eliminacji Gaussa-Jordana**. Służy ona do znajdowania macierzy odwrotnej, która po przemnożeniu przez kolumnę wyrazów wolnych da poszukiwany rezultat. Jej ogólny schemat dla macierzy kwadratowych n x n można by zapisać następująco:

1) Utworzenie macierzy współczynników wraz z dopisaniem kolumny wyrazów wolnych 2) Sprowadzenie tak utworzonej macierzy do macierzy jednostkowej, czyli takiej, która na głównej diagonali (przekątnej) ma jedynki, a na wszystkich pozostałych – zera, poprzez działanie na wierszach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez skalar) 3) Macierz współczynników jest teraz macierzą jednostkową, natomiast dopisana kolumna wyrazów wolnych tworzy wektor rozwiązań.

Tabela 1: Schemat metody eliminacji Gaussa-Jordana

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \bigwedge_{i=\{0,\ldots,n-1\}} x_i = b_i$$

Funkcję tę zapewnia procedura **gaussj**, pochodząca z biblioteki *Numerical Recipes*, która przyjmuje dwuwymiarową macierz n x n (n – wymiar macierzy), kolumnę wyrazów wolnych oraz jej wymiar (czyli wektora $\vec{b}$) i zapisuje wyniki w ów kolumnie.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Problemem jest znalezienie rozwiązań dla równania różniczkowego oscylatora harmonicznego opisanego wzorem (1) dla podanych parametrów oraz znając zadane warunki początkowe:

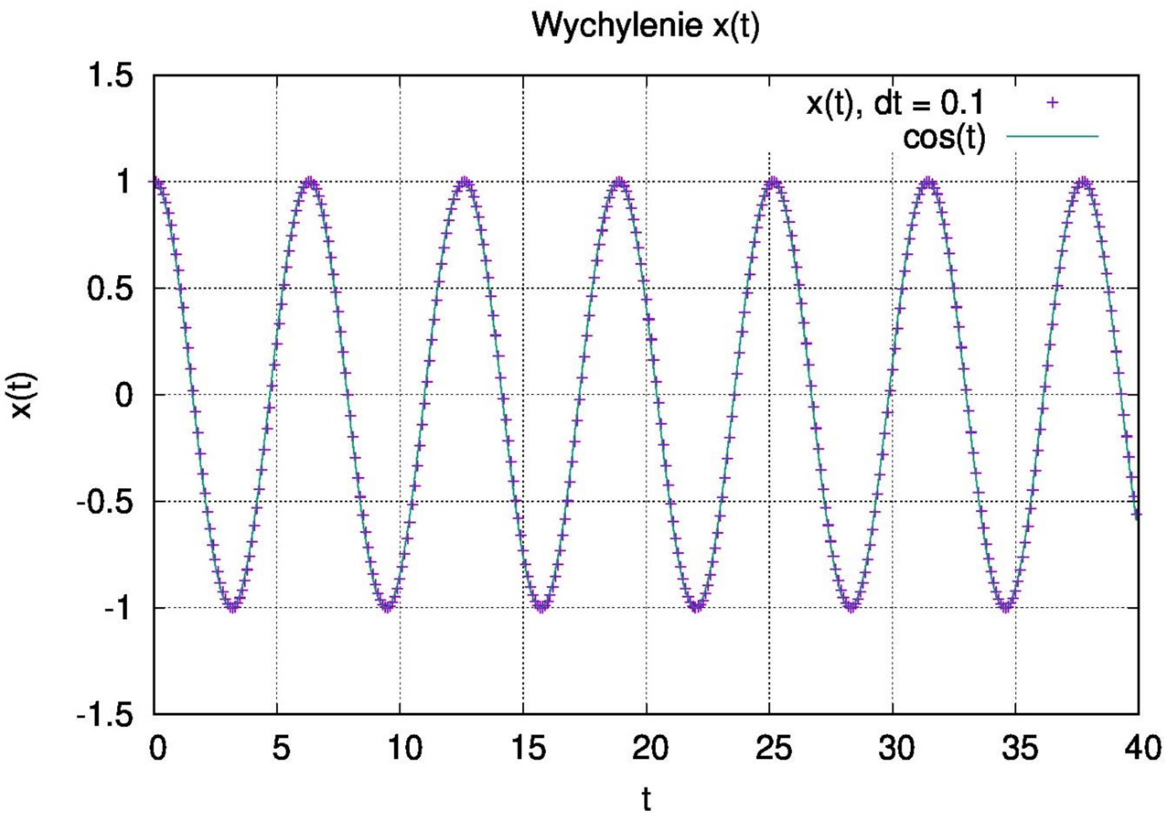
Dane:	Znaczenie:
k/m = 1	stosunek współczynnika sprężystości do masy ciała
$v_0 = 0$	prędkość początkowa oscylatora
A = 1	wychylenie początkowe (amplituda)
$\Delta t = 0.1$	krok czasowy (też: całkowania)
N = 400	liczba kolejnych pomiarów (a więc wymiar macierzy)

Tabela 2: Dane otrzymane w treści zadania

za pomocą **metody eliminacji Gaussa-Jordana** – funkcja gaussj. Został osiągnięty pożądany efekt, bowiem graficzna analiza wyników pozwala określić jaka jest zależność przemieszczenia ciała od czasu.

2.2 Wyniki

Rezultat napisanego na zajęciach programu (dwie kolumny: kolejne sekundy z krokiem 0.1, od 0 aż do 39.9s oraz wyliczone dla nich kolejne położenia), realizujący wcześniej omówiony schemat, został zapisany do oddzielnego pliku, a następnie specjalnie przygotowany skrypt pozwolił wygenerować wykres (rys. 1) w programie Gnuplot.



Rysunek 1: Graficzny plik zrobiony na zajęciach - otrzymane punkty wychylenia wraz z nałożonym analitycznym rozwiązaniem równania różniczkowego (1)

Punkty oznaczone przez fioletowy symbol „+" to kolejne położenia ciała w kolejnych sekundach ruchu (z krokiem 0.1 s). Widać, że leżą one na wykresie (ciągłej) funkcji cosinus (niebieska linia), zatem ruch ciała widziany z góry przypomina właśnie ten kształt[1].

[1] W rzeczywistości równanie (1) wygląda nieco inaczej, bowiem zaniedbaliśmy tu wszelkie opory. Realny kształt przypomina więc cosinusa gasnącego w czasie.

3. Wnioski

Na podstawie analizy uzyskanych wyników można sformułować poniższe stwierdzenia:

- Niektóre „trudne na pierwszy rzut oka” problemy da się sprowadzić do innych, bardziej przystępnych.
- Rozwiązywanie układów równań metodą eliminacji daje bardzo dobre rezultaty, a sam algorytm postępowania jest stosunkowo prosty.
- Dużą rolę odgrywa krok czasowy (całkowania), ponieważ odpowiada za dokładność wyników. Im jest mniejszy, tym uzyskujemy lepsze rezultaty, jednak wymaga to większej liczby obliczeń.
- Zadanie zostało zdyskretyzowane (wspomniany wyżej krok), a więc połączenie otrzymanych punktów byłoby błędem.
- Punkty zdają się należeć do wykresu funkcji cosinus – analitycznego rozwiązania, co świadczy o tym, że zadanie zostało wykonane poprawnie.