

Metody numeryczne

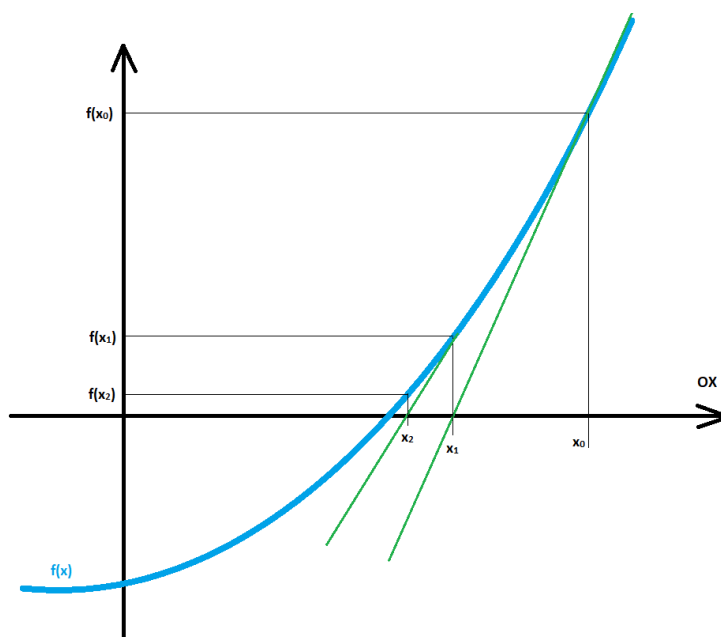
Sprawozdanie nr 6 z zajęć laboratoryjnych

Wyznaczanie pojedynczych i wielokrotnych pierwiastków równania nieliniowego

1. Wstęp teoretyczny

Problemy matematyczne bardzo często sprowadzają się do rozwiązania różnego rodzaju równań. Wyznaczanie pierwiastków (miejsc zerowych, czyli argumentów, dla których wartość funkcji wynosi 0) równań nieliniowych (czyli takich, których nie da zapisać się jako $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{R}$) nie jest tak trywialne jak dla równań liniowych. Niekiedy bywa nawet, że trudnym zadaniem jest znalezienie miejsc zerowych w tradycyjny (analityczny) sposób – wtedy używa się metod numerycznych, bowiem nie zawsze istnieją formuły pozwalające dokładnie obliczyć pierwiastek (np. $x - \cos x = 0$, rozwiązanie uzyskuje się za pomocą przybliżeń: $x \approx 0.739085133215 \dots$). W tym celu stosuje się rozmaite algorytmy iteracyjne, które przybliżają rozwiązanie z dokładnością, którą można zaakceptować.

Metoda stycznych (Newtona – Raphsona) służy właśnie do znajdowania pierwiastków równań nieliniowych jednej zmiennej, także tych o krotności większej niż 1 (zarówno parzystych jak i nieparzystych).



Rysunek 1. Schemat metody stycznych.

Dana jest nieliniowa funkcja $f(x)$. Najpierw wybierana jest wartość startowa x_0 (dowolna lub koniec przedziału, w którym znak funkcji jest taki sam jak znak jej drugiej pochodnej). Z punktu $(x_0, f(x_0))$ leżącego na wykresie tej funkcji prowadzona jest prosta – styczna, która przecina oś OX w punkcie o odciętej x_1 – jest to pierwsze przybliżenie pierwiastka tej funkcji. Jeżeli wartość funkcji w tym punkcie jest niezerowa, tzn. $f(x_1) \neq 0$, to z punktu $(x_1, f(x_1))$ ponownie prowadzona jest styczna, która przecina oś OX w punkcie o odciętej x_2 (drugie przybliżenie). Powyższe czynności są powtarzane k razy, dopóki nie zostanie spełniony warunek:

$$|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon, \quad (1)$$

gdzie ε to akceptowalna przez nas dokładność (np. $\varepsilon = 10^{-6}$). Metodę tę ilustruje rysunek 1.

Jeżeli $f(x)$ jest dodatkowo wielomianem rzędu $n \geq 2$:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (2)$$

to można dokonać modyfikacji powyższej metody tak, aby po znalezieniu pierwszego przybliżenia miejsca zerowego x_j zredukować wzór funkcji (2). Wystarczy dokonać dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - x_j)$. Wówczas otrzymamy wielomian stopnia $n - 1$:

$$f(x) = (x - x_j)(b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) + r_j. \quad (3)$$

Nowe współczynniki b można otrzymać zgodnie ze wzorem:

$$b_k = \begin{cases} 0, & k = n \\ a_{k+1} + x_j b_{k+1}, & k = \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases} \quad (4)$$

a resztę jako:

$$r_j = a_0 + x_j b_0. \quad (5)$$

Wraz ze zwiększającą się dokładnością przybliżenia x_j , maleje reszta z dzielenia wielomianu r_j . Wykonując kolejne dzielenie, funkcja przyjmuje postać:

$$f(x) = (x - x_j)^2 (c_{n-2} x^{n-2} + \dots + c_1 x + c_0) + r'_j (x - x_j) + r_j. \quad (6)$$

Parametr c_k wyznacza się zgodnie ze wzorem (4), natomiast r'_j - według wzoru (5).

Ostatecznie nowego przybliżenia zer wielomianów dokonuje się na podstawie wcześniejszego:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{r_j}{r'_j}. \quad (7)$$

Po osiągnięciu zbieżności, patrz: wzór (1), a tym samym znalezieniu pierwszego miejsca zerowego, dzielenie wielomianu przez dwumian pozbywa się ów pierwiastka, a następna iteracja algorytmu spowoduje poszukiwanie kolejnego.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było znalezienie wszystkich zer wielomianu stopnia $n = 5$:

$$f(x) = x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 92x^2 - 196x + 240 \quad (8)$$

metodą Newtona – Raphsona, korzystając przy tym z własnej implementacji funkcji – *licz_r*, która wylicza resztę z dzielenia wielomianu oraz uzupełnia wektor nowych współczynników.

Jej argumentami są:

- aktualny wektor współczynników funkcji
- wektor nowych współczynników funkcji (zostanie nadpisany)
- aktualny stopień wielomianu (wynikający z dzielenia przez dwumian)
- wartość, dla której obliczana jest reszta.

Funkcja ta służy do wyliczenia współczynników b, r_j (wzór (9)), a także c oraz r'_j (wzór (10)) poprzez odpowiednie wywołania (ilustrują je poniższe instrukcje):

$$\text{licz_r}(a, b, n_a, x0) \quad (9)$$

$$\text{licz_r}(b, c, n_a-1, x0). \quad (10)$$

Jeżeli przez n rozumiemy stopień wielomianu, a przez l – numer miejsca zerowego (iteracja po pierwiastkach), to aktualny stopień wielomianu można obliczyć jako:

$$n_a = n - l + 1. \quad (11)$$

W zadaniu przyjęto następujące parametry:

$x_0 = 0$	wartość startowa, od której rozpoczyna algorytm metody
$it_{MAX} = 30$	maksymalna liczba iteracji przybliżania ¹
$\varepsilon = 10^{-7}$	minimalna wymagana dokładność przybliżenia

Tabela 1. Parametry dane w treści zadania.

Do przechowywania aktualnych przybliżeń wystarczą dwie zmienne – $x0$ (aktualne przybliżenie) oraz $x1$ (nowe przybliżenie), natomiast współczynników wielomianu – wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. W każdej iteracji zachowujemy nowe przybliżenie dzięki skopiowaniu wartości $x1$ do $x0$. Domyślnie algorytm wykonuje 30 iteracji, jednak jeśli warunek zbieżności zostanie osiągnięty wcześniej, to pętla jest przerywana i algorytm zaczyna poszukiwania następnego zera wielomianu.

2.2 Wyniki

Znając pierwiastki wielomianu (patrz: wzór (8)) można prześledzić działanie algorytmu dla poszczególnych wartości. Są one zestawione w poniższych tabelach. Pierwsze kolumny to numer iteracji, natomiast drugie to przybliżony pierwiastek x_0 , w kolejnych zestawione są reszty z dzielenia wielomianu.

it	x_0	r_j	r'_j
1	1.22449	240	-196
2	0.952919	-43.1289	-158.813
3	0.999111	10.5714	-228.86
4	1	0.195695	-220.179
5	1	$7.96468 \cdot 10^{-5}$	-220
6	1	$7.96468 \cdot 10^{-5}$	-220

Tabela 2. Przybliżenia dla $x = 1$

it	x_0	r_j	r'_j
1	-5.45455	-240	-44
2	-4.46352	-120.975	122.071
3	-4.10825	-24.2755	68.3304
4	-4.00957	-4.31754	43.7539
5	-4.00009	-0.347977	36.6891
6	-4	-0.00323665	36.0065
7	-4	$-2.90891 \cdot 10^{-7}$	36

Tabela 3. Przybliżenia dla $x = -4$

¹ Mogłoby się zdarzyć, że potrzebna jest zbyt duża liczba iteracji, aby spełnić wymagany próg dokładności, stąd to „zabezpieczenie”.

it	x_0	r_j	r'_j
1	10	10	1
2	10	0	1

Tabela 4. Przybliżenia dla $x = 10$

it	x_0	r_j	r'_j
1	15	-60	4
2	9.20218	5850	1009
3	5.53752	1687.53	460.488
4	3.38316	469.259	217.818
5	2.33534	118.159	112.767
6	2.0277	22.07	71.739
7	2.00021	1.67505	60.9441
8	2	0.0128842	60.0073
9	2	$7.83733 \cdot 10^{-7}$	60

Tabela 5. Przybliżenia dla $x = 2$

it	x_0	r_j	r'_j
1	-2.30769	30	13
2	-2.94284	5.32544	8.38462
3	-2.99954	0.403409	7.11433
4	-3	0.00321531	7.00092
5	-3	$2.10929 \cdot 10^{-7}$	7

Tabela 6. Przybliżenia dla $x = -3$

3. Wnioski

- Znajdowanie miejsc zerowych równań nieliniowych nie zawsze jest trywialne. Zdarza się, że nie istnieje analityczna formuła na wartość pierwiastka, dlatego stosowane są metody iteracyjne, których zadaniem jest jak najdokładniejsze jej przybliżenie.
- Metody iteracyjne nie należą do najszybciej wykonujących się algorytmów (na szybkość wpływa także wybór wartości startowej), jednak są niezawodne – rozwiązania zostaną znalezione.
- Metoda Newtona – Raphsona z modyfikacją o iteracyjne dzielenie wielomianu przez dwumian jest dobrym sposobem na znalezienie wszystkich zer wielomianu. Ponadto jest ona jednopunktowa, tzn. obliczenia są uzależnione od jednego punktu, a nie od dwóch jak np. metoda siecznych.
- Zmiana wartości startowej wpływa na liczbę iteracji. W tym przypadku wszystkie przybliżenia zostały znalezione w mniej niż 10 iteracjach, ale już dla $x_0 = -200$ program wykonuje nawet 21 iteracji dla jednego pierwiastka.
- Problemem metody stycznych może być to, że dla k -tego przybliżenia znajdzie równość $f(x_k) = 0$, wtedy bowiem styczna do funkcji w punkcie $(x_k, f(x_k))$ będzie równoległa do osi OX (może się z nią pokrywać albo nie), co spowoduje problem w znalezieniu następnego przybliżenia miejsca zerowego.

ⁱ Rysunek 1 został wykonany w programie Paint, natomiast rozwiązanie problemu $x - \cos x = 0$ ze wstępu teoretycznego zostało znalezione przy użyciu programu Matlab.