

Metody numeryczne

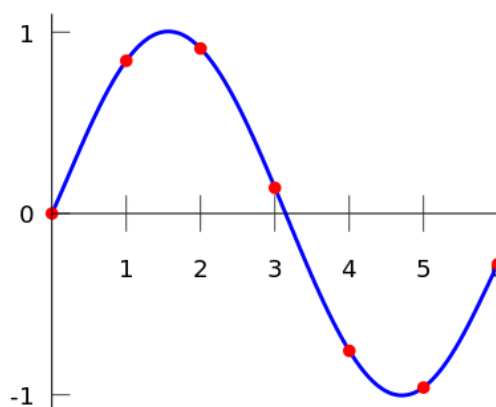
Sprawozdanie nr 7 z zajęć laboratoryjnych

Interpolacja wielomianowa

1. Wstęp teoretyczny

W modelowaniu matematycznym bardzo często mamy do czynienia z różnego rodzaju funkcjami, których analiza wykresów dostarcza informacji o danym zjawisku. Wykresy funkcji elementarnych są znane, jednak istnieją takie, których kształt wykresu nie jest znany, podczas gdy istnieje potrzeba narysowania wykresu.

Interpolacja wielomianowa polega na przybliżaniu wartości funkcji, mając do dyspozycji $n+1$ różnych punktów x_0, \dots, x_n (tzw. węzły interpolacyjne) oraz wartości w tych punktach $y_i = f(x_i)$; $i = 0, \dots, n$, w punktach różnych od węzłów na określonym przedziale (a znając wiele wartości, można narysować punkty, które „układają się w wykres”¹), a ponadto na dokonaniu oszacowania błędów tych przybliżeń. Istnieje kilka sposobów doboru węzłów.



Rysunek 1. Przykład² interpolacji.

Czerwone punkty to węzły interpolacyjne, natomiast niebieska krzywa to wielomian interpolacyjny.

Można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia nie większego od n , $n > 0$, który w punktach x_0, \dots, x_n przyjmuje wartości y_0, \dots, y_n :

$$W_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0. \quad (1)$$

¹ Dyskretny (z zadaniem małym krokiem) zestaw punktów daje informacje o ciągłym zbiorze punktów, które tworzą wykres funkcji.

² Źródło: https://www.wikiwand.com/en/Polynomial_interpolation [data dostępu: 23 kwietnia 2020]

Podstawiając węzły interpolacyjne do wzoru (1) otrzymać można układ równań, który w postaci macierzowej przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Wyznacznik D (zwany wyznacznikiem Vandermode'a) macierzy ze wzoru (2) zawierającej węzły (macierz Vandermode'a) wyraża się wzorem:

$$D = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0. \quad (3)$$

Zatem układ ze wzoru (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie:

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^n y_j D_{ij}, \quad (4)$$

gdzie D_{ij} to wyznaczniki macierzy dopełnień algebraicznych. Dalsze operacje są uzależnione od wybranej metody interpolacyjnej.

Jedną z nich jest **interpolacja Newtona dla równoodległych węzłów**. Zakłada ona, że węzły tworzą siatkę w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih \\ i &= 0, \dots, n \\ h &= \frac{x_{max} - x_{min}}{n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ciekawym zjawiskiem jest to, że wraz ze wzrostem liczby **węzłów równoodległych** nie zawsze maleje oszacowanie błędu. Jego przyczyną są oscylacje wielomianów wyższych rzędów – wartości n -tych pochodnych rosną szybko wraz ze wzrostem stopnia³. Dla niektórych funkcji odległości między kolejnymi węzłami również wpływają na większe oszacowanie błędu. Zjawisko to jest widoczne zwłaszcza na końcach przedziału⁴ i nosi ono nazwę **efektu Rungego**.

W tym miejscu warto zaznaczyć, że optymalnymi położeniami węzłów są **zera wielomianów Czebyszewa**. Wielomiany te (dla $x \in [-1, 1]$) definiuje się jako:

$$T_n(x) = \cos[n \cos^{-1}(x)], \quad (6)$$

wówczas zerami są:

$$x_m = \cos\left(\pi \frac{2m+1}{2n+2}\right); m = 0, \dots, n \quad (7)$$

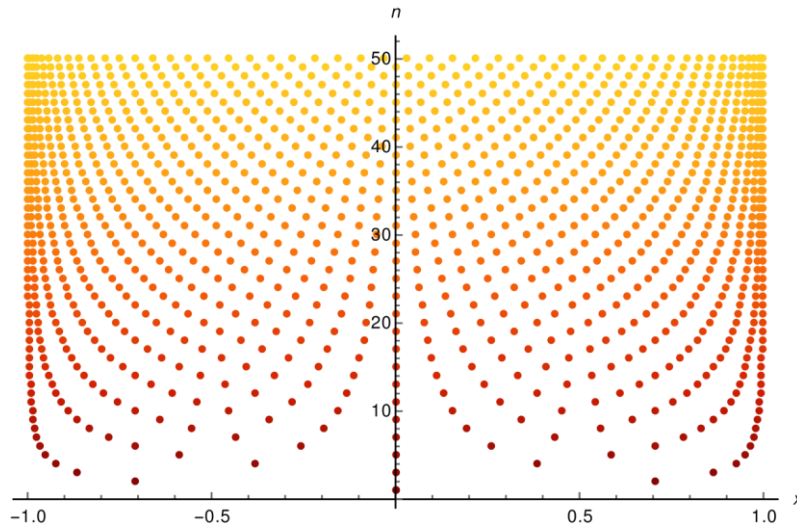
Z powyższego założenia wynika, że jest wzory (6) i (7) są prawdziwe w wąskim przedziale $x \in [-1, 1]$. Aby dostosować je do zadanego przez nas, wystarczy dokonać skalowania przedziału, a wzór (7) przyjmie postać:

$$x_m = \frac{1}{2} \left[(x_{min} - x_{max}) \cos\left(\pi \frac{2m+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max}) \right]; m = 0, \dots, n. \quad (8)$$

³ Źródło: https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon#Reason [data dostępu: 25 kwietnia 2020]

⁴ Źródło: <https://demonstrations.wolfram.com/RungePhenomenon/> [data dostępu: 25 kwietnia 2020]

Zera te nie są umieszczone równomiernie, co ilustruje rysunek 2. Zaletą tej metody jest fakt, iż wraz ze zwiększaniem liczby węzłów, oszacowanie błędu nie wykazuje tendencji wzrostowej⁵.



Rysunek 2. Rozmieszczenie zer wielomianów Czebyszewa w zależności od liczby węzłów⁶.

Aby uzyskać **wzór interpolacyjny Newtona**, konieczne jest wprowadzenie kilku definicji. Iloraz różnicowy i -tego rzędu określony jest jako:

$$f(x_0; \dots; x_i) = \frac{y_i - \binom{i}{1}y_{i-1} + \binom{i}{2}y_{i-2} - \dots + (-1)^i y_0}{h^i i!} = a_i. \quad (9)$$

Różnice progresywne („do przodu”) definiowane są następująco:

$$\Delta^k f = \begin{cases} f(x+h) - f(x); k=1 \\ \Delta(\Delta^{k-1}f); k \geq 2; k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (10)$$

Wówczas dla $k = 0, \dots, n$:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{h^k k!}. \quad (11)$$

Ostatecznie **wzór interpolacyjny Newtona dla równoodległych węzłów** przedstawia się jako:

$$W_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!}(x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{h^n \cdot n!}(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}), \quad (12)$$

co można uprościć do:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^n f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i). \quad (13)$$

Oznaczenia:

$f^{(j)}(x_0)$ – iloraz różnicowy rzędu j liczony dla węzła, względem którego obliczany jest wielomian
 x_i – i -ty węzeł interpolacyjny

⁵ Źródło: <https://demonstrations.wolfram.com/RungesPhenomenon/> [data dostępu: 25 kwietnia 2020]

⁶ Źródło: https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_nodes [data dostępu: 24 kwietnia 2020]

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem była interpolacja funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (14)$$

na podstawie $n+1$ **węzłów równoodległych** oraz **tych, będącychi zerami wielomianów Czebyszewa**. W treści zostały podane następujące parametry:

$x_{min} = -5$	początek przedziału
$x_{max} = 5$	koniec przedziału
$n = 5, 10, 15, 20$	stopień wielomianu interpolacyjnego

Tabela 1. Parametry podane w treści zadania.

W programie zaimplementowano kilka tablic o rozmiarze $n+1$:

- x_m – jednowymiarowa, przechowuje węzły
- y_m – jednowymiarowa, przechowuje wartości funkcji (patrz: wzór (14)) dla węzłów
- f_m – dwuwymiarowa kwadratowa, przechowuje ilorazy różnicowe.

Tablica ilorazów została wypełniona według wzoru:

$$f_{i,j} = \begin{cases} (y_m)_{i,y} ; y = 0 \wedge i = 0, \dots, n \\ \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{(x_m)_i - (x_m)_{i-j}} ; y \neq 0 \wedge i = 0, \dots, n \end{cases} ; i, j \in \mathbb{N} \quad (15)$$

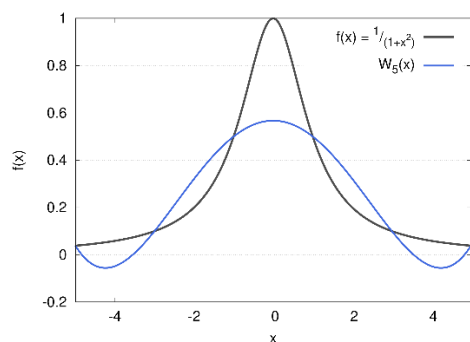
Do pliku zapisywane były punkty z przedziału $[x_{min}, x_{max}]$ z krokiem 0,01 oraz wartości **wielomianu interpolacyjnego Newtona** dla nich. Wartości te były obliczane zgodnie ze wzorem (13) w samodzielnie zaimplementowanej funkcji, która przyjmowała następującą listę argumentów:

- x – punkt (położenie międzywęzłowe), dla którego jest szukana wartość wielomianu
- n – stopień **wielomianu interpolacyjnego Newtona**
- x_m – tablica przechowująca kolejne węzły
- f_m – tablica przechowująca ilorazy różnicowe (w zasadzie potrzebne są tylko elementy diagonalne).

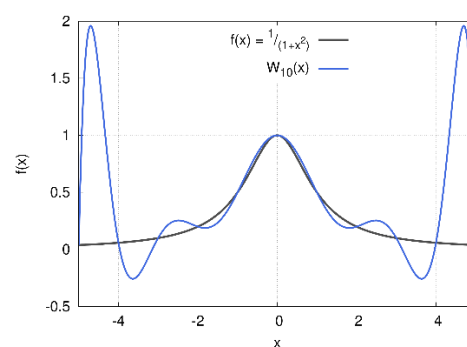
2.2 Wyniki

Lista punktów, które zostały zapisane do dwóch plików (oddzielnie dla przypadku **węzłów równoodległych** i **zer wielomianów Czebyszewa**), posłużyła do wygenerowania za pomocą skryptu w programie Gnuplot ich rozmieszczenia na płaszczyźnie. Ponieważ znany jest kształt krzywej opisanej przez wzór (14), można porównać rozmieszczenie punktów (z zadanyim krokiem) z faktycznym kształtem tej funkcji, co zostało zestawione na poniższych rysunkach.

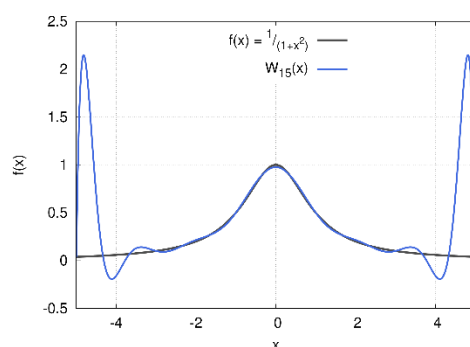
Rysunki 3-6 przedstawiają **interpolację wielomianową Newtona metodą węzłów równoodległych**, natomiast rysunki 7-10 – **metodą zer wielomianów Czebyszewa**. Stopień wielomianu podany jest zarówno w legendzie jak i opisie.



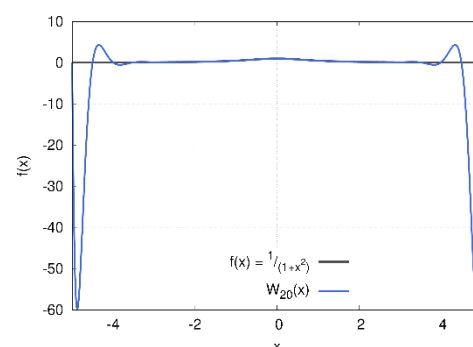
Rysunek 3. Interpolacja funkcji wielomianem Newtona stopnia 5. (węzły równoodległe).



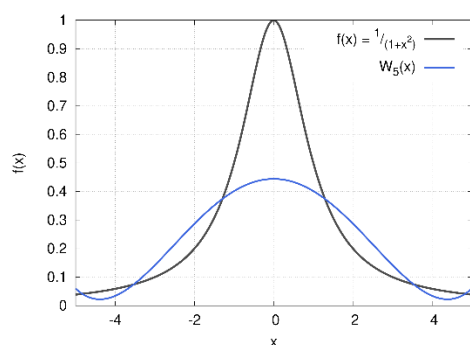
Rysunek 4. Interpolacja funkcji wielomianem Newtona stopnia 10. (węzły równoodległe).



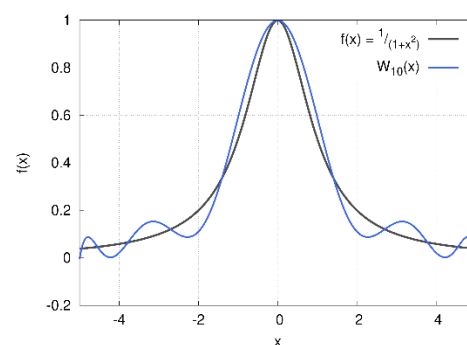
Rysunek 5. Interpolacja funkcji wielomianem Newtona stopnia 15. (węzły równoodległe).



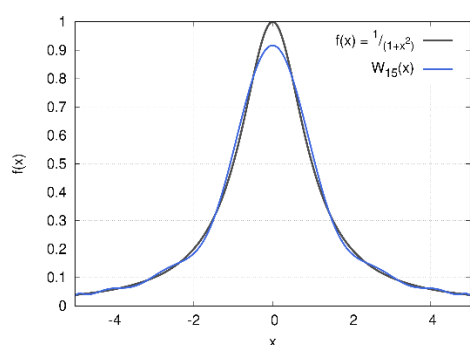
Rysunek 6. Interpolacja funkcji wielomianem Newtona stopnia 20. (węzły równoodległe).



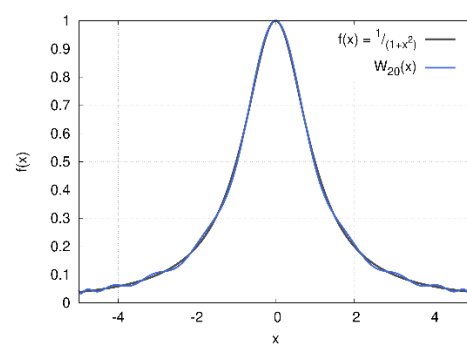
Rysunek 7. Interpolacja funkcji wielomianem Newtona stopnia 5. (węzły Czebyszewa).



Rysunek 8. Interpolacja funkcji wielomianem Newtona stopnia 10. (węzły Czebyszewa).



Rysunek 9. Interpolacja funkcji wielomianem Newtona stopnia 15. (węzły Czebyszewa).



Rysunek 10. Interpolacja funkcji wielomianem Newtona stopnia 20. (węzły Czebyszewa).

3. Wnioski

- Interpolacja wielomianowa polega na aproksymacji wartości funkcji na podstawie podanych punktów (węzłów) w celu odtworzenia jej wykresu. Jest to bardzo pomocne w przypadku, gdy nieznany jest kształt jej przebiegu.
- Oszacowanie błędu zależy od metody wyboru punktów węzłowych. Dla metody węzłów równoodległych wraz ze zwiększaniem stopnia wielomianu dopasowanie na środku przedziału wygląda na dokładne, jednak na końcach przedziałów widać duże oscylacje, zwłaszcza dla $n = 20$ (różnice rzędu dziesiątek), co spowodowane jest efektem Rungego. Natomiast dla zer wielomianów Czebyszewa wraz ze wzrostem stopnia, dopasowanie zdaje się być lepsze prawie równomiernie na całym przedziale i dla $n = 20$ jest ono bardzo podobne do faktycznego wykresu funkcji, oprócz drobnych oscylacji na końcach przedziału, które uległyby spłaszczeniu, gdyby nieco zwiększyć jeszcze n .
- Z powodu opisanego powyżej można wywnioskować, że interpolacja za pomocą zer wielomianów Czebyszewa jest lepszą metodą niż dzięki węzłom równoodległym; a oszacowanie błędu jest na tyle dokładne i małe, że można je zaakceptować.