Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Bartosz Rogowski, II rok, 303793

24 marca 2020

Metody numeryczne

Sprawozdanie nr 3 z zajęć laboratoryjnych

Iteracyjne rozwiązywanie układów równań liniowych

1. Wstęp teoretyczny

Metoda Jacobiego to algorytm napisany iteracyjnie, który służy do rozwiązywania równań macierzowych (a co za tym idzie – układów równań liniowych). Jest on pomocny zwłaszcza dla macierzy rzadkich, czyli takich, które mają dużo zer, a niewiele elementów niezerowych. Wymaga jednak, by diagonala (główna przekątna) była niezerowa. W tym celu stosuje się wektory, w których zapisywane są niezerowe elementy. Upraszcza to zapis, a także jest o wiele bardziej optymalne jeśli chodzi o pamięć (zamiast zapamiętywać całą macierz, która może mieć ogromne wymiary, wystarczy kilka wektorów). Metoda polega na aproksymacji rozwiązania do czasu, aż zostanie osiągnięta zbieżność wyniku. Stąd wynika ta iteracyjność – w pętli wykonujemy operacje, które z każdym jej obiegiem zbliżają do zbieżności, a ona z kolei to nic innego jak różnica kolejnych rozwiązań, która jest na tyle mała, że można ją zaakceptować. Ogólny wzór tej metody przedstawia się następująco:

$$\bigwedge_{i=1,\dots,n} n_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j,j\neq i} a_{ij}s_j\right), \tag{1}$$

gdzie $\vec{b}$ – wektor wyrazów wolnych, $\vec{n}$ – wektor „nowych" (aktualnych) rozwiązań , $\vec{s}$ – wektor „starych" rozwiązań (tu jako początkowe wartości można przyjąć dowolne liczby, np. losowe).

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było rozwiązanie układu równań dla „specjalnej" macierzy (n+1) x (n+1) – takiej, która ma elementy niezerowe na diagonali oraz dwóch kolejnych dolnych przekątnych, tzw. *macierzy trójprzekątniowej*. Jego źródłem było równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta v + F_0 \sin(\Omega t), \tag{2}$$

które opisuje ruch ciała, na które oddziałują siły (kolejno wg występowania we wzorze 2): sprężystości, oporu oraz wprawiająca to ciało w ruch.

Korzystając z analogicznych przekształceń i założeń jak na pierwszym laboratorium, można dojść do wzoru:

$$a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1} = b_i, \tag{3}$$

gdzie $a_1 = 1$, $a_2 = \omega^2 h^2 - \beta h$, $a_3 = 1 + \beta h$,

$$b_i = \begin{cases} 1, i = 0 \\ 0, i = 1 \\ F_0 h^2 \sin(\Omega t_{i-1}), i \geq 2 \end{cases},$$

co ostatecznie przekłada się na poniższy zapis macierzowy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ F_0 h^2 \sin(\Omega t_1) \\ \vdots \\ F_0 h^2 \sin(\Omega t_{n-1}) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Przyjmując parametry: $x_0 = 0$ (położenie początkowe/maksymalne wychylenie), $v_0 = 0$ (prędkość z jaką zostało puszczone ciało), n = 2000 (liczba kroków czasowych), h = 0.02 s (krok czasowy), $\Omega = 0.8\ s^{-1}$ oraz implementując **metodę Jacobiego**, dążyliśmy do uzyskania kolejnych położeń ciała dla trzech przypadków:

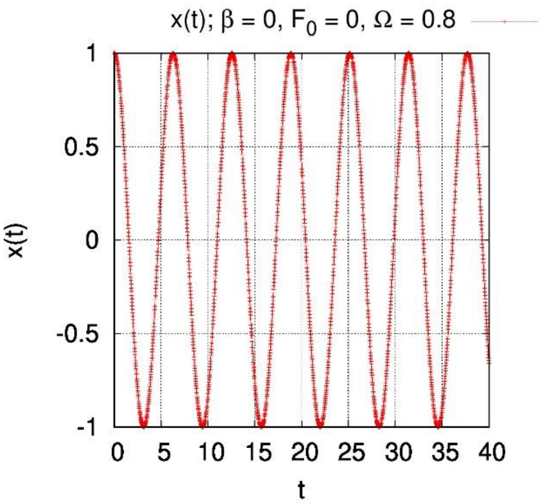
a) $\beta = 0$, $F_0 = 0$
b) $\beta = 0.4$, $F_0 = 0$
c) $\beta = 0.4$, $F_0 = 0.1$,

gdzie β to współczynnik tłumienia a F_0 to siła wymuszająca, natomiast naszym warunkiem zbieżności wyników była różnica sum kwadratów elementów wektorów $\vec{n}$ oraz $\vec{s}$:

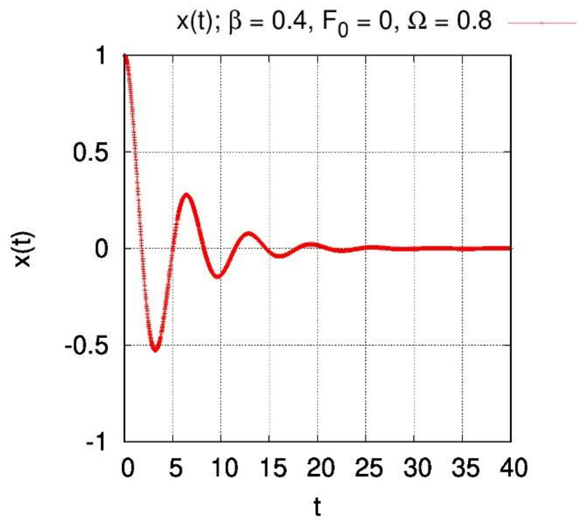
$$|s_n - s_s| < 10^{-6}. \tag{5}$$

2.2 Wyniki

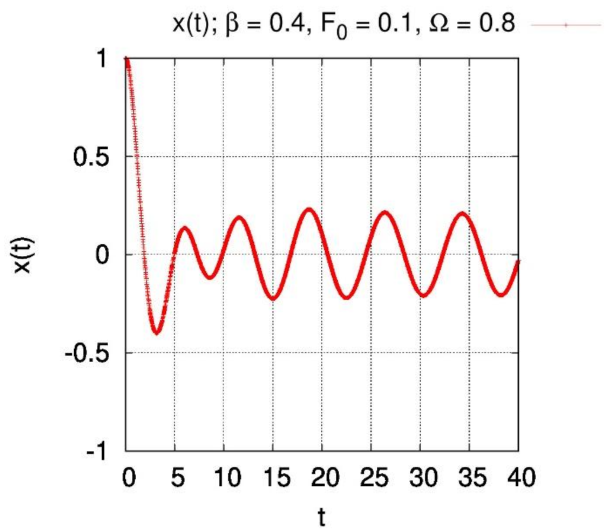
Obliczone położenia ciała przedstawione są na poniższych wykresach (rysunki 1-3), które zostały wykonane w programie Gnuplot przez specjalnie napisany skrypt:



Rysunek 1. Wykres położenia w czasie ciała dla przypadku a) (parametry podane w legendzie).



Rysunek 2. Wykres położenia w czasie ciała dla przypadku b) (parametry podane w legendzie).



Rysunek 3. Wykres położenia w czasie ciała dla przypadku c) (parametry podane w legendzie).

Dla wszystkich wyżej wymienionych przypadków liczba iteracji wynosi 2002.

Wykres z rysunku 1. przedstawia punkty, które układają się w wykres funkcji sinus, natomiast na rysunku 2. mamy do czynienia z punktami, które zdają się tworzyć wykres ograniczony przez dwie krzywe eksponencjalne. Na rysunku 3. w przedziale 5-20 s widać, że funkcja ma coraz większe amplitudy, później jednak ustalają się na pewnej wartości i przypomina to zachowanie funkcji z rysunku 1.

3. Wnioski

- Metoda Jacobiego implementowana iteracyjnie to algorytm, który bardzo dobrze sprawdza się do macierzy rzadkich, posiadających główną diagonalę; pomaga zaoszczędzić pamięć, która byłaby potrzebna do zapisania całej macierzy.
- Iteracyjność ta polega na wykonywaniu obliczeń w pętli, dopóki nie zostanie spełniony jakiś warunek zbieżności (musimy go określić).

- Liczba iteracji zależy od wymiarów macierzy i jest z nią porównywalna. Nie jest to jednak najbardziej optymalna metoda.
- Punkty układają się w kształty, które są zgodne z analitycznymi rozwiązaniami, które znamy z kursu fizyki oraz analizy matematycznej i dla przypadku:
  a) są to drgania nieustające (np. w próżni),
  b) są to drgania gasnące,
  c) są to drgania wymuszone, które w początkowej fazie są „zachwiane” (ich amplituda rośnie jeszcze przez jakiś krótki czas), a w następnej stabilizują się, gdzie siła wymuszająca ruch i opory redukują się, co daje efekt niemal identyczny jak w przypadku próżni;

  co potwierdza poprawność wykonania zadania.