Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Bartosz Rogowski, II rok, 303793
7 maja 2020

Metody numeryczne
Sprawozdanie nr 8 z zajęć laboratoryjnych
Interpolacja w bazie funkcji sklejalnych

1. Wstęp teoretyczny

Kontynuując temat interpolacji funkcji, kolejną metodą jest **interpolacja w bazie funkcji sklejalnych**. Polega ona na dopasowywaniu wielomianu do $n+1$ węzłów (w relacji rosnącej, tzn. $x_i < x_{i+1}$) w danym podprzedziale, zamiast jednego wielomianu na całym przedziale. Funkcje te muszą być **sklejalne** (tzw. **sklejki**) – tzn. punkty zakończenia jednej sklejki oraz rozpoczęcia następnej muszą być identyczne. Funkcją sklejalną $s(x)$ stopnia m na danym przedziale nazywamy funkcję o następujących właściwościach:

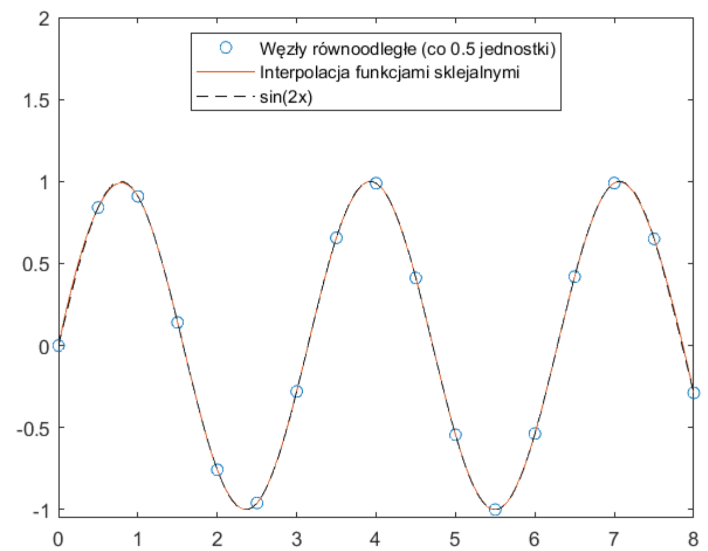
1. na każdym przedziale jest stopnia nie większego niż m
2. jest klasy C^{m-1}, tzn. jest różniczkowalna $m-1$ razy, a $(m-1)$-sza pochodna jest ciągła.

W przedziale $[a;b]$ podzielonym na n podprzedziałów będzie n funkcji sklejalnych, które będą miały postać:

$$s_i(x) = c_{i,m}x^m + \cdots + c_{i,2}x^2 + c_{i,1}x + c_{i,0}\ ; x \in [x_i; x_{i+1}]. \tag{1}$$

Funkcja interpolująca na przedziale $[a;b]$ będzie wówczas kombinacją liniową:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot s_i(x). \tag{2}$$



Rysunek 1. Przykład interpolacji funkcjami sklejalnymi stopnia trzeciego.

W tej metodzie stosuje się wielomiany niskich stopni, najczęściej jednak stopień $m = 3$, wówczas mowa o **kubicznych funkcjach sklejalnych**.

Aby wyznaczyć funkcję $s(x)$ na przedziale $[a; b]$ potrzebnych jest $n + 3$ parametrów, jednak mając do dyspozycji $n + 1$ węzłów, potrzebne jest wyznaczenie tylko dwóch. Aby przejść do ich obliczenia, konieczne jest określenie pewnych warunków brzegowych dotyczących pochodnych tej funkcji:

$$s'(a + 0) = \alpha_1, \tag{3}$$

$$s'(b - 0) = \beta_1, \tag{4}$$

$$s''(a + 0) = \alpha_2, \tag{5}$$

$$s''(b - 0) = \beta_2. \tag{6}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$M_i = s''(x_i), \tag{7}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i \tag{8}$$

oraz pamiętając postać $s_i(x)$ według równania (1):

$$s_i(x) = c_{i,3}x^3 + c_{i,2}x^2 + c_{i,1}x + c_{i,0}\ ;\ x \in [x_i; x_{i+1}] \tag{9}$$

i zauważając, że druga pochodna będzie funkcja liniową:

$$s_i''(x) = \frac{M_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{M_{i+1}}{h_{i+1}}(x - x_i)\ ;\ x \in [x_i; x_{i+1}], \tag{10}$$

można wyznaczyć postać funkcji sklejalnej na danym podprzedziale $x \in [x_i; x_{i+1}]$, całkując dwukrotnie równanie (10):

$$s_i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{M_{i+1}}{h_i}(x - x_i)^3 + A_i(x - x_i) + B_i. \tag{11}$$

Dwa ostatnie składniki ze wzoru (11) zawierają stałe otrzymane podczas całkowania i można je wyznaczyć z założeń uczynionych na początku zadania:

$$A_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}(M_{i+1} - M_i), \tag{12}$$

$$B_i = y_i - M_i \cdot \frac{h_{i+1}^2}{6}. \tag{13}$$

> Oznaczenia:
> y_i – wartość funkcji w x_i

Ponieważ nie są znane wszystkie wartości parametru M_i, wymagane jest znalezienie ich, różniczkując równanie (11), a wówczas:

$$s_{i-1}'(x_i - 0) = \frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}, \tag{14}$$

$$s_i'(x_i + 0) = -\frac{h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}. \tag{15}$$

Stosując porównanie prawych stron zależności (14) oraz (15) dla każdego z węzłów, otrzymać można układ $n-1$ równań. Można go zapisać w prostszej postaci:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + (1-\mu_i)M_{i+1} = d_i \quad i = 1, \dots, n-1\,, \tag{16}$$

przyjmując zmienne pomocnicze:

$$\mu_i = 1 - \frac{h_{i+1}}{h_{i+1}+h_i}, \tag{17}$$

$$d_i = \frac{6}{h_{i+1}+h_i}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right). \tag{18}$$

Do układu równań istnieje potrzeba dołączenia warunków związanych ze wzorami (3) – (6):

$$2M_0 + M_1 = d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \alpha_1\right), \tag{19}$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n = \frac{6}{h_1}\left(\beta_1 - \frac{y_{n+1}-y_n}{h_n}\right), \tag{20}$$

$$M_0 = \alpha_2, \tag{21}$$

$$M_n = \beta_2. \tag{22}$$

Przyjmując wszystkie powyższe założenia, w łatwy sposób można wyznaczyć elementy M_i, bowiem można sprowadzić ten problem (wytwarza go wzór (16)) do postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & 1-\mu_1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & 1-\mu_2 & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 2 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & & 1-\mu_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Po rozwiązaniu powyższego układu równań, można ostatecznie wyznaczyć wzór i-tej funkcji sklejalnej:

$$s_i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + A_i(x - x_i) + B_i. \tag{24}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem była interpolacja dwóch funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{25}$$

oraz

$$f_2(x) = \cos(2x) \tag{26}$$

na podstawie n **węzłów równoodległych.** W treści zostały podane następujące parametry:

$a = -5$	początek przedziału
$b = 5$	koniec przedziału
$n = 5, 8, 21$	liczba węzłów równoodległych
$\alpha, \beta = 0$	warunki brzegowe (patrz: wzory (19) – (22))

Tabela 1. Parametry podane w treści zadania.

W programie zaimplementowano kilka tablic o rozmiarze n:

- x_m – jednowymiarowa, przechowuje węzły
- y_m – jednowymiarowa, przechowuje wartości odpowiedniej funkcji dla węzłów
- m – dwuwymiarowa, będzie przechowywać wartości M_i (tak naprawdę jest tablicą-wektorem $n \times 1$, ponieważ wymaga tego metoda biblioteczna opisana poniżej).

Aby wypełnić tablicę m, użyto samodzielnie zaimplementowanej funkcji *wyzM*, która przyjmowała parametry:

- x_m – tablica przechowująca kolejne węzły
- y_m – tablica przechowująca wartości funkcji
- m – tablicę 2D, która zostanie nadpisana wyliczonymi wartościami (rozwiązanie problemu (23) za pomocą znanej nam metody *gaussj* z biblioteki *Numerical Recipes)*
- stopień wielomianu funkcji interpolowanej
- warunki brzegowe (α, β).

Do pliku zapisywane były punkty z przedziału $[a; b]$ z krokiem $0{,}01$ oraz wartości **interpolujących funkcji sklejalnych** dla nich. Wartości te były obliczane zgodnie ze wzorem (24) w samodzielnie zaimplementowanej funkcji, która przyjmowała następującą listę argumentów:

- różnica odległości między kolejnymi węzłami (wyjaśnione poniżej)
- x_m – tablica przechowująca kolejne węzły
- y_m – tablica przechowująca wartości funkcji
- m – tablica 2D zawierająca M_i
- stopień wielomianu funkcji interpolowanej
- punkt, dla którego liczona jest wartość.

Dodatkowo, dla pierwszej funkcji oraz $n = 10$ porównano wartości pochodnych M_i z dokładniejszym przybliżeniem, określonym wzorem:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) + 2f(x) + f(x + \Delta x)}{(\Delta x)^2}. \tag{27}$$

Oznaczenia:
$\Delta x = 0.01$ – krok

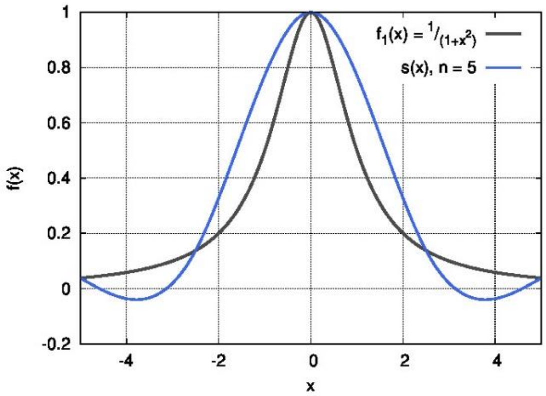
Ponieważ w zadaniu posługiwano się **węzłami równoodległymi**, pewne wzory uległy uproszczeniu. Główne różnice to przede wszystkim <u>stałe odległości między węzłami</u>, co przyczyniło się do uproszczenia zależności (17):

$$\bigwedge_{i=1,\ldots,n} h_i = const \;\Rightarrow\; \mu_i = 0.5; \tag{28}$$

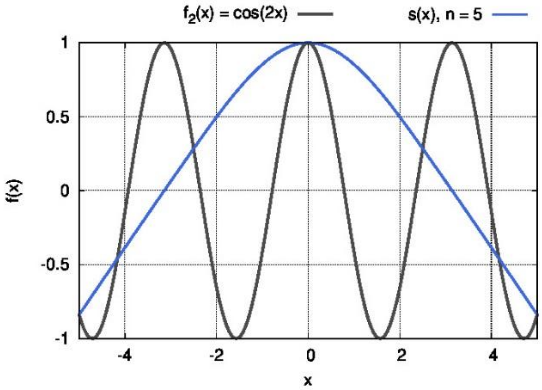
a także pozostałych, zawierających te parametry.

2.2 Wyniki

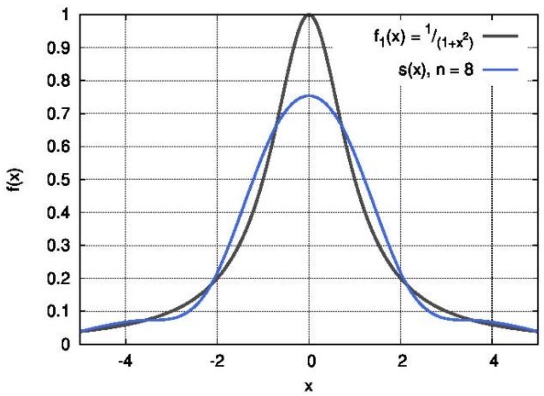
Lista punktów, które zostały zapisane do dwóch plików (oddzielnie dla każdej funkcji), posłużyła do wygenerowania za pomocą skryptu w programie Gnuplot ich rozmieszczenia na płaszczyźnie. Dzięki temu, że znany jest kształt funkcji interpolowanych, można porównać dopasowanie punktów otrzymanych w zadaniu za pomocą **interpolacji sklejkami** (rys. 2 – 7).



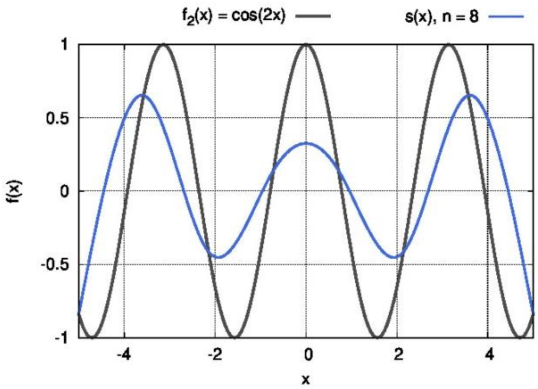
Rysunek 2. Interpolacja pierwszej funkcji sklejkami za pomocą pięciu węzłów równoodległych.



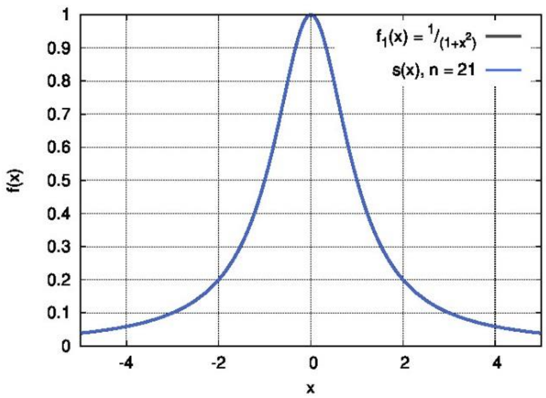
Rysunek 3. Interpolacja drugiej funkcji sklejkami za pomocą pięciu węzłów równoodległych.



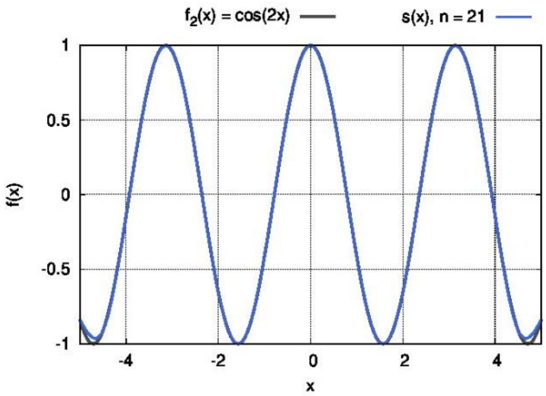
Rysunek 4. Interpolacja pierwszej funkcji sklejkami za pomocą ośmiu węzłów równoodległych.



Rysunek 5. Interpolacja drugiej funkcji sklejkami za pomocą ośmiu węzłów równoodległych.

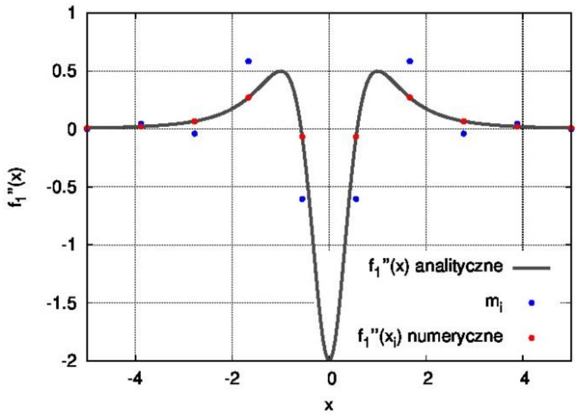


Rysunek 6. Interpolacja pierwszej funkcji sklejkami za pomocą dwudziestu jeden węzłów równoodległych.



Rysunek 7. Interpolacja drugiej funkcji sklejkami za pomocą dwudziestu jeden węzłów równoodległych.

W celu porównania sposobów wyznaczania drugich pochodnych, zestawiono ich wartości na poniższym wykresie.



Rysunek 8. Porównanie drugich pochodnych wyznaczonych przez algorytm interpolacji (**kubicznymi funkcjami sklejalnymi za pomocą dziesięciu węzłów równoodległych**), ilorazy różnicowe oraz przybliżenie tych pochodnych (wzór (28)) dla pierwszej funkcji.

3. Wnioski

- Interpolacja funkcjami sklejalnymi polega na aproksymacji wartości funkcji za pomocą wielomianów w mniejszych podprzedziałach w przeciwieństwie do metod użytych na poprzednim laboratorium, które przybliżały funkcję wielomianem na całej długości wskazanego przedziału.
- Wraz ze wzrostem liczby węzłów zwiększa się dokładność aproksymacji. Dla $n = 21$ dla pierwszej funkcji można zauważyć, że wykres i punkty z interpolacji pokrywają się całkowicie, podobnie jak w przypadku drugiej funkcji (jednak na rys. 7 widać drobne zaburzenia w okolicach końców przedziału, co może wynikać z okresowości interpolowanej funkcji – wówczas dla zwiększenia dokładności wprowadza się dodatkowe warunki).
- Interpolacja sklejkami jest metodą dokładniejszą od interpolacji wielomianowej (co obrazują otrzymane wykresy), jednak wymaga większej znajomości zagadnień z analizy matematycznej.
- Ten rodzaj interpolacji nie jest podatny[1] na efekt Rungego (oscylacje na końcach przedziałów) dlatego, że do przybliżania używa się wielomianów niskich stopni na podprzedziałach (pochodne są niskich stopni, a zatem ich wartości nie wzrastają tak szybko).
- Analiza wykresu 8. ujawnia, że nie dla wszystkich punktów drugie pochodne przyjmują takie same wartości. Wynikać to może z tego, że w zależności od metody ich wyznaczenia, w pobliżu ekstremów lokalnych mogą zachodzić oscylacje tych wartości.

i

[i] W części teoretycznej wykorzystano notatki z wykładu oraz poniższy materiał dydaktyczny: http://fluid.itcmp.pwr.wroc.pl/~znmp/dydaktyka/metnum/interpolacja_spline_pdf.pdf [data dostępu: 5 maja 2020]. Rysunek 1 został wykonany w programie Matlab.

[1] źródło: https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-330-introduction-to-numerical-analysis-spring-2012/lecture-notes/MIT18_330S12_Chapter3.pdf (strona 10, rozdział 3.4) [data dostępu: 6 maja 2020]