Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej

Bartosz Rogowski, II rok, 303793

12 marca 2020

Metody numeryczne

Sprawozdanie nr 2 z zajęć laboratoryjnych

Rozkład LU macierzy

1. Wstęp teoretyczny

Dzięki metodzie eliminacji Gaussa macierz kwadratową A możemy zapisać za pomocą iloczynu dwóch „specyficznych” macierzy:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}, \tag{1}$$

gdzie **L** to dolna macierz trójkątna (ang. lower triangular matrix), która posiada niezerowe elementy poniżej diagonali, a na niej samej znajdują się jedynki, natomiast **U** to górna (ang. upper) macierz trójkątna, która posiada zerowe elementy poniżej swojej diagonali:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n,n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Taką operację nazywamy **rozkładem LU macierzy** i ma ona wiele zastosowań. Zaletą takiego rozkładu jest przede wszystkim nieduża złożoność, dlatego stosuje się go do rozwiązywania układów równań, wyliczania wyznacznika macierzy czy „czasochłonnego[1]” odwracania macierzy, co zwiększa wydajność programu.

W bibliotece *GSL* znajduje się funkcja *gsl_linalg_LU_decomp*, która jako argumenty pobiera wskaźnik do struktury[2] jaką jest macierz wejściowa, która zostaje nadpisana rozkładem LU, wskaźnik do wektora permutacji wierszy (komputer w celu optymalizacji stosuje permutacje, które przyspieszają obliczenia) oraz wskaźnik do liczby wykonanych permutacji (ponieważ od niej zależy wartość wyznacznika takiej macierzy). Warto zaznaczyć, że nadpisanie rozkładem LU do jednej macierzy jest możliwe z powodu budowy macierzy **L** i **U** – ich „sklejenie” zdaje się być kłopotliwe jedynie na diagonali, jednak są tam po prostu wpisywane elementy leżące na przekątnej macierzy górnej.

[1] Chodzi tu raczej o wyższą złożoność, a zatem większą liczbę operacji i potrzebnej pamięci obliczeniowej.

[2] W następnych linijkach pozwolę sobie skrócić tę frazę do samego „wskaźnik do”, jednak należy pamiętać, że funkcje te działają na specjalnych strukturach.

Obliczenie wyznacznika macierzy A jest teraz trywialne, jest to bowiem iloczyn elementów znajdujących się na diagonali oraz *signum* – zmiennej która mówi o parzystości wykonanych w czasie dekompozycji permutacji. Jeżeli jest ona nieparzysta, to wówczas signum = -1, w przeciwnym wypadku jest to po prostu 1.

Aby znaleźć macierz odwrotną, wystarczy rozwiązać n układów równań, w których wektory wyrazów wolnych wyglądają tak, że są one całkowicie wypełnione zerami, poza i-tym wyrazem, który jest równy 1, analogicznie jak na laboratorium nr 1. Funkcja *gsl_linalg_LU_solve* działa podobnie do wcześniej omówionej funkcji, jednak zamiast wskaźnika do liczby permutacji przyjmuje wskaźnik do wektora wyrazów wolnych oraz wskaźnik do wektora rozwiązań (tam będą zapisywane).

Ciekawostką jest fakt[3], że rozkład ten został odkryty przez **Tadeusza Banachiewicza** – polskiego naukowca, który był częścią kadry AGH.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było przeprowadzenie serii nie zbyt skomplikowanych operacji, np. odwrócenie, obliczenie wyznacznika, iloczynu macierzy AA^{-1}, czy wskaźnika uwarunkowania liczonego za pomocą normy:

$$\|\boldsymbol{A}\|_{1,\infty} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|.$$

Wskaźnik ten ma na celu określenie jaki wpływ ma macierz wejściowa na rezultat. Jego wartość mówi więc jak dobrze uwarunkowane jest zadanie – im niższa, tym lepiej uwarunkowane i jest wyliczany jako:

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{A}^{-1}\|.$$

Przeprowadzaliśmy je na stworzonej czterowymiarowej kwadratowej macierzy o wyrazach według wzoru:

$$a_{ij} = \frac{1}{i + j + 2}.$$

Jako narzędzia posłużyły nam przedstawione wcześniej funkcje z biblioteki *GSL* oraz **rozkład LU**.

2.2 Wyniki

Elementy diagonalne macierzy U to kolejno: 0.5, 0.0333333, -0.00138889, 0.000102041. Wyznacznik macierzy A: det(A) = $2.36206 \cdot 10^{-9}$.

[3] Źródła: https://en.wikipedia.org/wiki/Tadeusz_Banachiewicz oraz https://historia.agh.edu.pl/wiki/Tadeusz_Julian_Banachiewicz

Zatem wyznacznik ten to iloczyn kolejnych elementów diagonalnych z uwzględnieniem liczby permutacji.

Macierz odwrotna A^{-1}:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix}.$$

Iloczyn macierzy:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -2.27374 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \\ -2.84217 \cdot 10^{-14} & 1 & 4.54747 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 0 & -2.27374 \cdot 10^{-13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analitycznie powinniśmy otrzymać macierz jednostkową, jednak z powodu błędów numerycznych otrzymujemy elementy bardzo zbliżone do zera, jednak nie równe 0.

Norma macierzy A	0.5
Norma macierzy A^{-1}	29400
Wskaźnik uwarunkowania macierzy κ(A)	14700

Tabela 1. Normy oraz wskaźnik uwarunkowania macierzy

3. Wnioski

- Rozkład LU macierzy to dobra metoda optymalizacji w celu prostszego i szybszego uzyskania wyników, mająca wiele zastosowań, niemniej jednak trzeba pamiętać o występowaniu błędów numerycznych i na ich podstawie należy odpowiednio zinterpretować wynik.
- Przy liczeniu wyznacznika macierzy tą metodą należy pamiętać o *signum*, które ma wpływ na jego wartość.
- Z racji błędów, rezultat różni się od rozwiązania analitycznego (w tym przypadku: iloczyn macierzy nie jest równy macierzy jednostkowej).
- Wskaźnik uwarunkowania macierzy informuje o tym, jak duży jest błąd i o stopniu uwarunkowania zadania. Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że zadanie nie jest najlepiej uwarunkowane, jednak różnica od analitycznego rozwiązania nie jest drastyczna, a co za tym idzie - wynik ten jest do zaakceptowania.