Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Informatyka Stosowana
22 czerwca 2022

Systemy równoległe i rozproszone

Minimalne drzewo rozpinające – algorytm Prim'a

Podejście z wykorzystaniem technologii *UPC++*

Skład zespołu:

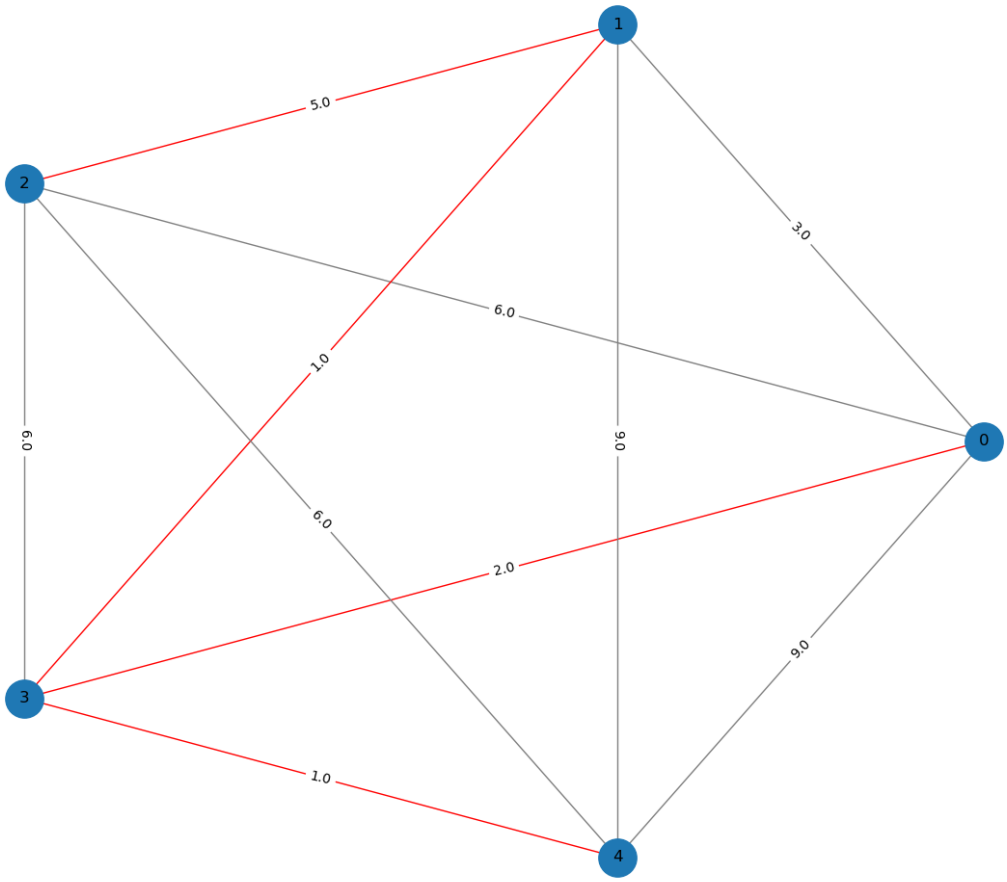
Bartosz Rogowski

Aleksandra Rolka

Spis treści

1 Opis problemu

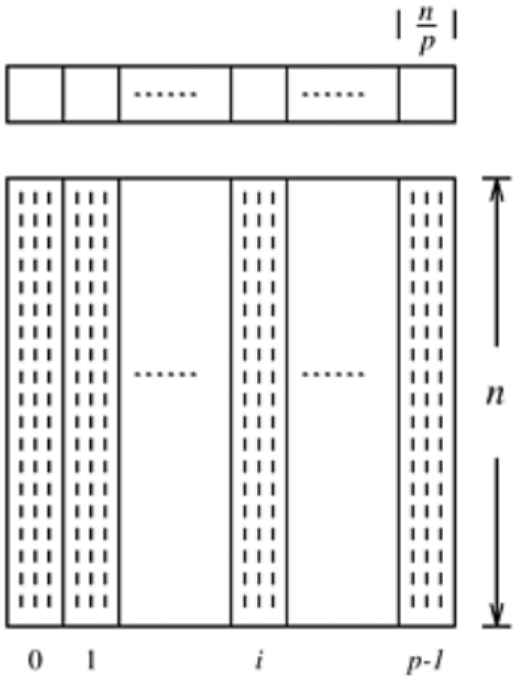
Jednym z często przeprowadzanych na grafach operacjach jest znalezienie ich minimalnych drzew rozpinających. Minimalne drzewo rozpinające (ang. *minimal spanning tree* – MST) grafu G to drzewo (acykliczny spójny graf nieskierowany) rozpinające (czyli zawierające wszystkie wierzchołki grafu G), mające $N-1$ krawędzi o najmniejszych wagach.



Rysunek 1: Przykład minimalnego drzewa rozpinającego (krawędzie zaznaczone na czerwono) na grafie

Algorytm Prima pozwala znaleźć MST dla danego za pomocą macierzy sąsiedztwa grafu. Wykorzystuje podejście zachłanne: zaczynając od ustalonego wierzchołka (najprościej od tego z indeksem 0), z listy sąsiadów dostępnych (wierzchołków do których można dojść) z odwiedzonych już wierzchołków wybierana jest krawędź o najmniejszej wadze prowadząca do innego nieodwiedzonego jeszcze wierzchołka. Algorytm przechodzi dalej, aż do wybrania $N-1$ krawędzi tworzących MST.

Program został napisany w technologii *UPC++*, czyli bibliotece *C++* wspierającej programowanie PGAS (Partitioned Global Address Space) [2]. Sekret algorytmu polega na podzieleniu macierzy sąsiedztwa grafu na mniejsze podmacierze dla każdego procesu. Jednakże przeciwieństwie po poprzednio użytej technologii *MPI*, w *UPC++* brak funkcji umożliwiającej owy podział (brak odpowiednika metody `MPI_Scatterv`). Istnieje zatem konieczność obejścia tego problemu poprzez „ręczne" rozdzielenie macierzy na porcje (tzw. *chunki*). Podmacierze te są zapisywane jako tablice jednowymiarowe. Na rys. 2 przedstawiono takie rozdzielenie, np. proces 0 dostał trzy pierwsze kolumny, proces 1 – kolejne trzy itd. Każdy proces sprawdza krawędzie prowadzące do nieodwiedzonych jeszcze sąsiadów z wierzchołka k ($k = 0, 1, ..., N-1$) i lokalnie wybiera tę o najmniejszej wadze. Następnie za pomocą `upcxx::reduce_all` wyłaniana jest



Rysunek 2: Podział macierzy na podmacierze zapisywane w postaci wektorów (źródło: [1])

najmniejsza waga i wierzchołek, do którego prowadzi owa krawędź. Informacje o wierzchołkach pomiędzy znalezioną optymalną krawędzią są propagowane do wszystkich procesów poprzez `upcxx::broadcast`, a do zmiennej globalnej przetrzymującej sumę wag dodawana jest nowo znaleziona za pomocą kombinacji metod `upcxx::rget` oraz `upcxx::rput`.

2 Najważniejsze zmienne używane w programie

- `rank` – numer procesu
- `procNum` – całkowita liczba procesów używana w programie
- `graph` – graf zapisany w postaci macierzy sąsiedztwa
- `chunkSize` – liczba kolumn macierzy `graph`, które zostaną przesłane; `chunkSize` jest najpierw obliczany dla każdego procesu jako $\left\lfloor \frac{\texttt{N}}{\texttt{procNum}} \right\rfloor$, a następnie od procesu 0 dodawane są kolumny wynikające z użycia liczby procesów niepodzielnej przez wymiar macierzy
- `displs` – przesunięcie – mówi, w której kolumnie macierzy `graph` zaczyna się podmacierz `chunk`
- `chunk` – tablica, do której zapisywane są fragmenty macierzy `graph`, do każdego procesu przekazywana jest inna część
- `MST` – `graph` z wagami tylko dla tych wierzchołków, które tworzą minimalne drzewo rozpinające
- `mstEdges` – tablica, której indeksy to wierzchołki początkowe, a wartości to wierzchołki końcowe krawędzi
- `globalMinWeight` – zmienna współdzielona, w której trzymana jest wartość sumaryczna drzewa rozpinającego

Przykład:
załóżmy, że:

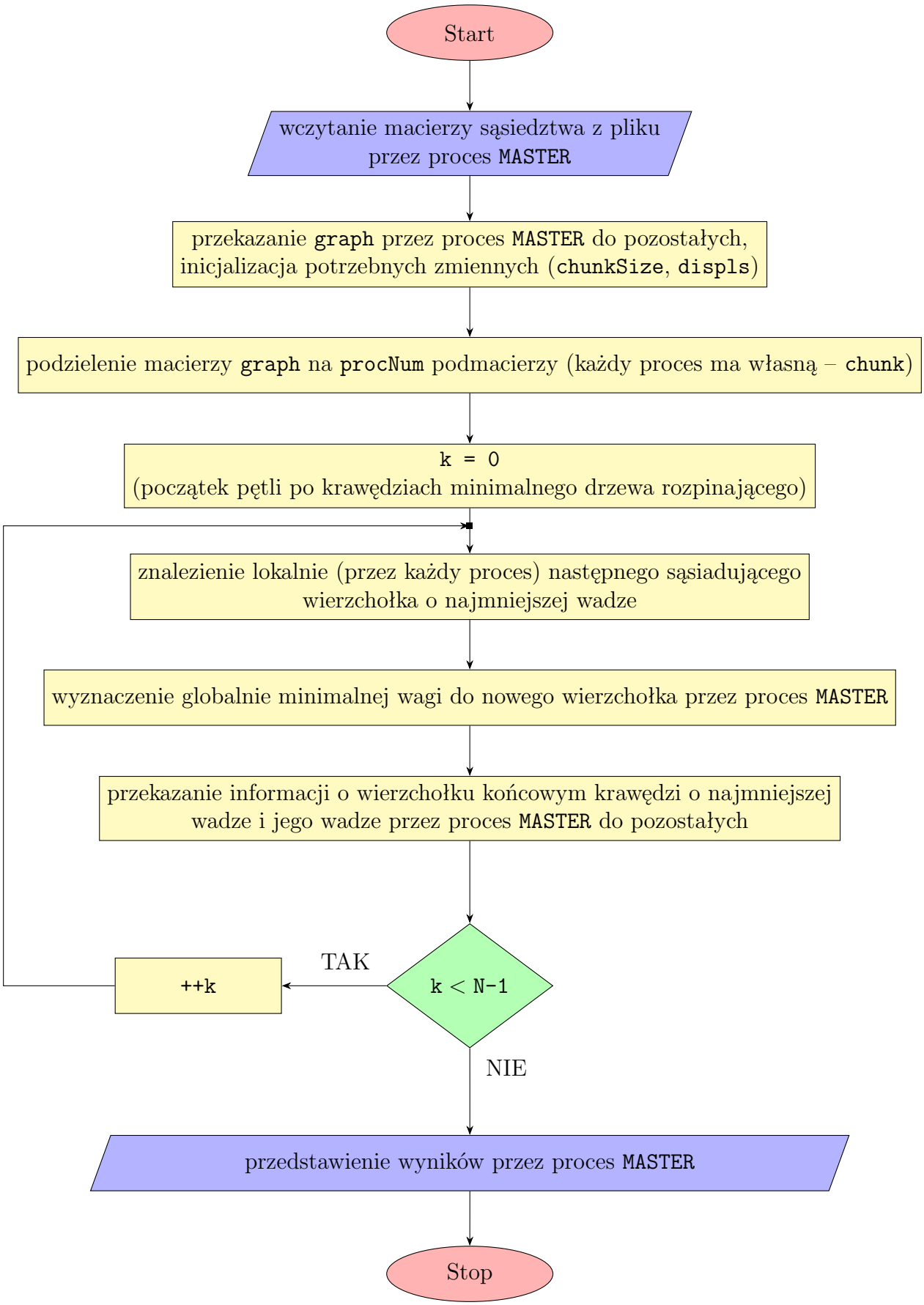
- `procNum` = 3
- $\texttt{graph} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 2 & 9 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 9 \\ 6 & 5 & 0 & 6 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 9 & 9 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

wówczas:

- `chunkSize = { 2, 2, 1 }`
- `displs = { 0, 2, 4 }`
- dla procesu o numerze `rank` równym 0: `chunk = { 0, 3, 6, 2, 9, 3, 0, 5, 1, 9 }`
- dla procesu o numerze `rank` równym 1: `chunk = { 6, 5, 0, 6, 6, 2, 1, 6, 0, 1 }`
- dla procesu o numerze `rank` równym 2: `chunk = { 9, 9, 6, 1, 0 }`

3 Schemat blokowy programu

Schemat blokowy programu został przedstawiony na rys. 3.



Rysunek 3: Schemat blokowy programu

4 Obsługa programu

Program przyjmuje jeden obowiązkowy argument, którym jest ścieżka do pliku z podaną macierzą sąsiedztwa (wartości oddzielone spacjami, każdy wiersz w nowej linii) oraz jeden opcjonalny argument, do którego można zapisać macierz sąsiedztwa reprezentującą wynikowe minimalne drzewo rozpinające. Program wypisuje sumę wag MST oraz czas wykonywania algorytmu Prima dla każdego z procesów.

Do uruchomienia programu potrzeba przygotować środowisko *UPC++*, a następnie skompilować program. W tym celu wykorzystano plik makefile, który wykonuje niezbędne w tym celu operacje.

- `make prepare` – przygotowuje środowisko
- `make compile` – kompiluje program
- `make run` – uruchamia program, potrzebuje podania argumentów:
  - `n` – liczba procesów
  - `in` – ścieżka do pliku z macierzą sąsiedztwa grafu[1] (w folderze `example` znajdują się przygotowane pliki wejściowe)
  - `out` (opcjonalnie) – ścieżka do pliku z macierzą wyjściową MST
- `make run0_` – przygotowane komendy z dostowanymi argumentami (`_` oznacza cyfrę od 1 do 5)
- `make clean` – przywraca folder do stanu wejściowego (usuwa pliki wynikowe, wykonywalny etc.)
- `make mem` – walidacja programu za pomocą narzędzia Valgrind

Bibliografia

[1] Ananth Grama et al. *Introduction to parallel computing*. Pearson Education, 2003, pp. 442–444.

[2] *UPC++ v1.0 Programmer's Guide*. URL: `https://upcxx.lbl.gov/docs/html/guide.html`. (data dostępu: 20 czerwca 2022).

[1] Uwaga: Graf musi być spójny i nieskierowany. Zakłada się, że dostarczany plik jest prawidłowy.