

# Model Kuramoto

Bartosz Zbik

2024-05-11

Model dany jest przez układ  $N$  równań

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (1)$$

Definiujemy parametr prządku  $r$  i fazę  $\psi$

$$re^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2)$$

co pozwala przepisać układ równań w postaci

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - rK \sin(\theta_i - \psi) \quad (3)$$

Rozwiązywałem go obliczając w każdym kroku całkowania najpierw  $r$  i  $\psi$ , a potem poszczególne przyrosty wynikające z równania (3) co sprowadzało się do złożoności  $\mathcal{O}(3N)$  (albo  $\mathcal{O}(2N)$  w zależności, czy  $e^{i\theta}$  wymaga obliczenia dwóch funkcji trygonometrycznych czy jednej), a nie  $\mathcal{O}(N^2)$ .

Funkcje `kuramoto!` i `kuramotoorder` są wykorzystywane przez solver do rozwiązywania równania. Warunki początkowe  $\theta_i(0)$  oraz parametry  $\omega_i$  są losowane, a cała procedura schowana jest w funkcjach `findsol` (dla  $\omega \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ) oraz `findcauchysol` (dla  $\omega$  z rozkładu Cauchy'ego). Funkcje `asymptoticnormal` i `asymptoticcauchy` służą już tylko do wygenerowania rysunków i nie ma tam żadnej logiki związanej z samym rozwiązaniem problemu.

## 1 Kod

```
using DifferentialEquations, Statistics, Distributions, Printf
using CairoMakie
set_theme!(theme_latexfonts())

# p[1] - Vector of base frequencies
# p[2] - interactions strength parameter K
function kuramoto!(du, u, p, t)
    r, psi = kuramotoorder(u)
    du .= p[1] .- (p[2] * r) * sin.(u .- psi)
end
```

```

function kuramotoorder(u)
    # cis(x) = cos(x) + im * sin(x)
    c = sum(cis.(u)) / length(u)
    r = abs(c) # amplitude
    psi = angle(c) # phase
    return r, psi
end

function analiticalcauchyorder(k)
    k_c = 2.0
    if k < k_c
        return 0.0
    else
        return sqrt((k - 2) / k)
    end
end

# finds a single solution for the Kuramoto model
# with random initial conditions and \omega ~ N(\mu=0, \sigma=1)
function findsol(K, tmax, N)
    u0 = 2pi * rand(N)
    p = [randn(N), K]

    prob = ODEProblem(kuramoto!, u0, (0, tmax), p)
    return solve(prob)
end

# finds a single solution for the Kuramoto model
# with random initial conditions and \omega ~ Cauchy(\mu=0, \sigma=1)
function findcauchysol(K, tmax, N)
    # solves the Kuramoto model
    # with random initial conditions and \omega ~ Cauchy(\mu=0, \sigma=1)
    u0 = 2pi * rand(N)
    p = [rand(Cauchy(0, 1), N), K]

    prob = ODEProblem(kuramoto!, u0, (0, tmax), p)
    return solve(prob)
end

# #####
# Main, making plots
# #####

# finds nrep solutions
# plots how r evolves in time
function asymptoticnormal(K, tmax, nrep, N=128)
    s = [findsol(K, tmax, N) for i in 1:nrep]
    trng = range(tmax / 2, tmax, length=30)
    m = mean([kuramotoorder(x(t)) [1] for x in s, t in trng])
    fig = Figure()
    ax = Axis(fig[1, 1])
    for x in s
        lines!(ax, 0 .. tmax, t -> kuramotoorder(x(t)) [1], color=:black, alpha=0
              .1, label=nothing)
    end
    lines!(ax, 0 .. tmax, t -> mean([kuramotoorder(x(t)) [1] for x in s]), label=
           "<r>")
    ax.xlabel = "time"
    ax.ylabel = "order parameter $r$"
    ax.title = L"\omega \sim \mathcal{N}(0, 1), \sim K/K_c = %$(@sprintf "%.2f" K
           /sqrt(8/pi)), \sim <r> = %$(@printf "%.3f" m)"
    ax.limits = (nothing, nothing, -0.05, 1.05)
    axislegend(ax, position=:lt)
    return fig
end

# finds nrep solutions
# plots how r evolves in time and compares it to the analytical solution
function asymptoticcauchy(K, tmax, nrep, N=128)
    s = [findcauchysol(K, tmax, N) for i in 1:nrep]
    trng = range(tmax / 2, tmax, length=30)
    m = mean([kuramotoorder(x(t)) [1] for x in s, t in trng])
    fig = Figure()
    ax = Axis(fig[1, 1])
    for x in s
        lines!(ax, 0 .. tmax, t -> kuramotoorder(x(t)) [1], color=:black, alpha=0
              .1, label=nothing)
    end

```

```

end
lines!(ax, 0 .. tmax, t -> mean([kuramotoorder(x(t))[1] for x in s]), label=
    "<r>")
hlines!(ax, [anliticalcauchyorder(K)], label="theory", linestyle=:dash,
    color=:magenta)
ax.xlabel = "time"
ax.ylabel = L"order parameter $r$"
ax.title = L"""\omega \sim \mathcal{Cauchy}(0, 1), \sim K/K_c=%$(@sprintf "%2f
    " K/2), \sim r=%$(@sprintf "%.3f" anliticalcauchyorder(K)), \sim <r>=%$(
    @sprintf "%.3f" m)"""
ax.limits = (nothing, nothing, -0.05, 1.05)
axislegend(ax, position=:lt)
return fig
end

K_c_normal = sqrt(8 / pi)
K_rng_normal = [0, 1 / 4, 1 / 2, 0.97, 1.0, 1.03, 3 / 2, 2.0, 10] * K_c_normal

for i in eachindex(K_rng_normal)
    tmax = 200
    nrep = 30
    N = 512
    f = asymptoticnormal(K_rng_normal[i], tmax, nrep, N)
    save("out/kuramoto_normal_$i.pdf", f)
end

K_c_cauchy = 2.0
K_rng_cauchy = [0, 1 / 4, 1 / 2, 0.97, 1.0, 1.03, 3 / 2, 2.0, 10] * K_c_cauchy

for i in eachindex(K_rng_cauchy)
    tmax = 200
    nrep = 30
    N = 512
    f = asymptoticcauchy(K_rng_cauchy[i], tmax, nrep, N)
    save("out/kuramoto_cauchy_$i.pdf", f)
end

```

## 2 Wizualizacja wyników

Przy rozwiązywaniu przyjąłem  $N = 512$  i dla każdej wartości  $K$  wygenerowałem 30 rozwiązań. W rozwiążaniu jako estymator parametru porządku  $r$  brałem średnią po realizacjach, co nie zawsze dawało wynik zgodny z teorią. Prawdopodobnie dlatego, że  $r \in [0, 1]$ , więc przykładowo dla  $K < K_c$  fluktuacje  $r$  jedynie zawyżają  $\langle r \rangle$ .

Na wszystkich poniższych rysunkach szare krzywe odpowiadają poszczególnym trajektoriom, ciągła niebieska linia odpowiada średniemu  $r$  liczonemu po trajektoriach, a linia przerywana odpowiada analitycznie wyznaczonej wartości  $r$ . W nagłówkach rysunków podawałem  $r$  i  $\langle r \rangle$  z dokładnością do trzech cyfr po przecinku.

### 2.1 Rozkład Normalny

Dla  $\omega$  pochodzącego ze standardowego rozkładu normalnego

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \quad (4)$$

Wartość krytyczną wyznaczamy dzieląc równianie

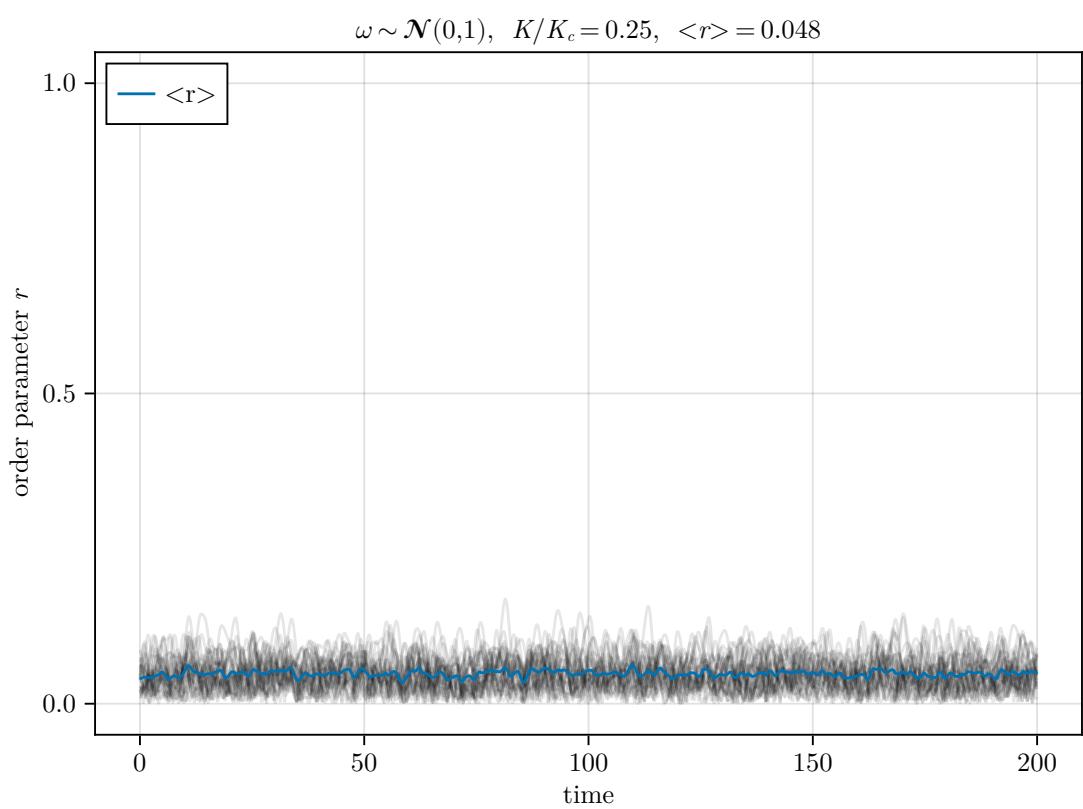
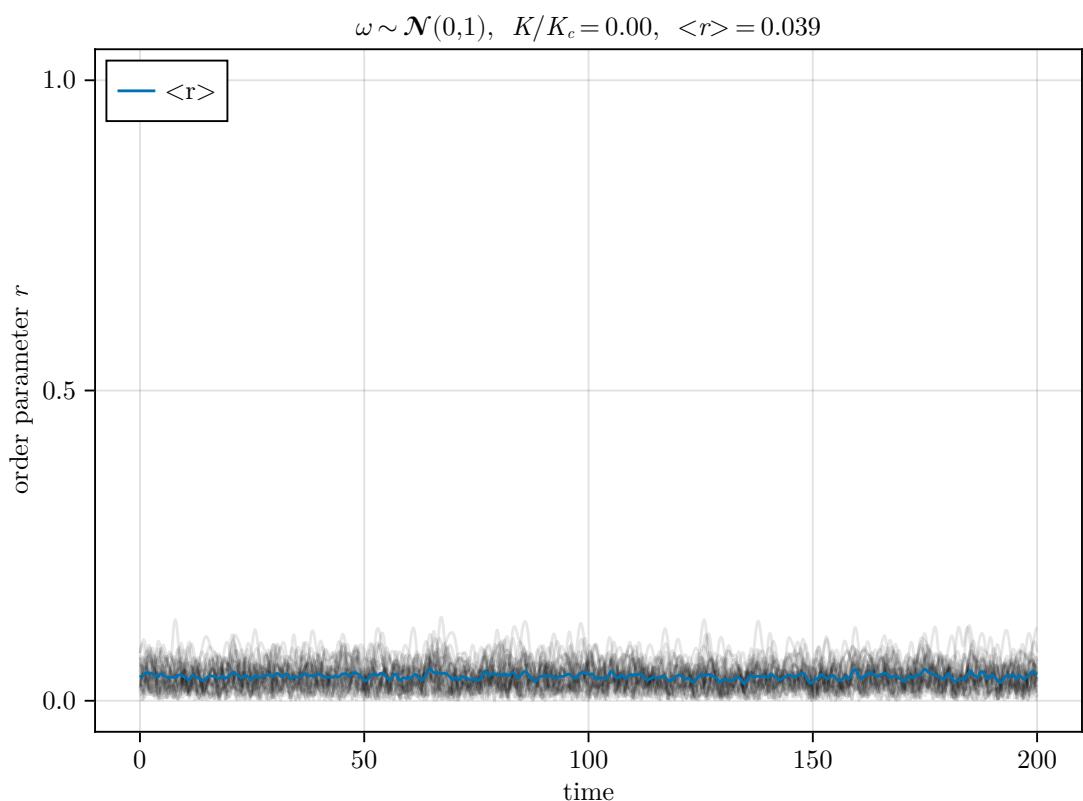
$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (5)$$

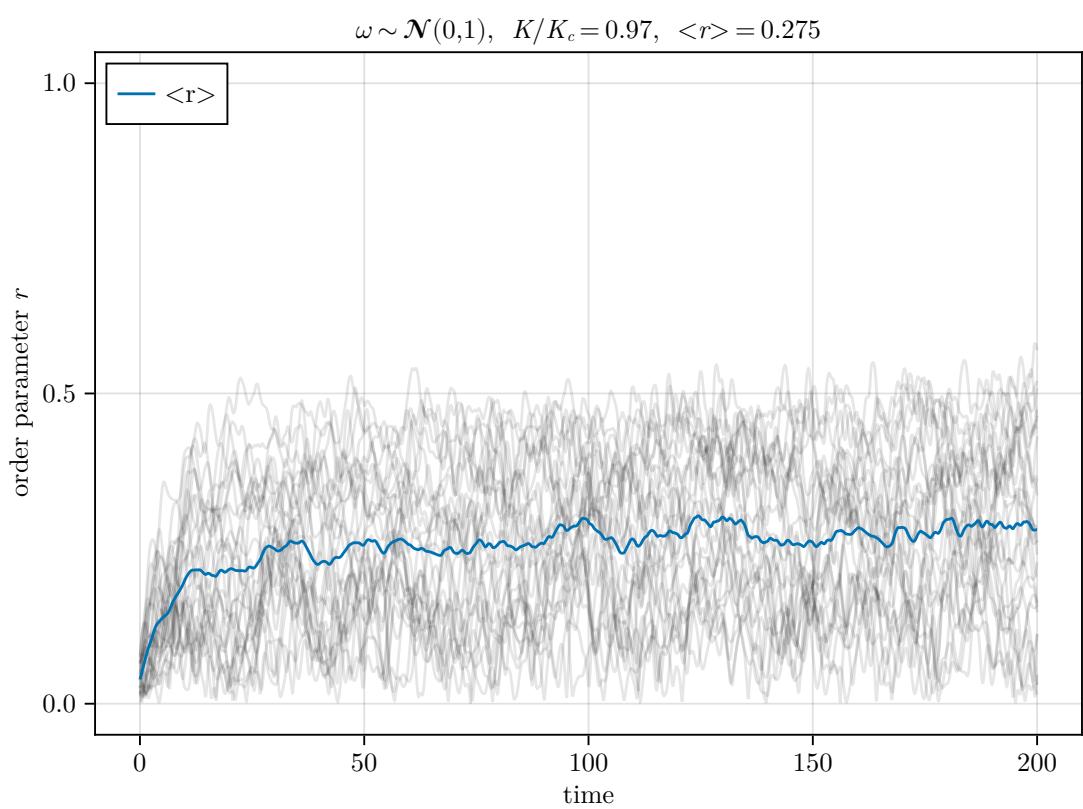
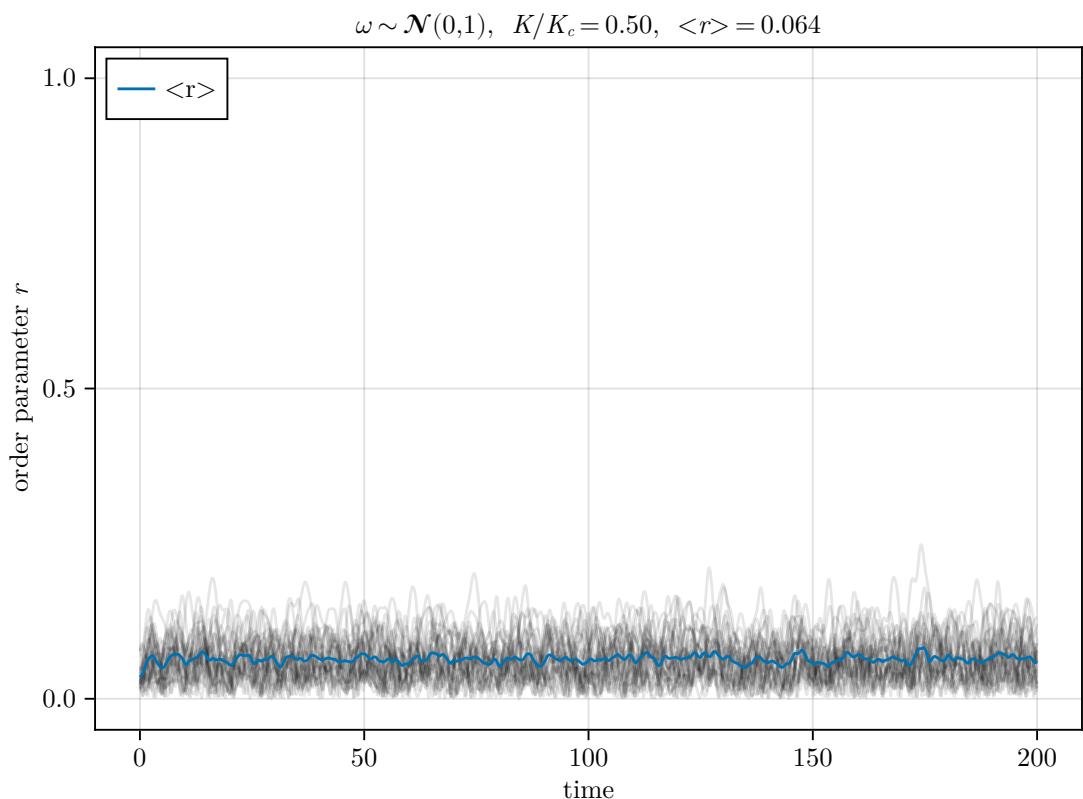
przez  $r$  i przechodząc do granicy  $r \rightarrow 0^+$ . Dostajemy

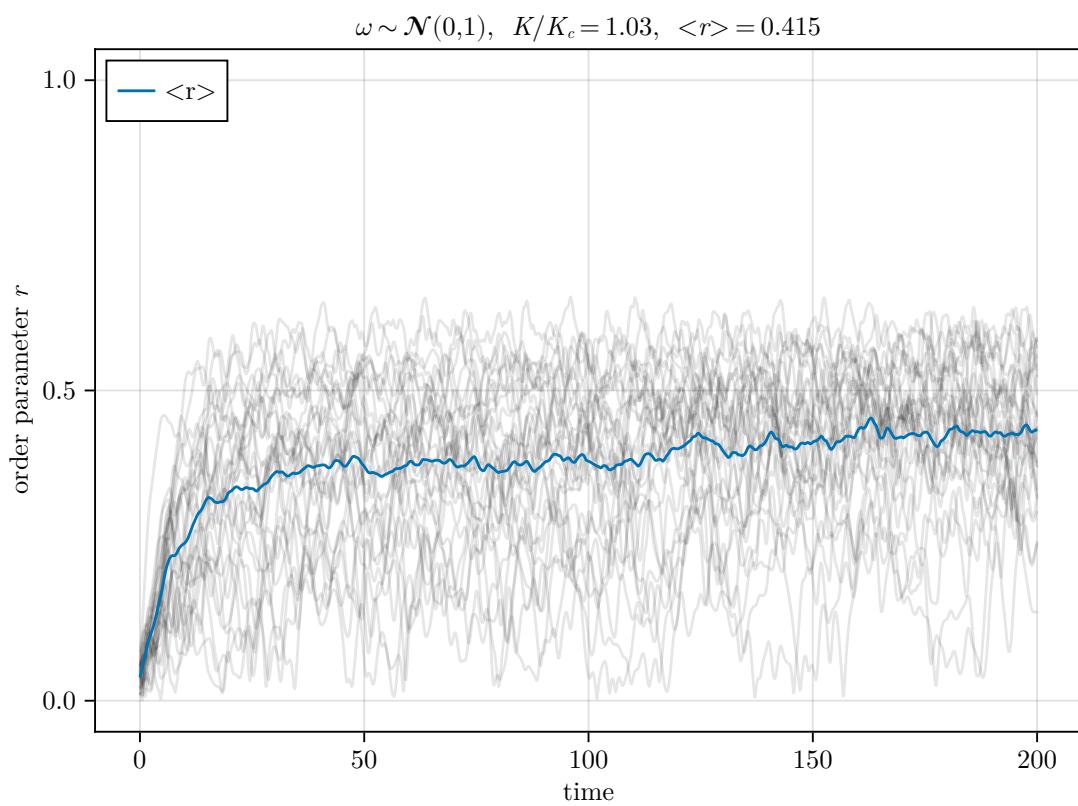
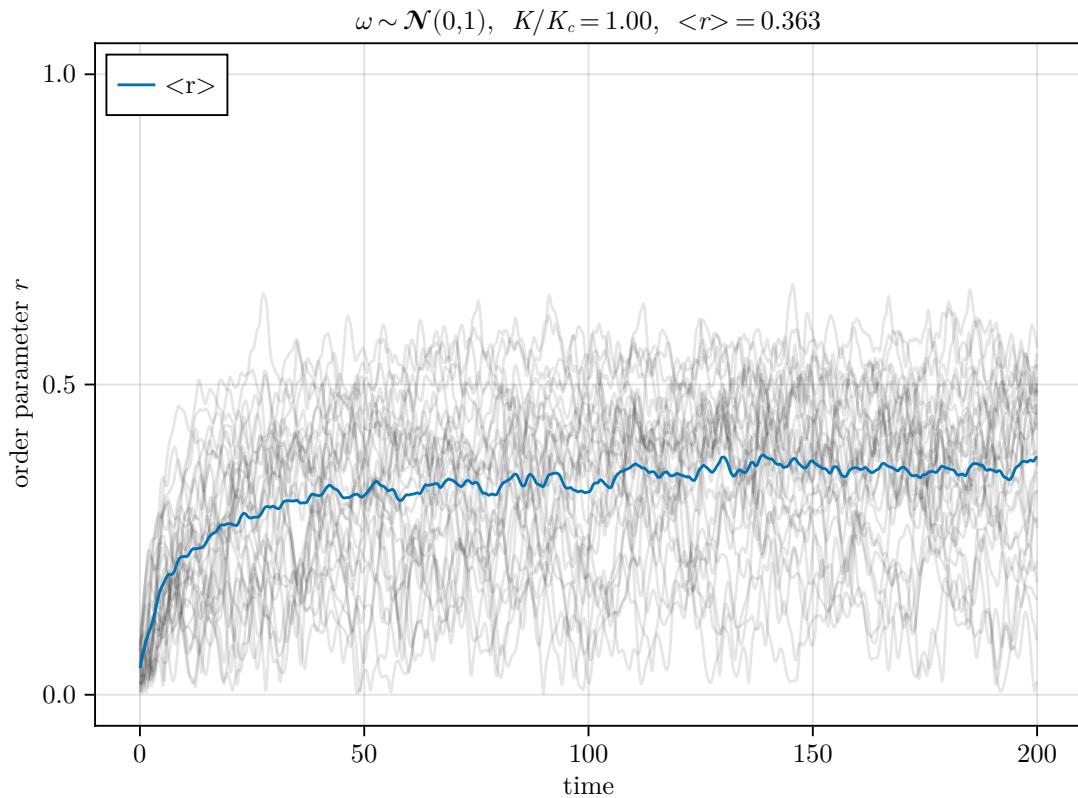
$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\theta = \frac{\pi K}{2\sqrt{2\pi}}. \quad (6)$$

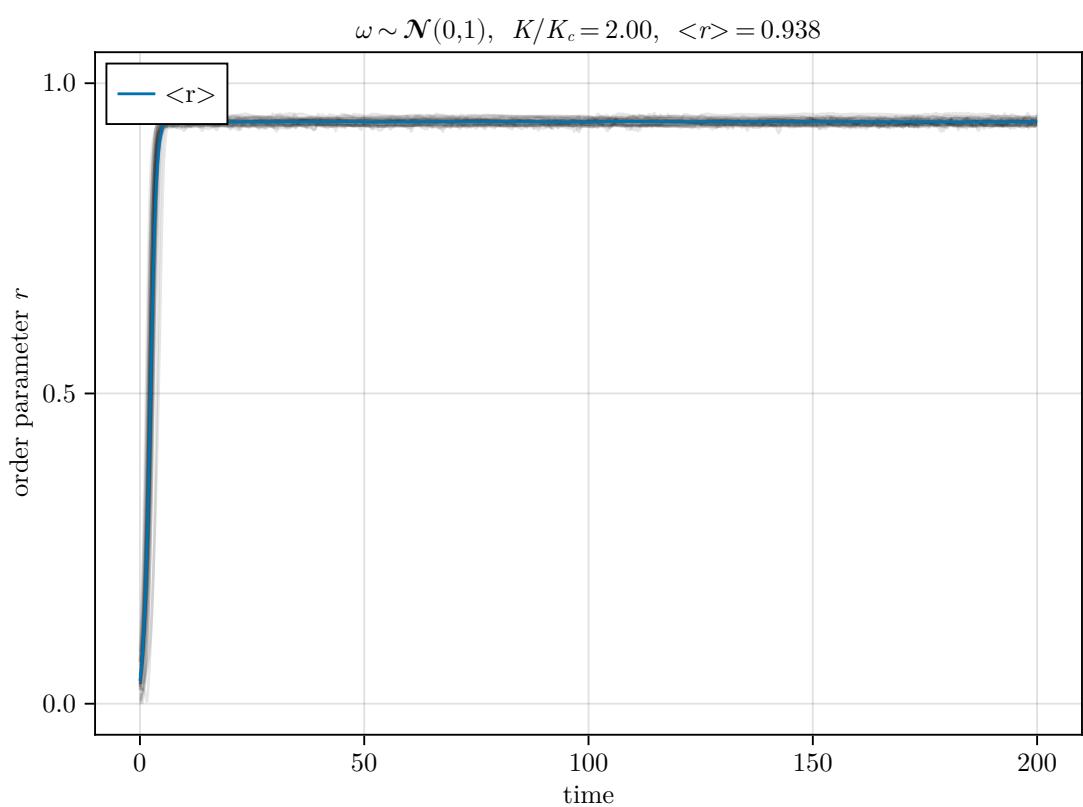
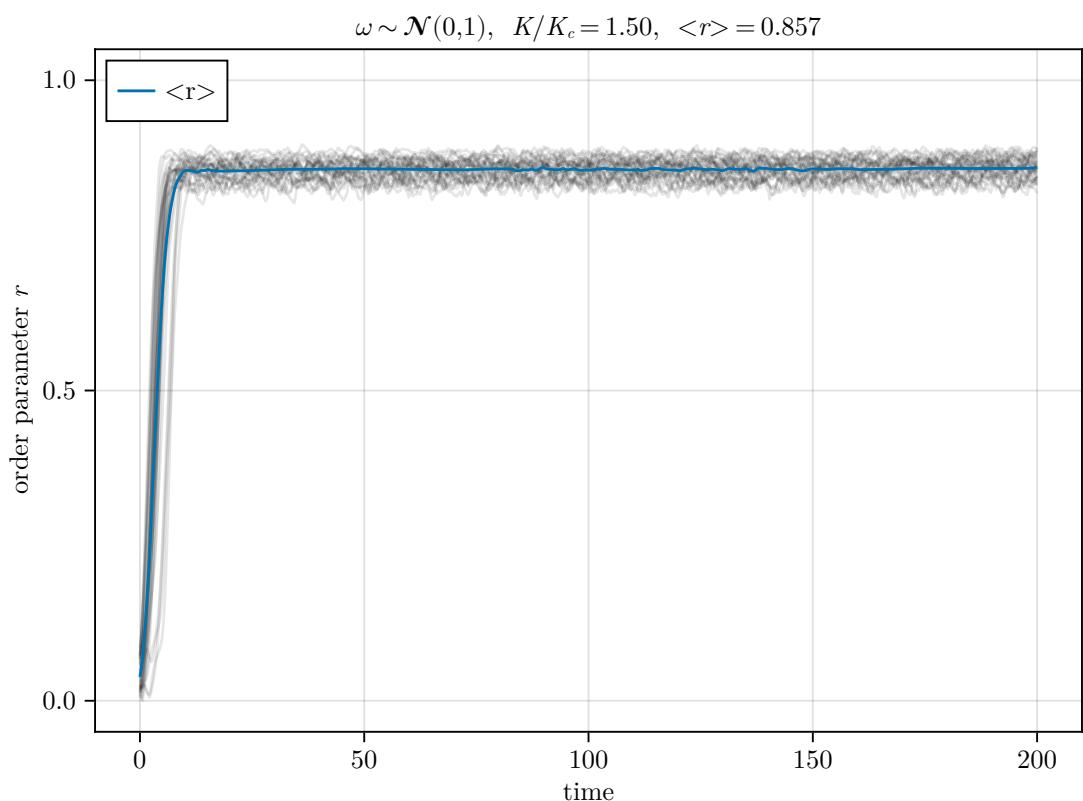
Zatem

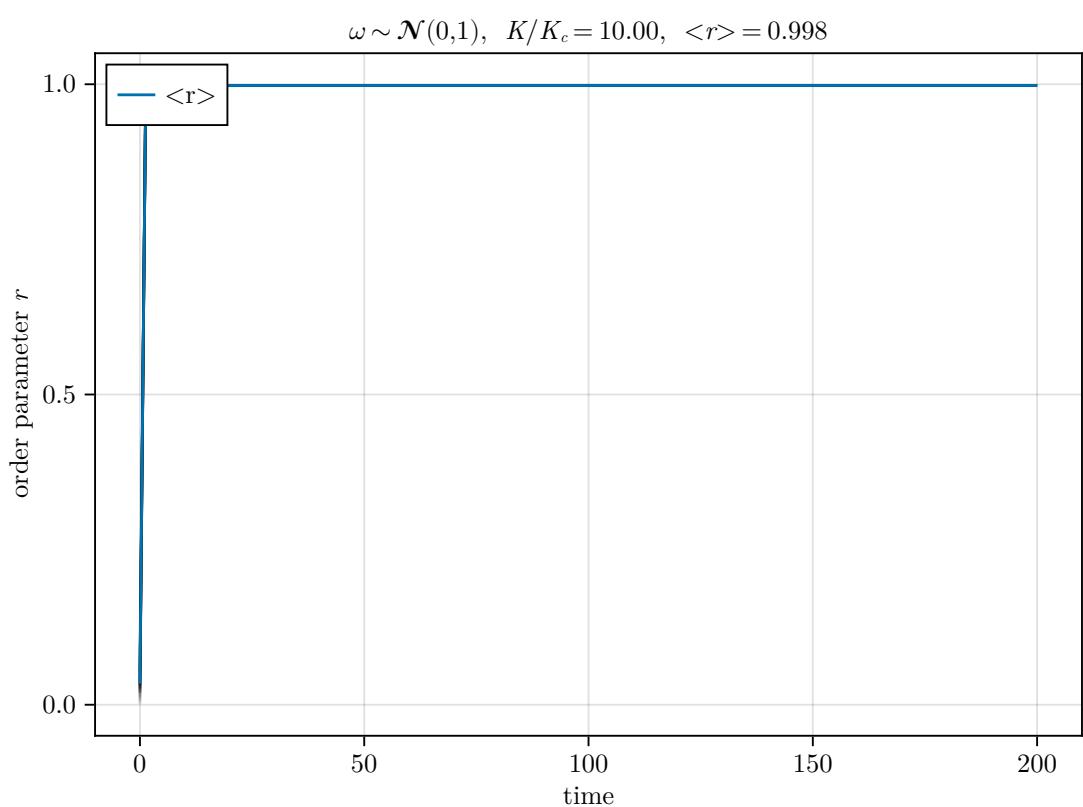
$$K_c = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \quad (7)$$











## 2.2 Rozkład Cauchy'ego

Dla  $\omega$  pochodzącego z rozkładu Cauchy'ego

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \omega^2}. \quad (8)$$

Wyznaczamy parametr krytyczny z równania (całkowanie w Matematice)

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\theta) g(Kr \sin \theta) d\theta = 2Kr \frac{1}{2 + 2\sqrt{1 + K^2 r^2}}, \quad (9)$$

co po przekształceniu daje

$$r = \sqrt{\frac{K - 2}{K}} \quad \text{dla } K > 2 \quad (10)$$

oraz wartość krytyczną

$$K_c = 2 \quad (11)$$

