1. Spróbujmy *jakościowo* przeanalizować długoczasowe zachowania rozwiązań równania

$$\ddot{x} + \left[2\dot{x}^2 + x^4 - 1\right]\dot{x} + x^3 = 0\,. \tag{1a}$$

Jest to szczególny przypadek równania

$$\ddot{x} + \gamma(x,\dot{x})\,\dot{x} + x^3 = 0\,. \tag{1b}$$

opisującym ruch w potencjale $\frac{1}{4}x^4$ z dynamicznym "tarciem" $\gamma(x,\dot{x})$, zależnym od położenia i prędkości.

(a) Znajdź punkty stacjonarne równania (1a).

(b) Co się dzieje w przypadkach $\gamma(x,\dot{x}) > 0$, $\gamma(x,\dot{x}) < 0$?

(c) Co się dzieje w przypadku $|x| \ll 1$ oraz $|\dot{x}| \ll 1$?

(d) Co się dzieje w przypadku $|x| \gg 1$ lub $|\dot{x}| \gg 1$?

(e) Wykaż, że krzywa $\gamma(x,\dot{x}) = 0$, czyli

$$2\dot{x}^2 + x^4 - 1 = 0 \tag{1c}$$

jest krzywą całkową równania (1a). (Wskazówka: Zróżniczkuj równanie (1c).)

(f) Jeśli spełnione jest równanie (1c), jaki zakres może przybierać zmienna x?

(g) Załóżmy, że $x(t)$ spełnia równanie (1c). Niech $x(t) \to x(t) + \varepsilon(t)$, $|\varepsilon(t)| \ll 1$. Czy $x(t)$ jest stabilnym rozwiązaniem równania (1a)? (To da się pokazać, ale nie jest to *oczywiste*.)

2. Opierając się o równanie (1a), spróbuj wymyślić równanie postaci (1b) posiadające *dwa* cykle graniczne. Jaka będzie stabilność tych cykli?

3. **Oscylator Van der Polla** Znajdź punkty stałe i przeprowadź jakościową analizę asymptotycznych rozwiązań równania

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0\,,\ \mu \geqslant 0\,. \tag{2}$$

4P. Dla $t \in [0, 15]$ rozwiąż numerycznie równanie (2) dla wartości $\mu = 1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 3/2, 2, 3, 5, 7, 9$. Dla każdej wartości μ dobierz kilka przypadkowych warunków początkowych $(x(0), \dot{x}(0))$. Przedstaw rozwiązania graficznie w postaci krzywych $x(t)$ oraz ich portrety fazowe na płaszczyźnie $(x, \dot{x})$.

Zadania oznaczone "P", jeśli występują, są zadaniami programistycznymi. Rozwiązania — kod programu plus wyniki, w tym ewentualne wykresy — proszę mi przesyłać na mój e-mail pawel.gora@uj.edu.pl w ciągu miesiąca od daty widocznej w nagłówku zestawu. Rozwiązanie co najmniej połowy zadań programistycznych zadanych w ciągu semestru jest **warunkiem koniecznym** uzyskania zaliczenia.
PFG