1. **Model Kuramoto**. W zasadzie to nie jest "zadanie", tylko problem, który będziemy analizować na zajęciach.

   Rozważmy układ $N \gg 1$ oscylatorów na cyklach granicznych. Położenie i-tego oscylatora jest jednoznacznie opisane przez jego fazę $\theta_i \in [0, 2\pi]$. Fazy oscylatorów chcą się zsynchronizować — dynamika układu jest opisana przez

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^{N} \sin(\theta_i - \theta_j)\,, \tag{1}$$

   gdzie K jest stałą sprzężenia, a ω_i jest naturalną częstością i-tego oscylatora.

   Wprowadzam zespolony parametr porządku

$$r\, e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j} \tag{2}$$

   Wykorzystując tożsamości trygonometryczne, wyraź równanie ruchu i-tego oscylatora poprzez parametr porządku.

   Dobierając odpowiedni układ współrzędnych w przestrzeni faz, możemy przyjąć, że $\psi = 0$. Zakładamy też, że naturalne częstości oscylatorów, ω_i, pochodzą z pewnego rozkładu $g(\omega)$, symetrycznego względem zera: $g(-\omega) = g(\omega)$.

   Czy jakaś część oscylatorów *może* dążyć do punktu stacjonarnego? Jaki warunek muszą spełniać częstości tych oscylatorów? Tę grupę oscylatorów żargonowo nazywamy "zalokowanymi".

   Pozostałe oscylatory "dryfują". Oscylatory dryfujące muszą tworzyć rozkład stacjonarny na przedziale $\theta \in [0, 2\pi]$. Z założenia o stacjonarności wynika, że ich gęstość musi być odwrotnie proporcjonalna do ich prędkości,

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin\theta|} \tag{3}$$

   Korzystając z warunku

$$\int_0^{2\pi} \rho(\theta, \omega)\, d\theta = 1 \tag{4}$$

   oblicz stałą C. Oscylatory o jakich częstościach *nie mogą* należeć do fazy dryfującej?

   Niech nawiasy $\langle \cdot \rangle$ oznaczają średnią. Pokaż, że

$$\left\langle e^{i\theta} \right\rangle_{\text{drift}} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \rho(\theta, \omega)\, g(\omega)\, d\theta\, d\omega = 0 \tag{5}$$

   Wobec tego (pamietajmy, że $\psi = 0$)

$$r = \left\langle e^{i\theta} \right\rangle = \left\langle e^{i\theta} \right\rangle_{\text{lock}} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos\theta(\omega)\, g(\omega)\, d\omega \tag{6}$$

   Skąd wzięłą się ostatnia równość?

   Podstawiając

$$\omega = Kr \sin\theta \tag{7}$$

pokaż, że samouzgodnione równanie na r ma postać

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2\theta \, g(Kr\sin\theta)\, d\theta \,. \tag{8}$$

To równanie zawsze ma rozwiązanie $r = 0$. Znajdź krytyczną wartość stałej K, K_c, dla której pojawia się rozwiązanie $r > 0$.

Ponieważ $g(\omega)$ jest parzysta, musi mieć ekstremum w zerze. Przyjmijmy, że jest to maksimum, czyli $g''(0) < 0$. Rozwijając w (8) $g(\omega)$ wokół zera do najniższego rzędu, znajdź zachowanie r w okolicach $K > K_c$.

Problem ten jest oparty na pracy Steven H. Strogatz, *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*, Physica D **143**, 1 (2000).

2P. Przyjmijmy, że naturalne częstości oscylatorów Kuramoto losowane są ze standardowego rozkładu normalnego. Znajdź analitycznie wartość K_c, a następnie rozwiąż układ równań (1) numerycznie przyjmując $N = 128$ (dla ambitnych lub posiadających szybsze komputery, $N = 256, 512, 1024$) i stałe sprzężenia $K = \frac{1}{4}K_c, \frac{1}{2}K_c, K_c, \frac{3}{2}K_c, 2K_c$. Użyj klasycznej metody Rungego-Kutty (lub metody trapezowej, jeśli ją znasz). Rozpocznij z losowymi fazami $\theta_i \in [0, 2\pi]$. Jako rozwiązania przedstaw wykresy parametru porządku $r(t)$ w funkcji czasu. Gaussowskie liczby losowe, służące do wygererowania naturalnych częstości, można uzyskać za pomocą algorytmu Boxa-Mullera — w sieci są tysiące implementacji tego algorytmu w dowolnych cywilizowanych językach programowania, a niektóre języki mają go w najbardziej popularnych pakietach i bibliotekach.
Wskazówka: Skorzystaj z tożsamości trygonometrycznych aby się przekonać, że problem obliczania prawych stron równania (1) nie jest kwadratowy, ale liniowy ☺.

Zadania oznaczone "P", jeśli występują, są zadaniami programistycznymi. Rozwiązania — kod programu plus wyniki, w tym ewentualne wykresy — proszę mi przesyłać na mój e-mail pawel.gora@uj.edu.pl w ciągu miesiąca od daty widocznej w nagłówku zestawu. Rozwiązanie co najmniej połowy zadań programistycznych zadanych w ciągu semestru jest **warunkiem koniecznym** uzyskania zaliczenia.
PFG