

1. Udowodnij indukcyjnie, że kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego, F_n , można obliczyć ze wzoru Bineta:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (1)$$

2. Rozważamy odwzorowanie trójkątne:

$$x_{n+1} = \beta \left(1 - 2 \left| \frac{1}{2} - x_n \right| \right), \quad (2)$$

gdzie $x_n \in [0, 1]$, natomiast $\beta \in [0, 1]$ jest parametrem.

- Zilustruj graficznie działanie odwzorowania trójkątnego dla kilku wybranych wartości β .
 - Znajdź wykładnik Lapunowa dla tego odwzorowania.
 - Dla obszaru chaotycznego odwzorowania trójkątnego można oszacować, po ilu iteracjach znajomość położenia kolejnych iteratów zostaje utracona. Przypuśćmy, że znamy położenie x_n z dokładnością do pewnego ε , $|\varepsilon| \ll 1$ (ε może reprezentować numeryczną dokładność, z jaką potrafimy określić x_n). Ilu iteracji, k , potrzeba, aby niepewność położenia x_{n+k} była ~ 1 ?
3. Rozważamy odwzorowanie logistyczne

$$x_{n+1} = 4\mu x_n(1 - x_n), \quad x_n \in [0, 1], \quad \mu \in [0, 1]. \quad (3)$$

- Wyznacz punkty stałe i określ ich stabilność.
 - Pokaż, że dla $\mu < 3/4$ nie istnieją orbity okresowe o okresie 2.
4. Rozważamy odwzorowanie¹

$$x_{n+1} = \eta(x_n) = \frac{x_n}{2} - \frac{1}{2x_n}. \quad (4)$$

- (a) Pokaż, że tzw. rozkład Cauchy'ego

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad (5)$$

jest gęstością niezmienniczą odwzorowania (4), to znaczy $\rho(x)$ spełnia równanie Frobeniusa-Perrona

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta(x) - y) \rho(y) dy, \quad (6)$$

gdzie $\delta(\cdot)$ jest deltą Diraca.

- Oblicz wykładnik Lapunowa dla odwzorowania (4).
- Zastosuj rzut stereograficzny

$$x = \tan \pi \phi \quad (7)$$

do odwzorowania (4). Jaka jest postać odwzorowania $\phi_{n+1} = \zeta(\phi_n)$ po uwzględnieniu okresowości funkcji trygonometrycznych? Jaka jest gęstość niezmiennicza tego odwzorowania?

- 5P. Wyznacz numerycznie wykładnik Lapunowa odwzorowania logistycznego w funkcji parametru μ .

¹<https://www.actaphys.uj.edu.pl/fulltext?series=Reg&vol=38&page=1909>

Zadania oznaczone “P”, jeśli występują, są zadaniami programistycznymi. Rozwiązania — kod programu plus wyniki, w tym ewentualne wykresy — proszę mi przesyłać na mój e-mail pawel.gora@uj.edu.pl w ciągu miesiąca od daty widocznej w nagłówku zestawu. Rozwiązanie co najmniej połowy zadań programistycznych zadanych w ciągu semestru jest **warunkiem koniecznym** uzyskania zaliczenia.

PFG