1. Rozwiąż równanie
$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x\,. \tag{1}$$

2. Rozwiąż równanie
$$\frac{dx}{dt} = \sin x \tag{2}$$
z warunkiem początkowym $x(0) = x_0$.
Wskazówka: Proszę skorzystać z “podstawienia uniwersalnego” $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

3. Rozwiąż układ równań różniczkowych
$$\frac{dx}{dt} = -2x + y\,, \tag{3a}$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y\,. \tag{3b}$$

4. Rozwiąż układ równań różniczkowych
$$\frac{dx}{dt} = 1023x + 2023y\,, \tag{4a}$$
$$\frac{dy}{dt} = -1024x - 2024y \tag{4b}$$
z warunkiem początkowym $x(0) = 1\,,\ y(0) = 0$.

5. Dany jest problem Cauchy’eqo
$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt} & = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(0) & = \mathbf{y}_0 \end{cases} \tag{5a}$$
gdzie $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y}, \mathbf{y}_0, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$. **Niejawna metoda Eulera** numerycznego rozwiązywania tego problemu ma postać
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\,\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})\,, \tag{5b}$$
gdzie h jest krokiem czasowym, $t_{n+1} = t_n + h$.

Rozpisz niejawną metodę Eulera dla problemu (4). Do jakiego problemu algebraicznego to prowadzi?

6P. Rozwiąż **numerycznie** problem (4) w przedziale $[0, 0.125]$ za pomocą

(a) Jawnej metody Eulera z krokiem $h = 1/2048$,
(b) Jawnej metody Eulera z krokiem $h = 1/512$,
(c) Jawnej metody Eulera z krokiem $h = 1/256$,
(d) Niejawnej metody Eulera z krokiem $h = 1/512$,
(e) Niejawnej metody Eulera z krokiem $h = 1/256$,
(f) Klasycznej czterokrokowej metody Rungego-Kutty z krokiem $h = 1/512$,
(g) Klasycznej czterokrokowej metody Rungego-Kutty z krokiem $h = 1/256$.

Wyniki przedstaw graficznie i porównaj z rozwiązaniem dokładnym.

Zadania oznaczone “P” są zadaniami programistycznymi. Rozwiązania — kod programu plus wyniki, w tym ewentualne wykresy — proszę mi przesyłać na mój e-mail pawel.gora@uj.edu.pl w ciągu miesiąca od daty widocznej w nagłówku zestawu. Rozwiązanie co najmniej połowy zadań programistycznych zadanych w ciągu semestru jest **warunkiem koniecznym** uzyskania zaliczenia.

PFG