Resetowanie Stochastyczne

OMatKo 2023

Bartosz Żbik

UJ, Kraków

1-3 grudnia 2023

Plan wystąpienia

Pojęcia wstępne, notacja

Zmienne losowe definiuję na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pojęcia wstępne, notacja

Zmienne losowe definiuję na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Zmienna losowa X, to intuicyjnie obiekt, który zachowuje się jak rzut kością (jest losowy).

Pojęcia wstępne, notacja

Zmienne losowe definiuję na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Zmienna losowa X, to intuicyjnie obiekt, który zachowuje się jak rzut kością (jest losowy).

Wartość oczekiwaną ze zmiennej losowej X oznaczam $\mathbb{E}X$. Intuicyjnie jest to średnia z X.

Pojęcia wstępne, notacja

Zmienne losowe definiuję na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Zmienna losowa X, to intuicyjnie obiekt, który zachowuje się jak rzut kością (jest losowy).

Wartość oczekiwaną ze zmiennej losowej X oznaczam $\mathbb{E}X$. Intuicyjnie jest to średnia z X.

Proces stochastyczny $(X_t)_{t \in \mathfrak{T}}$, to rodzina zmiennych losowych indeksowanych czasem $t \in \mathfrak{T}$. Intuicyjnie jest to losowy proces, który obserwujemy w czasie $t \in \mathfrak{T}$.

Pojęcia wstępne, notacja

Zmienne losowe definiuję na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Zmienna losowa X, to intuicyjnie obiekt, który zachowuje się jak rzut kością (jest losowy).

Wartość oczekiwaną ze zmiennej losowej X oznaczam $\mathbb{E}X$. Intuicyjnie jest to średnia z X.

Proces stochastyczny $(X_t)_{t \in \mathfrak{T}}$, to rodzina zmiennych losowych indeksowanych czasem $t \in \mathfrak{T}$. Intuicyjnie jest to losowy proces, który obserwujemy w czasie $t \in \mathfrak{T}$.

Różne znaczenia liter t, T i τ (bo innych liter nie ma):
t - czas, T - zmienna losowa, τ - FPT, $\mathcal{T}$ - MFPT i $\mathfrak{T}$ - zbiór czasu.

Proces Wienera (ruchy Browna) - definicja

Definicja

Proces $W = (W_t)_{t \in [0,\infty)}$ nazywamy procesem Wienera jeśli:

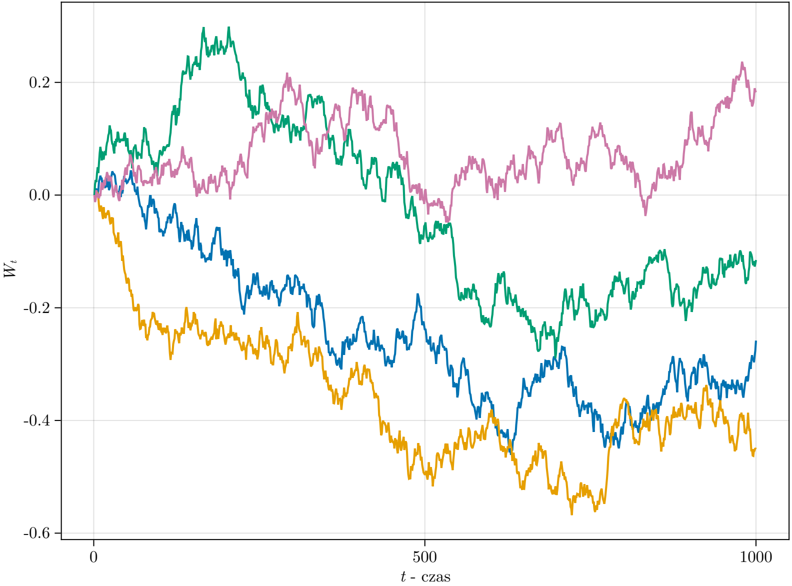
- $W_0 = 0$, $\mathbb{P}$ - p.n.
- W ma przyrosty stacjonarne i niezależne
- W ma ciągłe trajektorie
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$

Intuicja

Proces Wienera $W = (W_t)_{t \in [0,\infty)}$, to błądzenie przypadkowe w czasie ciągłym.

Dla wygody będziemy czasem zakładać, że $W_0 = x_0$, $\mathbb{P}$ - p.n.

Proces Wienera - trajektorie



Problem pierwszej ucieczki (ang. first passage time) FPT

Definicja

Niech $(X_t)_{t\in\mathfrak{T}}$ - proces stochastyczny, A - podzbiór $\mathbb{R}$. Zmienną losową $\tau : \Omega \to \mathfrak{T}$ nazwiemy czasem pierwszej ucieczki z A (w skrócie FPT) jeśli

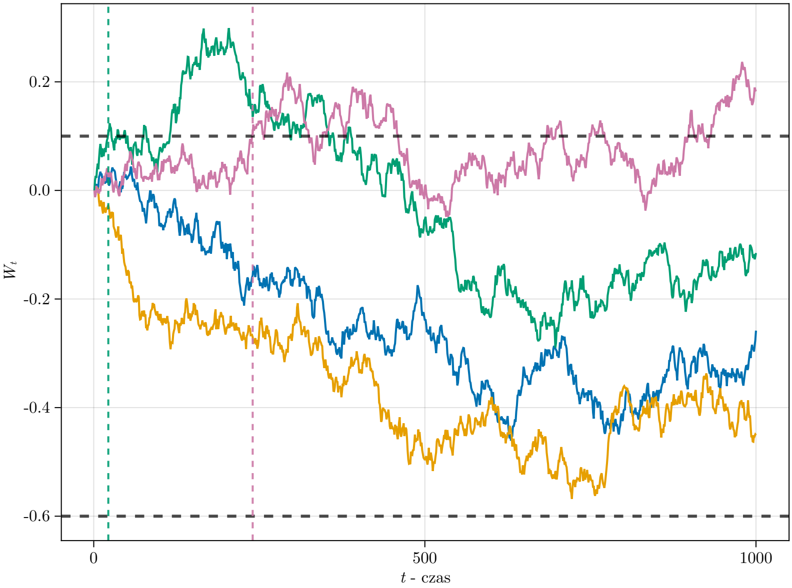
$$\tau = \inf\{t : t \in \mathfrak{T}\ ,\ X_t \notin A\}. \tag{1}$$

Jeśli dla pewnego $\omega \in \Omega$ mamy $\forall t \in \mathfrak{T} : X_t(\omega) \in A$, to kładziemy $\tau(\omega) = +\infty$.

Intuicja

Czasem pierwszej ucieczki (FPT) nazywamy zmienną losową, która odpowiada chwili w czasie, w której proces po raz pierwszy uciekł z przedziału (ogólniej zbioru).

Proces Wienera - ucieczka z przedziału (-0.6, 0.1)



Po co to wszystko?

Po co to wszystko?

W różnych zastosowaniach praktycznych interesuje nas *średni czas ucieczki* $\mathcal{T}$ (ang. mean first passage time)

$$\mathcal{T} := \mathbb{E}\tau \ . \tag{2}$$

Skrótowo będziemy pisali MFPT.

Po co to wszystko?

W różnych zastosowaniach praktycznych interesuje nas *średni czas ucieczki* $\mathcal{T}$ (ang. mean first passage time)

$$\mathcal{T} := \mathbb{E}\tau \ . \tag{2}$$

Skrótowo będziemy pisali MFPT.

Postawmy pytanie: *Jak zminimalizować ten czas?*

Po co to wszystko?

W różnych zastosowaniach praktycznych interesuje nas *średni czas ucieczki* $\mathcal{T}$ (ang. mean first passage time)

$$\mathcal{T} := \mathbb{E}\tau \; . \tag{2}$$

Skrótowo będziemy pisali MFPT.

Postawmy pytanie: *Jak zminimalizować ten czas?*

Możliwe rozwiązanie: \title

Resetowanie Stochastyczne - resetowanie procesu

Załóżmy, że mamy proces $(X_t)_{t\in\mathfrak{T}}$, który startuje w x_0 (czyli $X_0 \equiv x_0$).

[1] Bardziej formalnie można użyć ciągu i.i.d. zmiennych losowych o rozkładach jak R i ciągu procesów o rozkładach jak $(X_t)_{t\in\mathfrak{T}}$.

Resetowanie Stochastyczne - resetowanie procesu

Załóżmy, że mamy proces $(X_t)_{t\in\mathfrak{T}}$, który startuje w x_0 (czyli $X_0 \equiv x_0$).

Niech $R : \Omega \to \mathfrak{T}$ (czas po jakim resetujemy), będzie niezależne od $(X_t)_{t\in\mathfrak{T}}$.

[1] Bardziej formalnie można użyć ciągu i.i.d. zmiennych losowych o rozkładach jak R i ciągu procesów o rozkładach jak $(X_t)_{t\in\mathfrak{T}}$.

Resetowanie Stochastyczne - resetowanie procesu

Załóżmy, że mamy proces $(X_t)_{t \in \mathfrak{T}}$, który startuje w x_0 (czyli $X_0 \equiv x_0$).

Niech $R : \Omega \to \mathfrak{T}$ (czas po jakim resetujemy), będzie niezależne od $(X_t)_{t \in \mathfrak{T}}$.

Definicja

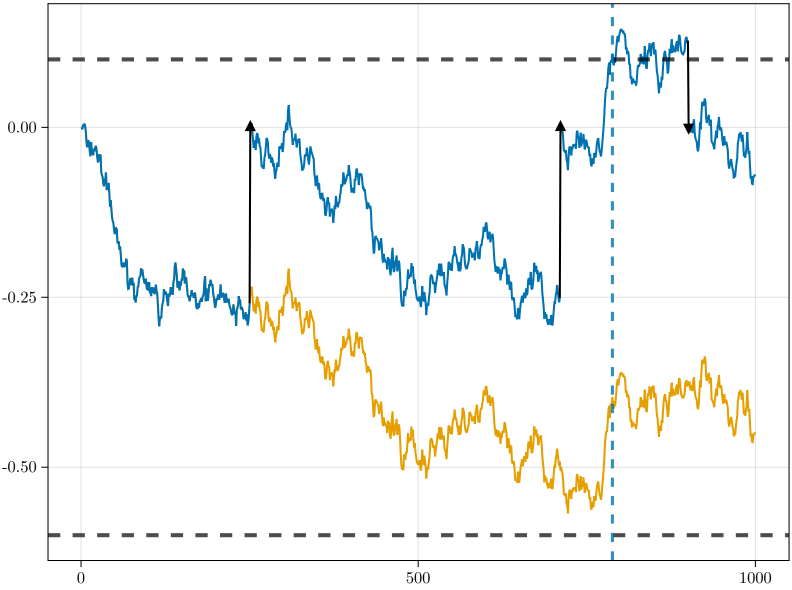
Zdefiniujmy[1] $(X^*_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ ("proces resetowany") jako

$$X^*_t = \begin{cases} X_t & , \text{ gdy } t < R \\ Y^*_{t-R} & , \text{ gdy } t \geq R \end{cases}, \tag{3}$$

gdzie $(Y^*_t)_{t \in \mathfrak{T}}$ jest niezależną kopią procesu resetowanego $(X^*_t)_{t \in \mathfrak{T}}$.

[1] Bardziej formalnie można użyć ciągu i.i.d. zmiennych losowych o rozkładach jak R i ciągu procesów o rozkładach jak $(X_t)_{t \in \mathfrak{T}}$.

Resetowanie procesu - przykład dla procesu Wienera



Resetowanie Stochastyczne - ogólniej

Załóżmy, że mamy pewną zmienną losową $T : \Omega \to [0, \infty)$, która ma interpretację jak FPT.

[2] Bardziej formalnie można użyć ciągów i.i.d. zmiennych losowych o rozkładach jak rozkłady T i R.

Resetowanie Stochastyczne - ogólniej

Załóżmy, że mamy pewną zmienną losową $T : \Omega \to [0, \infty)$, która ma interpretację jak FPT.

Niech $R : \Omega \to [0, \infty)$ będzie niezależne od T i ma interpretację czasu po jakim resetujemy.

[2] Bardziej formalnie można użyć ciągów i.i.d. zmiennych losowych o rozkładach jak rozkłady T i R.

Resetowanie Stochastyczne - ogólniej

Załóżmy, że mamy pewną zmienną losową $T : \Omega \to [0, \infty)$, która ma interpretację jak FPT.

Niech $R : \Omega \to [0, \infty)$ będzie niezależne od T i ma interpretację czasu po jakim resetujemy.

Definicja

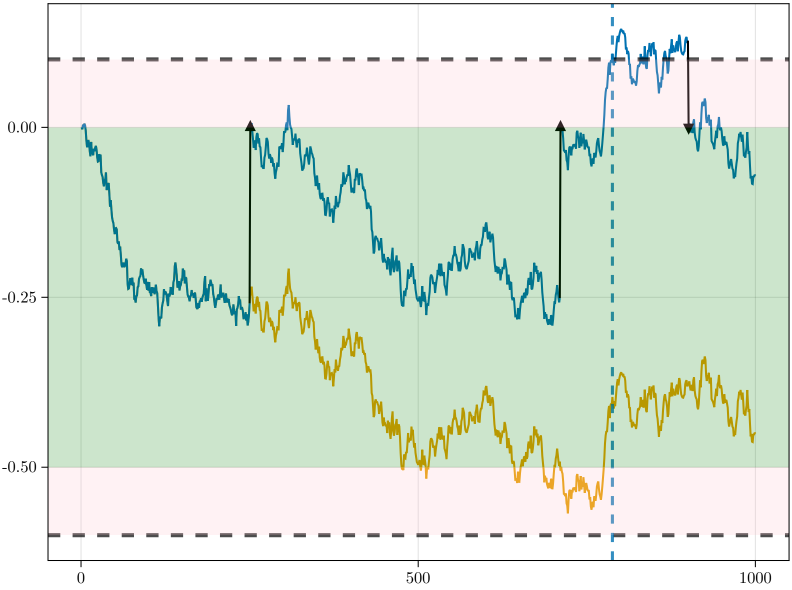
Zdefiniujmy[2] T_R ("*T pod wpływem resetowania*") jako

$$T_R = \begin{cases} T & , \text{ gdy } T < R \\ R + T'_R & , \text{ gdy } T \geq R \end{cases}, \tag{4}$$

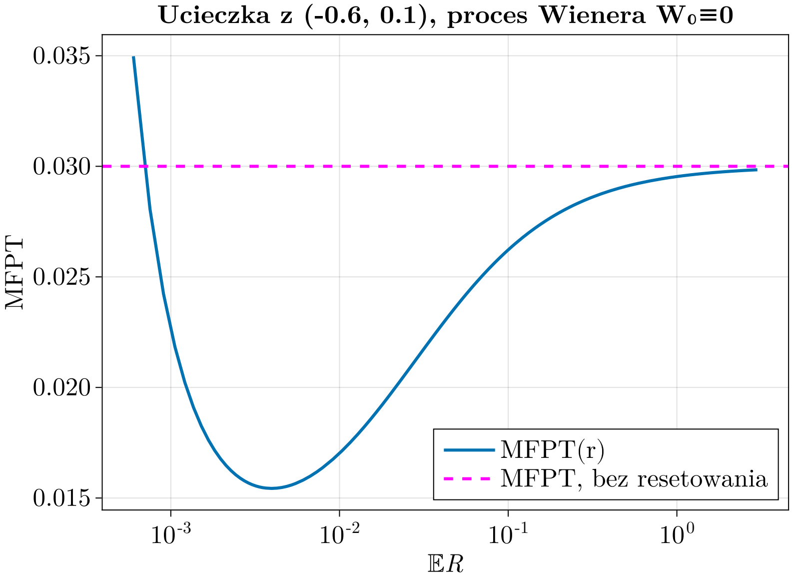
gdzie T'_R jest niezależne od T_R i ma identyczny rozkład.

[2] Bardziej formalnie można użyć ciągów i.i.d. zmiennych losowych o rozkładach jak rozkłady T i R.

Resetowanie Stochastyczne - przykład optymalizacji MFPT



Resetowanie Stochastyczne - przykład optymalizacji MFPT



Ile można powiedzieć na podstawie przyjętego modelu?

Znajdźmy wyrażenie na MFPT przy założeniu resetowania

$$\mathcal{T}_R = \mathbb{E}T_R = \mathbb{E}[T; T < R] + \mathbb{E}[R + T'_R; T \geq R] \tag{5}$$

Ile można powiedzieć na podstawie przyjętego modelu?

Znajdźmy wyrażenie na MFPT przy założeniu resetowania

$$\mathcal{T}_R = \mathbb{E}T_R = \mathbb{E}[T; T < R] + \mathbb{E}[R + T'_R; T \geq R] \tag{5}$$

Wiemy, że T'_R nie zależy od T, R i ma ten sam rozkład co T_R

$$\mathcal{T}_R = \mathbb{E}[T; T < R] + \mathbb{E}[R; T \geq R] + \mathcal{T}_R\mathbb{P}(T \geq R) \tag{6}$$

Ile można powiedzieć na podstawie przyjętego modelu?

Znajdźmy wyrażenie na MFPT przy założeniu resetowania

$$\mathcal{T}_R = \mathbb{E}\, T_R = \mathbb{E}[T; T < R] + \mathbb{E}[R + T_R'; T \geq R] \tag{5}$$

Wiemy, że T_R' nie zależy od T, R i ma ten sam rozkład co T_R

$$\mathcal{T}_R = \mathbb{E}[T; T < R] + \mathbb{E}[R; T \geq R] + \mathcal{T}_R \mathbb{P}(T \geq R) \tag{6}$$

Po dalszych przekształceniach

$$\boxed{\mathcal{T}_R = \frac{\mathbb{E} \min(T, R)}{\mathbb{P}(T < R)}} \tag{7}$$

Resetowanie Poissonowskie

Załóżmy, że $R \sim \mathrm{Exp}(\mathrm{r})$, czyli $f_R(t) = re^{-rt} \cdot \chi_{[0,\infty)}(t)$.

Jeśli tak jest, to mówimy że resetowanie jest Poissonowskie i parametr r nazywamy szybkością resetowania (ang. reset rate).

[3] A. Pal and S. Reuveni, Phys. Rev. Lett. 118, 030603 (2017)

Resetowanie Poissonowskie

Załóżmy, że $R \sim \mathrm{Exp(r)}$, czyli $f_R(t) = re^{-rt} \cdot \chi_{[0,\infty)}(t)$.

Jeśli tak jest, to mówimy że resetowanie jest Poissonowskie i parametr r nazywamy szybkością resetowania (ang. reset rate).

Wówczas transformata Laplace'a $\widetilde{T}_R(s) \equiv \mathbb{E}e^{-sT_R}$ zmiennej T_R ma postać[3]

$$\widetilde{T}_R(s) = \frac{\widetilde{T}(r+s)}{\frac{s}{s+r} + \frac{r}{s+r}\widetilde{T}(r+s)} \tag{8}$$

Zauważmy, że $\lim_{s \to 0} \widetilde{T}_R(s) = 1$ i zbadajmy momenty T_R.

[3] A. Pal and S. Reuveni, Phys. Rev. Lett. 118, 030603 (2017)

Resetowanie Poissonowskie

$$\mathcal{T}_R = \mathbb{E}\, T_R = -\frac{d}{ds}\, \widetilde{T}_R(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\widetilde{T}(r)} - 1\right) \tag{9}$$

[4] Zakładamy, że $\widetilde{T}$ jest klasy $\mathcal{C}^2$ na pewnym otoczeniu 0

Resetowanie Poissonowskie

$$\mathcal{T}_R = \mathbb{E}\, T_R = -\frac{d}{ds}\,\widetilde{T}_R(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\widetilde{T}(r)} - 1\right) \tag{9}$$

Załóżmy, że dla dostatecznie małych r funkcję $\widetilde{T}(r)$ możemy aproksymować wielomianem[4] od zmiennej r

$$\widetilde{T}(r) = 1 - m_1 r + \frac{1}{2} m_2 r^2 + o(r^2), \tag{10}$$

gdzie $m_1 = \mathbb{E}[T]$ i $m_2 = \mathbb{E}[X^2]$ z własności transformaty Laplace'a (związek z funkcją tworzącą).

[4] Zakładamy, że $\widetilde{T}$ jest klasy $\mathcal{C}^2$ na pewnym otoczeniu 0

Resetowanie Poissonowskie

$$\mathcal{T}_R = \mathbb{E}\,T_R = -\frac{d}{ds}\,\widetilde{T}_R(s)\Big|_{s=0} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\widetilde{T}(r)} - 1\right) \tag{9}$$

Załóżmy, że dla dostatecznie małych r funkcję $\widetilde{T}(r)$ możemy aproksymować wielomianem[4] od zmiennej r

$$\widetilde{T}(r) = 1 - m_1 r + \frac{1}{2} m_2 r^2 + o(r^2), \tag{10}$$

gdzie $m_1 = \mathbb{E}[T]$ i $m_2 = \mathbb{E}[X^2]$ z własności transformaty Laplace'a (związek z funkcją tworzącą). Wówczas

$$\mathcal{T}_R = \mathcal{T} + \left(\mathcal{T}^2 - \frac{1}{2}\mathbb{E}[T^2]\right) r + o(r^2)\ . \tag{11}$$

[4] Zakładamy, że $\widetilde{T}$ jest klasy $\mathcal{C}^2$ na pewnym otoczeniu 0

Warunek bazujący na CV (ang. Coefficient of Variation)

$$\mathcal{T}_R = \mathcal{T} + \frac{1}{2}\left(\mathcal{T}^2 - \mathbb{E}[(T - \mathcal{T})^2]\right) r + o(r^2) \tag{12}$$

daje nam warunek wystarczający, aby wprowadzenie resetowania zmniejszało MFPT.

Warunek bazujący na CV (ang. Coefficient of Variation)

$$\mathcal{T}_R = \mathcal{T} + \frac{1}{2}\left(\mathcal{T}^2 - \mathbb{E}[(T-\mathcal{T})^2]\right) r + o(r^2) \tag{12}$$

daje nam warunek wystarczający, aby wprowadzenie resetowania zmniejszało MFPT.

Wniosek (Twierdzenie)

Jeśli T ma interpretację jak FPT i $CV(T) > 1$, to istnieje r (małe) tże.:

$$\boxed{\mathcal{T}_R < \mathcal{T}, \quad \text{dla } R \sim \mathrm{Exp(r)}}. \tag{13}$$

W założeniach twierdzenia $CV(T)$ oznacza współczynnik zmienności

$$CV(T) = \frac{\sigma(T)}{\mathbb{E}[T]} = \frac{\sqrt{\mathbb{E}[(T-\mathcal{T})^2]}}{\mathcal{T}} = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[T^2]}{\mathcal{T}^2} - 1} \tag{14}$$

Warunek bazujący na CV

Wniosek (Twierdzenie)

Jeśli T ma interpretację jak FPT i $CV(T) > 1$, to istnieje r (małe) tże.:

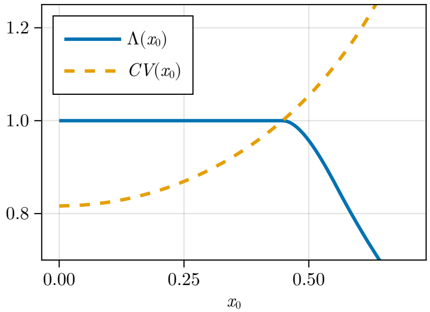
$$\boxed{\mathcal{T}_R < \mathcal{T}, \quad \text{dla } R \sim \mathrm{Exp(r)}}. \tag{15}$$

W założeniach twierdzenia $CV(T)$ oznacza współczynnik zmienności

$$CV(T) = \frac{\sigma(T)}{\mathbb{E}[T]} = \frac{\sqrt{\mathbb{E}[(T - \mathcal{T})^2]}}{\mathcal{T}} = \sqrt{\frac{\mathbb{E}[T^2]}{\mathcal{T}^2} - 1} \tag{16}$$

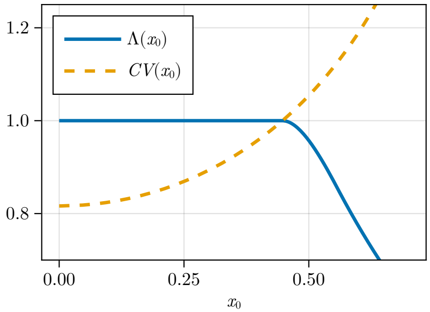
Ważne: Wystarczy zbadać własności procesu (ucieczek) bez resetowania, żeby powiedzieć coś o resetowaniu.

Zastosowanie kryterium CV dla procesu Wienera



Rysunek: Znormalizowane minimalne MFPT (minimum po różnych *reset rate*) dla procesu Wienera startującego w x_0 i uciekającego z przedziału $(-1, 1)$.

Zastosowanie kryterium CV dla procesu Wienera



Rysunek: Znormalizowane minimalne MFPT (minimum po różnych *reset rate*) dla procesu Wienera startującego w x_0 i uciekającego z przedziału $(-1, 1)$.

Aby zobaczyć kiedy resetowanie pomaga (i jak się ma do CV) definiujemy

$$\Lambda(x_0) = \frac{\min_{r\geq 0}(\mathcal{T}_R)}{\mathcal{T}}, \tag{17}$$

czyli minimalne $\mathcal{T}_R$ (dla resetowania Poissonowskiego) znormalizowane przez $\mathcal{T}$.
Ponadto MFPT dla ucieczki z $(-L, L)$ kiedy proces startuje w x_0 wynosi

$$\mathcal{T}(x_0) = \frac{L^2 - x_0^2}{2} \tag{18}$$

Podsumowanie

Resetowanie stochastyczne może zmniejszyć MFPT.

Podsumowanie

Resetowanie stochastyczne może zmniejszyć MFPT.

Resetowanie stochastyczne można rozważać (i badać) w oderwaniu od procesu stochastycznego.

Podsumowanie

Resetowanie stochastyczne może zmniejszyć MFPT.

Resetowanie stochastyczne można rozważać (i badać) w oderwaniu od procesu stochastycznego.

Można formułować stosunkowo ogólne wnioski jak choćby

$$\boxed{CV(T) > 1 \implies \mathcal{T}_R < \mathcal{T} \ \text{ dla pewnego } \ R \sim \mathrm{Exp}(r)}$$

Bibliografia

A. Pal and S. Reuveni, Phys. Rev. Lett. 118, 030603 (2017)

A. Chechkin and I. M. Sokolov Phys. Rev. Lett. 121, 050601 (2018)

Arnab Pal and V. V. Prasad Phys. Rev. E 99, 032123 (2019)

R. K. Getoor, Trans. Am. Math. Soc. 101, 75 (1961)