Rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jacobiego

1. Zastosowanie

Procedura $JacobiInterval$ rozwiązuje układ równań liniowych postaci $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ (1), gdzie $\boldsymbol{A}$ oznacza macierz kwadratową stopnia n, a $x, b \in R^n$, metodą Jacobiego.

2. Opis metody

Macierz $\boldsymbol{A}$ układu (1) jest przekształcana na sumę trzech macierzy, tj.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U},$$

gdzie $\boldsymbol{L}$ oznacza macierz trójkątną dolną, $\boldsymbol{D}$ – macierz diagonalną, a $\boldsymbol{U}$ oznacza macierz trójkątną górną. Uwzględniając rozkład macierzy $\boldsymbol{A}$**,** układ równań (1) można zapisać w postaci

$$(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

tj.

$$\boldsymbol{Dx} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

z czego wynika następujący proces iteracyjny:

$$\boldsymbol{Dx^{k+1}} = -(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x^k} + \boldsymbol{b},$$

tj.

$$\boldsymbol{x^{k+1}} = -\boldsymbol{D^{-1}}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})\boldsymbol{x^k} + \boldsymbol{D^{-1}b}. \, (2)$$

Jeżeli promień spektralny macierzy $-\boldsymbol{D^{-1}}(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{U})$ jest mniejszy od 1, to proces iteracyjny (2) jest zbieżny. Z zależności (2) wynika, że $(k+1)$ przybliżenie $i - tej$ składowej rozwiązania jest określone wzorem

$$\boldsymbol{x_i^{k+1}} = \frac{-\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \boldsymbol{a_{ij}x_j^k} + \boldsymbol{b_i}}{\boldsymbol{a_{ii}}}, i = 1, 2, \ldots, n, (3)$$

przy czym $a_{ii} \neq 0$. Proces iteracyjny kończy się, gdy

$$\frac{\|\boldsymbol{x^{k+1}} - \boldsymbol{x^k}\|}{\max(\|\boldsymbol{x^{k+1}}\|, \|\boldsymbol{x^k}\|)} \leq \boldsymbol{\varepsilon}, x^{k+1} \neq 0 \ lub \ x^k \neq 0,$$

gdzie

$$\|\boldsymbol{x}\| = \boldsymbol{max_{1\leq i\leq n}}|\boldsymbol{x_i}|,$$

a ε oznacza zadaną dokładność, lub gdy $x^{k+1} = x^k = 0$ lub też, gdy liczba iteracji w procesie (3) jest większa od przyjętej wartości maksymalnej.

3. Wywołanie procedury

$JacobiInterval(n, ai, bi, mit, eps, xi, it, st)$

4. Dane

n — liczba równań (równa liczbie niewiadomych),

ai — tablica zawierająca wartości elementów macierzy $\boldsymbol{A}$ (element $a[i, j]$ powinien zawierać wartość a_{ij}, gdzie $i, j = 1, 2, \dots, n$),

bi — tablica zawierająca wartości składowych wektora $\boldsymbol{b}$ (element $b[i]$ powinien zawierać wartość b_i, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$);

mit — maksymalna liczba iteracji w procesie (3),

eps — względna dokładność rozwiązania,

xi — tablica zawierająca początkowe przybliżenia wartości x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Uwaga:
Po wykonaniu procedury $JacobiInterval$ wartości elementów tablicy xi są zmienione.

5. Wyniki

xi — tablica zawierająca rozwiązanie (element $x[i]$ zawiera wartość $x_i, i = 1, 2, \dots, n$),

it — liczba iteracji wykonanych w procesie (3).

6. Inne parametry

st — zmienna, której w procedurze $JacobiInterval$ przypisuje się jedną z następujących wartości:

- 1, jeżeli $\boldsymbol{n} < 1$,
- 2, gdy macierz $\boldsymbol{A}$ jest osobliwa,
- 3, jeżeli wymagana dokładność rozwiązania nie jest osiągnięta po $\boldsymbol{mit}$ iteracjach,
- 4, jeżeli wystąpiła próba dzielenia przez przedział zawierający zero,
- 0, w przeciwnym wypadku.

Uwaga:
Jeżeli $st = 1\ lub\ 2$, to po wykonaniu procedury $JacobiInterval$ elementy tablicy xi nie są zmienione. Gdy $st = 3$, to xi zawiera ostatnio obliczone przybliżenie rozwiązania.

7. Typy parametrów

$\boldsymbol{Integer}: it, mit, n, st$
$\boldsymbol{Extended}: eps$
$\boldsymbol{intervalMatrix}: ai$
$\boldsymbol{intervalVector}: bi, xi$

8. Identyfikatory nielokalne

$\boldsymbol{interval}$ – nazwa typu rekordowego postaci:

$\boldsymbol{type}\ interval = record$

$\boldsymbol{var}\ a, b : Extended;$

Rekord zawiera przeciążone operatory oraz procedury oraz funkcje dotyczące obliczeń na arytmetyce przedziałowej. Szczegóły implementacji zawarte w pliku $IntervalArithmetic32and64.pas$

$\boldsymbol{intervalVector}$ – nazwa typu tablicowego, $\boldsymbol{type\ Array\ of\ interval}$,

$\boldsymbol{intervalMatrix}$ – nazwa typu tablicowego, $\boldsymbol{type\ Array\ of\ Array\ of\ interval}$.

9. Przykłady

Przykład I

Dane:

$$ai[1,1].a := 0,\quad ai[1,1].b := 0,\quad ai[1,2].a := 0,\quad ai[1,2].b := 0,$$
$$ai[1,3].a := 1,\quad ai[1,3].b := 1,\quad ai[1,4].a := 2,\quad ai[1,4].b := 2,$$
$$ai[2,1].a := 2,\quad ai[2,1].b := 2,\quad ai[2,2].a := 1,\quad ai[2,2].b := 1,$$
$$ai[2,3].a := 0,\quad ai[2,3].b := 0,\quad ai[2,4].a := 2,\quad ai[2,4].b := 2,$$
$$ai[3,1].a := 7,\quad ai[3,1].b := 7,\quad ai[3,2].a := 3,\quad ai[3,2].b := 3,$$
$$ai[3,3].a := 0,\quad ai[3,3].b := 0,\quad ai[3,4].a := 1,\quad ai[3,4].b := 1,$$
$$ai[4,1].a := 0,\quad ai[4,1].b := 0,\quad ai[4,2].a := 5,\quad ai[4,2].b := 5,$$
$$ai[4,3].a := 0,\quad ai[4,3].b := 0,\quad ai[4,4].a := 0,\quad ai[4,4].b := 0,$$
$$bi[1].a := 1,\quad bi[1].b := 1,\quad bi[2].b := 1,\quad bi[2].a := 1,$$
$$bi[3].a := 1,\quad bi[3].b := 1,\quad bi[4].a := 1,\quad bi[4].b := 1,$$
$$xi[1].a := 0,\quad xi[1].b := 0,\quad xi[2].a := 0,\quad xi[2].b := 0,$$
$$xi[3].a := 0,\quad xi[3].b := 0,\quad xi[4].a := 0,\quad xi[4].b := 0,$$
$$mit := 100,\quad eps = 1e-14\,,$$

Wyniki:

$$xi[1].a := -0{,}0000000000000000\mathrm{E}+000,\quad xi[1].b := 1{,}5488602464078635\mathrm{E}-020,$$
$$xi[2].a := 1.9999999999999999\mathrm{E}-001,\quad xi[2].b := 2.0000000000000001\mathrm{E}-001,$$
$$xi[3].a := 2.0000000000000000\mathrm{E}-001,\quad xi[3].b := 2.0000000000000001\mathrm{E}-001,$$
$$xi[4].a := 3.9999999999999999\mathrm{E}-001,\quad xi[4].b := 4.0000000000000001\mathrm{E}-001,$$
$$st = 0,\quad it = 47$$

Przykład II

Dane:

$$ai[1,1].a := -12.235,\quad ai[1,1].b := -12.235,\quad ai[1,2].a := 1.229,$$
$$ai[1,2].b := 1.229,\quad ai[1,3].a := 0.5597,\quad ai[1,3].b := 0.5597,$$
$$ai[1,4].a := 0,\quad ai[1,4].b := 0,\quad ai[2,1].a := 1.229,$$
$$ai[2,1].b := 1.229,\quad ai[2,2].a := -6.78,\quad ai[2,2].b := -6.78,$$
$$ai[2,3].a := 0.765,\quad ai[2,3].b := 0.765,\quad ai[2,4].a := 0,\quad ai[2,4].b := 0,$$
$$ai[3,1].a := 0.5597,\quad ai[3,1].b := 0.5597,\quad ai[3,2].a := 0.765,$$
$$ai[3,2].b := 0.765,\quad ai[3,3].a := 91.0096,\quad ai[3,3].b := 91.0096,$$
$$ai[3,4].a := 2,\quad ai[3,4].b := 2,\quad ai[4,1].a := 0,\quad ai[4,1].b := 0,$$

$$ai[4,2].a := 0, \quad ai[4,2].b := 0, \quad ai[4,3].a := -2, \quad ai[4,3].b := -2,$$
$$ai[4,4].a := 5.5, \quad ai[4,4].b := 5.5, \quad bi[1].a := 0.956, \quad bi[1].b := 0.956,$$
$$bi[2].b := 51.5603, \quad bi[2].a := 51.5603, \quad bi[3].a := 2, \quad bi[3].b := 2,$$
$$bi[4].a := 5.8, \quad bi[4].b := 5.8, \quad xi[1].a := 2, \quad xi[1].b := 2,$$
$$xi[2].a := 0.75, \quad xi[2].b := 0.75, \quad xi[3].a := -1, \quad xi[3].b := -1,$$
$$xi[4].a := 0.9, \quad xi[4].b := 0.9, \quad mit := 10, \quad eps = 1e-16\,,$$

Wyniki:

$$xi[1].a := -8.5365592963074482\mathrm{E}-001, \quad xi[1].b := -8.5365592963074481\mathrm{E}-001,$$
$$xi[2].a := -7.7517576667649944\mathrm{E}+000, \quad xi[2].b := -7.7517576667649943\mathrm{E}+000,$$
$$xi[3].a := 6.8661539439450194\mathrm{E}-002, \quad xi[3].b := 6.8661539439450195\mathrm{E}-002,$$
$$xi[4].a := 1.0795132854741531\mathrm{E}+000, \quad xi[4].b := 1.0795132854741532\mathrm{E}+000,$$
$$st = 0, \quad it = 10$$

Przykład III

Dane:

$$ai[1,1].a := -12.235, \quad ai[1,1].b := -12.235, \quad ai[1,2].a := 1.229,$$
$$ai[1,2].b := 1.229, \quad ai[1,3].a := 0.5597, \quad ai[1,3].b := 0.5597,$$
$$ai[1,4].a := 0, \quad ai[1,4].b := 0, \quad ai[2,1].a := 1.229,$$
$$ai[2,1].b := 1.229, \quad ai[2,2].a := -6.78, \quad ai[2,2].b := -6.78,$$
$$ai[2,3].a := 0.765, \quad ai[2,3].b := 0.765, \quad ai[2,4].a := 0, \quad ai[2,4].b := 0,$$
$$ai[3,1].a := 0.5597, \quad ai[3,1].b := 0.5597, \quad ai[3,2].a := 0.765,$$
$$ai[3,2].b := 0.765, \quad ai[3,3].a := 91.0096, \quad ai[3,3].b := 91.0096,$$
$$ai[3,4].a := 2, \quad ai[3,4].b := 2, \quad ai[4,1].a := 0, \quad ai[4,1].b := 0,$$
$$ai[4,2].a := 0, \quad ai[4,2].b := 0, \quad ai[4,3].a := -2, \quad ai[4,3].b := -2,$$
$$ai[4,4].a := 5.5, \quad ai[4,4].b := 5.5, \quad bi[1].a := 0.956, \quad bi[1].b := 0.956,$$
$$bi[2].b := 51.5603, \quad bi[2].a := 51.5603, \quad bi[3].a := 2, \quad bi[3].b := 2,$$
$$bi[4].a := 5.8, \quad bi[4].b := 5.8, \quad xi[1].a := 2, \quad xi[1].b := 2,$$
$$xi[2].a := 0.75, \quad xi[2].b := 0.75, \quad xi[3].a := -1, \quad xi[3].b := -1,$$
$$xi[4].a := 0.9, \quad xi[4].b := 0.9, \quad mit := 5, \quad eps = 1e-16\,,$$

Wyniki:

$$xi[1].a := -8.5342060391968883\mathrm{E}-001, \quad xi[1].b := -8.5342060391968882\mathrm{E}-001,$$
$$xi[2].a := -7.7516601279218216\mathrm{E}+000, \quad xi[2].b := -7.7516601279218215\mathrm{E}+000,$$
$$xi[3].a := 6.8642948636654477\mathrm{E}-002, \quad xi[3].b := 6.8642948636654478\mathrm{E}-002,$$
$$xi[4].a := 1.0794618853840660\mathrm{E}+000, \quad xi[4].b := 1.0794618853840661\mathrm{E}+000,$$
$$st = 3, \quad it = 5$$

Przykład IV

Dane:

$$ai[1,1].a := -12.235, \quad ai[1,1].b := -12.235, \quad ai[1,2].a := 1.229,$$
$$ai[1,2].b := 1.229, \quad ai[1,3].a := 0.5597, \quad ai[1,3].b := 0.5597,$$
$$ai[1,4].a := 0, \quad ai[1,4].b := 0, \quad ai[2,1].a := -5.229,$$
$$ai[2,1].b := 1.229, \quad ai[2,2].a := -2, \quad ai[2,2].b := 0,$$
$$ai[2,3].a := 0, \quad ai[2,3].b := 0, \quad ai[2,4].a := 0, \quad ai[2,4].b := 0,$$
$$ai[3,1].a := 0, \quad ai[3,1].b := 0, \quad ai[3,2].a := 0,$$
$$ai[3,2].b := 0, \quad ai[3,3].a := 91.0096, \quad ai[3,3].b := 91.0096,$$
$$ai[3,4].a := 2, \quad ai[3,4].b := 2, \quad ai[4,1].a := 0, \quad ai[4,1].b := 0,$$
$$ai[4,2].a := 0, \quad ai[4,2].b := 0, \quad ai[4,3].a := -2, \quad ai[4,3].b := -2,$$

$$ai[4,4].a := 5.5, \quad ai[4,4].b := 5.5, \quad bi[1].a := 0.956, \quad bi[1].b := 0.956,$$
$$bi[2].b := 51.5603, \quad bi[2].a := 51.5603, \quad bi[3].a := 2, \quad bi[3].b := 2,$$
$$bi[4].a := 5.8, \quad bi[4].b := 5.8, \quad xi[1].a := 2, \quad xi[1].b := 2,$$
$$xi[2].a := 0.75, \quad xi[2].b := 0.75, \quad xi[3].a := -1, \quad xi[3].b := -1,$$
$$xi[4].a := 0.9, \quad xi[4].b := 0.9, \quad mit := 5, \quad eps = 1e-14\ ,$$

Wyniki:

$$st = 2$$