Obliczenia Naukowe
Laboratorium 3

Bartosz Grelewski

Listopad 2022

1 Zadanie 1

1.1 Opis Problemu

Napisać funkcję rozwiązującą równanie f(x) = 0 metodą bisekcji.
function mbisekcji(f, a::Float64, b::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64).

Dane:
f – funkcja f(x) zadana jako anonimowa funkcja (ang. anonymous function),
a,b - końce przedziału początkowego,
delta,epsilon - dokładności obliczeń,

Wyniki: (r,v,it,err) - czwórka, gdzie
r - przybliżenie pierwiastka równania f(x) = 0,
v - wartość f(r),
it - liczba wykonanych iteracji,
err - sygnalizacja błędu, 0 - brak błędu, 1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale [a,b].
Należy zaimplementować 3 algorytmy liczenia miejsca zerowego podanej funkcji.

Metoda bisekcji
Omawiany algorytm wyznacza miejsce zerowe z dokładnością do pewnego ϵ (dokładność tą ustalamy na początku programu) w przedziale obustronnie domkniętym. W przedziale $[a, b]$ funkcja ma dokładnie jedno miejsce zerowe. Dla każdej funkcji takiej funkcji, która jest ciągła w nadanym przez nas przedziale oraz posiadająca przeciwne znaki na ich krańcach będzie zachodził warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$ bo wartości na krańcach przedziałów będą zawsze przeciwnych znaków (chyba, że miejsce zerowe znajduje się w jednym z krańców).

W pierwszym kroku wyznaczamy środek przedziału i sprawdzamy, czy nie jest on już miejscem zerowym. Jeśli nie to sprawdzamy czy $f(a) \cdot f(srodek) < 0$, jeśli tak to miejsce zerower znajduje się w przedziale [a, środek), w przeciwnym razie (srodek, b]. W pierwszej sytuacji wartość b zostanie zastąpiona wartością środka, w drugiej wartością a. Powtarzamy do momentu $|f(c)| < \epsilon$. Ponadto mamy też warunek na dopuszczalną odległość od prawidłowego rozwiązania $|e| < \delta$, gdzie $e = (b - a)/2$ Metoda bisekcji jest iteracyjna.

W algorytmie używam funkcji signum, która zwraca nam znak zamiast $f(a) \cdot f(b) < 0$ ze względu na to, że jeśli pomnożymy dwie bardzo małe liczby różnych znaków jest możliwe by dały nam wynik znajdujący się w przedziale zera maszynowego. To poskutkowałoby nie zajściem tego w.w. warunku. c jest wyznaczane przez dodanie do jego początku połowy długości.

2 Zadanie 2

2.1 Opis Problemu

Napisać funkcję rozwiązującą równanie f(x) = 0 metodą Newtona. function mstycznych(f,pf,x0::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64, maxit::Int)

Metoda Newtona ma ekwiwalentną nazwę "metoda stycznych". Jej działanie polega na liczeniu punktów przecięcia stycznych do funkcji f z osią OX. Następnie prowadzeniu kolejnych stycznych do funkcji w tych x. Aby metoda działała funkcja musi spełniać:
1. W przedziale musi być dokładnie jeden pierwiastek.
2. Funkcja musi mieć różne znaki na końcach.
3. Pierwsza i druga pochodna funkcji muszą być mieć stały znak w przedziale.
Wybieranym punktem początkowym, dla którego liczymy pierwszą styczną jest najczęściej początek lub koniec przedziału obranego do szukania miejsca zerowego. Z którego następnie wyprowadzana jest styczna w $f(x_1)$. Odcięta punktu przecięcia stycznej z osią OX jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania. Jeśli to przybliżenie nie jest satysfakcjonujące, wówczas punkt x_2 jest wybierany jako nowy punkt startowy i wszystkie czynności są powtarzane. Proces jest kontynuowany, aż zostanie uzyskane wystarczająco dobre przybliżenie pierwiastka. Kolejne przybliżenia są dane rekurencyjnym wzorem: $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. Wadą tej metody jest potrzeba znajomości pochodnej funkcji w celu wyznaczenia stycznej.

3 Zadanie 3

3.1 Opis Problemu

Napisać funkcję rozwiązującą równanie $f(x) = 0$ metodą siecznych. function msiecznych(f, x0::Float64, x1::Float64, delta::Float64, epsilon::Float64, maxit::Int)

Metoda siecznych zwana jest także metodą Eulera lub cięciw. Jest to po części zmodyfikowana metoda Newtona, która zamiast wykorzystywać pochodną to dokonujemy jej przybliżenia przy pomocy ilorazu różnicowego.
Sposób działania tej metody to wyznaczanie miejsc przecięcia siecznych wykresu z osią OX, a następnie wykorzystywanie odciętej tych punktów do wyznaczania kolejnych siecznych. Pierwsza sieczna zaczyna się w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i kończy w punkcie $(x_1, f(x_1))$ przecinając punkt x_2 na osi OX. Kolejna sieczna w iteracji rozpoczyna się w $(x_1, f(x_1))$ i kończy w $(x_2, f(x_2))$. Dąży to do tego, że dana metoda umożliwia przybliżenie wykresu funkcji za pomocą kolejnych prostych i ostatecznie trafienie na punkt odpowiednio bliski szukanemu zeru. Żeby wszystko działało funkcja musi być:
1. Dwukrotnie różniczkowalna na badanym przedziale.
2. Szukany pierwiastek musi być nieparzystej krotności.
Oczywiście funkcja musi być określona w przedziale. Musi w nim również być ciągła i na krańcach przedziału musi mieć różne znaki. W przedziale pierwsza pochodna funkcji jest różna

od zera.

4 Zadanie 4

4.1 Opis Problemu

Zaimplementowanymi algorytmami obliczyć miejsce zerowe funkcji $sin(x) - ((1/2)x)^2$

4.2 Rozwiązanie

Wprowadzam dane do programu.
f - $sin(x) - (1/4) \cdot x^2$
fPrim - $cos(x) - (1/2) \cdot x$
delta - $(1/2) \cdot 10^{-5}$
epsilon - $(1/2) \cdot 10^{-5}$
i reszta z treści zadania.

4.3 Interpretacja wyniku

algorytm	x	f(x)	iteracje	błędy
Bisekcja	1.9337539672851562	-2.7027680138402843e-7	16	0
Newton	1.933753779789742	-2.2423316314856834e-8	4	0
Sieczne	1.933753644474301	1.564525129449379e-7	4	0

4.4 Wnioski

Prawdziwa wartość $x = 1.93375$, więc wszystkie metody obliczają dobrze jedno z miejsc zerowych podanej funkcji. Newtonem i siecznymi trwa to 4 iteracje, jedynie metodą bisekcji trwa to dłużej - 16 iteracji.

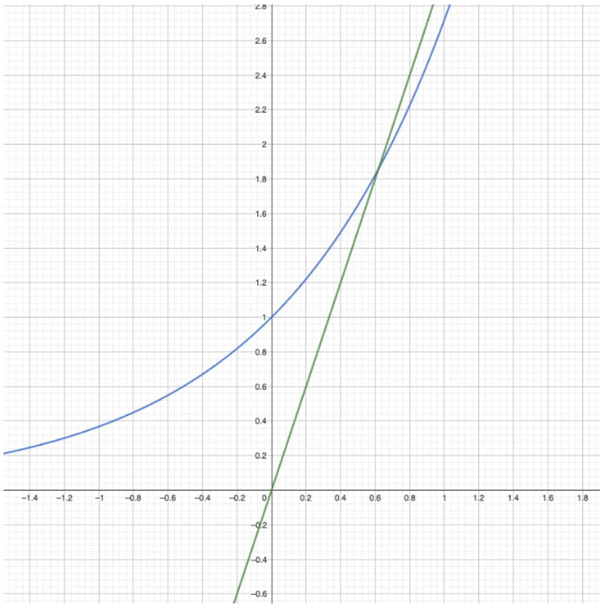
5 Zadanie 5

5.1 Opis Problemu

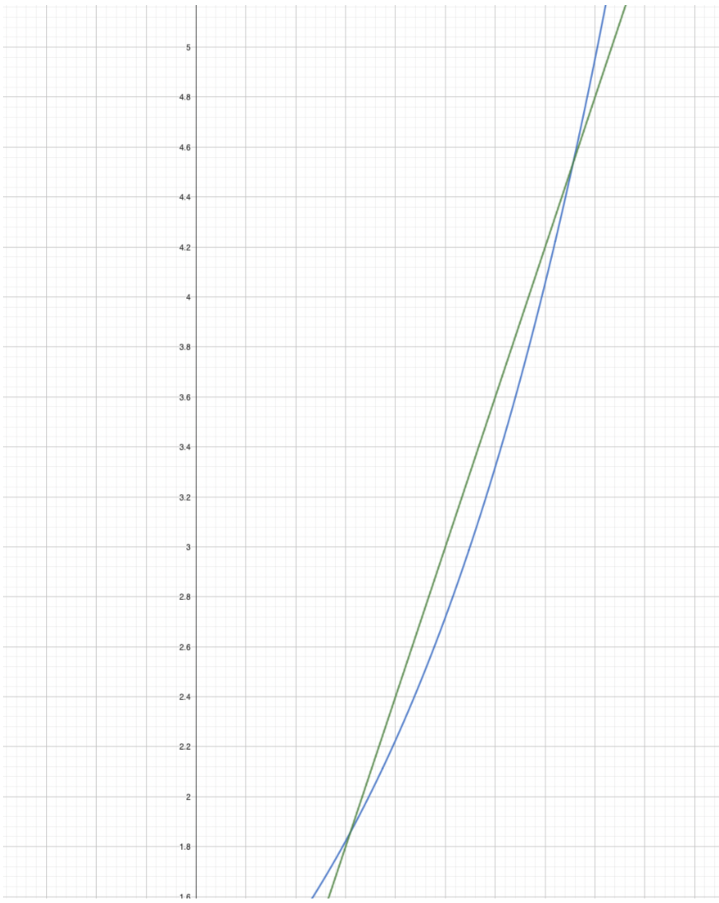
Metodą bisekcji znaleźć wartości zmiennej x, dla której przecinają się wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$. Wymagana dokładności obliczeń: $\delta = 10^{-4}, \epsilon = 10^{-4}$.

5.2 Interpretacja wyniku

Z wykresu możemy zauważyć dwa miejsca przecięcia się funkcji. Stąd wziąłem parametry startowe, a i b zostały na 0.0 i 1.0 oraz 1.0 i 2.0 - czyli obehmujemy dwa przecięcia.



dwie funkcje na wykresie



przybliżone miejsca przecięć

Funkcja dodawana jako parametr $3x - e^x$ na przedziałach [0, 1] i [1, 2].
Miejsca przecięcia się 3x i e^x:
0.619140625

1.5120849609375

5.3 Wnioski i Interpretacja wyniku

Miejsca zerowe różnic funkcji dają ich mmiejsca przecięcia. Wyniki obliczone przez algorytm są poprawne.

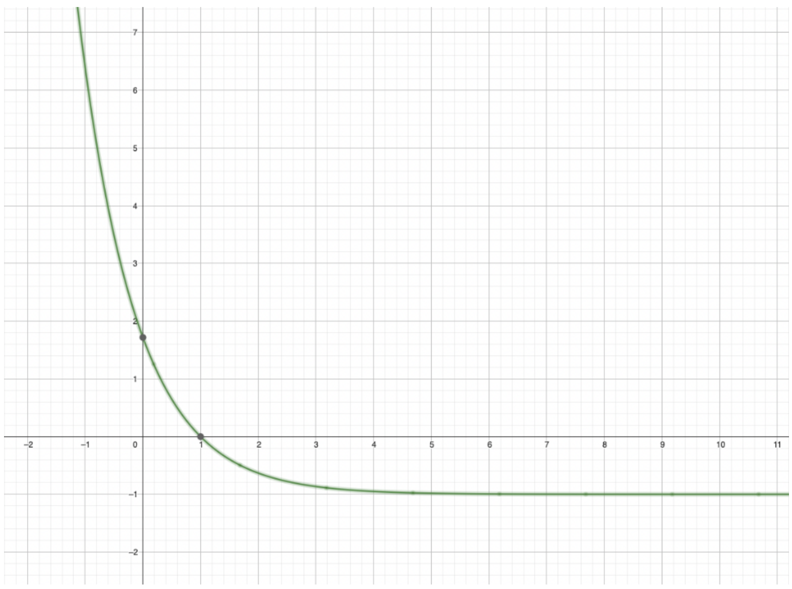
6 Zadanie 6

6.1 Opis Problemu

Znaleźć miejsce zerowe funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona i siecznych. Wymagane dokładności obliczeń: $\delta = 10^{-5}$, $\epsilon = 10^{-5}$. Dobrać odpowiednio przedział i przybliżenia początkowe.
Sprawdzić co stanie, gdy w metodzie Newtona dla f_1 wybierzemy $x_0 \varepsilon (1, \infty]$ a dla f_2 wybierzemy $x_0 > 1$, czy mogę wybrać $x_0 = 1$ dla f_2?

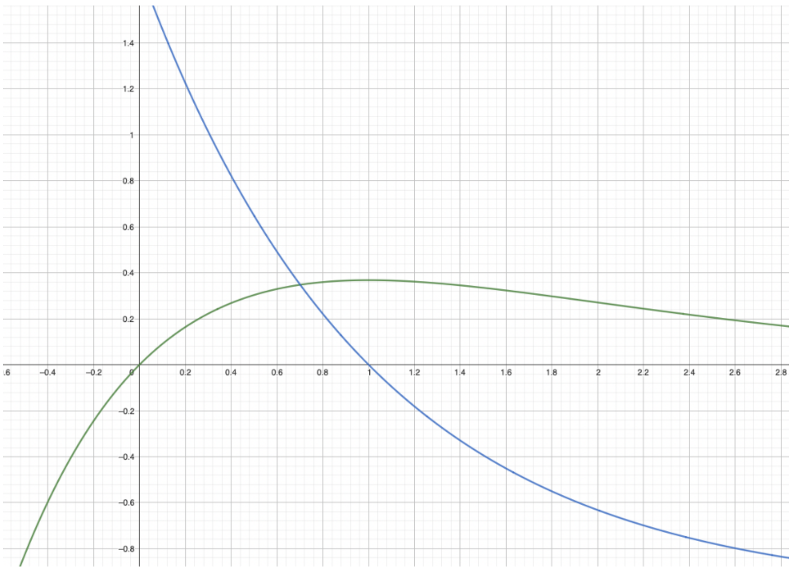
6.2 Rozwiązanie

Zadanie obejmuje dobranie przez nas dobrych parametrów żeby wyznaczyć miejsca zerowe. W tym zadaniu z "marszu" można wziąć pod lupę f_1. $f_1(x) = e^{1-x} - 1$, gdy podstawimy 1 to otrzymamy $f_1(1) = 0$. Zróbmy pochodną f_1 -> $f_1'(x) = -e^{1-x}$. Jest ona < 0, czyli f_1 jest funkcją malejącą i ma jeden pierwiastek. Przejdźmy do f_2, $f_2 = 0$, czyli $x = 0$ bo $e^{-x} > 0$ dla dowolnego x.



$f_1(x) = e^{1-x} - 1$

$$f_2(x) = x \cdot e^{-x}$$



dwie funkcje na wykresie

Aby dobrać odpowiednie parametry trzeba przeanalizować wykresy funkcji. Dla bisekcji nie było to trudne, trzeba było dobrać argumenty, dla których funkcja przybiera przeciwny znak. Wybrałem jednak mniej symetryczne przedziały żeby uzyskać wynik za więcej niż jedną iterację. Dla metody Newtona można było przyjąć jako punkty startowe znajdujące sie w okolicach widocznych na wykresach miejsc zerowych. Obie pochodne obu funkcji nie zmieniają na badanym przedziale znaku. Przy metodzie siecznej użyłem dwa pierwsze punkty równe granicom przedziału z metody bisekcji.

6.3 Interpretacja wyniku

metoda	funkcja	parametry
Bisekcja	f1	$a = 0.5; b = 2.0$
Bisekcja	f2	$a = -1.5; b = 0.5$

Newton	f1	$x_0 = 0.0$
Newton	f2	$x_0 = -1.0$
Sieczne	f1	$x_0 = 0.5; x_1 = 0.5$
Sieczne	f2	$x_0 = -1.5; x_1 = 0.5$

Dane wejściowe dla funkcji

algorytm	x	f(x)	iteracje	błędy
Bisekcja	0.9999923706054688	7.629423635080457e-6	16	0
Newton	0.9999984358892101	1.5641120130194253e-6	4	0
Sieczne	1.000000014307199	-1.4307198870078253e-8	6	0

$f_1(x)$

algorytm	x	f(x)	iteracje	błędy
Bisekcja	0.0	0.0	2	0
Newton	-3.0642493416461764e-7	-3.0642502806087233e-7	5	0
Sieczne	1.7791419742860986e-8	1.779141942632637e-8	8	0

$f_2(x)$

Jak możemy zauważyć dla naszych dobranych początkowych parametrów fla funkcji f_1 i f_2, które dzięki uprzedniej analizie zostały dobrze dobrane otrzymujemy praktycznie od razu zero przy metodzie bisekcji. Metoda siecznych potrzebowała trochę więcej iteracji od metody Newtona.

Aby sprawdzić jak zachowa się metoda Newtona dla $x_0 > 1$ dla f_1 i f_2. Wywołanie $x_0 = 100$ dało błąd dla f_1 i zły wynik dla f_2. Stało się to dlatego, że $lim_{x->\infty} f_1' = 0$ oraz $lim_{x->\infty} f_2' = 0$ stąd wartości są niedokładne do działania w przyjetej arytmetyce.

Czy można wybrać $x_0 = 1$ dla f_2? Mamy $f_2'(1) = 0$ więc styczna będzie równoległa do osi OX niemożliwiając wyznaczenie kolejnego punktu przecięcia.

6.4 Wnioski

Reasumując, żeby optymalnie działać przy wyznaczaniu miejsc zerowych można zastosować wnioski uzyskane na podstawie zadania. Metoda bisekcji jest dobra dla ograniczania przedziału do czegoś odpowiednio bliskiego zeru. Następnie można zmienić metodę na Newtona albo styczne żeby zredukować liczbę kroków potrzebną do osiągnięcia wyniku. Oprócz tego zadanie zademonstrowało jak duży wpływ na wynik ma wybranie danych początkowych.