Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna: Wielomiany Ortogonalne

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

wtedy:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D})^{-1} \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{f}$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Macierz $\boldsymbol{D}$ jest macierzą prostokątną o wymiarach $(n+1) \times (m+1)$.
- Macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach$(m+1) \times (m+1)$.
- Jeżeli macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest nieosobliwa, to układ równań $(*)$ ma dokładniej jedno rozwiązanie.
- Funkcje $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$ są funkcjami bazowymi w ustalonej przestrzeni, zatem stanowią układ liniowo niezależny i macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest nieosobliwa.
- Najłatwiej jest wyznaczyć rozwiązanie w sytuacji, gdy macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest diagonalna.
- Macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest diagonalna wówczas, gdy funkcje bazowe są ortogonalne.

Przestrzeń unitarna

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,.
Odwzorowanie $(\cdot \mid \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, nazywamy *iloczynem skalarnym* wtedy i tylko wtedy gdy spełnia nastepujące warunki:

a) $\forall_{\mathrm{x} \in V}\ (\mathrm{x}|\mathrm{x}) \geq 0\ \wedge (\mathrm{x}|\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 0$

b) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \forall_{\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z} \in V} (\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}\,|\mathrm{z}) = \alpha(\mathrm{x}|\mathrm{z}) + \beta(\mathrm{y}|\mathrm{z})$

c) $\forall_{\mathrm{x},\mathrm{y} \in V}\ (\mathrm{x}|\mathrm{y}) = (\mathrm{y}|\mathrm{x})$

Przestrzeń unitarna

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,.
Odwzorowanie $(\cdot\mid\cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, nazywamy *iloczynem skalarnym* wtedy i tylko wtedy gdy spełnia nastepujące warunki:

a) $\forall_{\mathrm{x} \in V}\ (\mathrm{x}|\mathrm{x}) \geq 0\ \wedge (\mathrm{x}|\mathrm{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} = 0$

b) $\forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \forall_{\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z} \in V} (\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}\ |\mathrm{z}) = \alpha(\mathrm{x}|\mathrm{z}) + \beta(\mathrm{y}|\mathrm{z})$

c) $\forall_{\mathrm{x},\mathrm{y} \in V}\ (\mathrm{x}|\mathrm{y}) = (\mathrm{y}|\mathrm{x})$

Definicja:

Przestrzenią unitarną nazywamy przestrzen liniową V *z określonym iloczynem skalarnym* $(\cdot\mid\cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

Przestrzeń unitarna

Odwzorowanie $(\cdot \mid \cdot): C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$, w przestrzeni funkcji ciągłych na przedziale $[a,b]$ dane jest wzorem:

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

W zbiorze funkcji ograniczonych, zdefiniowanych na dyskretnym zbiorze $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ iloczyn skalarny dany jest wzorem:

$$(f|g) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i)$$

Przestrzeń unitarna

Definicja:

Niech V będzie przestrzenią unitarną z iloczynem skalarnym $(\cdot \mid \cdot): V \times V \to \mathbb{R}$, *Normą indukowaną* przez iloczyn skalarny w przestrzeni V nazywamy odwzorowanie $\|\mathrm{x}\|: V \to \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$\|\mathrm{x}\| = \sqrt{(\mathrm{x}|\mathrm{x})}$$

Przestrzeń unitarna

- Norma indukowana przez kanoniczny iloczyn skalarny $(\cdot \mid \cdot)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\|\mathrm{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

Przestrzeń unitarna

- W przestrzeni funkcji ciągłych określonych na przedziale $[a, b]$:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$

- W przesterzeni funkcji określonych na dyskretnym zbiorze punktów $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} f^2(x_i)}$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & \dots & (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_m(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & \dots & (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_m(\mathrm{x})) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (\phi_m(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & (\phi_m(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & \dots & (\phi_m(\mathrm{x})|\phi_m(\mathrm{x})) \end{bmatrix}$$

Co w postaci dyskretnej daje:

$$(\phi_j(\mathrm{x})\big|\phi_k(\mathrm{x})\big) = \sum_{i=1}^{n} \phi_j(x_i)\phi_k(x_i)$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Natomiast wektor $\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{f}$ jest równy:

$$\begin{bmatrix} (\phi_0(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ \vdots \\ (\phi_m(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \end{bmatrix}$$

Co w postaci dyskretnej daje:

$$\big(\phi_j(\mathrm{x})\big|f(\mathrm{x})\big) = \sum_{i=1}^{n} \phi_j(x_i) f(x_i)$$

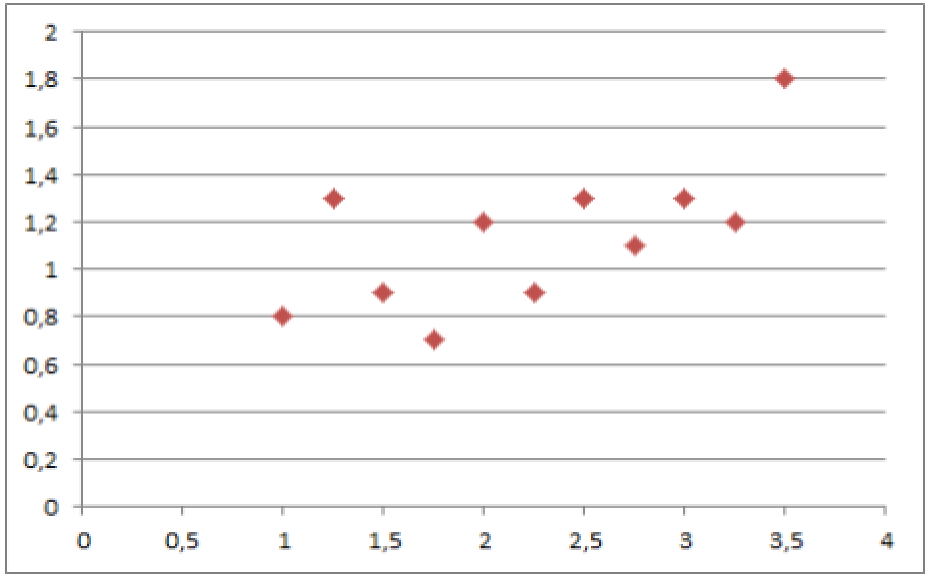
Zadanie 1

- Tabela przedstawia wyniki pomiarów:

x_i	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0	3.25	3.5
$f(x_i)$	0.8	1.3	0.9	0.7	1.2	0.9	1.3	1.1	1.3	1.2	1.8

Znajdź przybliżenie szukanej funkcji postaci:

$$\widehat{f}(x) = a_0 + a_1 e^{-2x} + a_2 e^{\frac{x}{2}}$$



Zadanie 1

Musimy rozwiązać nastepujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) \\ (\phi_2(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & (\phi_2(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & (\phi_2(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_2(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \end{bmatrix}$$

czy też:

$$\begin{bmatrix} \|\phi_0(x)\|^2 & (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & \|\phi_1(x)\|^2 & (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) \\ (\phi_2(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & (\phi_2(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & \|\phi_2(x)\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_2(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \end{bmatrix}$$

Zadanie 1

Funkcje bazowe:

$$\phi_0(\mathrm{x}) = 1, \quad \phi_0(\mathrm{x}) = e^{-2x}, \quad \phi_0(\mathrm{x}) = e^{\frac{x}{2}}$$

zatem:

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{10} 1^2 \ =$$

$$\|\phi_1(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{10} (e^{-2x_i})^2 \ =$$

$$\|\phi_2(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{10} \left(e^{\frac{x_i}{2}}\right)^2 \ =$$

Zadanie 1

Funkcje bazowe:

$$\phi_0(\mathrm{x}) = 1, \quad \phi_0(\mathrm{x}) = e^{-2x}, \quad \phi_0(\mathrm{x}) = e^{\frac{x}{2}}$$

zatem:

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{10} 1^2 = 11$$

$$\|\phi_1(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{10} (e^{-2x_i})^2 = 0.029$$

$$\|\phi_2(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{10} \left(e^{\frac{x_i}{2}}\right)^2 = 140.1382$$

Zadanie 1

$$\begin{bmatrix} 11 & (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & (\phi_0(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & 0.029 & (\phi_1(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) \\ (\phi_2(\mathrm{x})|\phi_0(\mathrm{x})) & (\phi_2(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) & 140.1382 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_2(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \end{bmatrix}$$

Zadanie 1

Następnie:

$$(\phi_0(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} 1 \cdot e^{-2x_i} =$$

$$(\phi_0(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} 1 \cdot e^{\frac{x_i}{2}} =$$

$$(\phi_1(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} e^{-2x_i} \cdot e^{\frac{x_i}{2}} =$$

Zadanie 1

Następnie:

$$(\phi_0(\mathrm{x})|\phi_1(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} 1 \cdot e^{-2x_i} = 0.3425$$

$$(\phi_0(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} 1 \cdot e^{\frac{x_i}{2}} = 36.5915$$

$$(\phi_1(\mathrm{x})|\phi_2(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} e^{-2x_i} \cdot e^{\frac{x_i}{2}} = 0.702$$

Zadanie 1

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.3425 & 36.5915 \\ 0.3425 & 0.029 & 0.702 \\ 36.5915 & 0.702 & 140.1382 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_2(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \end{bmatrix}$$

Zadanie 1

ostatecznie:

$$(\phi_0(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} 1 \cdot y_i \ =$$

$$\left(\phi_1(\mathrm{x})\middle|f(\mathrm{x})\right) = \sum_{i=0}^{10} e^{-2x_i} \cdot y_i \ =$$

$$(\phi_2(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} e^{\frac{x_i}{2}} \cdot y_i \ =$$

Zadanie 1

ostatecznie:

$$(\phi_0(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} 1 \cdot y_i \ = 12.5$$

$$(\phi_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} e^{-2x_i} \cdot y_i \ = 0.3328$$

$$(\phi_2(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) = \sum_{i=0}^{10} e^{\frac{x_i}{2}} \cdot y_i \ = 44.533$$

Zadanie 1

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.3425 & 36.5915 \\ 0.3425 & 0.029 & 0.702 \\ 36.5915 & 0.702 & 140.1382 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 0.3328 \\ 44.533 \end{bmatrix}$$

Który ma rozwiązanie:

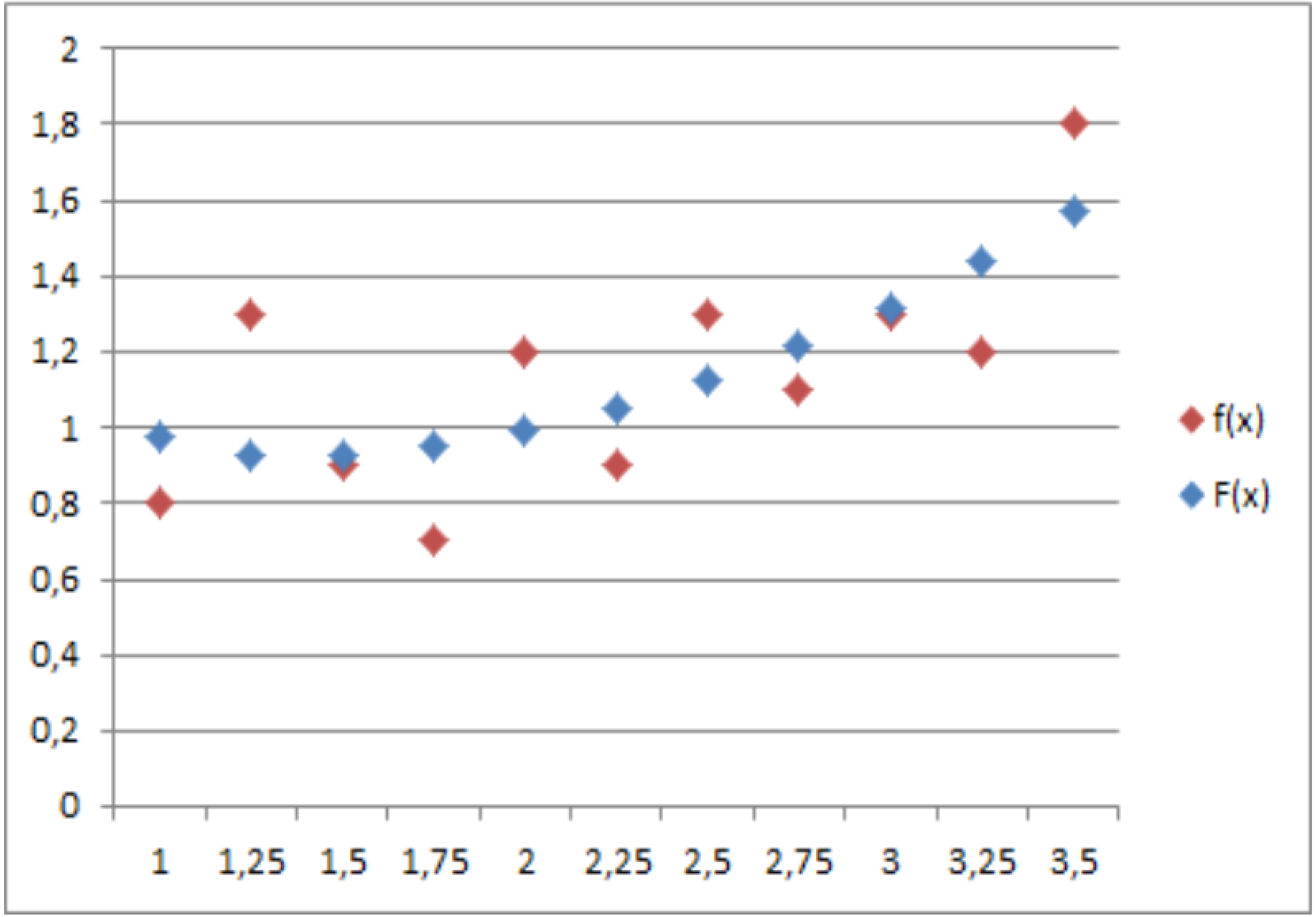
$$a_0 = 0.4135993$$
$$a_1 = 1.7216562$$
$$a_2 = 0.2011598$$

Zadanie 1

Wobec tego uogólniony wielomian aproksymacyjny ma postać:

$$\widehat{f}(x) = 0.4135993 + 1.7216562e^{-2x} + 0.2011598e^{\frac{x}{2}}$$

Zestawienie wartości $f(x)$ i $F(x)$



Przestrzeń unitarna

Definicja:

Funkcje $\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots \phi_m(x)$ są ortogonalne wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{j,k\in 1,2,\ldots,m}\left(\phi_j(\mathrm{x})\middle|\phi_k(\mathrm{x})\right)\begin{cases} 0 \text{ gdy } j \neq k \\ const \text{ gdy } j = k \end{cases}$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Wiedząc, że $\left(\phi_j(\mathrm{x})\middle|\phi_j(\mathrm{x})\right) = \left\|\phi_j(x)\right\|^2$ układ równań $\boldsymbol{D}^\top\boldsymbol{D}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{D}^\top\boldsymbol{f}$ możemy zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} \|\phi_0(x)\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|\phi_1(x)\|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|\phi_m(x)\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi_0(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ (\phi_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \\ \vdots \\ (\phi_m(\mathrm{x})|f(\mathrm{x})) \end{bmatrix}$$

Wtedy rozwiązanie przyjmuje postać:

$$\boldsymbol{a_j} = \frac{\left(\boldsymbol{\phi_j}(\mathrm{x})\middle|\boldsymbol{f}(\mathrm{x})\right)}{\left\|\boldsymbol{\phi_j}(\boldsymbol{x})\right\|^2}, \forall_{\boldsymbol{j=0,1,2,\ldots,m}}$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Jak znaleźć odpowiednie wielomiany ortogonalne?
  - Możemy wykorzystać wielomiany przynależące do pewnej klasy wielomianów, które na pewno są ortogonalne, np.:
    - **Wielomiany Czebyszewa**
    - **Wielomiany trygonometryczne**
    - **Wielomiany Hermite’a**

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Jak znaleźć odpowiednie wielomiany ortogonalne?
  - Możemy wykorzystać wielomiany przynależące do pewnej klasy wielomianów, które na pewno są ortogonalne, np.:
    - **Wielomiany Czebyszewa**
    - **Wielomiany trygonometryczne**
    - **Wielomiany Hermite'a**
  - Albo przekształcić liniowo niezależne wielomiany bazowe za pomocą odpowiedniego algorytmu, np.:
    - **Ortogonalizacji Grama-Schmidta**

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Twierdzenie:

Niech V będzie przestrzenią and ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jeżeli wektory $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_m \in \mathrm{V}$ są liniowo niezależne to wektory $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \dots, \mathrm{w}_m \in \mathrm{V}$ są ortogonalne oraz $\mathrm{L}(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_m) = \mathrm{L}(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \dots, \mathrm{w}_m)$ gdzie

$$\mathrm{w}_1 = \mathrm{v}_1$$

$$\mathrm{w}_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{(\mathrm{v}_2|\mathrm{w}_1)}{\|\mathrm{w}_1\|^2}\mathrm{w}_1$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\mathrm{w}_m = \mathrm{v}_m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{(\mathrm{v}_m|\mathrm{w}_i)}{\|\mathrm{w}_i\|^2}\mathrm{w}_i$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

- Logika tego algorytmu jest prosta; wektor $\mathrm{v}_1 = \mathrm{w}_1$ jest naszym punktem początkowym. W pierwszym kroku chcemy znaleźć rzut ortogonalny wektora v_2 względem wektora w_1. Wykorzystujemy do tego operator rzutowania ortogonalnego:

$$\mathrm{w}_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{(\mathrm{v}_2|\mathrm{w}_1)}{\|\mathrm{w}_1\|^2}\mathrm{w}_1$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

- Logika tego algorytmu jest prosta; wektor $v_1 = w_1$ jest naszym punktem początkowym. W pierwszym kroku chcemy znaleźć rzut ortogonalny wektora v_2 względem wektora w_1. Wykorzystujemy do tego operator rzutowania ortogonalnego:

$$w_2 = v_2 - \frac{(v_2|w_1)}{\|w_1\|^2} w_1$$

- W kolejnym kroku musimy powtórzyć proces dla wektora v_3. Musimy pamiętać o tym, że wektor w_3 musi być ortogonalny zarówno względem wektora w_1 jak i w_2:

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3|w_1)}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{(v_3|w_2)}{\|w_2\|^2} w_2$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

- Logika tego algorytmu jest prosta; wektor $\mathrm{v}_1 = \mathrm{w}_1$ jest naszym punktem początkowym. W pierwszym kroku chcemy znaleźć rzut ortogonalny wektora v_2 względem wektora w_1. Wykorzystujemy do tego operator rzutowania ortogonalnego:

$$\mathrm{w}_2 = \mathrm{v}_2 - \frac{(\mathrm{v}_2|\mathrm{w}_1)}{\|\mathrm{w}_1\|^2}\mathrm{w}_1$$

- W kolejnym kroku musimy powtórzyć proces dla wektora v_3. Musimy pamiętać o tym, że wektor w_3 musi być ortogonalny zarówno względem wektora w_1 jak i w_2:

$$\mathrm{w}_3 = \mathrm{v}_3 - \frac{(\mathrm{v}_3|\mathrm{w}_1)}{\|\mathrm{w}_1\|^2}\mathrm{w}_1 - \frac{(\mathrm{v}_3|\mathrm{w}_2)}{\|\mathrm{w}_2\|^2}\mathrm{w}_2$$

- Procedura wygląda tak samo dla każdego kolejnego wektora v_k. Ortogonalizujemy go względem wszystkich poprzedzających go wektorów w_i dla $i = 1,2, \dots, k-1$:

$$\mathrm{w}_k = \mathrm{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mathrm{v}_k|\mathrm{w}_i)}{\|\mathrm{w}_i\|^2}\mathrm{w}_i$$

Zadanie 2

- Tabela przedstawia wyniki pomiarów:

x_i	1.0	1.25	1.5	1.75	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0	3.25	3.5
$f(x_i)$	0.8	1.3	0.9	0.7	1.2	0.9	1.3	1.1	1.3	1.2	1.8

Znajdź przybliżenie szukanej funkcji postaci:

$$\widehat{f}(x) = a_0 + a_1 e^{-2x} + a_2 e^{\frac{x}{2}}$$

wykorzystując ortogonalne funkcje bazowe w_i wyznaczone za pomocą metody Grama-Schmidta.

Zadanie 2

Funkcje bazowe:

$$\phi_0(\mathrm{x}) = 1, \quad \phi_0(\mathrm{x}) = e^{-2x}, \quad \phi_0(\mathrm{x}) = e^{\frac{x}{2}}$$

Chcemy znaleźć uogólniony wielomian aproksymacyjny:

$$\hat{f}_2(x) = a_0 w_1 + a_1 w_2 + a_2 w_3$$

Zadanie 2

Wyznaczymy ortogonalne funkcje bazowe korzystajac z metody Grama-Schmidta. Przyjmijmy, że:

$$v_1 = 1, v_2 = e^{-2x}, v_3 = e^{\frac{x}{2}}$$

Wtedy:

$$w_1 = v_1 = 1$$

Zadanie 2

Przyjmijmy, że:

$$v_1 = 1, v_2 = e^{-2x}, v_3 = e^{\frac{x}{2}}$$

Wtedy:

$$w_2 = v_2 - \frac{(v_2|w_1)}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$(v_2|w_1) = \sum_{i=0}^{10} e^{-2x_i} \cdot 1 =$$

$$\|w_1\|^2 = \sum_{i=0}^{10} 1^2 =$$

Zadanie 2

Przyjmijmy, że:

$$v_1 = 1, v_2 = e^{-2x}, v_3 = e^{\frac{x}{2}}$$

Wtedy:

$$w_2 = v_2 - \frac{(v_2|w_1)}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$(v_2|w_1) = \sum_{i=0}^{10} e^{-2x_i} \cdot 1 = 0.3425$$

$$\|w_1\|^2 = \sum_{i=0}^{10} 1^2 = 11$$

Zadanie 2

Dostajemy:

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{(v_2|w_1)}{\|w_1\|^2} w_1 = e^{-2x_i} - \frac{0.3425}{11} \cdot 1 = e^{-2x_i} - 0.0311$$

Zadanie 2

Wyznaczmy wartość w_3:

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3|w_2)}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{(v_3|w_1)}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$(v_3|w_2) = \sum_{i=0}^{10} e^{\frac{x_i}{2}} \cdot (e^{-2x_i} - 0.0311) =$$

$$\|w_2\|^2 = \sum_{i=0}^{10} (e^{-2x_i} - 0.0311)^2 =$$

$$(v_3|w_1) = \sum_{i=0}^{10} e^{\frac{x_i}{2}} \cdot 1 =$$

Zadanie 2

Wyznaczmy wartość w_3:

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3|w_2)}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{(v_3|w_1)}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$(v_3|w_2) = \sum_{i=0}^{10} e^{\frac{x_i}{2}} \cdot (e^{-2x_i} - 0.0311) = -0.436$$

$$\|w_2\|^2 = \sum_{i=0}^{10} (e^{-2x_i} - 0.0311)^2 = 0.0183$$

$$(v_3|w_1) = \sum_{i=0}^{10} e^{\frac{x_i}{2}} \cdot 1 = 36.5915$$

Zadanie 2

Otrzymujemy:

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3|w_2)}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{(v_3|w_1)}{\|w_1\|^2} w_1$$

$$= e^{\frac{x}{2}} - \frac{-0.436}{0.0183} \cdot (e^{-2x} - 0.0311) - \frac{36.5915}{11} \cdot 1$$

$$= e^{\frac{x}{2}} + + 23.8251 e^{-2x} - \ 4.0675$$

Zadanie 2

Po ortogonalizacji dostajemy następujące wektory:

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = e^{-2x_i} - 0.0311$$

$$w_3 = e^{\frac{x}{2}} + + 23.8251e^{-2x} - \ 4.0675$$

Zadanie 2

Po ortogonalizacji dostajemy następujące wektory:

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = e^{-2x_i} - 0.0311$$

$$w_3 = e^{\frac{x}{2}} + + 23.8251e^{-2x} - \ 4.0675$$

Aby znaleźć wektor **a** musimy Jeszcze wyznaczyć wartość $\|w_3\|^2$:

$$\|w_3\|^2 = \sum_{i=0}^{10} (e^{\frac{x}{2}} + + 23.8251e^{-2x} - \ 4.0675)^2 =$$

Zadanie 2

Po ortogonalizacji dostajemy następujące wektory:

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = e^{-2x_i} - 0.0311$$

$$w_3 = e^{\frac{x}{2}} + + 23.8251e^{-2x} - \ 4.0675$$

Aby znaleźć wektor **a** musimy Jeszcze wyznaczyć wartość $||w_3||^2$:

$$||w_3||^2 = \sum_{i=0}^{10} (e^{\frac{x}{2}} + \ 23.8251e^{-2x} - \ 4.0675)^2 = 7.9624$$

Zadanie 2

A także:

$$(w_1|f) = \sum_{i=0}^{10} 1 \ \cdot y_i \ =$$

$$(w_2|f) = \sum_{i=0}^{10} (e^{-2x_i} - 0.0311) \cdot y_i \ =$$

$$(w_3|f) = \sum_{i=0}^{10} (e^{\frac{x}{2}} + + 23.8251e^{-2x} - \ 4.0675) \cdot y_i \ =$$

Zadanie 2

A także:

$$(w_1|f) = \sum_{i=0}^{10} 1 \cdot y_i = 12.5$$

$$(w_2|f) = \sum_{i=0}^{10} (e^{-2x_i} - 0.0311) \cdot y_i = -0{,}0559$$

$$(w_3|f) = \sum_{i=0}^{10} (e^{\frac{x}{2}} + +23.8251e^{-2x} - 4.0675) \cdot y_i = 1{,}6188$$

Zadanie 2

Teraz możemy wyznaczyć wartości wektora $\mathbf{a}$ korzystając ze wzoru:

$$a_j = \frac{\left(w_{j+1}(\mathrm{x})\middle|f(\mathrm{x})\right)}{\left\|w_{j+1}(\mathrm{x})\right\|^2}$$

Zadanie 2

policzmy:

$$a_0 = \frac{(w_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x}))}{\|w_1(\mathrm{x})\|^2} = \frac{12.5}{11} =$$

$$a_1 = \frac{(w_2(\mathrm{x})|f(\mathrm{x}))}{\|w_2(\mathrm{x})\|^2} = \frac{-0.0559}{0.0183} =$$

$$a_2 = \frac{(w_3(\mathrm{x})|f(\mathrm{x}))}{\|w_3(\mathrm{x})\|^2} = \frac{0.0219}{73.8448} =$$

Zadanie 2

policzmy:

$$a_0 = \frac{(w_1(\mathrm{x})|f(\mathrm{x}))}{\|w_1(\mathrm{x})\|^2} = \frac{12.5}{11} = 1.1364$$

$$a_1 = \frac{(w_2(\mathrm{x})|f(\mathrm{x}))}{\|w_2(\mathrm{x})\|^2} = \frac{-0.0559}{0.0183} = -3.0546$$

$$a_2 = \frac{(w_3(\mathrm{x})|f(\mathrm{x}))}{\|w_3(\mathrm{x})\|^2} = \frac{0.0219}{73.8448} = 0.2033$$

Zadanie 2

Ostatecznie otrzymujemy wielomian postaci:

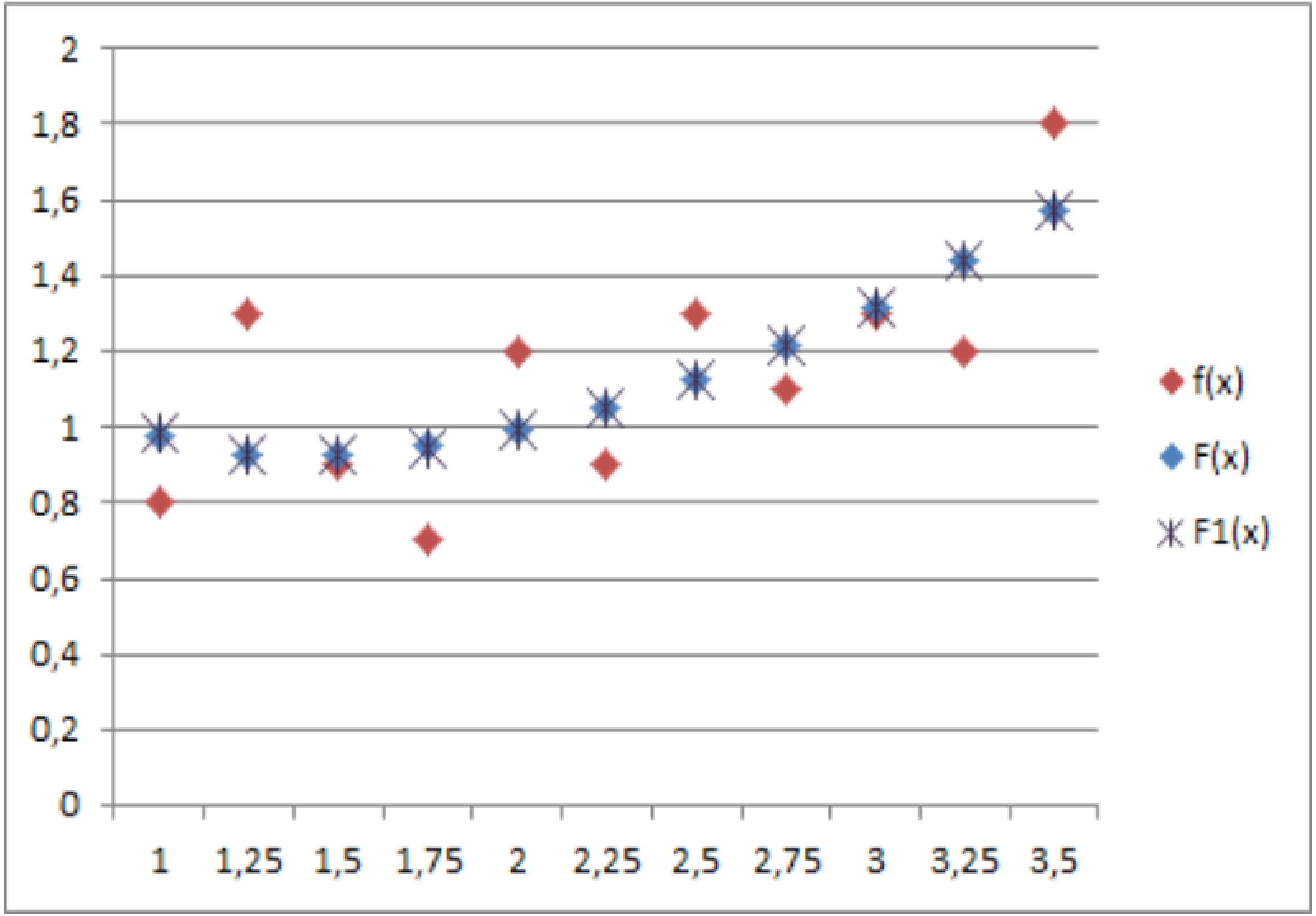
$$\widehat{f}_2(x) = a_0 w_1 + a_1 w_2 + a_2 w_3$$

$$= 1.1364 \cdot 1 - 3.0546 \cdot (e^{-2x_i} - 0.0311) + 0.2033$$

$$\cdot \left(e^{\frac{x}{2}} + \ 23.8251 e^{-2x} - \ 4.0675\right)$$

$$= 0.2033 \cdot e^{\frac{x}{2}} + 1.789 \cdot e^{-2x_i} + 0.4045$$

Zestawienie wartości $f(x)$, $F(x)$ i $F_1(x)$



Zadanie 3

- Tabela przedstawia wyniki pomiarów:

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$f(x_i)$	1.02	0.62	0.5	0.6	0.98	1.55	3.12	5.08

Przybliż szukaną funkcję wielomianem:

$$\widehat{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

jeśli wiadomo, że wartość pomiaru w punkcie $f(2.5)$ jest obarczona zbyt dużym błędem. Wyznacz wielomiany ortogonalne korzystając z metody Grama-Schmidta.