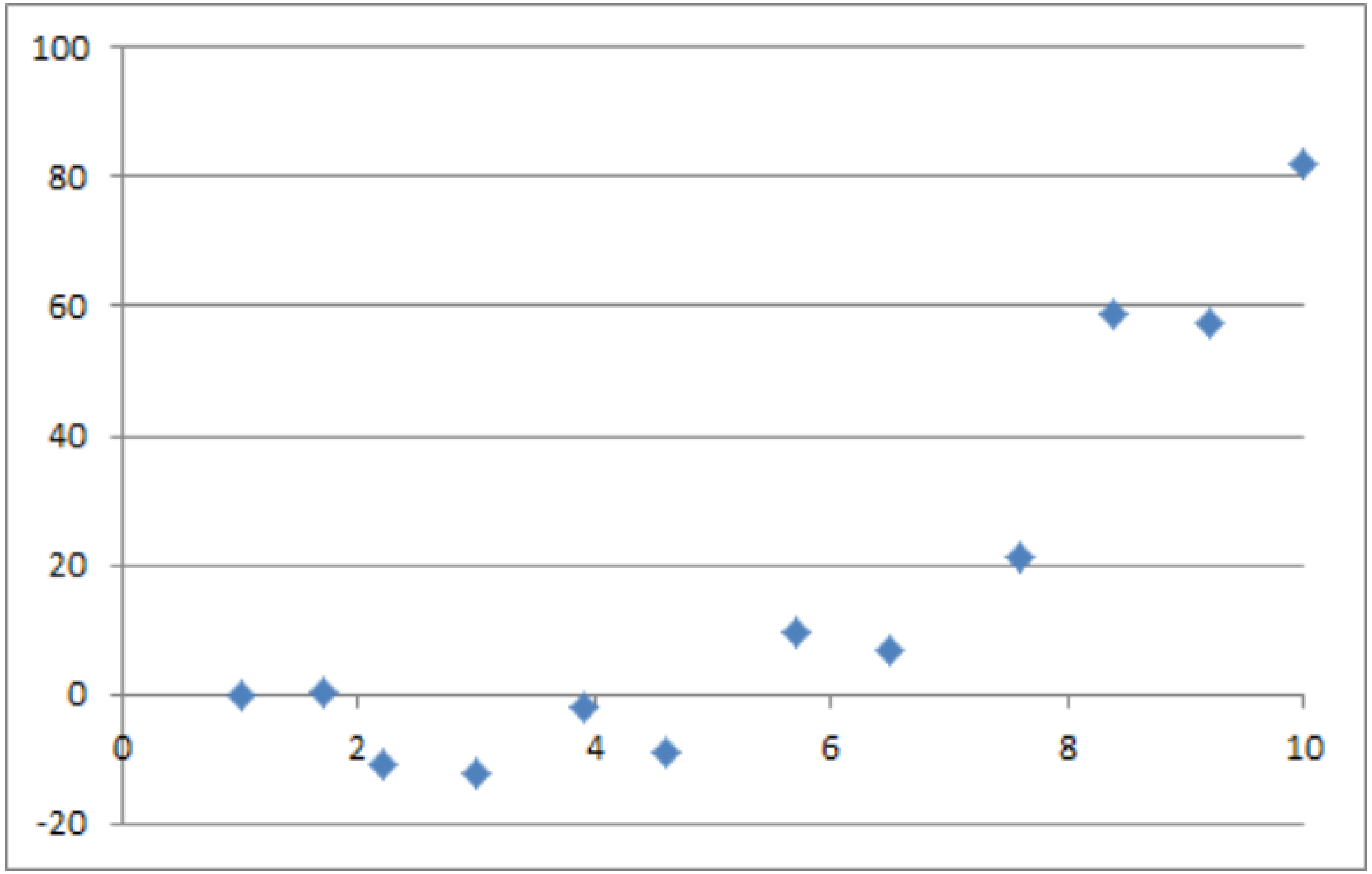
Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

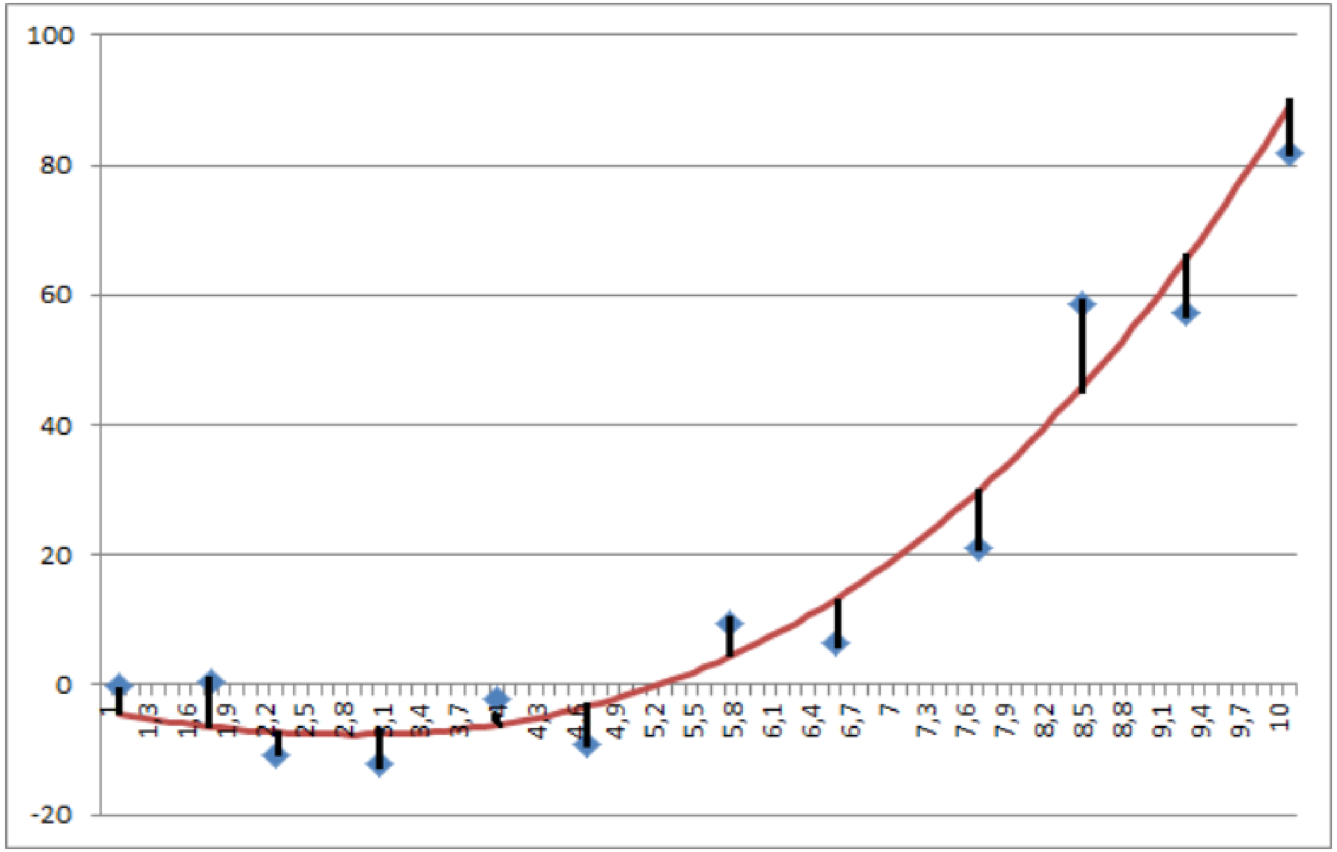
Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Aproksymacja dyskretna:



Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Aproksymacja dyskretna:



Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Chcemy znaleźć taki uogólniony wielomian:

$$\hat{f}(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_m\phi_m(x)$$

który minimalizuje odległość:

$$\left\|f(x) - \hat{f}(x)\right\| = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)\left|f(x_i) - \hat{f}(x_i)\right|^2$$

- Dla zadanych $\phi_j, j \in 0,1,\ldots,m$ oznacza to znalezienie wag a_j $j \in 0,1,\ldots,m$, takich, że:

$$\forall a_j, \qquad a_j = \operatorname{argmin} \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left|f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\right|^2$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Przyjmijmy, że :

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} w(x_i) \left| f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j \phi_j(x_i) \right|^2$$

- Warunek Konieczny do znalezienia minimum funkcji $H(a_0, a_1, \dots, a_m)$:

$$\frac{\partial H(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_k} = 0, \forall a_k$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Co oznacza, że aby znaleźć rozwiązanie, musimy rozwiązać układ równań:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2\sum_{i=0}^{n} w(x_i)\left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\right]\phi_k(x_i) = 0$$

dla każdego $k = 0,1,\dots,m$.

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Przyjmijmy, że $w(x_i) = 1 \; \forall i$, wtedy:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2\sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\right]\phi_k(x_i) = 0 \; (*)$$

dla każdego $k = 0,1, \dots, m$.

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Przekształćmy równanie:

$$\forall k = 0,1,\dots,m: -2\sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\right]\phi_k(x_i) = 0$$

$$\forall k = 0,1,\dots,m: \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j\phi_j(x_i)\phi_k(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\phi_k(x_i)$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Co można zapisać w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_m(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_m(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

wtedy:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D})^{-1} \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{f}$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Macierz $\boldsymbol{D}$ jest macierzą prostokątną o wymiarach $(n+1) \times (m+1)$.
- Macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest symetryczną macierzą kwadratową o wymiarach$(m+1) \times (m+1)$.
- Jeżeli macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest nieosobliwa, to układ równań $(*)$ ma dokładniej jedno rozwiązanie.
- Funkcje $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m$ są funkcjami bazowymi w ustalonej przestrzeni, zatem stanowią układ liniowo niezależny i macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest nieosobliwa.
- Najłatwiej jest wyznaczyć rozwiązanie w sytuacji, gdy macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest diagonalna.
- Macierz $\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}$ jest diagonalna wówczas, gdy funkcje bazowe są ortogonalne.

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna: Aproksymacja wielomianowa

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Dla jednomianów $\hat{f}(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ i wag $w(x_i) = 1$:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2\sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right] x_i^k = 0$$

dla każdego $k = 0,1,\dots,m$.

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Przekształćmy równanie:

$$\forall k = 0,1,\dots,m: -2\sum_{i=0}^{n}\left[f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j\right] x_i^k = 0$$

$$\forall k = 0,1,\dots,m: \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j x_i^k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

$$\forall k = 0,1,\dots,m: \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Postać macierzowa:

$$\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

wtedy:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{D})^{-1} \boldsymbol{D}^\top \boldsymbol{f}$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Dla układu równań:

$$\forall k = 0,1,\dots,m: \sum_{j=0}^{m} a_j \sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k} = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

Oznaczmy:

$$s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k ,$$

$$t_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) x_i^k$$

Wówczas:

$$\sum_{i=0}^{m} a_j s_{j+k} = t_k$$

Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

- Postać macierzowa:

$$\boldsymbol{Sa} = \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Zadanie 1

- Tabela przedstawia wyniki pomiarów:

x_i	1	2	4	5	8	10	16
$f(x_i)$	-6	0	6	8.4	15	19.2	31.5

Sprawdź, który z wielomianów daje lepsze przybliżenie szukanej funkcji:

$$\widehat{f_1}(x) = a_0 + a_1 x$$

$$\widehat{f_2}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Zadanie 1

Musimy rozwiązać nastepujące układy równań:

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

aby to zrobić, musimy znaleźć następujące wartości:

$$s_0 = \_\ \ s_1 = \_\ s_2 = \ \_\ \ s_3 = \ \_\ \ s_4 = \ \_$$

$$t_0 = \_\ \ t_1 = \_\ t_2 = \ \_$$

Zadanie 1

Musimy rozwiązać nastepujące układy równań:

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

aby to zrobić, musimy znaleźć następujące wartości:

$$s_0 = 7 \;\; s_1 = 46 \; s_2 = 466 \; s_3 = \; 5806 \; s_4 = 80530$$

$$t_0 = 74.1 \;\; t_1 = 876 \; t_2 = 11244$$

Zadanie 1

Rozwiążmy pierwszy układ:

$$\begin{bmatrix} 7 & 46 \\ 46 & 466 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.1 \\ 876 \end{bmatrix}$$

Zadanie 1

Rozwiążmy pierwszy układ:

$$\begin{bmatrix} 7 & 46 \\ 46 & 466 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.1 \\ 876 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy:

$$a_0 = -5.03089$$
$$a_1 = 2.37644$$

Zatem wielomian $\widehat{f_1}(x)$ ma postać:

$$\widehat{f_1}(x) = -5.03089 + 2.37644x$$

Zadanie 1

Przejdźmy do drugiego układu równań:

$$\begin{bmatrix} 7 & 46 & 466 \\ 46 & 466 & 5806 \\ 466 & 5806 & 80530 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.1 \\ 876 \\ 11244 \end{bmatrix}$$

Zadanie 1

Przejdźmy do drugiego układu równań:

$$\begin{bmatrix} 7 & 46 & 466 \\ 46 & 466 & 5806 \\ 466 & 5806 & 80530 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74.1 \\ 876 \\ 11244 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy:

$$a_0 = -7.61599658$$

$$a_1 = 3.37102224$$

$$a_2 = -0,.05934559$$

Zatem wielomian $\widehat{f_2}(x)$ ma postać:

$$\widehat{f_2}(x) = -7.61599658 + 3.37102224x - 0,05934559x^2$$

Zadanie 1

- Tabela przedstawia wyniki pomiarów wraz z wartościami dla 2 wielomianów aproksymacyjnych:

x_i	1	2	4	5	8	10	16
$f(x_i)$	-6	0	6	8.4	15	19.2	31.5
$\widehat{f_1}(x_i)$	−2.65	0.28	4.47	6.85	13.98	18.73	32.99
$\widehat{f_2}(x_i)$	−4.3	−1.11	4.92	7.76	15.55	20.16	31.13

Policzmy błędy aproksymacji:

- Dla $\widehat{f_1}(x)$:

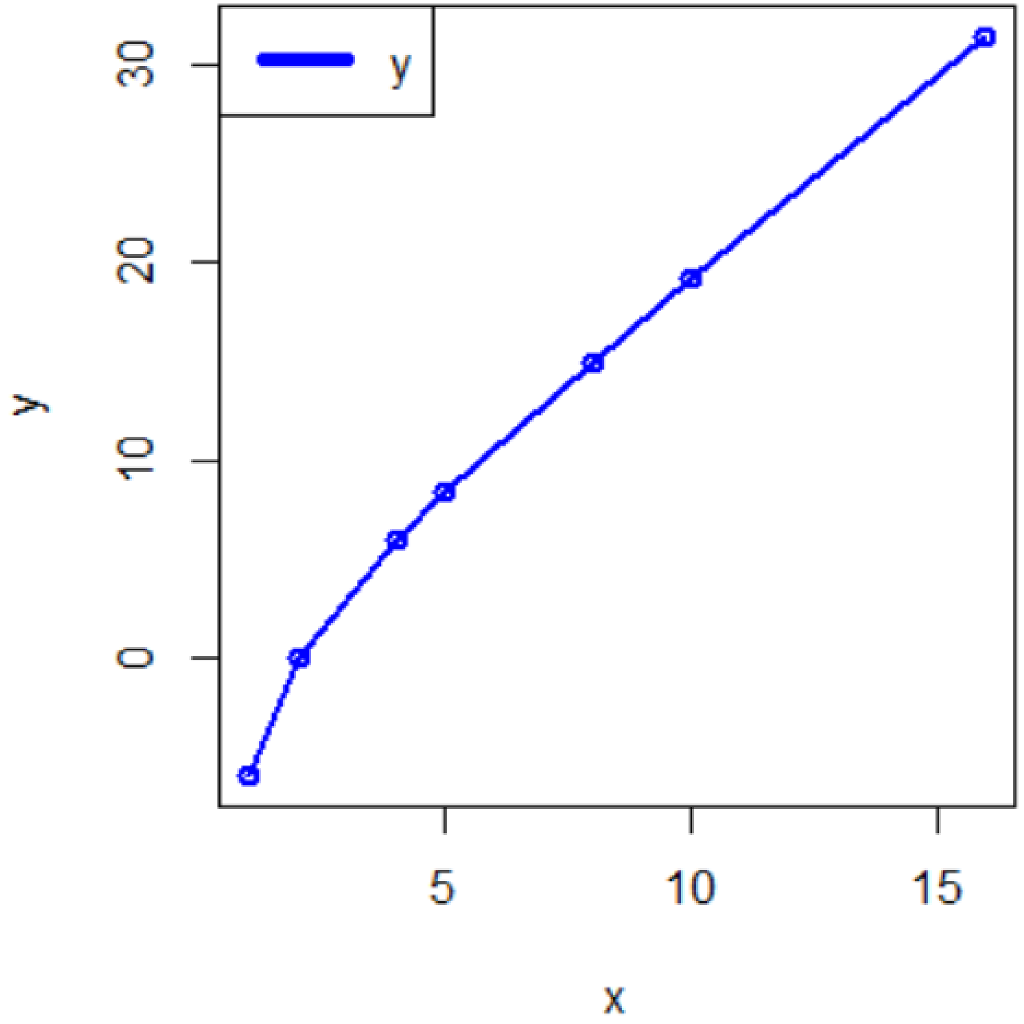
$$\left|f(x) - \widehat{f_1}(x)\right| = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x) - \widehat{f_1}(x)\right]^2 = 19.48$$

- Dla $\widehat{f_2}(x)$:

$$\left|f(x) - \widehat{f_2}(x)\right| = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x) - \widehat{f_2}(x)\right]^2 = 7.06$$

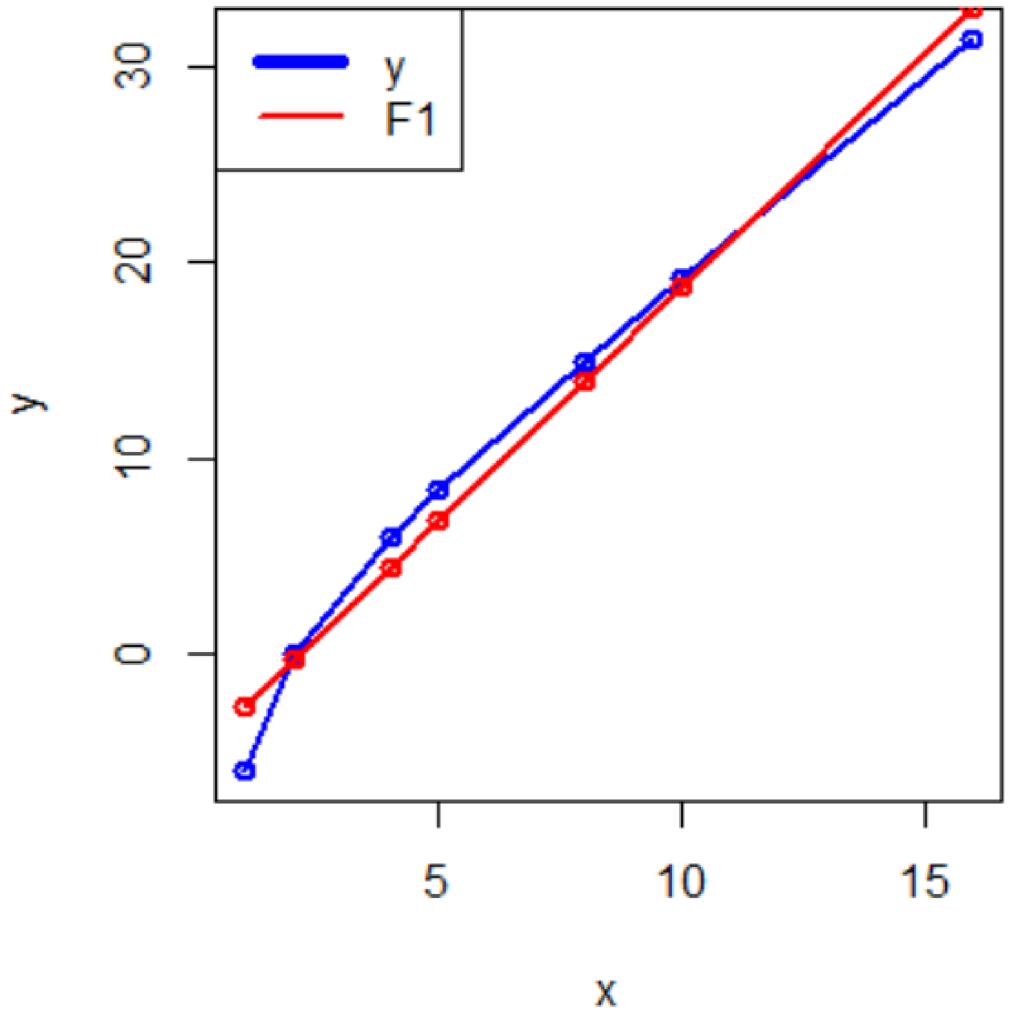
Zadanie 1

- Wykres 1: Linia łącząca punkty pomiarowe:



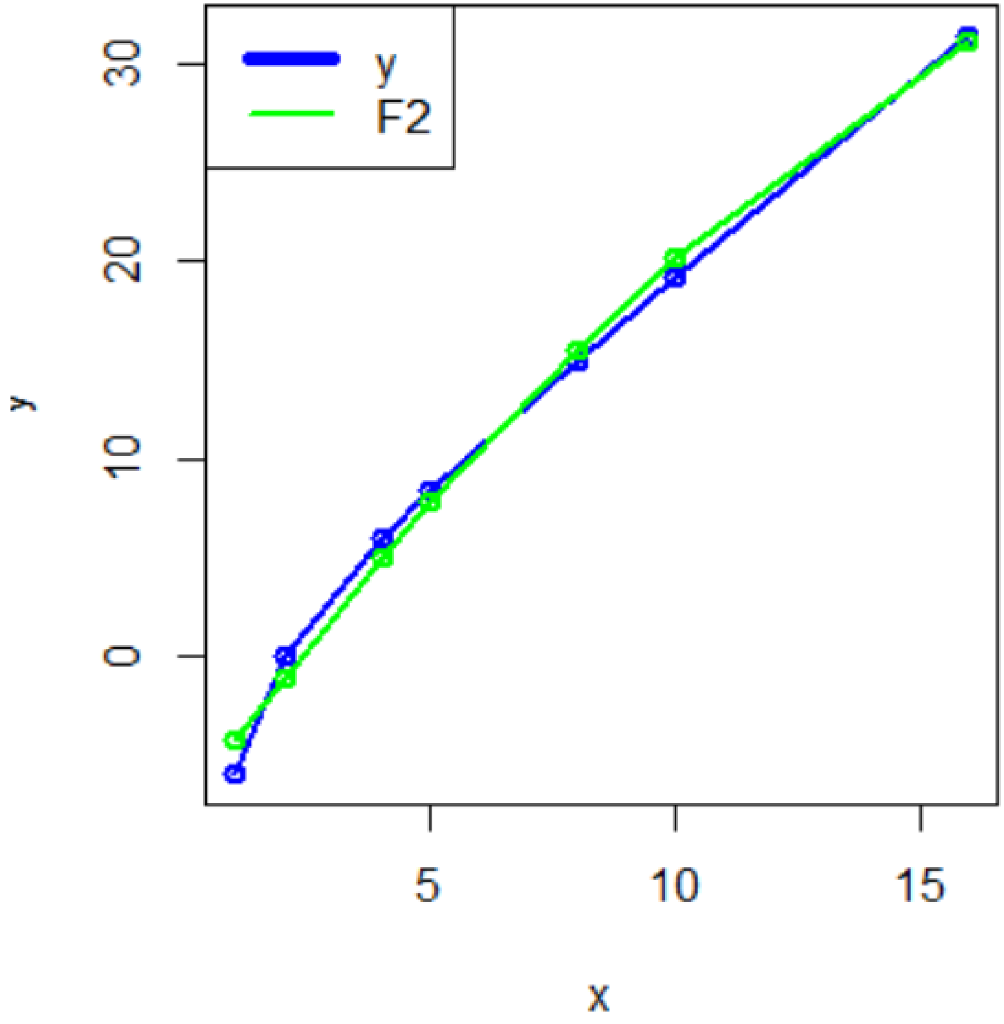
Zadanie 1

- Wykres 1: Linie łącząca punkty pomiarowe i wielomian $\widehat{f_1}(x)$:



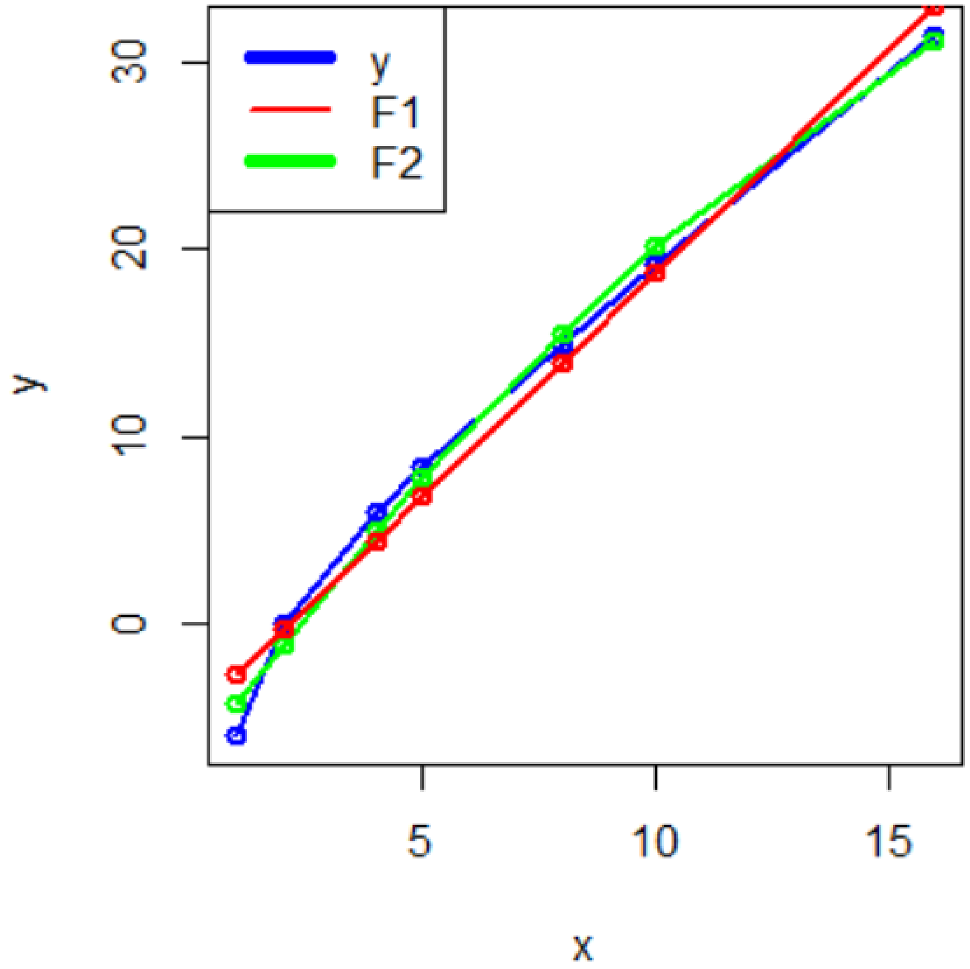
Zadanie 1

- Wykres 1: Linie łącząca punkty pomiarowe i wielomian $\widehat{f_2}(x)$:



Zadanie 1

- Wykres 1: Linie łącząca punkty pomiarowe i wielomiany $\widehat{f_1}(x), \widehat{f_2}(x)$:



Zadanie 2

- Tabela przedstawia wyniki pomiarów:

x_i	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	3.03	2.19	1.41	0.04	0.89	4.94	12.47	27.01

Przybliż szukaną funkcję wielomianem:

$$\widehat{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Zadanie 3

- Tabela przedstawia wyniki pomiarów:

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
$f(x_i)$	1.02	0.62	0.5	0.6	0.98	1.55	3.12	5.08

Przybliż szukaną funkcję wielomianem:

$$\widehat{f}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

jeśli wiadomo, że wartość pomiaru w punkcie $f(2.5)$ jest obarczona zbyt dużym błędem. Sprawdź jak błąd wpływa na jakość aproksymacji.