

KATEDRA CYBERNETYKI I ROBOTYKI
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
Notatki do wykładów z dziedziny automatyki i robotyki

Krzysztof Tchoń
Robert Muszyński

Robotyka

Wrocław 2018

Krzysztof Tchoń Robert Muszyński

Robotyka

Notatki do wykładów
z dziedziny automatyki i robotyki

Kompilacja: 26 listopada 2020

Wrocław 2018

Krzysztof Tchoń, Robert Muszyński
Wrocław 2018



Podręcznik jest dostępny na licencji Creative Commons: *Uznanie autorstwa-Na tych samych warunkach 4.0 Polska*

Utwór udostępniany na licencji Creative Commons: uznanie autorstwa, na tych samych warunkach. Udziela się zezwolenia do kopiowania, rozpowszechniania i/lub modyfikacji treści utworu zgodnie z zasadami w/w licencji opublikowanej przez Creative Commons. Licencja wymaga podania oryginalnego autora utworu, a dystrybucja materiałów pochodnych może odbywać się tylko na tych samych warunkach (nie można zastrzec, w jakikolwiek sposób ograniczyć, ani rozszerzyć praw do nich). Tekst licencji jest dostępny pod adresem: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.pl>.

Autorzy

Krzysztof Tchoń
Robert Muszyński
Katedra Cybernetyki i Robotyki,
Wydział Elektroniki,
Politechnika Wrocławska

Komputerowy skład tekstu

Robert Muszyński
Krzysztof Tchoń

Spis treści

Spis oznaczeń	VII
Rozdział 0. Preludium	1
0.1. Komentarze i odniesienia literaturowe	2
Literatura	3
Rozdział 1. Ruch ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej	4
1.1. Ruch	4
1.2. Ruchy elementarne	7
1.3. Prędkość ruchu ciała sztywnego	9
1.4. Zadania	12
1.5. Komentarze i odniesienia literaturowe	13
Literatura	13
Rozdział 2. Parametryzacje i układy współrzędnych w grupie $SE(3)$	14
2.1. Topologia grupy $SO(3)$	14
2.2. Kwaterniony	16
2.3. Współrzędne w $SE(3)$	18
2.4. Zadania	22
2.5. Komentarze i odniesienia literaturowe	23
Literatura	23
Rozdział 3. Kinematyka manipulatora sztywnego: Algorytm Denavita-Hartenberga	24
3.1. Podstawowe pojęcia	24
3.2. Algorytm Denavita-Hartenberga	25
3.3. Przykłady	26
3.3.1. Manipulator RTR	26
3.3.2. Manipulator mobilny	28
3.4. Kinematyka we współrzędnych	29
3.5. Przykład	30
3.6. Zadania	30

3.7. Komentarze i odniesienia literaturowe	32
Literatura	33
Rozdział 4. Jakobian analityczny. Konfiguracje regularne i osobliwe	34
4.1. Przykłady	36
4.1.1. Manipulator typu 2R	36
4.1.2. Manipulator RTR	38
4.2. Przestrzeń ruchu własnego	40
4.3. Zadania	41
4.4. Komentarze i odniesienia literaturowe	41
Literatura	41
Rozdział 5. Odwrotne zadanie kinematyki	42
5.1. Rozwiązanie analityczno-geometryczne	43
5.1.1. Manipulator 2R	43
5.2. Rozwiązanie numeryczne: metody jakobianowe	44
5.3. Faktoryzacja SVD	46
5.4. Ogólny algorytm Newtona	47
5.5. Własności kinematyczne manipulatora	48
5.5.1. Elipsoida manipulowalności	48
5.5.2. Miary zręczności	49
5.5.3. Powtarzalność	51
5.6. Komentarze i odniesienia literaturowe	52
Literatura	52
Rozdział 6. Jakobian geometryczny	53
6.1. Jakobian geometryczny	53
6.2. Jakobian analityczny a geometryczny	56
6.3. Przykład	57
6.4. Zadania	58
6.5. Komentarze i odniesienia literaturowe	59
Literatura	59
Rozdział 7. Dynamika manipulatora sztywnego	60
7.1. Model lagranżowski	60
7.2. Manipulator jako układ sterowania	64
7.2.1. Algorytm Takegaki-Arimoto	65
7.2.2. Algorytm obliczanego momentu	66
7.2.3. Algorytm Wena-Bayarda	66
7.2.4. Algorytm Freunda	67
7.3. Zadania	69
7.4. Komentarze i odniesienia literaturowe	70
Literatura	70

Rozdział 8. Dynamika manipulatora o elastycznych przegubach	71
8.1. Model lagranżowski	71
8.2. Manipulator jako układ sterowania	73
8.3. Algorytm obliczanego momentu	74
8.4. Komentarze i odniesienia literaturowe	76
Literatura	76
Rozdział 9. Dynamika manipulatora o elastycznych ogniach	77
9.1. Model lagranżowski	77
9.1.1. Drgania pręta	79
9.2. Lagranżian przybliżony	81
9.3. Komentarze i odniesienia literaturowe	84
Literatura	84
Rozdział 10. Kinematyka robotów mobilnych	85
10.1. Przykłady więzów w postaci Pfaffa	85
10.1.1. Koło, łyżwa, narta	86
10.1.2. Koło toczące się	87
10.1.3. Samochód kinematyczny	88
10.1.4. Robot kosmiczny	89
10.2. Więzy holonomiczne i nieholonomiczne	90
10.3. Stowarzyszona dystrybucja i algebra Liego	91
10.4. Przykłady	93
10.4.1. Koło, łyżwa, narta	93
10.4.2. Koło toczące się	94
10.4.3. Samochód kinematyczny	94
10.5. Zadania	95
10.6. Komentarze i odniesienia literaturowe	98
Literatura	98
Rozdział 11. Sterowanie kinematyczne robota mobilnego	99
11.1. Interpretacja nawiasu Liego	99
11.1.1. Manewr parkowania	101
11.2. Sterowanie robota mobilnego	101
11.2.1. Postać łańcuchowa	102
11.2.2. Sterowanie sinusoidalne	104
11.2.3. Śledzenie trajektorii	105
11.3. Komentarze i odniesienia literaturowe	108
Literatura	109
Rozdział 12. Dynamika i sterowanie robotów mobilnych	110
12.1. Równania dynamiki	110
12.2. Sterowanie dynamiką robota mobilnego	112

12.2.1. Wahadło mobilne	113
12.3. Zadania	120
12.4. Komentarze i odniesienia literaturowe	120
Literatura	121
Skorowidz	122
Spis rysunków	125

Do składu książki wykorzystano system przygotowania dokumentów \LaTeX , opracowany przez L. Lamport'a [Lam94], będący nakładką systemu \TeX , [Knu86a,Knu86b]. Matematyczne czcionki o nazwie AMS Euler, których używamy w tej książce, zostały opracowane przez H. Zapf'a [KZ86] na zlecenie Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego. Wybrane czcionki składu tekstu, Antykwa Toruńska [Now97] – jeden z nielicznych krojów pisma zaprojektowany specjalnie dla języka polskiego w sposób uwzględniający jego rytm – w odczuciu autorów doskonale współgrają z kształtem czcionki AMS Euler, pozwalając na uzyskanie harmonijnej całości. Wszystkie symulacje komputerowe zamieszczone w książce zostały przeprowadzone w środowiskach obliczeniowych MATHEMATICA[®] firmy Wolfram Research, Inc., [Wol96], oraz MATLAB[®] i SIMULINK[®] firmy The MathWorks, Inc., [Mat94a,Mat94b].

- [Knu86a] D. E. Knuth, The \TeX book, volume A of Computers and Typesetting. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [Knu86b] D. E. Knuth, \TeX : The Program, volume B of Computers and Typesetting. Addison-Wesley, Reading, 1986.
- [KZ86] D. E. Knuth i H. Zapf, AMS Euler — A new typeface for mathematics. Scholarly Publishing, 20:131–157, 1986.
- [Lam94] L. Lamport, \LaTeX : A Document Preparation System. Addison–Wesley, Reading, 1994.
- [Mat94a] The MathWorks, Inc., MATLAB User's Guide, 1994.
- [Mat94b] The MathWorks, Inc., SIMULINK User's Guide, 1994.
- [Now97] J. Nowacki, Antykwa Toruńska — od początku do końca polska czcionka. *Biuletyn Polskiej Grupy Użytkowników Systemu \TeX* , 9:26–27, 1997.
- [Wol96] S. Wolfram, The MATHEMATICA[®] Book. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

Spis oznaczeń

$\ \cdot\ $	norma euklidesowa wektora (4)
$\ \cdot\ _F$	norma Frobeniusa macierzy (14)
(\cdot, \cdot)	iloczyn skalarny wektorów (4)
$[\cdot]$	macierz skośnie symetryczna (10)
$[\cdot, \cdot]$	nawias Liego pól wektorowych (51)
$] \cdot [$	wektor reprezentujący macierz skośnie symetryczną (15)
\times	iloczyn wektorowy (10)
$A^\#$	prawostronna odwrotność macierzy A (45)
$A(q)$	macierz Pfaffa (85)
$B(q)$	macierz sterowań (110)
\mathbb{B}^3	3-wymiarowa kula (16)
$C(q, \dot{q})$	macierz sił odśrodkowych i Coriolisa (63)
$D(q)$	wektor sił potencjalnych (63)
$E(\varphi, \theta, \psi)$	parametryzacja Eulera (20)
e_i	wektor jednostkowy (5)
$G(q)$	macierz kinematyki robota mobilnego (111)
\mathbb{H}	algebra kwaternionów (17)
\mathbb{H}_1	kwaterniony jednostkowe (17)
I_n	macierz jednostkowa (5)
i, j, k	kwaterniony jednostkowe (17)
$J(q)$	jakobian analityczny (34)
$J_B(q)$	jakobian geometryczny w ciele (53)
$J_M(q)$	jakobian manipulatora (54)
$J_S(q)$	jakobian geometryczny w przestrzeni (53)
$K(q)$	kinematyka manipulatora (macierzowa) (24)
$K(q, \dot{q})$	energia kinetyczna (61)
$KKM(\varphi, \theta, \psi)$	parametryzacja KKM (20)

- $k(q)$ kinematyka manipulatora we współrzędnych (29)
- $L(q, \dot{q})$ lagranżian (62)
- $M(q)$ zredukowana macierz bezwładności robota mobilnego (111)
- $N(q, \eta)$ zredukowany wektor sił odśrodkowych i Coriolisa robota mobilnego (111)
- $Q(q)$ macierz bezwładności (63)
- \mathbb{Q} przestrzeń przegubowa manipulatora (24)
- \mathbb{R} zbiór liczb rzeczywistych (4)
- \mathbb{R}^n n -wymiarowa przestrzeń rzeczywista (4)
- $\text{Rot}(\cdot, \cdot)$ elementarny obrót (8)
- $S(\cdot)$ sfera jednostkowa prędkości przegubowych (48)
- S^2 2-wymiarowa sfera (15)
- $SE(3)$ specjalna grupa euklidesowa (6)
- $SO(3)$ grupa obrotów (5)
- \mathbb{T}^n n -wymiarowy torus (24)
- $\text{Trans}(\cdot, \cdot)$ elementarne przesunięcie (7)
- $V(q)$ energia potencjalna (62)

Rozdział 0

Preludium

Niniejsze notatki zostały sporządzone na podstawie cyklu wykładów z Podstaw robotyki prowadzonego przez pierwszego współautora na kierunku Automatyka i robotyka, na Wydziale Elektroniki Politechniki Wrocławskiej, w latach 1990-2012. Celem wykładu było wprowadzenie podstawowych pojęć i metod robotyki. Obiektami dobrze nadającymi się do tego celu są szeregowe manipulatory. Znaczna część wykładu odnosi się przeto do klasycznego opisu kinematyki szeregowych manipulatorów sztywnych, obejmującego pojęcia odnoszące się do ruchu ciała sztywnego, algorytm Denavita-Hartenberga, reprezentacje kinematyki we współrzędnych, pojęcia jakobianu analitycznego i geometrycznego, jakobianowe algorytmy kinematyki odwrotnej, osobliwości kinematyczne i miary zręczności manipulatora. Od kinematyki przechodzimy do opisu dynamiki manipulatorów sztywnych, opartego na metodach mechaniki lagranżowskiej. Jako kontrpunkt wprowadzamy modele dynamiki manipulatorów o elastycznych przegubach i dajemy przedsmak modelowania dynamiki manipulatorów o elastycznych ramionach. Zajmujemy się typowymi zadaniami i algorytmami sterowania manipulatorów szeregowych. Od manipulatorów (układów holonomicznych) przechodzimy do robotów mobilnych (układów nieholonomicznych). Jako opis ich kinematyki przyjmujemy liniową formę Pfaffa reprezentowaną za pomocą bezdryfowego układu sterowania. Wprowadzamy wybrane pojęcia geometrycznej teorii sterowania. Od kinematyki przechodzimy do modelowania dynamiki robotów mobilnych wykorzystującego metody Lagrange'a-d'Alemberta. Omawiamy zadania i algorytmy sterowania dynamiką robotów mobilnych. Zarówno w przypadku manipulatorów, jak i robotów mobilnych lejtymotywną prezentacji algorytmów sterowania są metody obliczanego momentu i metody dynamiki odwrotnej, w tym linearyzacji i odsprzęgania wejściowo-wyjściowego.

Wykład posługuje się językiem matematycznym i wykorzystuje metody mechaniki analitycznej; zakładamy że słuchacze wykładu zaliczyli odpowiednie kursy przewidziane w programie kierunku Automatyka i robotyka. Uzupełnieniem teorii są przykłady i zadania zamieszczone na

zakończenie poszczególnych rozdziałów. Rozszerzenie wiedzy podanej na wykładzie można znaleźć w sugerowanej literaturze.

0.1. Komentarze i odniesienia literaturowe

Istnieje wiele podręczników i monografii poświęconych robotyce. Wymienimy je, poczynając od prac w języku polskim. Najpierw *pro domo sua*. Na początku nowego stulecia ukazała się książka [TMD⁺00] pomyślana jako monografia na potrzeby dydaktyki. Obejmuje ona problematykę poruszaną w tych notatkach, z naciskiem na własne wyniki jej autorów. Klasyczne podręczniki z dziedziny robotyki to przetłumaczone z języka angielskiego pozycje [Cra93] i [SV97]; pierwsza z nich kładzie nacisk na aspekty mechaniczne, druga na modelowanie i sterowanie robotów. Zwłaszcza ta ostatnia odpowiada duchowi i literze tych notatek, podobnie jak książka [KDW03]. Monografia [Jez05] kładzie nacisk na modelowanie i napędy robotów. Robotom kroczącym, całkowicie pominiętym w niniejszych notatkach została poświęcona pozycja [Zie03]. Specjalistycznymi zagadnieniami identyfikacji modeli robotów i planowania ruchu zajmują się monografie [Koz98], [Maz09] i [Dul98]. Preskrypt [Mia12] omawia konstrukcję i modele różnych typów manipulatorów równoległych.

Robotyka jest dziedziną szybko rozwijającą się, dlatego na świecie praktycznie każdego roku pojawiają się podręczniki i monografie dotyczące różnych jej aspektów. Wymienimy tylko takie prace, które posługują się językiem matematycznym. Za pracę najbardziej klasyczną uznajemy monografię [Pau81]. Pozycjami literaturowymi na temat podstaw robotyki są [Ang07, Sea10, Jaz07, LBS13], przy czym rozłożenie akcentów między zagadnienia mechaniki i sterowania zależy od proveniencji ich autorów. Bardziej wyspecjalizowanym zagadnieniom planowania ruchu robotów jest poświęcona monografia [LaV06]. Kwestie miar zręczności manipulatorów omawia monografia [Nak91]. Roboty równoległe, nieomawiane w tych notatkach, są przedmiotem monografii [Mer06]. Algorytmy sterowania manipulatorami mobilnymi przedstawiono w pracy [LG13]. Znakomite matematyczne ujęcie problematyki manipulatorów i robotów mobilnych zawiera monografia [MLS94]. Przedłożony spis lektur jest daleki od kompletności, ukierunkowuje tylko uwagę Czytelnika zainteresowanego pogłębianiem swojej wiedzy na temat robotyki. Kompletny przegląd problemów, metod i wyników robotyki zawiera fundamentalne dzieło [SK16].

Literatura

- [Ang07] J. Angeles. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*. Springer, New York, 2007.
- [Cra93] J. J. Craig. *Wprowadzenie do robotyki: Mechanika i sterowanie*. WNT, Warszawa, 1993.
- [Dul98] I. Dulęba. *Algorithms of Motion Planning for Nonholonomic Robots*. Oficyna Wydawnicza PWr, Wrocław, 1998.
- [Jaz07] R. N. Jazar. *Theory of Applied Robotics*. Springer, New York, 2007.
- [Jez05] E. Jezierski. *Dynamika robotów*. WNT, Warszawa, 2005.
- [KDW03] K. Kozłowski, P. Dutkiewicz, W. Wróblewski. *Modelowanie i sterowanie robotów*. PWN, Warszawa, 2003.
- [Koz98] K. Kozłowski. *Modelling and Identification in Robotics*. Springer, Berlin, 1998.
- [LaV06] S. M. LaValle. *Robot Motion Planning Algorithms*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [LBS13] J. Lenarcic, T. Bajd, M. M. Stanisic. *Robot Mechanisms*. Springer, Dordrecht, 2013.
- [LG13] Z. Li, S. S. Ge. *Fundamentals in Modeling and Control of Mobile Manipulators*. CRC Press, Boca Raton, 2013.
- [Maz09] A. Mazur. *Sterowanie oparte na modelu dla nieholonomicznych manipulatorów mobilnych*. Oficyna Wydawnicza PWr, Wrocław, 2009.
- [Mer06] J. P. Merlet. *Parallel Robots*. Springer, Dordrecht, 2006.
- [Mia12] K. Mianowski. *Manipulatory równoległe*. Politechnika Warszawska, 2012.
- [MLS94] R. Murray, Z. Li, S. S. Sastry. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [Nak91] Y. Nakamura. *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*. Addison-Wesley, Reading, 1991.
- [Pau81] R. Paul. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*. MIT Press, Cambridge, 1981.
- [Sea10] B. Siciliano, et al. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. Springer, London, 2010.
- [SK16] B. Siciliano, O. Khatib, redaktorzy. *Springer Handbook of Robotics*. Springer, Berlin, 2016.
- [SV97] M. Spong, M. Vidyasagar. *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).
- [Zie03] T. Zielińska. *Maszyny kroczące*. PWN, Warszawa, 2003.

Rozdział 1

Ruch ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej

1.1. Ruch

Z wykładu Mechaniki analitycznej wiadomo, że ruch punktu materialnego w przestrzeni euklidesowej jest to przekształcenie

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

czasu \mathbb{R} w przestrzeń liniową \mathbb{R}^3 wyposażoną w iloczyn skalarny

$$(v, w) = v^T w = \sum_{i=1}^3 v_i w_i$$

wektorów $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, $w = (w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3$ i indukowaną normę euklidesową $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$. Obecnie zaadoptujemy tę definicję do pojęcia ruchu ciała sztywnego.

Przypominamy, że ciało sztywne rozumiemy jako zwarty (domknięty i ograniczony) podzbiór $B \subset \mathbb{R}^3$, który może się przemieszczać w tej przestrzeni. Na mocy definicji przemieszczenie ciała sztywnego jest to afiniczne przekształcenie

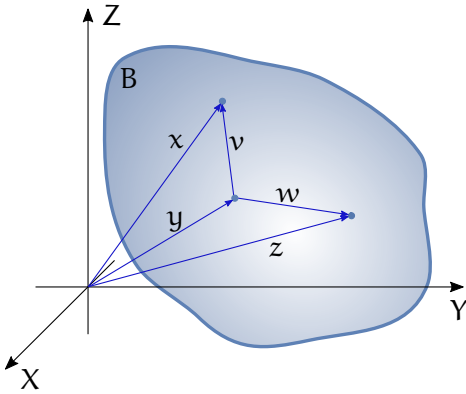
$$D : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad D(x) = Rx + T, \quad (1.1)$$

które pozostawia niezmienione odległości między punktami ciała sztywnego i kąty między wektorami łączącymi te punkty. W formule na przemieszczenie symbol R oznacza macierz rozmiaru 3×3 , a T jest wektorem z \mathbb{R}^3 . W celu sprecyzowania własności przemieszczenia ciała sztywnego weźmy trzy punkty ciała B opisane wektorami x , y i z , zob. Rysunek 1.1. Połóżmy $v = x - y$ i $w = z - y$ i zdefiniujmy przekształcenia

$$D_* v = D(x) - D(y) = Rx + T - Ry - T = Rv, \quad D_* w = D(z) - D(y) = Rw.$$

D jest przemieszczeniem ciała sztywnego, jeżeli

$$\|D_* v\| = \|v\| \quad \text{ i } \quad \angle(D_* v, D_* w) = \angle(v, w).$$



Rysunek 1.1: Ciało sztywne

Można pokazać, że podane wyżej wymagania są równoważne zachowaniu przez przekształcenie D_* iloczynu skalarne i wektorowego w \mathbb{R}^3 , w następującym sensie

$$(D_*v, D_*w) = (v, w) \quad \text{i} \quad D_*v \times D_*w = D_*(v \times w). \quad (1.2)$$

Można powiedzieć, że D_* jest inwariantne względem iloczynu skalarne i ekwivariantne (równozmienne) ze względu na iloczyn wektorowy. Wzór (1.2) ma następujące konsekwencje

$$(Rv, Rw) = (v, w) \quad \text{i} \quad Rv \times Rw = R(v \times w),$$

a w szczególności $\|Rv\| = \|v\|$. Z uzyskanych równości wynika, że dla dowolnych wektorów $v, w \in \mathbb{R}^3$

$$v^T R^T R w = v^T w \implies R R^T = I_3,$$

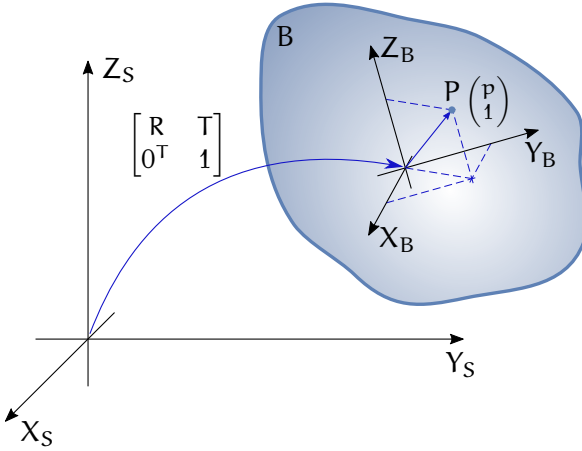
gdzie I_3 oznacza macierz jednostkową 3×3 , a także

$$\det R = (Re_1 \times Re_2) \cdot Re_3 = (R(e_1 \times e_2)) \cdot Re_3 = (Re_3, Re_3) = \|Re_3\|^2 = \|e_3\|^2 = 1,$$

przy czym e_i jest i -tym wektorem jednostkowym w \mathbb{R}^3 . Z definicji przemieszczenia ciała sztywnego wynika zatem, że w przekształceniu $D(x) = Rx + T$ R oznacza macierz ortogonalną $RR^T = R^T R = I_3$, której wyznacznik wynosi 1. Taką macierz nazywamy specjalną macierzą ortogonalną. Zbiór specjalnych macierzy ortogonalnych tworzy specjalną grupę euklidesową

$$SO(3) = \{R \mid RR^T = R^T R = I_3, \det R = 1\}. \quad (1.3)$$

lub grupę obrotów. Działaniem grupowym w $SO(3)$ jest mnożenie macierzy, elementem neutralnym jest macierz jednostkowa I_3 , a elementem



Rysunek 1.2: Przemieszczenie ciała sztywnego

odwrotnym do macierzy R jest macierz transponowana R^T . Oba elementy przemieszczenia ciała sztywnego (1.1) można zapisać za pomocą macierzy rozmiaru 4×4 postaci

$$M = \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $R \in SO(3)$, a $T \in \mathbb{R}^3$. Zbiór wszystkich takich macierzy tworzy specjalną grupę euklidesową

$$SE(3) = \left\{ \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \mid R \in SO(3), T \in \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (1.4)$$

Działanie grupowe w $SE(3)$ jest zdefiniowane wzorem

$$\begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0_1^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & T_2 \\ 0_2^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & T_1 + R_1 T_2 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix},$$

elementem neutralnym jest macierz jednostkowa I_4 , a element odwrotny do macierzy M ma postać

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Dla wyjaśnienia roli, jaką odgrywają elementy specjalnej grupy euklidesowej przy opisie ruchu ciała sztywnego rozważmy sytuację przedstawioną na Rysunku 1.2. Oznaczmy przez (X_S, Y_S, Z_S) nieruchomy ortogonalny układ współrzędnych zwany układem przestrzeni. Z ciałem sztywnym B zwiążemy drugi ortogonalny układ współrzędnych (X_B, Y_B, Z_B) ,

który będziemy nazywać układem ciała. Niech wektor $p \in \mathbb{R}^3$ oznacza współrzędne punktu P ciała w układzie ciała. Dodając 1 jako czwartą współrzędną punktu P otrzymujemy współrzędne jednorodne $(p^T, 1)^T$. Współrzędne jednorodne $(s^T, 0)^T$ punktu P względem układu przestrzeni obliczamy według wzoru

$$\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{i.e.} \quad s = Rp + T. \quad (1.5)$$

Z zależności (1.5) wynika następująca interpretacja macierzy R i wektora T . Załóżmy, że punkt P oznacza początek układu ciała, tzn. $p = 0$. Współrzędne tego punktu względem układu przestrzeni są równe T , co oznacza, że wektor T określa przemieszczenie początku układu ciała względem układu przestrzeni. Załóżmy teraz, że początki tych układów się pokrywają i niech $p = e_i$ będzie wersorem osi i układu ciała. Obrazem wektora e_i w układzie przestrzeni jest Re_i , czyli i -ta kolumna macierzy R . Wynika stąd, że macierz R mówi „jak obrócony” jest układ ciała, opisuje orientację układu ciała względem układu przestrzeni.

Podsumowując przeprowadzoną analizę stwierdzamy, że do opisu ruchu ciała sztywnego potrzeba i wystarczy podać w każdej chwili położenie i orientację układu ciała (X_B, Y_B, Z_B) względem układu przestrzeni (X_S, Y_S, Z_S) wyznaczone przez elementy specjalnej grupy euklidesowej $SE(3)$. Powiemy zatem, że ruch ciała sztywnego w przestrzeni euklidesowej jest to przekształcenie

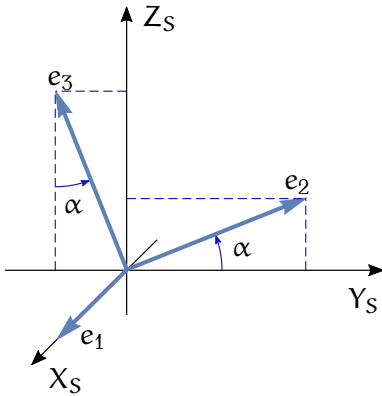
$$c: \mathbb{R} \longrightarrow SE(3), \quad c(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

ciągłe i odpowiednio różniczkowalne. Czas i specjalna grupa euklidesowa stanowią scenariusz ruchu ciała sztywnego.

1.2. Ruchy elementarne

Wśród elementów specjalnej grupy euklidesowej wyróżniamy sześć ruchów elementarnych, których złożenie generuje wszystkie ruchy ciała sztywnego. Należą do nich trzy elementarne przesunięcia i trzy elementarne obroty. Załóżmy, że układ ciała pokrywa się z układem przestrzeni i przesuwamy się wzdłuż osi X_S na odległość a , bez zmiany orientacji. To elementarne przesunięcie jest opisane macierzą

$$\text{Trans}(X, a) = \begin{bmatrix} I_3 & ae_1 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$



Rysunek 1.3: Obrót elementarny wokół osi X

W podobny sposób definiujemy elementarne przesunięcia wzdłuż osi Y_S o b i osi Z_S o c otrzymując macierze

$$\text{Trans}(Y, b) = \begin{bmatrix} I_3 & be_2 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Trans}(Z, c) = \begin{bmatrix} I_3 & ce_3 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Przyjmijmy teraz, że układ ciała obraca się względem układu przestrzeni, bez zmiany położenia swojego początku. Obrotami elementarnymi nazywamy obroty wokół osi X_S , Y_S i Z_S . Postać macierzy opisującej elementarny obrót wokół osi X_S o kąt α można uzyskać w następujący sposób, zob. Rysunek 1.3. Ustalmy wersory osi układu ciała. Ich obrazy w układzie przestrzeni są kolumnami szukanej macierzy obrotu. Oznaczmy te kolumny jako r_1 , r_2 , r_3 . Przy obrocie wokół osi X wersor e_1 nie zmienia się, dlatego $r_1 = e_1$. Współrzędne wersora e_2 są równe $(0, \cos \alpha, \sin \alpha)^T$, a współrzędne wersora e_3 wynoszą $(0, -\sin \alpha, \cos \alpha)^T$. W ten sposób otrzymaliśmy macierz

$$\text{Rot}(X, \alpha) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Analogiczne rozumowanie prowadzi do uzyskania macierzy opisujących elementarne obroty wokół osi Y_S o kąt β i wokół osi Z_S o kąt γ ,

$$\begin{aligned} \text{Rot}(Y, \beta) &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{Rot}(Z, \gamma) &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nietrudno pokazać, że składanie ruchów elementarnych nie jest przemienne, z wyjątkiem przesunięć oraz przesunięć i obrotów względem tej samej osi.

1.3. Prędkość ruchu ciała sztywnego

Pojęcie prędkości ruchu ciała sztywnego wprowadzamy w następujący sposób. Załóżmy najpierw, że ruchu polega wyłącznie na zmianie orientacji ciała, niech zatem

$$c(t) = \begin{bmatrix} R(t) & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \cong R(t).$$

Ponieważ $R(t)$ jest macierzą ortogonalną, w każdej chwili zachodzi

$$R(t)R^T(t) = R^T(t)R(t) = I_3,$$

skąd wynika

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = \dot{R}^T(t)R(t) + R^T(t)\dot{R}(t) = 0. \quad (1.11)$$

Otrzymujemy w ten sposób dwa pojęcia prędkości kątowej ciała sztywnego zdefiniowane macierzami

1. $\Omega_S = \dot{R}R^T$ – prędkość w przestrzeni,
2. $\Omega_B = R^T\dot{R}$ – prędkość w ciele, takimi że

$$\dot{R} = \Omega_S R = R \Omega_B, \quad \text{tzn.} \quad \Omega_S = R \Omega_B R^T.$$

Przez podstawienie do wzoru (1.11) stwierdzamy, że obie macierzowe prędkości kątowe spełniają warunek

$$\Omega + \Omega^T = 0,$$

co oznacza, że macierze Ω_S i Ω_B są skośnie symetryczne. Jak wiadomo, każda macierz skośnie symetryczna rozmiaru 3×3 jest zdefiniowana przez trzy swoje elementy. Na tej podstawie wektor $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ utożsamiamy z macierzą

$$\Omega = [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operacja $[\]$ stanowi izomorfizm między przestrzenią \mathbb{R}^3 a przestrzenią skośnie symetrycznych macierzy rozmiaru 3×3 . Rozmieszczenie składowych wektora ω w macierzy $[\omega]$ jest takie, żeby

$$\Omega v = \omega \times v,$$

gdzie $v \in \mathbb{R}^3$, a \times oznacza iloczyn wektorowy. Stosując to rozumowanie do obu macierzowych prędkości kątowych możemy zdefiniować wektorową prędkość w przestrzeni ω_S i wektorową prędkość w ciele ω_B , w taki sposób że

$$\Omega_S = [\omega_S], \quad \Omega_B = [\omega_B].$$

Ponieważ obrót był pierwotnie opisany przez macierz rozmiaru 4×4 , formalnie macierzowe prędkości kątowe powinniśmy traktować jako macierze postaci

$$\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie Ω oznacza już to Ω_S , już to Ω_B .

Pojęciom prędkości kątowych w przestrzeni i w ciele można nadać następującą interpretację. Prędkość ω_B rezyduje w układzie ciała, a prędkość ω_S w układzie przestrzeni, przy czym związek między tymi prędkościami jest następujący

$$\omega_S = R\omega_B.$$

Prędkość w przestrzeni oznacza zatem prędkość kątową ciała względem układu przestrzeni, natomiast prędkość ω_B jest to prędkość ω_S przeniesioną do układu ciała. Z matematycznego punktu widzenia istnienie dwóch prędkości kątowych ciała sztywnego wynika z nieprzemienności mnożenia macierzy obrotu.

Rozważmy teraz przypadek ogólny ruchu zawierającego zarówno przesunięcie, jak i obrót, niech więc będzie dany ruch

$$c(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Przez analogię do definicji macierzowych prędkości kątowych wprowadzamy

1. $V_S = \dot{c}c^{-1}$ – macierzowa prędkość w przestrzeni,
2. $V_B = c^{-1}\dot{c}$ – macierzowa prędkość w ciele.

Na mocy powyższych definicji otrzymujemy

$$V_S = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{T} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix},$$

tzn.

$$V_S = \begin{bmatrix} \Omega_S & \dot{T} - \Omega_S T \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \cong v_S = \begin{pmatrix} \dot{T} - \omega_S \times T \\ \omega_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{T} + [T]\omega_S \\ \omega_S \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Wektor $v_S \in \mathbb{R}^6$ reprezentujący macierz V_S nazywamy skrętnikiem w przestrzeni. W podobny sposób wyznaczamy

$$V_B = \begin{bmatrix} R^T \dot{R} & R^T \dot{T} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \cong v_B = \begin{pmatrix} R^T \dot{T} \\ \omega_b \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Wektor $v_B \in \mathbb{R}^6$ nosi nazwę skrętnika w ciele. Korzystając z własności prędkości kątowych w przestrzeni i w ciele oraz z izomorfizmu [] otrzymujemy następujący związek między skrętnikami

$$v_S = \begin{bmatrix} R & [T]R \\ 0^T & R \end{bmatrix} v_B \quad (1.14)$$

Przejdźmy teraz do interpretacji macierzowych prędkości V_S i V_B . Niech będzie dany punkt P w układzie ciała, o współrzędnych $p \in \mathbb{R}^3$. Jego współrzędne względem układu przestrzeni są

$$s = Rp + T.$$

Obliczamy prędkość $\dot{s} = \dot{R}p + \dot{T}$, co po podstawieniu $p = R^T(s - T)$ prowadzi do wzoru

$$\dot{s} = \dot{R}R^T(s - T) + \dot{T} = \omega_S \times (s - T) + \dot{T}.$$

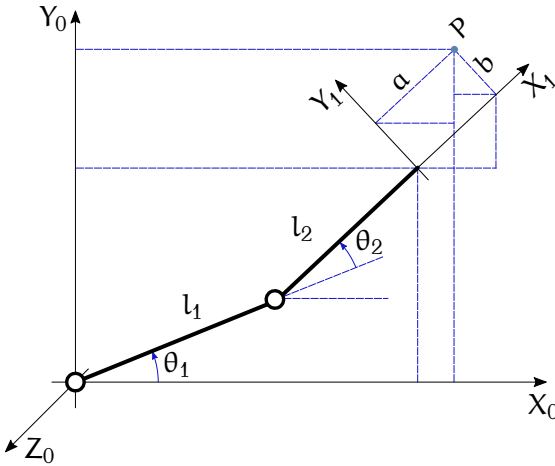
Zauważmy, że ostatnią zależność można zapisać jako

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \end{pmatrix} = V_S \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wynika stąd, że macierzowa prędkość V_S określa prędkość ruchu punktu P o współrzędnych jednorodnych $(p^T, 1)^T$ względem układu przestrzeni. Podobne rozumowanie prowadzi do wniosku, że

$$\begin{pmatrix} R^T \dot{s} \\ 0 \end{pmatrix} = V_B \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix},$$

co oznacza, że macierzową prędkość V_B opisuje prędkość punktu P względem układu przestrzeni, przeniesioną do układu ciała.



Rysunek 1.4: Manipulator planarny

1.4. Zadania

Zadanie 1.1 Dla prędkości kątowej ω i macierzy obrotu R udowodnić zależność

$$R[\omega]R^T = [R\omega].$$

Zadanie 1.2 Wyznaczyć macierze obrotów elementarnych $\text{Rot}(Y, \beta)$ i $\text{Rot}(Z, \gamma)$.

Zadanie 1.3 Wyprowadzić zależność (1.14) między skrętnikami.

Zadanie 1.4 Dany jest manipulator planarny przedstawiony na rysunku 1.4. Wiedząc, że przekształcenie układu (X_0, Y_0, Z_0) w układ (X_1, Y_1, Z_1) ma postać:

$$\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Obliczyć współrzędne punktu $P(a, b, 0)$ w układzie przestrzeni.
2. Sprawdzić uzyskany wynik przez prostą analizę geometryczną.
3. Zakładając, że porusza się wyłącznie ramię 1 ($\theta_2 = \text{const}$) wyznaczyć prędkości liniowe i kątowe, w przestrzeni i w ciele, efektora tego manipulatora.
4. Powtórzyć wyliczenia z p. 3 przy założeniu, że porusza się wyłącznie ramię 2 ($\theta_1 = \text{const}$).

5. Wyznaczyć współrzędne przegubu nr 2 w układzie (X_1, Y_1, Z_1) .
6. Spróbować odgadnąć macierz $\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dla manipulatora planarnego o trzech stopniach swobody $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.

1.5. Komentarze i odniesienia literaturowe

Dodatkowe informacje na temat ruchu ciała sztywnego można znaleźć w monografii [TMD⁺00] i w notatkach do wykładu z Mechaniki analitycznej [TM18]. Prędkości ruchu ciała sztywnego są przedmiotem rozdziału 5 książki [Cra93].

Literatura

- [Cra93] J. J. Craig, *Wprowadzenie do robotyki: Mechanika i sterowanie*. WNT, Warszawa, 1993.
- [TM18] K. Tchoń, R. Muszyński, *Mechanika analityczna*. Projekt Azon, Wrocław, 2018.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 2

Parametryzacje i układy współrzędnych w grupie $SE(3)$

Na mocy definicji, elementami specjalnej grupy euklidesowej $SE(3)$ są macierze obrotu $R \in SO(3)$ i wektory przesunięcia $T \in \mathbb{R}^3$. Macierze obrotu zawierają 9 elementów spełniających warunki ortogonalności $RR^T = R^T R = I_3$, czyli

$$F(R) = (r_1^T r_1 - 1, r_2^T r_2 - 1, r_3^T r_3 - 1, r_1^T r_2, r_1^T r_3, r_2^T r_3) = 0,$$

gdzie r_i oznacza i -tą kolumnę macierzy R . W konsekwencji, grupa $SO(3)$ jest podrozmaitością przestrzeni \mathbb{R}^9 o wymiarze 3 i jednocześnie grupą. Taka grupa nosi nazwę macierzowej grupy Liego. Ponieważ wektory przesunięcia są trójwymiarowe, grupa $SE(3)$ jest 6-wymiarową podrozmaitością \mathbb{R}^{12} i także macierzową grupą Liego, której podgrupą jest $SO(3)$.

2.1. Topologia grupy $SO(3)$

Zajmiemy się teraz strukturą topologiczną podgrupy obrotów. Jako zbiór macierzy spełniających równania ortogonalności grupa $SO(3) = F^{-1}(0)$ jest zbiorem domkniętym. Obliczając normę Frobeniusa $\|R\|_F = \sqrt{\text{tr } R^T R} = \sqrt{3}$ dowolnej macierzy obrotu stwierdzamy, że $SO(3)$ jest zbiorem ograniczonym. Domknięty i ograniczony podzbiór \mathbb{R}^9 nazywa się zbiorem zwartym; zatem grupa $SO(3)$ jest zwarta. Niech $R \in SO(3)$. Wektory własne macierzy R spełniają zależność

$$Rv = \lambda v,$$

a równanie charakterystyczne macierzy R ma postać

$$\det(\lambda I_3 - R) = \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Ponieważ równanie charakterystyczne jest stopnia 3, jedna z wartości własnych macierzy R , na przykład λ_1 , musi być rzeczywista. Co więcej, z równania $Rv = \lambda v$ wynika $v^*{}^T R^T = \lambda^* v^*{}^T$, (gwiazdką oznaczamy liczbę zespoloną sprzężoną), a zatem, na mocy ortogonalności

$$\|v\|^2 = v^*{}^T R^T R v = \lambda^* \lambda v^*{}^T v = |\lambda|^2 \|v\|^2,$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesowa. W ten sposób pokazaliśmy, że wartości własne macierzy obrotu mają moduł równy 1, $|\lambda| = 1$, a ponieważ wyznacznik $\det R = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, wartości własne muszą być postaci

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \exp(\pm i\varphi).$$

Fakt ten ma istotne konsekwencje. Mianowicie, warunek

$$Rv_1 = \lambda_1 v_1 = v_1$$

oznacza, że istnieje w \mathbb{R}^3 wektor, który nie zmienia się przy obrocie; ten wektor definiuje oś obrotu. Zauważmy, że $R^T v_1 = v_1$, a więc oś obrotu spełnia równanie

$$(R - R^T)v_1 = 0.$$

Macierz $R - R^T$ jest skośnie symetryczna, a zatem można ją utożsamić z wektorem $r \in \mathbb{R}^3$ w taki sposób, że $R - R^T = [r]$. W rezultacie otrzymujemy równość

$$[r]v_1 = 0 = r \times v_1,$$

z którego wynika, że oś obrotu jest współliniowa z wektorem r , tzn.

$$v = \frac{r}{\|r\|}. \quad (2.1)$$

Biorąc pod uwagę postać wartości własnych macierzy R , obliczy teraz ślad

$$\operatorname{tr}(R) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + \exp(-i\varphi) + \exp(i\varphi) = 1 + 2\cos\varphi,$$

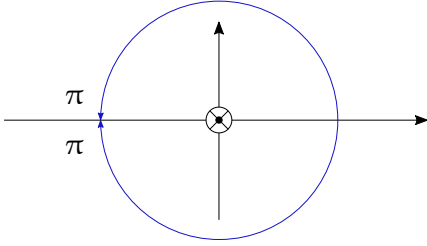
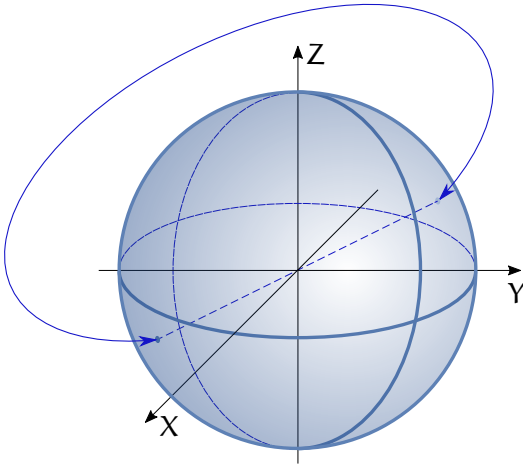
skąd wynika, że

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} R - 1}{2}. \quad (2.2)$$

Zależności (2.1) i (2.2) pokazują, że każdej macierzy obrotu można przyporządkować oś obrotu v i kąt obrotu φ z przedziału $[0, \pi]$. Oznaczmy przez $] \cdot [: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $]R[= r$, odwrotność izomorfizmu $[r] = R$. Podsumowując naszą analizę możemy powiedzieć, że istnieje przekształcenie

$$\phi : \operatorname{SO}(3) \rightarrow \mathbb{S}^2 \times [0, \pi], \quad \phi(R) = \left(\frac{]R - R^T[}{\|]R - R^T\|}, \arccos \frac{\operatorname{tr} R - 1}{2} \right), \quad (2.3)$$

gdzie \mathbb{S}^2 oznacza 2-wymiarową sferę w \mathbb{R}^3 , Przekształcenie (2.3) nazywamy układem współrzędnych typu oś-kąt w grupie obrotów $\operatorname{SO}(3)$; dla oznaczenia obrotu wokół osi v o kąt φ będziemy używać oznaczenia $\operatorname{Rot}(v, \varphi)$. Przyjrzymy się teraz dokładniej obrazowi $\phi(\operatorname{SO}(3))$ grupy $\operatorname{SO}(3)$. Można go opisać w następujący sposób. Mając macierz obrotu R

Rysunek 2.1: Obroty o kąt π Rysunek 2.2: Obraz $\phi(SO(3))$ grupy $SO(3)$

wyznamy najpierw oś obrotu, a następnie wzdłuż tej osi zaznamy kąt obrotu. Postępując tak dla każdej macierzy obrotu, otrzymamy kulę $\mathbb{B}^3(0, \pi)$ o promieniu π . Zauważmy jednak, że obrót wokół osi v o kąt π daje ten same efekt, co obrót wokół osi $-v$ o kąt π , zob. Rysunek 2.1, musi zatem być $R(v, \pi) = R(-v, \pi)$, co oznacza utożsamienie odpowiednich punktów leżących na sferze $S^3(0, \pi) \subset \mathbb{B}^3(0, \pi)$. Mówimy, że obrazem $\phi(SO(3))$ jest kula $\mathbb{B}^3(0, \pi)$ z utożsamionymi punktami antypodycznymi, jak przedstawiono na Rysunku 2.2.

2.2. Kwanterniony

Do reprezentacji elementów grupy obrotów można użyć obiektów zwanych kwaternionami. Kwaterniony stanowią uogólnienie liczb zespolonych, i, jak sama nazwa wskazuje, są układami czterech liczb rzeczy-

wistych. Kwaternion

$$q = a + ib + jc + kd,$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Składnik a nazywa się częścią rzeczywistą kwaternionu, a składnik $\hat{q} = (b, c, d)$ nosi nazwę jego części wektorowej. Dla wygody będziemy używać notacji $\vec{q} = ib + jc + kd$, co oznacza, że $q = a + \vec{q}$. Elementy i, j, k nazywają się kwaternionami jednostkowymi. Zbiór kwaternionów \mathbb{H} jest algebrą nad zbiorem liczb rzeczywistych. Jeżeli $q_1 = (a_1, \hat{q}_1)$ i $q_2 = (a_2, \hat{q}_2)$, to dodawanie kwaternionów jest określone wzorem

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + \\ &\quad + k(d_1 + d_2) = (a_1 + a_2) + \overrightarrow{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}, \end{aligned}$$

a mnożenie przez liczby rzeczywiste,

$$\alpha q = \alpha(a + \vec{q}) = \alpha a + i\alpha b + j\alpha c + k\alpha d = a + \vec{\alpha q}.$$

Mnożenie kwaternionów wymaga zdefiniowania reguł mnożenia kwaternionów jednostkowych. Reguły te, odkryte przez Hamiltona, mają postać

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Korzystając z tych reguł obliczamy iloczyn kwaternionów

$$\begin{aligned} q_1 q_2 &= (a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1)(a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2) = \\ &= a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ja_1 c_2 + ka_1 d_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + ijb_1 c_2 + \\ &\quad + ikb_1 d_2 + jc_1 a_2 + jic_1 b_2 + j^2 c_1 c_2 + jkc_1 d_2 + kd_1 a_2 + kid_1 b_2 + \\ &\quad + kjd_1 c_2 + k^2 d_1 d_2 = a_1 a_2 - (\hat{q}_1, \hat{q}_2) + a_1 \vec{\hat{q}_2} + a_2 \vec{\hat{q}_1} + \overrightarrow{\hat{q}_1 \times \hat{q}_2}. \end{aligned}$$

Każdemu kwaternionowi q odpowiada kwaternion sprzężony

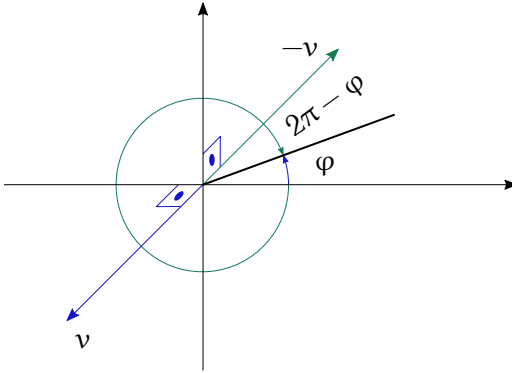
$$q^* = a - \vec{q}.$$

Iloczyn $qq^* = a^2 + (\hat{q}, \hat{q}) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |q|^2$ określa moduł kwaternionu q . Zbiór kwaternionów jednostkowych

$$\mathbb{H}_1 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\} \cong \mathbb{S}^3$$

jest sferą jednostkową w przestrzeni \mathbb{R}^4 .

Mając za sobą to krótkie wprowadzenie do algebry kwaternionów możemy zająć się związkiem między kwaternionami a grupą obrotów $SO(3)$. Jak pokazaliśmy, każdej macierzy $R \in SO(3)$ odpowiada oś obrotu



Rysunek 2.3: Identyczne obroty

i kąt obrotu, $\phi(R) = (v, \varphi)$. Korzystając tego przyporządkujemy macierzy R parę kwaternionów jednostkowych $\pm q$, gdzie

$$q = \cos \frac{1}{2} \varphi + \vec{v} \sin \frac{1}{2} \varphi. \quad (2.4)$$

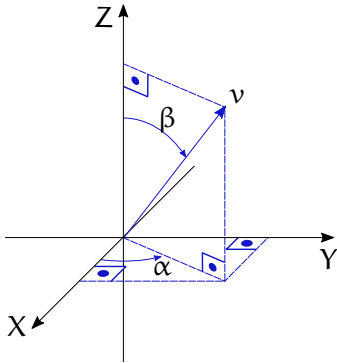
Kąt φ w reprezentacji kwaternionowej może przyjmować wartości z przedziału $[0, \pi]$. Konieczność użycia pary kwaternionów wynika z utożsamienia obrotów $R(v, \varphi)$ i $R(-v, 2\pi - \varphi)$, zob. Rysunek 2.3. Punkty $\pm q$ są punktami antypodycznymi na sferze S^4 . Oznacza to, że każdemu obrotowi odpowiada prosta w \mathbb{R}^4 łącząca te punkty i przechodząca przez punkt 0. Zbiór takich prostych definiuje przestrzeń rzutową PR^3 , otrzymaliśmy zatem utożsamienie $SO(3) \cong PR^3$.

2.3. Współrzędne w $SE(3)$

Jak wynika z definicji, jako rozmaitość (nie jako grupa) specjalna grupa euklidesowa jest iloczynem kartezjańskim

$$SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3.$$

Dla opisu elementów grupy $SE(3)$ za pomocą liczb wystarczy wprowadzić taki opis osobno dla obrotów i przesunięć. Zaczniemy od grupy obrotów. Jak wynika z analizy przeprowadzonej w poprzednim podrozdziale, $SO(3)$ jest rozmaitością o wymiarze 3z dość skomplikowaną topologią, która nie pozwala na globalne przedstawienie grupy obrotów jako przestrzeni \mathbb{R}^3 . Z tego powodu musimy zadowolić się opisem lokalnym. Wprowadzamy w tym celu dwa gładkie i wzajemnie jednoznaczne przekształcenia. Przekształcenie $\Phi : U \subset SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$, nazywamy układem współrzędnych na $SO(3)$; podobne przekształcenie $\Psi : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$ nazywa

Rysunek 2.4: Kierunek osi obrotu v

się parametryzacją. Zbiory U i V są otwarte i odnoszą się do lokalności obu przekształceń. Mając daną parametryzację Ψ , układ współrzędnych uzyskujemy jako $\Phi = \Psi^{-1} : U \rightarrow V$, podobnie definiujemy parametryzację $\Psi = \Phi^{-1} : V \rightarrow U$. Zauważmy, że wprowadzone w poprzednim podrozdziale przekształcenie (2.3)

$$\phi(R) = (v, \varphi)$$

jest lokalnym układem współrzędnych na $SO(3)$, a jego dziedzina U składa się z macierzy obrotu, dla których kąt obrotu jest mniejszy od π . Oznaczmy je symbolem $\Phi_1 = \phi|_U$. Odpowiadająca temu układowi współrzędnych parametryzacja jest następująca. Niech będzie dany obrót $R(v, \varphi)$ wokół osi $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ o kąt φ . Korzystając z obrotów elementarnych obrót ten możemy przedstawić jako ciąg obrotów

$$R(v, \varphi) = R(Z, \alpha)R(Y, \beta)R(Z, \varphi)R^T(Y, \beta)R^T(Z, \alpha),$$

gdzie kąty α i β wyznaczają kierunek osi obrotu, w sposób pokazany na Rysunku 2.4. Oznacza to, że $v_1 = \sin \beta \cos \alpha$, $v_2 = \sin \beta \sin \alpha$, $v_3 = \cos \beta$ (przypominamy, że długość wektora v , $\|v\| = 1$.) Podstawiając macierze obrotów elementarnych otrzymujemy parametryzację Ψ_1 grupy obrotów

$$\begin{aligned} \Psi_1(v, \varphi) &= \\ &= \begin{bmatrix} v_1^2(1 - c_\varphi) + c_\varphi & v_1v_2(1 - c_\varphi) - v_3s_\varphi & v_1v_3(1 - c_\varphi) + v_2s_\varphi \\ v_1v_2(1 - c_\varphi) + v_3s_\varphi & v_2^2(1 - c_\varphi) + c_\varphi & v_2v_3(1 - c_\varphi) - v_1s_\varphi \\ v_1v_3(1 - c_\varphi) - v_2s_\varphi & v_2v_3(1 - c_\varphi) + v_1s_\varphi & v_3^2(1 - c_\varphi) + c_\varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Druga z kolei parametryzacją będzie parametryzacja Cayleya. Niech będzie dany wektor $w = (w_1, w_2, w_3)^T \in \mathbb{R}^3$. Przypominamy, że $[\cdot]$ oznacza

izomorfizm między \mathbb{R}^3 z zbiorem skośnie symetrycznych macierzy 3×3 . Parametryzacja Cayleya jest to funkcja

$$\begin{aligned}\Psi_2(w) &= (I_3 - [w])^{-1} (I_3 + [w]) = \\ &= \frac{1}{1 + \|w\|^2} \begin{bmatrix} 1 + w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 & 2(w_1w_2 - w_3) & 2(w_1w_3 + w_2) \\ 2(w_1w_2 + w_3) & 1 + w_2^2 - w_1^2 - w_3^2 & 2(w_2w_3 - w_1) \\ 2(w_1w_3 - w_2) & 2(w_2w_3 + w_1) & 1 + w_3^2 - w_1^2 - w_2^2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Parametryzacja postaci

$$\Psi_3(w) = \exp [w] = I_3 + \frac{1}{\|w\|} [w] \sin \|w\| + \frac{1}{\|w\|^2} [w]^2 (1 - \cos \|w\|) \quad (2.7)$$

opiera się na formule Rodriguesa i może być nazwana parametryzacją Rodriguesa. Symbol $\exp M$ oznacza macierzową funkcję wykładniczą.

Z praktycznego punktu widzenia ważną rolę odgrywają dwie kolejne parametryzacje związane z nazwiskiem Eulera. Weźmy trzy kąty (φ, θ, ψ) . Parametryzacja ZYZ Eulera lub, krótko, parametryzacja Eulera, jest zdefiniowana jako

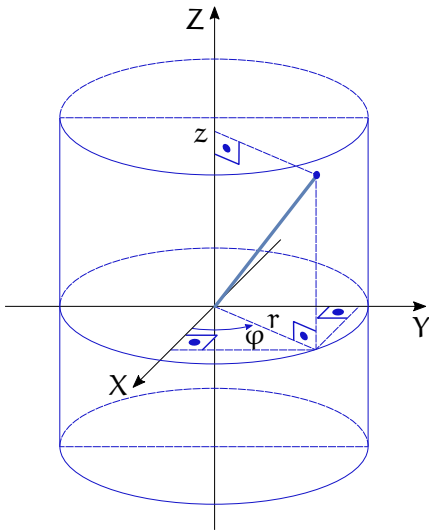
$$\begin{aligned}\Psi_4(\varphi, \theta, \psi) &= E(\varphi, \theta, \psi) = R(Z, \varphi)R(Y, \theta)R(Z, \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\varphi c_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta \\ -s_\theta c_\psi & s_\theta s_\psi & c_\theta \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Nietrudno zauważyć, że dla kąta $\theta = 0$ lub $\theta = \pi$ złożenie obrotów $\Psi_4(\varphi, \theta, \psi) = R(Z, \varphi \pm \psi)$, zatem parametryzacja Ψ_4 nie jest dobrze określona. Pokrewna do poprzedniej jest parametryzacja Eulera ZYX, nazywana także parametryzacją KKM (kołysanie, kiwanie, myszkowanie)*, określona w następujący sposób

$$\begin{aligned}\Psi_5(\varphi, \theta, \psi) &= \text{KKM}(\varphi, \theta, \psi) = R(Z, \varphi)R(Y, \theta)R(X, \psi) = \\ &= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\theta & c_\varphi s_\theta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\theta & s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\theta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Zauważmy, że ze względu na zachodzącą równość $R(Y, \pm \frac{\pi}{2})R(X, \psi) = R(Z, -\psi)R(Y, \pm \frac{\pi}{2})$ parametryzacja KKM spełnia warunek $\Psi_5(\varphi, \pm \frac{\pi}{2}, \psi) = R(Z, \varphi \mp \psi)R(Y, \pm \frac{\pi}{2})$, co oznacza że dla kątów $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ nie jest dobrze określona. Układy współrzędnych odpowiadające parametryzaczom $\Psi_2 - \Psi_5$ uzyskujemy biorąc funkcje odwrotne $\Phi_i = \Psi_i^{-1}$.

*W literaturze anglojęzycznej parametryzacja ta znana jest pod nazwą RPY (Roll-Pitch-Yaw).



Rysunek 2.5: Parametryzacja walcowa

Układy współrzędnych i parametryzacje przesunięć są znacznie prostsze niż dla obrotów. Przede wszystkim, ponieważ przesunięcie jest wektorem o trzech składowych, $T = (T_1, T_2, T_3)^T \in \mathbb{R}^3$, najbardziej oczywisty jest układ współrzędnych kartezjańskich

$$\Phi_6(T) = T = (T_1, T_2, T_3)^T. \quad (2.10)$$

Dwie następujące parametryzacje są często stosowane. Parametryzacja walcowa, zob. Rysunek 2.5,

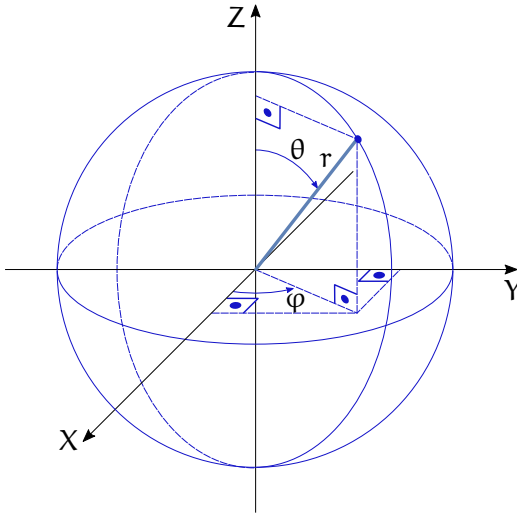
$$\Psi_7(r, z, \varphi) = (rc_\varphi, rs_\varphi, z), \quad (2.11)$$

jest dobrze określona dla $r \neq 0$ i definiuje układ współrzędnych walcowych $\Phi_7 = \Psi_7^{-1}$. Parametryzacja sferyczna, przedstawiona na Rysunku 2.6 i zadana wzorem

$$\Psi_8(r, \varphi, \theta) = (rs_\theta c_\varphi, rs_\theta s_\varphi, rc_\theta), \quad (2.12)$$

jest dobrze określona dla $r \neq 0$ i $s_\theta \neq 0$ i prowadzi do układu współrzędnych sferycznych $\Phi_8 = \Psi_8^{-1}$.

Kombinacje przedstawionych w tym podrozdziale układów współrzędnych i parametryzacji definiują układy współrzędnych i parametryzacje grupy SE(3) ruchów ciała sztywnego, Φ_{ij} i Ψ_{ij} , gdzie $i = 1, 2, \dots, 5$, a $j = 6, 7, 8$.



Rysunek 2.6: Parametryzacja sferyczna

2.4. Zadania

Zadanie 2.1 Zbadać, czy podane macierze są macierzami obrotu

$$R_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad R_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{7}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.2 Dla macierzy $R = R(X, \frac{\pi}{2}) R(Y, \frac{\pi}{2})$ wyznaczyć oś i kąt obrotu oraz reprezentację kwaternionową.

Zadanie 2.3 Dla macierzy $R = E(\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4})$ wyznaczyć oś i kąt obrotu, reprezentację kwaternionową, a także kąty KKM.

Zadanie 2.4 Wyznaczyć macierz obrotu odpowiadającą obrotowi wokół osi $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ o kąt $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Zadanie 2.5 Dla macierzy obrotu

$$R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

wyznaczyć kąty Eulera i kąty KKM.

Zadanie 2.6 Korzystając z parametryzacji Eulera (2.8) i KKM (2.9) oraz z definicji prędkości kątowej w przestrzeni

$$[\omega_S] = \dot{R}R^T$$

udowodnić następujące związki między prędkością kątową w przestrzeni a prędkościami zmiany kątów Eulera i kątów KKM:

$$\omega_{SE} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ 1 & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix},$$

$$\omega_{SKKM} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2.7 Pokazać, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}^3$ macierz

$$R = (I_3 - [a])^{-1} (I_3 + [a])$$

jest macierzą obrotu.

2.5. Komentarze i odniesienia literaturowe

Zagadnienia parametryzacji specjalnej grup SO(3) i SE(3) zostały poruszone w monografiach [TMD⁺00] i [KDW03]. W języku angielskim materiał ten został obszernie potraktowany w rozdziałach 2-4 książki [Jaz07], tamże podrozdział 3.4 traktuje na temat kwaternionów.

Literatura

- [Jaz07] R. N. Jazar. *Theory of Applied Robotics*. Springer, New York, 2007.
- [KDW03] K. Kozłowski, P. Dutkiewicz, W. Wróblewski. *Modelowanie i sterowanie robotów*. PWN, Warszawa, 2003.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński. *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 3

Kinematyka manipulatora sztywnego: Algorytm Denavita-Hartenberga

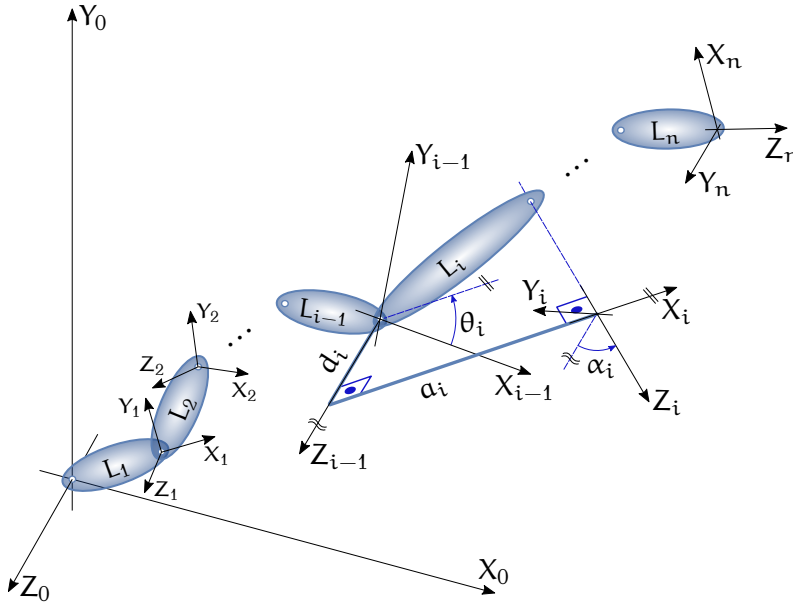
3.1. Podstawowe pojęcia

Manipulator sztywny definiujemy jako układ złożony z pewnej liczby ciał sztywnych (ramion, ogniów) połączonych przegubami. Przyjmujemy, że przeguby są typu obrotowego lub typu przesuwne; bardziej złożone przeguby można traktować jako kombinację tych dwóch typów. Ramiona manipulatora tworzą tzw. łańcuch kinematyczny. Początkiem łańcucha jest nieruchoma podstawa, a końcem – efektor manipulatora. Będziemy zakładać, że łańcuch kinematyczny jest otwarty, tzn. efektor nie pokrywa się z podstawą manipulatora. Taki manipulator nazywamy szeregowym. Liczbę przegubów manipulatora nazywamy jego liczbą stopni swobody. Schematyczny widok manipulatora szeregowego przedstawia Rysunek 3.1. Na Rysunku symbole L_1, L_2, \dots, L_n oznaczają kolejne ogniwa manipulatora.

Niech będzie dany manipulator szeregowy o n stopniach swobody. Oznaczmy przez $q \in Q \subset \mathbb{R}^n$ wektor położeń przegubów, gdzie Q nazywamy przestrzenią przegubową manipulatora. W przypadku, gdy ruch w przegubach jest nieograniczony, a manipulator ma k przegubów obrotowych i $n-k$ przesuwnych, przestrzeń przegubowa $Q \cong \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, gdzie \mathbb{T}^k oznacza k -wymiarowy torus. Jeżeli zakres ruchu w przegubach jest ograniczony, przestrzeń przegubowa $Q \cong [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, gdzie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ oznaczają granice ruchu przegubów. Dla ułatwienia analizy w dalszym ciągu będziemy przyjmować, że przestrzeń przegubowa $Q \cong \mathbb{R}^n$.

W celu zdefiniowania kinematyki manipulatora wybieramy nieruchomy układ współrzędnych związany z jego podstawą (układ przestrzeni, układ podstawowy) i drugi układ związany z efektem (układ ciała, układ efektora). Kinematykę manipulatora definiujemy jako przekształcenie

$$K : Q \longrightarrow SE(3) \quad (3.1)$$



Rysunek 3.1: Sztywny manipulator szeregowy

przestrzeni przegubowej w grupę ruchów ciała sztywnego, którą nazywamy przestrzenią zadaniową. Dla każdego położenia przegubów zwanego konfiguracją manipulatora kinematyka manipulatora wyznacza położenie i orientację układu efektora względem układu podstawowego. Sformalizowany sposób wyznaczania kinematyki manipulatora przedstawimy w następnym podrozdziale.

3.2. Algorytm Denavita-Hartenberga

Następujące postępowanie, zwane algorytmem Denavita-Hartenberga, pozwala na wyznaczenie kinematyki szeregowego manipulatora sztywnego. Zakładamy, że wybraliśmy układ podstawowy (X_0, Y_0, Z_0) w taki sposób, żeby ruch w pierwszym przegubie (obrót, przesunięcie) zachodził względem osi Z_0 . W efekcie przeprowadzenia opisaney poniżej procedury z przegubem manipulatora o numerze i zostanie związany układ współrzędnych $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$ w taki sposób, że ruch w tym przegubie (obrót, przesunięcie) będzie zachodził względem osi Z_{i-1} .

1. Mając dany układ $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$ definiujemy układ (X_i, Y_i, Z_i) w następujący sposób:

- przyjmujemy oś Z_i tak, by ruch w $i+1$ przegubie zachodził względem niej*,
 - prowadzimy normalną do osi Z_{i-1} i Z_i ,
 - początek układu (X_i, Y_i, Z_i) umieszczamy na przecięciu normalnej z osią Z_i ,
 - oś X_i prowadzimy wzdłuż normalnej, oś Y_i spełnia warunek $X_i \times Y_i = Z_i$.
 - Przypadki szczególne:
 - jeżeli kolejne osie Z są równoległe, $Z_{i-1} \parallel Z_i$ (nieskończenie wiele normalnych), to wybieramy normalną przechodzącą przez początek układu $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$,
 - jeżeli $Z_{i-1} = Z_i$ (ponownie nieskończenie wiele normalnych), to postępujemy zgodnie ze „zdrowym rozsądkiem”.
2. Wyznaczamy przekształcenia $A_{i-1}^i(q_i)$ układów

$$(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1}) \mapsto (X_i, Y_i, Z_i),$$

tak że

$$A_{i-1}^i(q_i) = \text{Rot}(Z, q_i) \text{Trans}(Z, d_i) \text{Trans}(X, a_i) \text{Rot}(X, \alpha_i) \quad (3.2)$$

w przypadku przegubu obrotowego i

$$A_{i-1}^i(q_i) = \text{Trans}(Z, \theta_i) \text{Trans}(Z, q_i) \text{Trans}(X, a_i) \text{Rot}(X, \alpha_i) \quad (3.3)$$

dla przegubu przesuwne. Symbol q_i oznacza zmienną przegubową (obrót dla przegubu obrotowego i przesunięcie dla przegubu przesuwne). Pozostałe parametry ($a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$) określają geometrię ramienia. Sposób definiowania parametrów tych przekształceń wyjaśnia Rysunek 3.1.

3. Kładziemy

$$K(q) = A_0^1(q_1) A_1^2(q_2) \dots A_{n-1}^n(q_n). \quad (3.4)$$

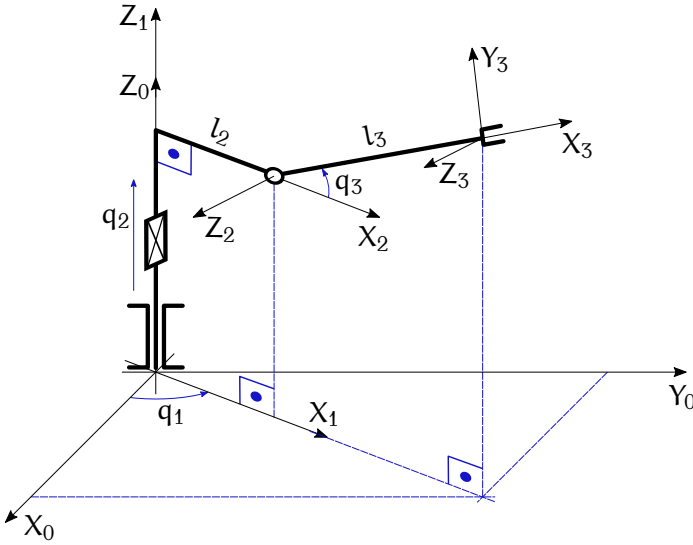
3.3. Przykłady

W tym podrozdziale zilustrujemy opisany powyżej algorytm dwoma przykładami.

3.3.1. Manipulator RTR

Niech będzie dany manipulator RTR o trzech przegubach: obrotowym, przesuwym i obrotowym, przedstawiony na Rysunku 3.2. Układy

*Dla ostatniego ogniwa położenie osi Z_n jest dowolne.



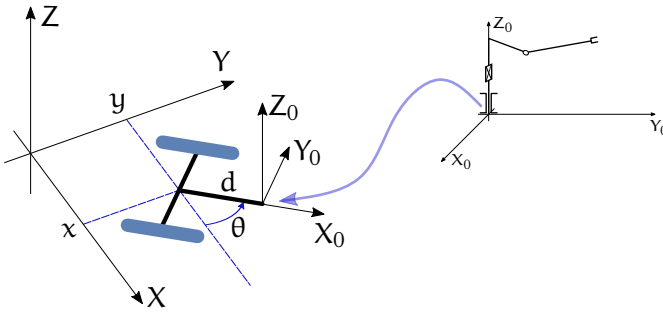
Rysunek 3.2: Manipulator typu RTR

współrzędnych umieszczamy zgodnie z algorytmem. Ponieważ osie Z_0 i Z_1 pokrywają się, oś X_1 prowadzimy wzdłuż rzutu poziomej części ramienia numer 2 na płaszczyznę (X_0, Y_0) . Os X_2 biegnie wzdłuż normalnej do osi Z_1 i Z_2 , natomiast układ współrzędnych efektora umieściliśmy równoległe do układu (X_2, Y_2, Z_3) , z osią X biegnącą wzdłuż ramienia numer 3. Współrzędne przegubowe $q = (q_1, q_2, q_3)^T \in \mathbb{R}^3$ oznaczają kolejno: obrót, przesunięcie i obrót. Przy oznaczeniach zastosowanych na Rysunku obliczamy przekształcenia

$$A_0^1(q_1) = \text{Rot}(Z, q_1),$$

$$A_1^2(q_2) = \text{Trans}(Z, q_2) \text{Trans}(X, l_2) \text{Rot}(X, \frac{\pi}{2}),$$

$$A_2^3(q_3) = \text{Rot}(Z, q_3) \text{Trans}(X, l_3).$$



Rysunek 3.3: Manipulator mobilny

Po podstawieniu wyrażeń na elementarne obroty i przesunięcia otrzymujemy

$$A_0^1(q_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1^2(q_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2^3(q_3) = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_3 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $s_i = \sin q_i$, $c_j = \cos q_j$. Kinematykę manipulatora RTR

$$K(q) = A_0^1(q_1)A_1^2(q_2)A_2^3(q_3) = \begin{bmatrix} c_1 c_3 & -c_1 s_3 & s_1 & (l_2 + l_3 c_3)c_1 \\ s_1 c_3 & -s_1 s_3 & -c_1 & (l_2 + l_3 c_3)s_1 \\ s_3 & c_3 & 0 & q_2 + l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

3.3.2. Manipulator mobilny

Zajmiemy się teraz manipulatorem mobilnym przedstawionym na Rysunku 3.3. Manipulator mobilny składa się z dwukołowego wózka, który porusza się na płaszczyźnie (X, Y) , i manipulatora pokładowego RTR omówionego w poprzednim podrozdziale. Manipulator został zamontowany w odległości d od środka tylnej osi wózka. Położenie i orientację wózka opisujemy za pomocą współrzędnych (x, y) środka tylnej osi i kąta θ między osią X układu przestrzeni a osią X_0 układu manipulatora pokładowego. Wyboru tych układów dokonaliśmy kierując się względami prostoty uzyskanego przekształcenia; algorytm Denavit-Hartenberga nie

znalazł tu zastosowania. W efekcie, konfigurację manipulatora mobilnego charakteryzuje wektor $q = (x, y, \theta, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^6$. Na podstawie Rysunku wyznaczamy przekształcenie układu (X, Y, Z) w układ (X_0, Y_0, Z_0)

$$K_0(x, y, \theta) = \text{Trans}(X, x) \text{Trans}(Y, y) \text{Rot}(Z, \theta) \text{Trans}(X, d) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & x + dc_\theta \\ s_\theta & c_\theta & 0 & y + ds_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kinematyka manipulatora mobilnego jest złożeniem K_0 i kinematyki (3.5) manipulatora pokładowego

$$K_{MM}(q) = K_0(x, y, \theta) K(q_1, q_2, q_3) =$$

$$= \begin{bmatrix} c_3 c_{1+\theta} & -s_3 c_{1+\theta} & s_{1+\theta} & x + dc_\theta + (l_2 + l_3) c_{1+\theta} \\ c_3 s_{1+\theta} & -s_3 s_{1+\theta} & -c_{1+\theta} & y + ds_\theta + (l_2 + l_3) s_{1+\theta} \\ s_3 & c_3 & 0 & q_2 + l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

W powyższym wzorze $s_{i+\theta} = \sin(q_i + \theta)$ i $c_{j+\theta} = \cos(q_j + \theta)$.

3.4. Kinematyka we współrzędnych

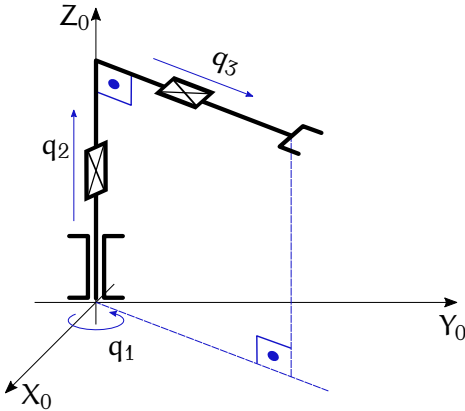
Kinematyka manipulatora (3.1) jest przekształceniem przestrzeni przegubowej w przestrzeń zadaniową. W celach obliczeniowych wykorzystujemy kinematykę wyrażoną we współrzędnych. Dla przestrzeni przegubowej jako współrzędnych używamy położenia przegubów, natomiast dla przestrzeni zadaniowej jednego z układów współrzędnych wprowadzonych w rozdziale 2. Ilustruje to następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \xrightarrow{K} & SE(3) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Psi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{k} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad (3.7)$$

Wynika z niego, że reprezentacja kinematyki we współrzędnych $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ spełnia warunek

$$k = \Psi \circ K \circ \Phi^{-1}. \quad (3.8)$$

Ponieważ układ współrzędnych w przestrzeni przegubowej jest często tożsamościowy, $\Phi(q) = q$, nie będziemy rozróżniać elementów przestrzeni przegubowej od ich reprezentacji we współrzędnych i w obu



Rysunek 3.4: Manipulator 1R2T

przypadkach będziemy używać tego samego oznaczenia $q \in \mathbb{R}^n$. Jak już napomknęliśmy, w roli Ψ występuje jeden z układów współrzędnych w przestrzeni $SE(3)$, na przykład z tych zaprezentowanych w rozdziale 2. Przy $y \in \mathbb{R}^m$ otrzymujemy wówczas równanie kinematyki we współrzędnych postaci $y = k(q) = \Psi(K(q))$.

3.5. Przykład

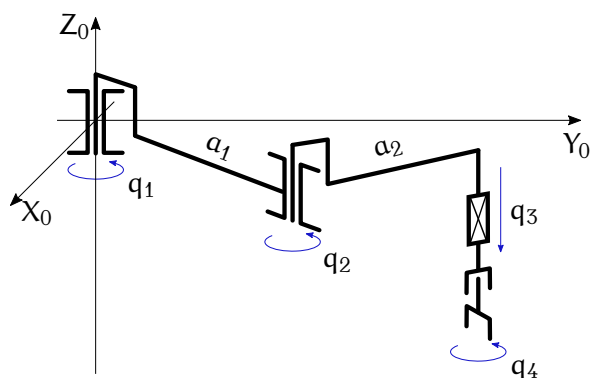
Dla ilustracji wyznaczmy kinematykę manipulatora typu RTR we współrzędnych (kartezjańskie, KKM). Współrzędne kartezjańskie otrzymujemy bezpośrednio z macierzy (3.5). W celu wyznaczenia kątów KKM nakładamy macierz (2.9) na część rotacyjną kinematyki (3.5) i obliczamy $\varphi = q_1$, $\theta = -q_3$ i $\psi = \frac{\pi}{2}$. Kinematyka manipulatora RTR wyrażona w wybranych współrzędnych ma zatem postać

$$k(q) = \left((l_2 + l_3 c_3) c_1, (l_2 + l_3 c_3) s_1, q_2 + l_3 s_3, q_1, -q_3, \frac{\pi}{2} \right)^T. \quad (3.9)$$

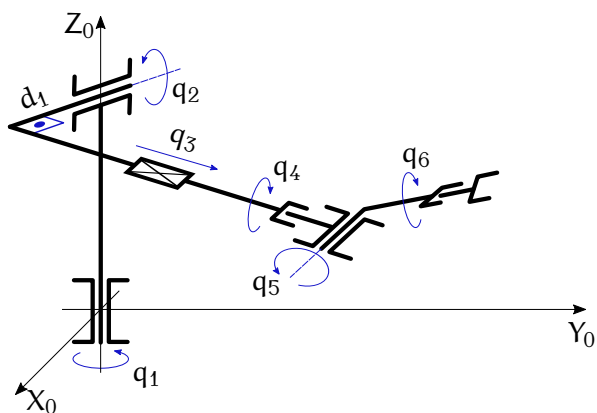
3.6. Zadania

Zadanie 3.1 Korzystając z algorytmu Denavita-Hartenberga wyznaczyć kinematykę manipulatorów 1R2T i SCARA przedstawionych na rysunkach 3.4 i 3.5. Przedstawić obie kinematyki we współrzędnych kartezjańskich + KKM.

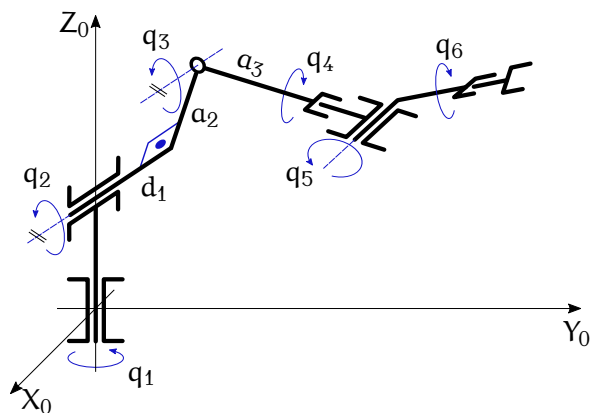
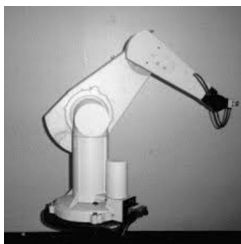
Zadanie 3.2 Wyznaczyć kinematykę manipulatora stanfordzkiego i manipulatora PUMA przedstawionych na rysunkach 3.6 i 3.7.



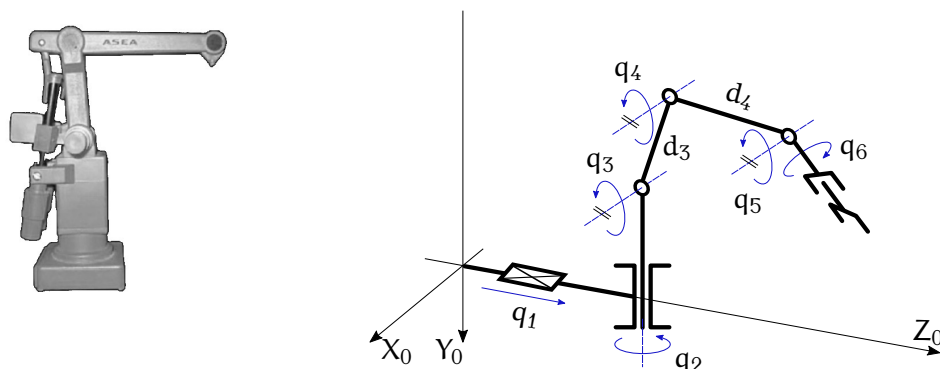
Rysunek 3.5: Manipulator typu SCARA



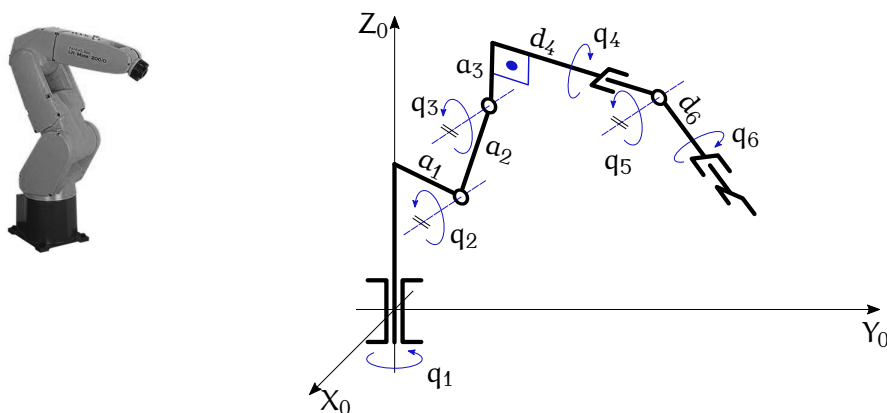
Rysunek 3.6: Manipulator stanfordzki



Rysunek 3.7: Manipulatory typu PUMA



Rysunek 3.8: Manipulator IRb6 i schemat jego kinematyki po zamocowaniu na torze jezdny



Rysunek 3.9: Manipulator FANUC typu LR Mate

Zadanie 3.3 Korzystając z algorytmu Denavita-Hartenberga wyznaczyć kinematykę manipulatora IRb6 na torze jezdny i manipulatora FANUC przedstawionych na rysunkach 3.8 i 3.9.

3.7. Komentarze i odniesienia literaturowe

Algorytm Denavita-Hartenberga należy do najbardziej klasycznych narzędzi robotyki. Można o nim przeczytać w pracach [TMD⁺00, KDW03, SV97].

Literatura

- [KDW03] K. Kozłowski, P. Dutkiewicz, W. Wróblewski, *Modelowanie i sterowanie robotów*. PWN, Warszawa, 2003.
- [SV97] M. Spong, M. Vidyasagar, *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 4

Jakobian analityczny. Konfiguracje regularne i osobliwe

Niech będzie dana kinematyka manipulatora we współrzędnych w postaci $y = k(q)$. Załóżmy, że przeguby manipulatora poruszają się po pewnej trajektorii przegubowej $q(t)$. Odpowiadająca temu trajektoria efektora

$$y(t) = k(q(t)).$$

Jeżeli prędkość ruchu przegubów wynosi \dot{q} a prędkość ruchu efektora \dot{y} , to zależność między tymi prędkościami jest opisana wzorem

$$\dot{y} = Dk(q)\dot{q} = J(q)\dot{q}, \quad (4.1)$$

gdzie symbolem D oznaczyliśmy pochodną (macierz Jacobiego) kinematyki k , tzn. $Dk = \frac{\partial k}{\partial q}$. Pochodna ta nazywa się jakobianem analitycznym $J(q)$ manipulatora. Jakobian analityczny jest zatem macierzą prostokątną o wymiarze $m \times n$. Termin „jakobian analityczny” wprowadzamy dla odróżnienia tego jakobianu od jakobianu geometrycznego, który zostanie wprowadzony później. Jak długo nie ma obawy nieporozumień, przymiotnik „analityczny” będziemy opuszczać. W zadanej konfiguracji q manipulatora jakobian jest przekształceniem prędkości przegubowej w prędkość zadaniową. Pojęciem dualnym do prędkości jest siła (moment siły), a iloczyn skalarny siły i prędkości daje moc. Transformację prędkości i sił ilustruje następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} v \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{J(q)} & \mathbb{R}^m \ni w \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau \in \mathbb{R}^n & \xleftarrow{J^T(q)} & \mathbb{R}^m \ni f \end{array} \quad (4.2)$$

W diagramie v , w oznaczają prędkość przegubową i zadaniową, natomiast τ , f siły wywierane w przestrzeni przegubowej i zadaniowej. Mając $w = J(q)v$ zakładamy, że moc $(\tau, v) = \tau^T v$ w przestrzeni przegubowej jest równa mocy $(f, w) = f^T w$ w przestrzeni zadaniowej, tzn.

$$\tau^T v = f^T w = f^T J(q)v.$$

Wynika stąd, że przekształcenie sił z przestrzeni zadaniowej do przegubowej jest zdefiniowane przez jacobian transponowany,

$$\tau = J^T(q)f. \quad (4.3)$$

W zależności od własności jacobianu rozróżniamy dwa rodzaje konfiguracji manipulatora. Konfigurację $q \in \mathbb{R}^n$ nazywamy regularną, jeżeli

$$\text{rank } J(q) = m,$$

w przeciwnym przypadku konfigurację tę nazywamy osobliwą. Na mocy tej definicji w konfiguracji regularnej efektor manipulatora ma dość swobody, żeby poruszać się we wszystkich kierunkach w przestrzeni zadaniowej. W konfiguracji osobliwej, ta swoboda jest ograniczona i niektóre kierunki ruchu nie są możliwe, a zatem ruch efektora jest upośledzony. Wielkość tego upośledzenia można mierzyć corankiem jacobianu rozumianym jako

$$\text{corank } J(q) = m - \text{rank } J(q).$$

Zauważmy, że zawsze $\text{rank } J(q) \leq \min\{m, n\}$, a zatem, gdy $n < m$, wszystkie konfiguracje manipulatora są osobliwe. Dla manipulatorów nieredundantnych spełniających warunek $m = n$ konfiguracje osobliwe spełniają warunek

$$\det J(q) = 0.$$

Dla manipulatorów redundantnych, przy $n > m$, wszystkie podmacierze wymiaru $m \times m$ jacobianu muszą mieć wyznacznik równy 0.

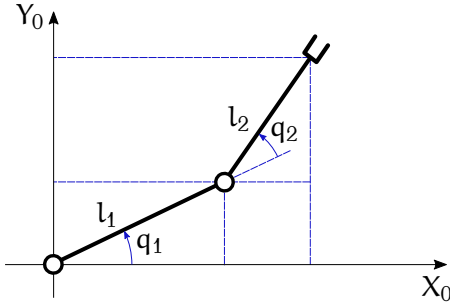
Zatrzymajmy się na przypadku $m = n$. W konfiguracji osobliwej istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^n$, któremu odpowiada wartość własna 0, czyli taki że

$$J(q)v = 0.$$

Wynika stąd, że ruch przegubów w kierunku v nie powoduje żadnego ruchu efektora. Z zależności (4.3) wynika, że w konfiguracji osobliwej q istnieje siła f działająca na efektor, której zrównoważenie nie wymaga zastosowania jakiegokolwiek siły w przegubach,

$$\tau = J(q)^T f = 0.$$

Można uznać, że konfiguracja osobliwa jest niekorzystna z punktu widzenia możliwości ruchowych manipulatora, ale przynosi korzyści w sytuacji statycznej. Wykorzystują je sportowcy: ciężarowcy i łucznicy.



Rysunek 4.1: Manipulator typu 2R

4.1. Przykłady

4.1.1. Manipulator typu 2R

Zajmiemy się teraz analizą płaskiego manipulatora o dwóch obrotowych stopniach swobody, przedstawionego na Rysunku 4.1. Przestrzeń przegubowa manipulatora utożsamimy z \mathbb{R}^2 ; przestrzeń zadaniowa obejmuje położenia efektora na płaszczyźnie, jest to więc także przestrzeń \mathbb{R}^2 . Kinematyka we współrzędnych, $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, przyjmuje postać

$$k(q) = (y_1, y_2)^T = (l_1 c_1 + l_2 c_{12}, l_1 s_1 + l_2 s_{12})^T, \quad (4.4)$$

gdzie $s_{ij} = \sin(q_i + q_j)$ i $c_{ij} = \cos(q_i + q_j)$.

Jakobian

$$J(q) = Dk(q) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}.$$

Konfiguracje osobliwe spełniają równanie

$$\det J(q) = l_1 l_2 s_2 = 0,$$

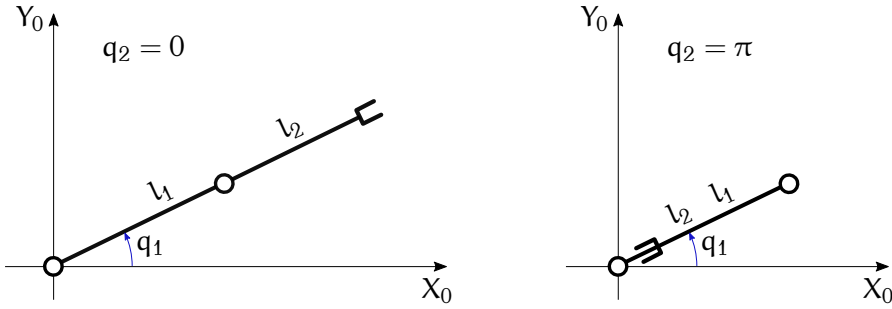
skąd wynika, że zbiór konfiguracji osobliwych

$$S = \left\{ (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q_1 \text{ dowolne, } q_2 = 0, \pi \right\}.$$

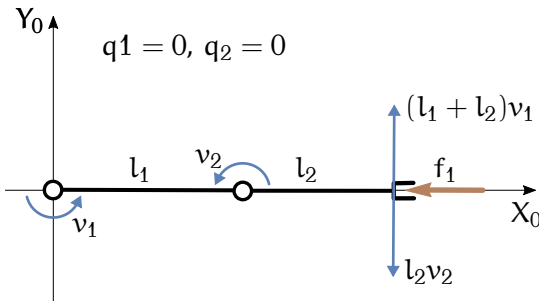
Konfiguracje osobliwe manipulatora typu 2R przedstawia Rysunek 4.2. Jak widać, w konfiguracjach osobliwych położenie przegubu 1 jest dowolne, a ramiona manipulatora leżą w jednej linii: albo wyprostowane, albo zgięte.

Wyberzmy konfigurację $(0, 0)$. Mamy jakobian

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix},$$



Rysunek 4.2: Konfiguracje osobliwe



Rysunek 4.3: Konfiguracje osobliwe – analiza prędkości i sił

zatem równanie

$$J(0,0)v = 0$$

ma rozwiązanie

$$v_2 \text{ dowolne, } v_1 = -\frac{l_2}{l_1 + l_2}v_2.$$

Rysunek 4.3 pokazuje, że przy ruchu w kierunku wektora v ruchy przegubów 1 i 2 kompensują się nie powodując ruchu efektora.

Weźmy teraz konfigurację osobliwą $(0, \pi)$. Jakobian

$$J(0, \pi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 - l_2 & -l_2 \end{bmatrix},$$

a wektor v z jądra jakobianu ma postać

$$v_2 \text{ dowolne, } v_1 = \frac{l_2}{l_1 - l_2}v_2.$$

Podobnie, jak w poprzedniej konfiguracji osobliwej, ruchy przegubów nie powodują zmiany położenia efektora.

Analiza sił przedstawia się następująco. W konfiguracji $(0,0)$ równanie

$$J^T(0,0)f = 0$$

ma rozwiązanie f_1 – dowolne, $f_2 = 0$. Wynika stąd, że dowolna siłą wywierana na efektor wzdłuż osi X (zob. Rysunek 4.3) nie wymaga przeciwdziałania w przegubach. Nietrudno sprawdzić, że w konfiguracji $(0, \pi)$ wynik jest taki sam.

W uproszczeniu, manipulator typu 2R jest modelem ręki i nogi człowieka. Obie znalezione konfiguracje osobliwe wykorzystuje się w technice podnoszenia ciężarów: ciężar przenosi się między konfiguracjami osobliwymi rąk i nóg ciężarowca (ręce i nogi wyprostowane, ręce wyprostowane i nogi zgięte, ręce i nogi zgięte, ręce zgięte i nogi wyprostowane, ręce i nogi wyprostowane). Podobnie postępuje łucznik przy napinaniu łuku przed wypuszczeniem strzały: jego jedna ręka jest wyprostowana, a druga zgięta.

4.1.2. Manipulator RTR

Kinematyka (3.5) manipulatora typu RTR może być wyrażona we współrzędnych KKM ($\Phi_5 = \Psi_5^{-1}$, zob. (2.9)) i współrzędnych kartezjańskich Φ_6 , co daje $k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$, przy czym

$$k(q) = \left(q_1, -q_3, \frac{\pi}{2}, (l_2 + l_3 c_3) c_1, (l_2 + l_3 c_3) s_1, q_2 + l_3 s_3 \right).$$

Oczywiście, przy takiej reprezentacji wszystkie konfiguracje manipulatora będą osobliwe. Jeżeli jednak ograniczymy przestrzeń zadaniową tego manipulatora wyłącznie do położeń efektora, pozostanie kinematyka we współrzędnych kartezjańskich

$$k(q) = ((l_2 + l_3 c_3) c_1, (l_2 + l_3 c_3) s_1, q_2 + l_3 s_3).$$

Obliczamy jacobian

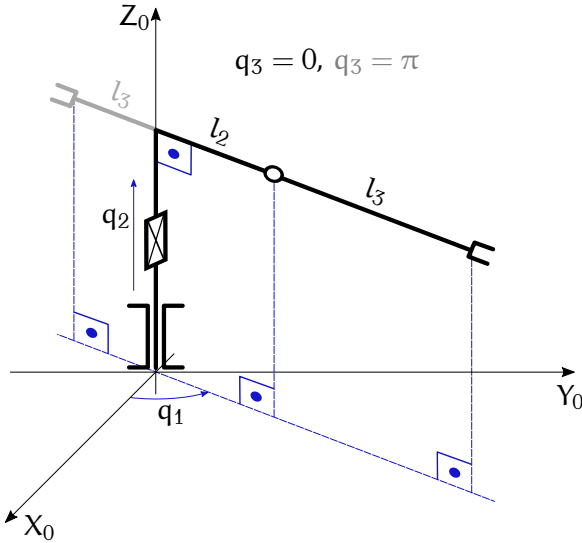
$$J(q) = Dk(q) = \begin{bmatrix} -(l_2 + l_3 c_3) s_1 & 0 & -l_3 s_3 c_1 \\ (l_2 + l_3 c_3) c_1 & 0 & -l_3 s_3 s_1 \\ 0 & 1 & l_3 c_3 \end{bmatrix}$$

Konfiguracje osobliwe spełniają zależność

$$\det J(q) = -(l_2 + l_3 c_3) l_3 s_3 = 0,$$

a zatem zbiór konfiguracji osobliwych

$$S = \left\{ (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3 \mid q_1, q_2 \text{ dowolne, } q_3 = 0, \pi \text{ lub } \arccos\left(-\frac{l_2}{l_3}\right) \right\}.$$

Rysunek 4.4: Konfiguracje osobliwe $q_3 = 0, q_3 = \pi$

Ułożenie ramion manipulatora w obydwu konfiguracjach osobliwych $(q_1, q_2, 0)$ i (q_1, q_2, π) przedstawia Rysunek 4.4. Te konfiguracje przypominają znane konfiguracje osobliwe manipulatora typu 2R. Zauważmy, że trzeci typ konfiguracji osobliwej, odpowiadający kątowi $q_3^* = \arccos\left(-\frac{l_2}{l_3}\right)$, pojawia się tylko wtedy, gdy długości ramion manipulatora spełniają warunek $l_2 \leq l_3$. Oznacza to, że konfigurację tę można wyeliminować przez odpowiednią konstrukcję manipulatora, taką że $l_2 > l_3$. W przypadku, gdy ta konfiguracja występuje, układ ramion manipulatora przedstawia Rysunek 4.5. W konfiguracji typu 3 efektor znajduje się na osi obrotu kolumny manipulatora.

W konfiguracji $(0, 0, 0)$ równanie

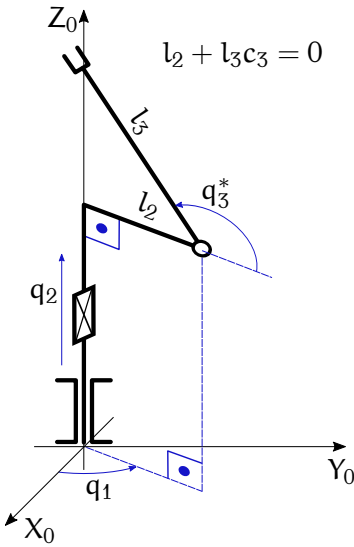
$$J(0, 0, 0)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_2 + l_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_3 \end{bmatrix} v = 0$$

daje rozwiązanie $v_1 = 0$, v_3 – dowolne i $v_2 = -l_3 v_3$. W konfiguracji $(0, 0, q_3^*)$ mamy

$$J(0, 0, q_3^*)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \star \\ 0 & 1 & \star \end{bmatrix} v = 0$$

gdzie znak \star oznacza elementy różne od zera, wyliczamy v_1 – dowolne, $v_2 = v_3 = 0$. Dla sił mamy

$$J^T(0, 0, 0)f = 0 \implies f_1 \text{ dowolne, } f_2 = f_3 = 0$$



Rysunek 4.5: Konfiguracja osobliwa $q_3^* = \arccos\left(-\frac{l_2}{l_3}\right)$

oraz

$$J^T(0, 0, q_3^*)f = 0 \implies f_2 \text{ dowolne, } f_1 = f_3 = 0.$$

Geometryczną interpretację tych wyników pozostawiamy czytelnikowi.

4.2. Przestrzeń ruchu własnego

Założmy, że $k(q)$ oznacza kinematykę manipulatora redundantnego, a więc $n > m$. Dla zadanego punktu p w przestrzeni zadaniowej rozważmy układ równań

$$k(q) = p.$$

Układ ten przedstawia m równań o n niewiadomych, a jego rozwiązaniami

$$M_p = k^{-1}(p) = \{q \in \mathbb{R}^n \mid k(q) = p\}, \quad (4.5)$$

są wszystkie położenia przegubów (konfiguracje) manipulatora, dla których położenie i orientacja efektora jest ta sama i wynosi p . Zbiór M_p nazywamy przestrzenią ruchu własnego manipulatora, bowiem zawiera ona wszelkie konfiguracje, przy których ruchy przegubów nie wpływają na efektor. Przestrzeń ruchu własnego może być wykorzystana do rekonfiguracji przegubów manipulatora bez zmiany położenia i orientacji efektora. Jeżeli M_p składa się z konfiguracji regularnych (a więc równania opisujące przestrzeń ruchu własnego są niezależne), przestrzeń

M_p staje się rozmaiłością wymiaru $n - m$. Przestrzeń styczna w punkcie $q \in M_p$ do tej rozmaiłości wyraża się wzorem $T_q M_p = \ker J(q)$. Rozmaiłości ruchu własnego definiują foliację podprzestrzeni przegubowej złożonej z konfiguracji regularnych.

4.3. Zadania

Zadanie 4.1 Wyznaczyć jakobian analityczny dla manipulatorów 1R2T i SCARA badanych w Zadaniu 3.1.

Zadanie 4.2 Wyznaczyć konfiguracje osobliwe dla kinematyki ograniczonej do współrzędnych kartezjańskich manipulatorów 1R2T i SCARA.

4.4. Komentarze i odniesienia literaturowe

Pojęcie jakobianu analitycznego jest klasyczne; można się z nim zapoznać, na przykład, w pracach [TMD⁺00] i [SV97]. Konfiguracje osobliwe manipulatorów omawiamy szczegółowo w monografii [TMD⁺00].

Literatura

- [SV97] M. Spong, M. Vidyasagar, *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 5

Odwrotne zadanie kinematyki

Zakładamy, że dana jest kinematyka

$$y = k(q)$$

o n stopniach swobody, z m -wymiarową przestrzenią zadaniową. Niech $J(q)$ oznacza jakobian. Wyznaczenie kinematyki, do której w rozdziale 3 posłużyliśmy się algorytmem Denavita-Hartenberga, bywa nazywane prostym (w przeciwstawieniu do zadania badanego w niniejszym rozdziale) lub bezpośrednim zadaniem kinematyki. Zadanie proste polega na wyznaczeniu położenia i orientacji efektora odpowiadających zadanemu położeniu (konfiguracji) przegubów. Jeżeli manipulator ma wykonywać pewne operacje w przestrzeni zadaniowej, ważną rolę odgrywa odwrotne zadanie kinematyki, które polega na wyznaczeniu położenia przegubów, zapewniającego uzyskanie zadanego położenia i orientacji efektora. Z matematycznego punktu widzenia zadanie odwrotne polega na rozwiązaniu układu m nieliniowych równań postaci $y_d = k(q)$ o n niewiadomych, tzn.

$$\begin{cases} y_{d1} = k_1(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ y_{d2} = k_2(q_1, q_2, \dots, q_n) \\ \vdots \\ y_{dm} = k_m(q_1, q_2, \dots, q_n) \end{cases}.$$

Mając ten układ równań, w typowym przypadku możemy oczekiwać następujących sytuacji:

1. Jeżeli $m > n$ – brak rozwiązania.
2. Jeżeli $m = n$ – skończona liczba rozwiązań.
3. Jeżeli $m < n$ – nieskończenie wiele rozwiązań.

Ze względu na postać równań kinematyki odwrotnej, tylko w wyjątkowych przypadkach udaje się znaleźć ich rozwiązanie analityczne, wyrażone wzorem. Do rozwiązywania odwrotnego zadania kinematyki stosujemy znane metody rozwiązywania układów równań nieliniowych. Można wśród nich wyróżnić metody analityczno-geometryczne i metody numeryczne.

5.1. Rozwiązanie analityczno-geometryczne

Możliwość analitycznego rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki opisuje następujące Twierdzenie.

Twierdzenie 5.1.1 *Nieredundantny manipulator typu 6R, w którym osie obrotu trzech kolejnych przegubów przecinają się w jednym punkcie lub są równoległe ma analityczne rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki.*

Metodę analityczną i geometryczną zilustrujemy na prostym przykładzie.

5.1.1. Manipulator 2R

Kinematyka manipulatora typu 2R przedstawionego na Rysunku 4.1 wyrażona we współrzędnych kartezjańskich ma postać (4.4). Niech $y_d = (y_{d1}, y_{d2})^T$ oznacza zadane położenie efektora. Odwrotne zadanie kinematyki sprowadza się do rozwiązania za względu na $q = (q_1, q_2)^T$ układu dwóch równań

$$\begin{cases} y_{d1} = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ y_{d2} = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \end{cases}.$$

Zaczynamy od obliczenia

$$y_{d1}^2 + y_{d2}^2 = l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2,$$

skąd otrzymujemy

$$c_2 = \cos q_2 = \frac{y_{d1}^2 + y_{d2}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2},$$

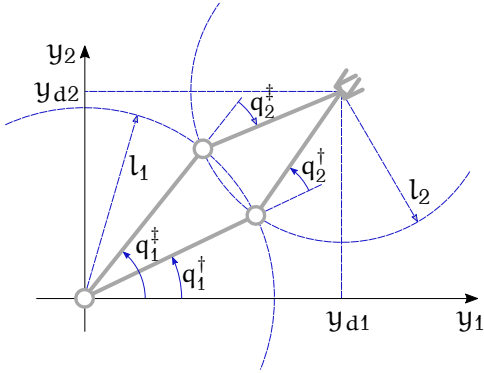
a następnie $s_2 = \sin q_2$. W następnym kroku obliczamy

$$y_{d1}(l_1 + l_2 c_2) + y_{d2} l_2 s_2 = (y_{d1}^2 + y_{d2}^2) c_1,$$

zatem

$$c_1 = \cos q_1 = \frac{y_{d1}(l_1 + l_2 c_2) + y_{d2} l_2 s_2}{y_{d1}^2 + y_{d2}^2}.$$

Rozwiązanie tego zadania można także uzyskać w sposób geometryczny, jak pokazuje Rysunek 5.1. Przy okazji zauważamy, że zadanie odwrotne może mieć dwa rozwiązania.



Rysunek 5.1: Zadanie odwrotne – rozwiązanie geometryczne

5.2. Rozwiązanie numeryczne: metody jacobianowe

Rozważmy manipulator o n stopniach swobody, z m -wymiarową przestrzenią zadaniową i kinematyką $y = k(q)$. Będziemy zakładać, że $n \geq m$. Mając dane y_d , szukamy rozwiązania q_d układu równań $y_d = k(q)$. Następujące rozumowanie wywodzi się z tzw. metody homotopii. Na początku wybieramy jakikolwiek punkt $q_0 \in \mathbb{R}^n$ i sprawdzamy, czy spełnia on układ równań $y_d = k(q_0)$. Jeżeli odpowiedź jest pozytywna, odwrotne zadanie kinematyki zostało rozwiązane. W przeciwnym wypadku „deformujemy” punkt q_0 do pewnej krzywej $q(t)$, takiej że $q(0) = q_0$, $t \in \mathbb{R}$. Obliczmy błąd

$$e(t) = k(q(t)) - y_d$$

osiągnięcia celu y_d wzdłuż krzywej $q(t)$. Chcielibyśmy wybrać tę krzywą w taki sposób, że błąd $e(t)$ malał eksponencjalnie, tzn. dla pewnego $\gamma > 0$ było spełnione równanie

$$\dot{e}(t) = -\gamma e.$$

Różniczkując równanie błędu otrzymujemy

$$\dot{e} = \frac{d}{dt}(k(q(t)) - y_d) = J(q)\dot{q} = -\gamma e,$$

skąd wynika równanie Wazewskiego

$$J(q)\dot{q} = -\gamma(k(q) - y_d), \quad q(0) = q_0. \quad (5.1)$$

Jeżeli $q(t)$ spełnia to równanie, rozwiązanie q_d odwrotnego zadania kinematyki uzyskujemy jako granicę

$$q_d = \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t).$$

W celu rozwiązania równania (5.1), w zależności od relacji między wymiarami n i m , stosujemy następujące przekształcenia.

1. Niech $n = m$, manipulator nieredundantny. Zakładając, że krzywa $q(t)$ nie przechodzi przez konfiguracje osobliwe mnożymy obie strony równania lewostronnie przez macierz odwrotną $j^{-1}(q)$ i otrzymujemy równanie różniczkowe

$$\dot{q} = -\gamma J^{-1}(q)(k(q) - y_q), \quad q(0) = q_0,$$

które rozwiązujemy numerycznie.

2. W przypadku, gdy $n > m$ jacobian jest macierzą prostokątną i powyższe podejście nie może być zastosowane. Dlatego, zamiast klasycznej odwrotności macierzy stosujemy tzw. prawostronną odwrotność uogólnioną. Niech A oznacza macierz rozmiaru $m \times n$. Prawostronna odwrotność macierzy A jest to macierz $A^\#$, taka że $AA^\# = I_m$. Można zdefiniować nieskończenie wiele prawostronnych odwrotności danej macierzy, jednak najczęściej stosowaną jest odwrotność postaci

$$A^{P\#} = A^T(AA^T)^{-1},$$

zwana pseudoodwrotnością, która jest dobrze określona, pod warunkiem że $\text{rank } A = m$. Oczywiście, przy $n = m$ otrzymujemy klasyczną odwrotność, $A^{P\#} = A^{-1}$. Mając pewną prawostronną odwrotność jacobianu równanie (5.1) sprowadzamy do równania różniczkowego

$$\dot{q} = -\gamma J^\#(q)(k(q) - y_d), \quad q(0) = q_0, \quad (5.2)$$

które rozwiązujemy numerycznie uzyskując rozwiązanie odwrotnego zadania kinematyki. Ponieważ równanie (5.2) zawiera jacobian, opartą na nim metodę i algorytm rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki nazywamy jacobianowymi. Ze względu na występowanie odwrotności jacobianu używamy także terminów „algorytm Newtona” lub „algorytm jacobianu odwrotnego”. Algorytm Newtona cechuje szybka zbieżność.

3. Na mocy definicji, algorytm Newtona wymaga zastosowania odwrotności jacobianu i działa wyłącznie w regularnych konfiguracjach manipulatora. Alternatywą algorytmu Newtona jest tzw. algorytm najszybszego spadku lub jacobianu transponowanego. Algorytm jacobianu transponowanego polega na numerycznym rozwiązaniu równania różniczkowego

$$\dot{q} = -\gamma J^T(q)(k(q) - y_d), \quad q(0) = q_0. \quad (5.3)$$

Algorytm jacobianu transponowanego nie wymaga wyliczenia odwrotności jacobianu, jest jednak wolniej zbieżny od algorytmu jacobianu odwrotnego. Niewrażliwość algorytmu na konfiguracje osobliwe jest pozorna, okazuje się bowiem, że zbieżność algorytmu jest zagwarantowana w konfiguracjach regularnych.

5.3. Faktoryzacja SVD

Przy obliczaniu prawostronnej odwrotności jacobianu, a także przy wielu innych numerycznych działaniach na macierzach pożytecznym narzędziem jest specyficzna faktoryzacja jacobianu (faktoryzacja = przedstawienie macierzy w postaci iloczynu innych macierzy), którą będziemy nazywać faktoryzacją SVD*. Podstawą faktoryzacji SVD jest następujące

Twierdzenie 5.3.1 *Dla każdej macierzy A o wymiarze $m \times n$ istnieją macierze ortogonalne U i V wymiaru, odpowiednio, $m \times m$ i $n \times n$, takie że*

$$A = U\Sigma V, \quad (5.4)$$

gdzie $m \times n$ macierz

$$\Sigma = [\text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}, 0_{m \times n-m}]$$

zawiera tzw. osobliwe wartości własne macierzy A . Liczby σ_i^2 są wartościami własnymi macierzy AA^T .

W celu ilustracji zastosujemy faktoryzację SVD do obliczenia pseudo-odwrotności $A^{P\#} = A^T(AA^T)^{-1}$ macierzy A . Na mocy Twierdzenia 5.3.1 obliczamy

$$AA^T = U\Sigma VV^T \Sigma^T U^T = U\Sigma \Sigma^T U^T = U \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2\} U^T.$$

Jak łatwo zauważyć, σ_i^2 , $i = 1, 2, \dots, m$, rzeczywiście są wartościami własnymi macierzy AA^T . Macierz odwrotna (przypominamy, że ortogonalności wynika, że $UU^T = U^T U = I_m$, a zatem $U^{-1} = U^T$)

$$(AA^T)^{-1} = U \text{diag}\{\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_m^{-2}\} U^T.$$

Łącząc ze sobą uzyskane wyniki otrzymujemy

$$\begin{aligned} A^{P\#} &= V \Sigma^T U^T U \text{diag}\{\sigma_1^{-2}, \sigma_2^{-2}, \dots, \sigma_m^{-2}\} U^T = \\ &= V \begin{bmatrix} \text{diag}\{\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \dots, \sigma_m^{-1}\} \\ 0 \end{bmatrix} U^T. \end{aligned}$$

*od słów angielskich Singular Value Decomposition

Pokazaliśmy, że przy znanej faktoryzacji SVD macierzy A obliczenie $A^{p\#}$ jest natychmiastowe. Aby wyznaczyć tę faktoryzację założmy, że

$$U = [u_1, u_2, \dots, u_m], \quad V = [v_1, v_2, \dots, v_n].$$

Dla j -tej kolumny macierzy U mamy

$$\begin{aligned} AA^T u_j &= U \operatorname{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2\} U^T u_j = \\ &= U \operatorname{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2\} e_j = U \sigma_j^2 e_j = \sigma_j^2 u_j, \end{aligned}$$

gdzie równość $U^T u_j = e_j$ wynika z ortogonalności macierzy U . Jak z tego wynika, kolumny macierzy U są wektorami własnymi macierzy AA^T , a liczby σ_j^2 - odpowiednimi wartościami własnymi. Obliczmy teraz macierz

$$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T.$$

Pomnożenie tej macierzy przez v_k daje w rezultacie

$$\begin{aligned} A^T A v_k &= V \Sigma^T \Sigma V^T v_k = V \Sigma^T \Sigma e_k = \\ &= V \begin{bmatrix} \operatorname{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2\} \\ 0 \end{bmatrix} e_k = \begin{cases} \sigma_k^2 v_k & \text{dla } j = 1, 2, \dots, m \\ 0 & \text{dla } j = m+1, m+2, \dots, n \end{cases}. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy, że dla $k = 1, 2, \dots, m$ wektor v_k jest wektorem własnym macierzy $A^T A$ związanym z wartością własną σ_k^2 . Pozostałe kolumny v_{m+1}, \dots, v_n macierzy V są wektorami własnymi macierzy $A^T A$, którym odpowiada zerowa wartość własna.

5.4. Ogólny algorytm Newtona

Algorytm Newtona rozwiązania odwrotnego zadania kinematyki opisany wzorem (5.2) powstał z przekształcenia równania Ważewskiego (5.1). Zauważmy, że równanie Ważewskiego pozostanie spełnione, jeżeli równanie różniczkowe (5.2) zastąpimy przez równanie

$$\dot{q} = -\gamma J^\#(q)(k(q) - y_d) + N(q)v(q), \quad (5.5)$$

gdzie $N(q)$ jest macierzą taką że $J(q)N(q) = 0$, a $v(q)$ jest pewnym wektorem zależnym od konfiguracji. Najczęściej macierz $N(q)$ wybieramy w taki sposób, że jej kolumny rozpinają jądro macierzy $J(q)$, tzn.

$$N(q) = I_n - J^\#(q)J(q).$$

Wektor $v(q)$ może wyznaczać pożądany kierunek ruchu w przestrzeni przegubowej, na przykład przeciwdziałać zbliżaniu się trajektorii przegubów do przeszkód lub brzegów przestrzeni przegubowej. Przykładowo, jeżeli q_s oznacza „środkowe” położenie przegubów, a $\|q - q_s\|$ jest odległością bieżącego położenia przegubów od środkowego, to

$$v(q) = -\frac{\partial \|q - q_s\|^2}{\partial q}$$

jest kierunkiem zbliżania się trajektorii układu (5.5) do środkowego położenia przegubów. Jeżeli y_p oznacza współrzędne przeszkody w przestrzeni zadaniowej, to aby spowodować oddalanie się efektora od przeszkody można wziąć

$$v(q) = \frac{\partial \|k(q) - y_p\|^2}{\partial q}.$$

Zauważmy, że wpływ wektora $v(q)$ jest ograniczony do kierunków ruchu leżących w jądrze macierzy $J(q)$, zatem jego wpływ rośnie ze wzrostem stopnia redundancji $r = n - m$ manipulatora. Algorytm (5.5) nazywamy ogólnym algorytmem Newtona kinematyki odwrotnej. W odróżnieniu od niego, algorytm postaci (5.2) będziemy nazywać podstawowym.

5.5. Własności kinematyczne manipulatora

5.5.1. Elipsoida manipulowalności

Niech będzie dany jakobian $J(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ manipulatora jako przekształcenie prędkości, $\dot{y} = J(q)\dot{q}$, i pseudoodwrotność jakobianu $J^{P\#}(q) = J^T(q)(J(q)J^T(q))^{-1}$. Mamy zamiar zbadać, w jaki sposób jakobian przekształca prędkości przegubowe w zadaniowe. W tym celu definiujemy sferę jednostkową prędkości przegubowych w konfiguracji q manipulatora

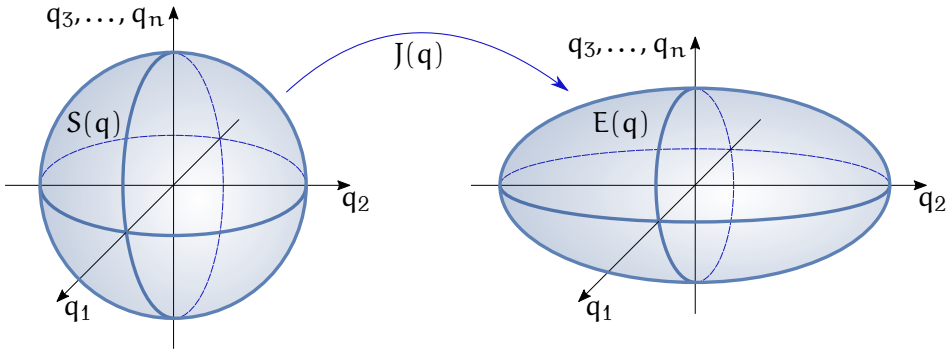
$$S(q) = \{\dot{q} \in \mathbb{R}^n \mid \|\dot{q}\|^2 = 1\}$$

i wyznaczamy jej obraz przez jakobian w przestrzeni prędkości zadaniowych,

$$E(q) = J(q)S(q) = \{\dot{y} = J(q)\dot{q} \mid \|\dot{q}\|^2 = 1\}.$$

Korzystając z pseudoodwrotności jakobianu obliczamy

$$\begin{aligned} \|\dot{q}\|^2 &= \dot{y}^T J^{P\#T}(q) J(q) \dot{y} = \\ &= \dot{y}^T (J(q)J^T(q))^{-1} J(q)J^T(q)(J(q)J^T(q))^{-1} \dot{y} = \dot{y}^T (J(q)J^T(q))^{-1} \dot{y} = 1. \end{aligned}$$



Rysunek 5.2: Przekształcenie prędkości

Przy oznaczeniu

$$M(q) = J(q)J^T(q)$$

otrzymujemy

$$E(q) = \{\dot{y} \mid \dot{y} M^{-1}(q) \dot{y} = 1\},$$

jak pokazuje Rysunek 5.2. Macierz $M(q)$ nazywamy macierzą manipulowalności w konfiguracji q , natomiast obraz $E(q)$ – elipsoidą manipulowalności. Zauważmy, że na mocy nierówności Rayleigha-Ritza zachodzi nierówność

$$\underline{\lambda}_{M^{-1}} \|\dot{y}\|^2 \leq \dot{y} M^{-1}(q) \dot{y} = 1 \leq \bar{\lambda}_{M^{-1}(q)} \|\dot{y}\|^2,$$

z której wynika że

$$\underline{\lambda}_{M(q)} \leq \|\dot{y}\|^2 \leq \bar{\lambda}_{M(q)}.$$

Elipsoida manipulowalności jest zatem wpisana w sferę o promieniu $\bar{\lambda}_{M(q)}^{1/2}$ i opisana na sferze o promieniu $\underline{\lambda}_{M(q)}^{1/2}$, zob. Rysunek 5.3. Elipsoida manipulowalności traci wymiar w konfiguracji osobliwej manipulatora.

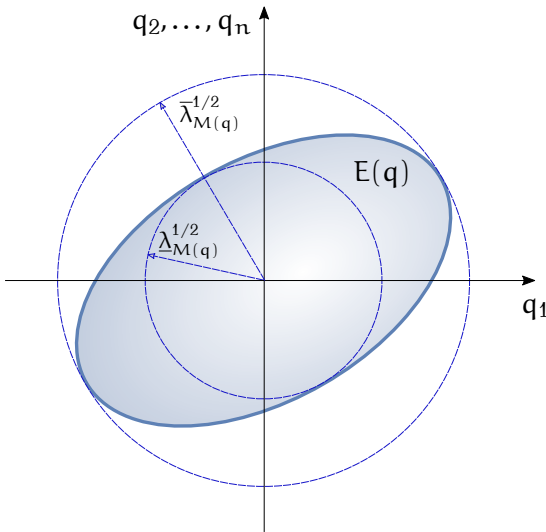
5.5.2. Miary zręczności

Objętość elipsoidy manipulowalności wyznacza manipulowalność w konfiguracji q

$$m(q) = (\det M(q))^{1/2},$$

a współczynnik uwarunkowania macierzy $M(q)$

$$\kappa(q) = \left(\frac{\bar{\lambda}_{M(q)}}{\underline{\lambda}_{M(q)}} \right)^{1/2}$$



Rysunek 5.3: Elipsoida manipulowalności

nazywa się współczynnikiem uwarunkowania konfiguracji q . Manipulowalność i współczynnik uwarunkowania zaliczamy do lokalnych (bo dotyczących zadanej konfiguracji) miar zręczności manipulatora. Manipulowalność mówi o wielkości elipsoidy manipulowalności, a współczynnik uwarunkowania o jej kształcie. Konfigurację q , w której elipsoida manipulowalności staje się sferą, a więc taką że $\kappa(q) = 1$, nazywamy konfiguracją izotropową manipulatora. W konfiguracji izotropowej nie ma uprzywilejowanych kierunków ruchu efektora. Z kolei, w konfiguracji osobliwej manipulowalność spada do zera, a współczynnik uwarunkowania dąży do nieskończoności. Obie miary zręczności sygnalizują więc zbliżanie się do konfiguracji osobliwej i powinny być kontrolowane w trakcie obliczeń algorytmem Newtona. Manipulowalność można także wykorzystać do wyznaczenia konfiguracji o największej zręczności po to aby utrzymywać manipulator podczas pracy w pobliżu tej konfiguracji. Zobaczmy to na przykładzie manipulatora typu 2R, analizowanego w podrozdziale 4.1.1. Wyliczyliśmy tam, że

$$\det J(q) = l_1 l_2 s_2.$$

Macierz manipulowalności $M(q) = J(q)J^T(q)$, a zatem manipulowalność

$$m(q) = (\det M(q))^{1/2} = l_1 l_2 |\sin q_2|.$$

Wynika stąd, że zbiór konfiguracji o największej manipulowalności ma postać $\mathbb{R} \times \{\pm \frac{\pi}{2}\}$, co oznacza, że ramiona manipulatora powinny być prostopadłe. Porównując ramię i przedramię ludzkiej ręki do manipulatora

2R możemy powiedzieć, że ułożenie ręki przy pisaniu oznacza przyjęcie konfiguracji o największej manipulowalności. W przykładowej konfiguracji o największej manipulowalności $q = (0, \frac{\pi}{2})$ współczynnik uwarunkowania

$$\kappa(q) = \frac{l_1^2 + 2l_2^2 + \sqrt{l_1^4 + 4l_2^4}}{2l_1l_2},$$

nie jest to zatem konfiguracja izotropowa. Można pokazać, że manipulator typu 2R w ogóle nie ma konfiguracji izotropowych.

5.5.3. Powtarzalność

Niech będzie dany manipulator redundantny o n stopniach swobody, z kinematyką $k(q)$ i jacobianem $J(q)$, znajdujący się w pewnej konfiguracji q_0 . Wyobraźmy sobie, że mamy do rozwiązania ciąg odwrotnych zadań kinematyki scharakteryzowanych punktami $y_{d1}, y_{d2}, \dots, y_{dk}$ w przestrzeni zadaniowej. Przy rozwiązywaniu numerycznym takich zadań, na przykład za pomocą algorytmów jacobianowych, jest rzecz racjonalną przyjąć, że konfiguracja końcowa uzyskana w zadaniu numer i będzie konfiguracją startową dla rozwiązania zadania numer $i + 1$. W wyniku zastosowania algorytmu kinematyki odwrotnej otrzymamy ciąg konfiguracji q_1, q_2, \dots, q_k manipulatora, przy czym $y_{di} = k(q_i)$. Załóżmy teraz, że zadania tworzą cykl, a więc $y_{dk} = y_{d1}$, który powtarza się wielokrotnie. Jeżeli ciąg konfiguracji spełnia warunek $q_k = q_0$, algorytm kinematyki odwrotnej nazywamy powtarzalnym.

Można pokazać, że przeszkodą do osiągnięcia powtarzalności jest obecność konfiguracji osobliwych. Załóżmy przeto, że poruszamy się w obszarze konfiguracji regularnych $Q_r \in \mathbb{R}^n$ i niech $J^\#(q)$ oznacza pewną prawostronną odwrotność jacobianu, tak że $\dot{q} = J^\#(q)\dot{y}$. Niech dla $i = 1, 2, \dots, m$ $J^\#(q)_i$ oznacza i -tą kolumnę macierzy $J^\#(q)$. Przy użyciu pewnych argumentów z dziedziny geometrii różniczkowej można udowodnić następujące

Twierdzenie 5.5.1 *Założmy, że dla każdego i, j i dla każdego $q \in Q_r$ zachodzi warunek*

$$[J^\#(q)_i, J^\#(q)_j] \in \text{Im } J^\#(q),$$

gdzie $[\cdot, \cdot]$ oznacza nawias Liego pól wektorowych określony wzorem

$$[X(q), Y(q)] = DY(q)X(q) - DX(q)Y(q).$$

Wówczas algorytm kinematyki odwrotnej zdefiniowany przez $J^\#(q)$ jest powtarzalny.

Wykazano, że algorytm zdefiniowany przez jacobian pseudoodwrotny nie jest powtarzalny.

5.6. Komentarze i odniesienia literaturowe

Odwrotne zadanie kinematyki należy do fundamentalnych problemów robotyki; jest zatem omawiane w każdym podręczniku robotyki. Metodom jacobianowym i algorytmowi Newtona poświęcamy szczególną uwagę w monografii [TMD⁺00]. Źródłem wiedzy na temat miar zręczności manipulatora, w tym manipulowalności, może być monografia [Nak91].

Literatura

- [Nak91] Y. Nakamura, *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*. Addison-Wesley, Reading, 1991.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 6

Jakobian geometryczny

Niech kinematyka manipulatora o n stopniach swobody będzie zadana w postaci przekształcenia

$$K : \mathbb{Q} \longrightarrow SE(3), \quad Y = K(q) = \begin{bmatrix} R(q) & T(q) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Pojęcie jacobianu analitycznego odnosi się do reprezentacji kinematyki we współrzędnych, ma charakter lokalny i zależy od wyboru współrzędnych w przestrzeni przegubowej i zadaniowej. Jakobian niezależny od wyboru współrzędnych nazywa się geometrycznym.

6.1. Jakobian geometryczny

Korzystając z macierzowych prędkości ruchu wprowadzonych w Rozdziale 1 wprowadzimy teraz pojęcie jacobianu geometrycznego, który jest niezależny od wyboru współrzędnych. Niech $q(t)$ oznacza pewną trajektorię przegubów. Przypomnijmy definicje macierzowej prędkości efektora w przestrzeni (1.12)

$$\dot{K}(q)K^{-1}(q) = \begin{bmatrix} [\omega_S] & \dot{T} + [T]\omega_S \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

i w ciele (1.13)

$$K^{-1}(q)\dot{K}(q) = \begin{bmatrix} [\omega_B] & R^T\dot{T} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

Jakobian geometryczny będziemy rozumieć jako przekształcenie prędkości przegubowych w skrętniki w przestrzeni i w ciele. Definiujemy zatem jacobian geometryczny w przestrzeni

$$J_S(q)\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{T} + [T]\omega_S \\ \omega_S \end{pmatrix}$$

i jacobian geometryczny w ciele

$$J_B(q)\dot{q} = \begin{pmatrix} R^T\omega_B \\ \omega_B \end{pmatrix}.$$

Przypominamy, że dla wektora $T = (T_1, T_2, T_3)^T$ macierz

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -T_3 & T_2 \\ T_3 & 0 & -T_1 \\ -T_2 & T_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę przekształcenie skrętników (1.14) otrzymujemy następujący związek między jakobianami w przestrzeni i w ciele

$$J_S(q) = \begin{bmatrix} R & [T]R \\ 0 & R \end{bmatrix} J_B(q).$$

Z obliczeniowego punktu widzenia warto wprowadzić trzeci jakobian geometryczny,

$$J_M(q)\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{T} \\ \omega_S \end{pmatrix},$$

zwany jakobianem manipulatora. Nietrudno wykazać następujący związek między jakobianem manipulatora a jakobianem w przestrzeni

$$J_S(q) = \begin{bmatrix} I_3 & [T] \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} J_M(q).$$

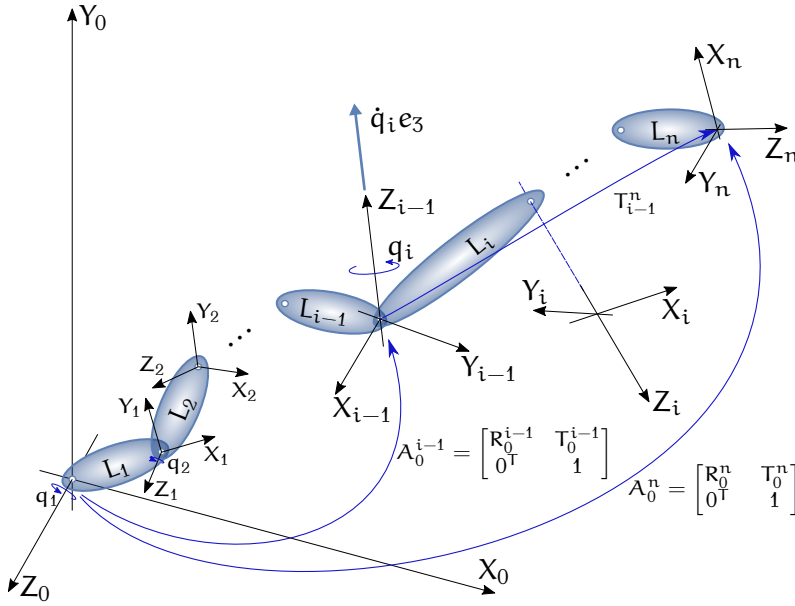
Z wyznaczonych zależności wynika, że wystarczy znać jeden z trzech jakobianów geometrycznych, żeby wyznaczyć pozostałe dwa. Poniżej pokazemy, jak wyznaczyć jakobian manipulatora. Ponieważ wektor prędkości przegubów $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)^T$, jakobian manipulatora można zapisać w następujący sposób

$$J_M(q)\dot{q} = [J_{M1}(q)\dot{q}_1, J_{M2}(q)\dot{q}_2, \dots, J_{Mn}(q)\dot{q}_n] = \begin{pmatrix} \dot{T} \\ \omega_S \end{pmatrix},$$

gdzie $J_{Mi}(q)$ oznacza i -tą kolumnę macierzy $J_M(q)$. Zauważmy, że w celu wyznaczenia kolumny $J_{Mi}(q)$ możemy zatrzymać wszystkie przeguby manipulatora, oprócz i -tego, i wyznaczyć prędkości efektora (\dot{T}_i, ω_{Si}) odpowiadające ruchowi przegubu nr i . Przegub i jest związany z układem współrzędnych $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$, zob. Rysunek 6.1. Niech

$$A_0^{i-1}(q) = \begin{bmatrix} R_0^{i-1} & T_0^{i-1} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

oznacza przekształcenie układu podstawowego w układ $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$, a T_0^{i-1} definiuje położenie początku układu efektora względem tego układu. Poruszanie przegubem obrotowym z prędkością \dot{q}_i powoduje ruch efektora względem układu $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$ z prędkością kątową $\dot{q}_i e_3$



Rysunek 6.1: Jakobian manipulatora

i prędkością liniową $\dot{q}_i e_3 \times T_{i-1}^n$. Prędkości względem układu podstawowego są równe odpowiednio

$$\omega_{Si} = R_0^{i-1} e_3 \dot{q}_i = R_{03k}^{i-1} \dot{q}_i$$

i

$$\dot{T}_i = R_0^{i-1} (e_3 \dot{q}_i \times T_{i-1}^n) = R_{03k}^{i-1} \dot{q}_i \times R_0^{i-1} T_{i-1}^n,$$

gdzie R_{3k} oznacza trzecią kolumnę macierzy R . Ponieważ, jak wynika z Rysunku 6.1, położenie początku układu efektora względem układu podstawowego $T_0^n = T_0^{i-1} + R_0^{i-1} T_{i-1}^n$ otrzymujemy $R_0^{i-1} T_{i-1}^n = T_0^n - T_0^{i-1}$, i dlatego

$$\dot{T}_i = R_{03k} \dot{q}_i \times (T_0^n - T_0^{i-1}).$$

W rezultacie, dla obrotowego przegubu numer i otrzymaliśmy

$$J_{Mi}(q) = \begin{pmatrix} R_{03k}^{i-1} \times (T_0^n - T_0^{i-1}) \\ R_{03k}^{i-1} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

W przypadku, gdy i -ty przegub jest przesuwany, mamy

$$\omega_{Si} = 0 \quad i \quad \dot{T}_i = R_0^{i-1} e_3 \dot{q}_i = R_{03k}^{i-1} \dot{q}_i,$$

zatem odpowiednia kolumna jacobianu manipulatora uzyskuje postać

$$J_{Mi}(q) = \begin{pmatrix} R_{03k}^{i-1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

W obu wzorach (6.1) i (6.2) kładziemy $R_0^0 = I_3$ i $T_0^0 = 0$.

6.2. Jakobian analityczny a geometryczny

Po wyborze parametryzacji grupy obrotów można ustalić związek między jacobianem analitycznym a jacobianem manipulatora. W tym celu wyznaczmy najpierw prędkość kątową w przestrzeni odpowiadającą parametryzacji Eulera i parametryzacji KKM, wprowadzonymi w Rozdziale 2 (zob. Zadanie 2.6). Na podstawie zależności

$$[\omega_{SE}] = \dot{E}(\varphi, \theta, \psi)E(\varphi, \theta, \psi)$$

wyliczamy

$$\omega_{SE} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = M_{SE} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix},$$

Podobnie, korzystając ze wzoru

$$[\omega_{SKKM}] = KKM(\varphi, \theta, \psi)K\dot{K}M(\varphi, \theta, \psi),$$

wyznaczamy zależność

$$\omega_{SKKM} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \cos \theta \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \cos \theta \\ 1 & 0 & -\sin \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = M_{SKKM} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Założmy, że jako parametryzację $SE(3)$ wybraliśmy parametryzację kartezjańską + kąty Eulera, i niech $J_{KE}(q)$ oznacza odpowiedni jacobian analityczny. Nietrudno pokazać, że wówczas

$$J_M(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & M_{SE} \end{bmatrix} J_{KE}(q). \quad (6.3)$$

Podobnie, dla parametryzacji kartezjańskiej + kąty KKM, i jacobianu analitycznego $J_{KKKM}(q)$ mamy

$$J_M(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & M_{SKKM} \end{bmatrix} J_{KKKM}(q). \quad (6.4)$$

6.3. Przykład

Wyznamy jacobian manipulatora dla manipulatora typu RTR przedstawionego na Rysunku 3.2. Zaczynamy od wyznaczenia przekształceń układu podstawowego w kolejne układy współrzędnych związane z przegubami

$$A_0^1(q_1) = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0^2(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} R_0^2 & T_0^2 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & l_2 c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & l_2 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0^3(q_1, q_2, q_3) = \begin{bmatrix} R_0^3 & T_0^3 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 c_3 & -c_1 s_3 & s_1 & (l_2 + l_3 c_3) c_1 c_1 \\ s_1 c_3 & -s_1 s_3 & -c_1 & (l_2 + l_3 c_3) s_1 c_1 \\ s_3 & c_3 & 0 & q_2 + l_3 s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Jacobian manipulatora ma trzy kolumny, $J_M(q) = [j_{M1}(q), j_{M2}(q), j_{M3}(q)]$. Przegub numer 1 jest obrotowy, zatem, na mocy (6.1) wyliczamy

$$j_{M1}(q) = \begin{pmatrix} R_{03k}^0 \times (T_0^3 - T_0^0) \\ R_{03k}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(l_2 + l_3 c_3) s_1 \\ (l_2 + l_3 c_3) c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Przegub numer 2 jest przesuwny i na podstawie wzoru (6.2) otrzymujemy

$$j_{M2}(q) = \begin{pmatrix} R_{03k}^1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ostatni, trzeci przegub jest obrotowy. Korzystając z (6.1) wyliczamy

$$J_{M3}(q) = \begin{pmatrix} R_{03k}^2 \times (T_0^3 - T_0^2) \\ R_{03k}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_3 s_3 c_1 \\ -l_3 s_3 s_1 \\ l_3 c_3 \\ s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyliśmy jakobian manipulatora dla manipulatora RTR. Pozostałe jakobiany geometryczne można otrzymać przy pomocy wzorów podanych w podrozdziale 6.1; tu ograniczymy się więc do sprawdzenia zależności (6.4). Jakobian analityczny $J_{KKKM}(q)$ obliczony na podstawie wzoru (3.9) jest następujący

$$J_{KKKM}(q) = \begin{bmatrix} -(l_2 + l_3 c_3) s_1 & 0 & -l_3 s_3 c_1 \\ (l_2 + l_3 c_3) c_1 & 0 & -l_3 s_3 s_1 \\ 0 & 1 & l_3 c_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Z kolei, macierz M_{SKKM} ma postać

$$M_{SKKM} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & c_1 c_3 \\ 0 & c_1 & s_1 c_3 \\ 1 & 0 & -s_1 \end{bmatrix}.$$

Polecamy Czytelnikowi sprawdzenie równości

$$J_M(q) = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & M_{KKKM} \end{bmatrix} J_{KKKM}(q). \quad (6.5)$$

6.4. Zadania

Zadanie 6.1 Wyznaczyć jakobian manipulatora dla manipulatorów SCARA i 1R2T badanych w Zadaniu 3.1. Sprawdzić relację między jakobianem analitycznym a jakobianem manipulatora.

Zadanie 6.2 Sprawdzić równość (6.5).

6.5. Komentarze i odniesienia literaturowe

Jakobiany geometryczne (w tym jakobian manipulatora) są wygodnym narzędziem analizy kinematyki manipulatorów ze względu na jego niezależność od wyboru współrzędnych. Traktuje o ni książka [Cra93]; bardziej obszerne omówienie przedstawiono w pracy [TMD⁺00].

Literatura

- [Cra93] J. J. Craig, *Wprowadzenie do robotyki: Mechanika i sterowanie*. WNT, Warszawa, 1993.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 7

Dynamika manipulatora sztywnego

7.1. Model lagranżowski

Rozważmy sztywny manipulator szeregowy o n obrotowych stopniach swobody przedstawiony schematycznie na Rysunku 7.1. Na Rysunku symbole L_1, L_2, \dots, L_n oznaczają kolejne ogniwa manipulatora napędzane silnikami M_1, M_2, \dots, M_n . Z ogniwem L_i został związany układ współrzędnych (X_i, Y_i, Z_i) ; ruch tego ogniwa, opisany zmienną przegubową q_i , zachodzi względem osi Z_{i-1} układu poprzedniego. Zmienna ta opisuje zarazem położenie wirnika silnika M_i , o momencie bezwładności I_i , napędzającego ten przegub*. Układ (X_0, Y_0, Z_0) jest układem podstawowym, a układ (X_n, Y_n, Z_n) jest związany z efekтором manipulatora. Zakładamy, że przy wykorzystaniu algorytmu Denavita-Hartenberga zostały wyznaczone przekształcenia

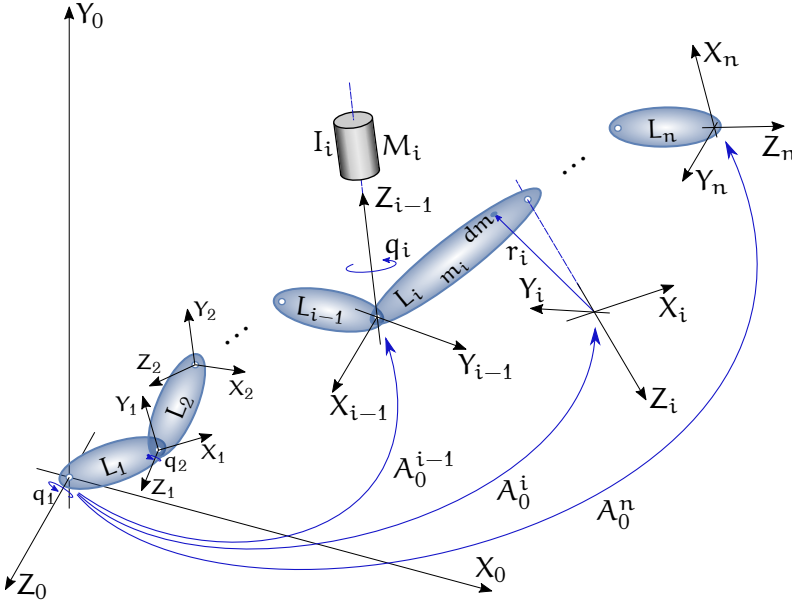
$$A_0^i(q^i) = \begin{bmatrix} R_0^i(q^i) & T_0^i(q^i) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie $q^i = (q_1, q_2, \dots, q_i)^T$, układu podstawowego w układ numer i . Oznaczamy przez $\bar{r}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, 1)^T$ współrzędne jednorodne środka masy ogniwa L_i względem układu (X_i, Y_i, Z_i) , a przez m_i masę ogniwa L_i wraz z masą silnika M_{i+1} .

Do wyznaczenia modelu dynamiki manipulatora zastosujemy formalizm mechaniki lagranżowskiej. Niech $r_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$ oznacza współrzędne jednorodne elementu dm masy ogniwa L_i . Współrzędne jednorodne elementu dm w układzie podstawowym są dane wzorem

$$s_i = A_0^i(q^i) r_i,$$

*W rozdziale opisujemy sposób wyprowadzenia modelu dynamiki w najprostszym przypadku dla manipulatora bez przekładni w układzie napędowym – ogólniejszy sposób uwzględnienia układów napędowych w modelach dynamiki manipulatora sztywnego został w szczegółach opisany w rozdziale 5.2 książki [TMD+00].



Rysunek 7.1: Sztywny manipulator szeregowy: dynamika

$$dK_i = \frac{1}{2} dm \dot{\mathbf{s}}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i = \frac{1}{2} dm \operatorname{tr} (\dot{\mathbf{s}}_i \dot{\mathbf{s}}_i^T) = \frac{1}{2} dm \operatorname{tr} (\dot{A}_0^i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T (\dot{A}_0^i)^T).$$

Energia kinetyczna ogniwa L_i jest równa

$$K_i = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left(\dot{A}_0^i \int_{L_i} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T dm (\dot{A}_0^i)^T \right).$$

Zajmiemy się teraz całką występującą w powyższym wzorze. Mamy

$$\begin{aligned} J_{L_i} &= \int_{L_i} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T dm = \int_{L_i} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{pmatrix} (x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1) dm = \\ &= \int_{L_i} \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i & x_i \\ y_i x_i & y_i^2 & y_i z_i & y_i \\ z_i x_i & z_i y_i & z_i^2 & z_i \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} dm. \end{aligned}$$

Macierz J_{L_i} nazywamy macierzą pseudoinercji ogniwa L_i . Jej elementy mają następującą postać

$$J_{L_i} = \begin{bmatrix} I_{XXi} & I_{XYi} & I_{XZi} & m_i \bar{x}_i \\ I_{YXi} & I_{YYi} & I_{YZi} & m_i \bar{y}_i \\ I_{ZXi} & I_{ZYi} & I_{ZZi} & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix},$$

gdzie $\int_{L_i} x_i^2 dm = I_{XXi}$, $I_{XYi} = \int_{L_i} x_i y_i dm, \dots$, etc oznaczają momenty bezwładności, a $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ są współrzędnymi środka masy ogniwa L_i w układzie (X_i, Y_i, Z_i) . Energia kinetyczna całego manipulatora jest sumą energii kinetycznych jego ogniw i energii kinetycznych silników napędzających przeguby,

$$K = \sum_{i=1}^n K_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2.$$

W celu obliczenia energii potencjalnej założymy, że przyspieszenie Ziemskie w układzie podstawowym ma postać $g = (g, 0)^T$. Energia potencjalna ogniwa L_i jest równa

$$V_i = -m_i (g, A_0^i(q^i) \bar{r}_i) = -m_i g^T A_0^i(q^i) \bar{r}_i.$$

Całkowita energia potencjalna manipulatora wynosi

$$V = \sum_{i=1}^n V_i.$$

Lagranżian $L = K - V$ manipulatora jest więc dany wzorem

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{tr} (\dot{A}_0^i(q^i) J_{L_i} (\dot{A}_0^i(q^i))^T) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i g^T A_0^i(q^i) \bar{r}_i. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Korzystając z tego, że

$$\dot{A}_0^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{tr} (\dot{A}_0^i(q^i) J_{L_i} (\dot{A}_0^i(q^i))^T) = \\ = \sum_{i,j,k=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_0^i(q^i)}{\partial q_j} J_{L_i} \left(\frac{\partial A_0^i(q^i)}{\partial q_k} \right)^T \right) \dot{q}_j \dot{q}_k. \end{aligned}$$

Zauważamy, że energia kinetyczna manipulatora ma postać formy kwadratowej

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T Q(q) \dot{q} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n Q_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k,$$

z symetryczną i dodatnio określoną macierzą bezwładności

$$Q_{jk}(q) = \sum_{i=1}^n \text{tr} \left(\frac{\partial A_0^i(q^i)}{\partial q_j} J_{L_i} \left(\frac{\partial A_0^i(q^i)}{\partial q_k} \right)^T \right) + I_j \delta_{jk}.$$

Symbolem δ_{jk} oznaczyliśmy deltę Kroneckera,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } j \neq k \\ 1, & \text{jeżeli } j = k \end{cases}$$

Uzyskaliśmy lagranżian w postaci

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T Q(q) \dot{q} - V(q).$$

Przy założeniu, że nie występują inne siły niepotencjalne oprócz sterowań, równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = u,$$

gdzie u oznacza siły i momenty sterujące w przegubach, wymagają obliczenia pochodnych

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = Q(q) \dot{q}, \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T Q(q) \dot{q}) - \frac{\partial V(q)}{\partial q}.$$

W rezultacie otrzymujemy równania dynamiki manipulatora w standardowej formie

$$Q(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D(q) = u. \quad (7.2)$$

Składnik

$$C(q, \dot{q}) \dot{q} = \dot{Q}(q) \dot{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T Q(q) \dot{q})$$

charakteryzuje siły odśrodkowe i Coriolisa, a wektor

$$D(q) = \frac{\partial V(q)}{\partial q}$$

odnosi się do sił potencjalnych. Siły odśrodkowe i Coriolisa możemy także wyrazić za pomocą symboli Christoffela I rodzaju

$$c_{jk}^i(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial Q_{jk}}{\partial q_i} \right),$$

tak że element (ij) macierzy sił odśrodkowych i Coriolisa jest równy

$$C_{ij}(q, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n c_{jk}^i(q) \dot{q}_k.$$

Nietrudno pokazać, że macierze $Q(q)$ i $C(q, \dot{q})$ są związane w następujący sposób

$$\dot{Q}(q) = C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}).$$

7.2. Manipulator jako układ sterowania

Zapiszmy model (7.2) dynamiki manipulatora w zwężłej formie

$$Q(q)\ddot{q} + B(q, \dot{q}) = u. \quad (7.3)$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych

$$x^1 = q, \quad x^2 = \dot{x}^1 = \dot{q}$$

otrzymujemy model dynamiki manipulatora w postaci układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = -Q^{-1}(x^1)B(x^1, x^2) + Q^{-1}(x^1)u \end{cases}. \quad (7.4)$$

Układ sterowania o równaniach

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u$$

nazywamy afinicznym. Model dynamiki manipulatora można zatem przedstawić jako afiniczny układ sterowania, gdzie $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^{2n}$ oraz

$$f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -Q^{-1}(x^1)B(x^1, x^2) \end{pmatrix},$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} \\ Q^{-1}(x^1) \end{bmatrix}.$$

Podstawowym zadaniem sterowania manipulatora jest zadanie śledzenia trajektorii przegubowej. Zadanie to polega na tym, by mając zadaną trajektorię $q_d(t)$ przegubów znaleźć sterowanie $u(t)$, takie że odpowiadająca mu trajektoria $q(t)$ dąży asymptotycznie do trajektorii zadanej, tzn.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = q_d(t).$$

Wariantem zadania śledzenia trajektorii jest śledzenie trajektorii stałej, $q_d(t) = q_d$, w którym sterowanie ma zapewnić asymptotyczne osiągnięcie przez przeguby zadanego położenia. Takie zadanie nazywamy zadaniem stabilizacji. Pokażemy teraz przykładowe algorytmy sterowania manipulatora.

7.2.1. Algorytm Takegaki-Arimoto

Zacniemy od zadania stabilizacji. Niech będzie dany model (7.2) dynamiki manipulatora i zadane położenie przegubów q_d . Zaczynamy od skompensowanie składnika $D(q)$ (grawitacji) przez sprzężenie zwrotne

$$u = D(q) + v,$$

gdzie $v \in \mathbb{R}^n$ oznacza nowe sterowanie. Model po sprzężeniu zwrotnym uzyskuje postać

$$Q(q)\ddot{q} + C(q\dot{q})\dot{q} = v.$$

Zastosujemy do niego sterownik typu PD

$$v = -K_1\dot{q} - K_0(q - q_d) = -K_1\dot{e} - K_0e,$$

z dodatnio określonymi macierzami wzmocnienia K_0 i K_1 , i błędem śledzenia $e = q - q_d$. Po odpowiednim podstawieniu uzyskujemy równanie błędu

$$Q(e + q_d)\ddot{e} + C(e + q_d, \dot{e})\dot{e} + K_1\dot{e} + K_0e = 0.$$

Pokażemy teraz, że błąd śledzenia dąży do zera. Niech

$$V(e) = \frac{1}{2}\dot{e}^T Q(e + q_d)\dot{e} + \frac{1}{2}e^T K_0e$$

będzie funkcją Lapunowa. Obliczamy pochodną wzdłuż trajektorii równania błędu śledzenia

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T Q\dot{e} + \frac{1}{2}\dot{e}\dot{Q}\dot{e} + e^T K_0\dot{e} = \\ &= \dot{e}^T (-C\dot{e} - K_1\dot{e} - K_0e) + \frac{1}{2}\dot{e}^T \dot{Q}\dot{e} + e^T K_0\dot{e} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{e}^T (\dot{Q} - 2C)\dot{e} - \dot{e}K_1\dot{e}. \end{aligned}$$

Na podstawie własności $\dot{Q} = C + C^T$ wyciągamy wniosek, że macierz $\dot{Q} - 2C = C^T - C$ jest skośnie symetryczna, a zatem zbudowana na niej forma kwadratowa $\dot{e}^T (\dot{Q} - 2C)\dot{e} = 0$. Otrzymaliśmy

$$\dot{V} = -\dot{e}K_1\dot{e} \leq 0.$$

Przy założeniu, że macierz bezwładności manipulatora jest ograniczona, z Twierdzenia Lapunowa wynika jednostajna stabilność równania błędu. Stabilność asymptotyczną uzyskamy z Twierdzenia La Salle'a, które orzeka, że błąd śledzenia $e(t)$ dąży do największego zbioru niezmienniczego zawartego w zbiorze

$$E = \left\{ (e, \dot{e}) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \dot{V} = \dot{e}^T K_1 \dot{e} \right\}.$$

Przy dodatnio określonej macierzy K_1 zbiór E składa się z punktu $(0, 0)$, co kończy dowód asymptotycznej zbieżności algorytmu stabilizacji Takegaki-Arimoto. Algorytm ten ma postać

$$u = D(q) - K_1 \dot{e} - K_0 e.$$

7.2.2. Algorytm obliczanego momentu

Dla modelu (7.3) rozważamy zadanie śledzenia trajektorii przegubowej $q_d(t)$. Zastosujemy sprzężenie zwrotne

$$u = Q(q)v + B(q, \dot{q}),$$

gdzie $v \in \mathbb{R}^n$ oznacza nowe sterowanie. Po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego model uzyska postać

$$\ddot{q} = v.$$

Niech $e = q - q_d$ oznacza błąd śledzenia. Zastosujemy sterownik typu PD z prekompensacją

$$v = \ddot{q}_d - K_1 \dot{e} - K_0 e.$$

Równanie dynamiki błędu będzie postaci

$$\ddot{e} + K_1 \dot{e} + K_0 e = 0.$$

Nietrudno sprawdzić, że przy diagonalnych macierzach wzmocnienia K_0 i K_1 , z dodatnimi elementami na przekątnej błąd śledzenia dąży do zera. Algorytm śledzenia

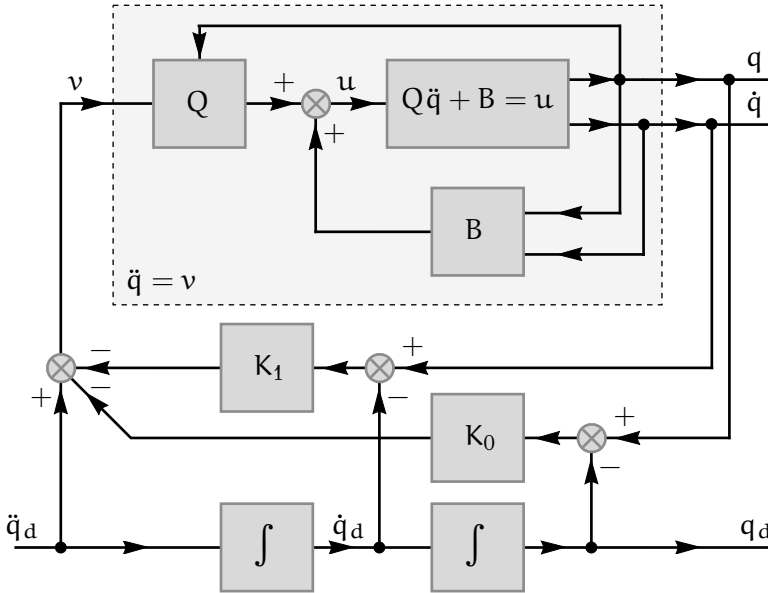
$$u = Q(q)(\ddot{q}_d - K_1 \dot{e} - K_0 e) + B(q, \dot{q})$$

nazywa się algorytmem obliczanego momentu lub algorytmem linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. Jest to najbardziej klasyczny algorytm śledzenia trajektorii przegubowej manipulatora. Jego schemat przedstawia Rysunek 7.2.

7.2.3. Algorytm Wena-Bayarda

Z punktu widzenia zastosowań słabą stroną algorytmu obliczanego momentu jest jego złożoność obliczeniowa wynikająca z konieczności wyliczania w czasie rzeczywistym skomplikowanych funkcji $Q(q)$ i $B(q, \dot{q})$ opisujących dynamikę manipulatora. Alternatywnym algorytmem o lepszych własnościach obliczeniowych jest algorytm Wena-Bayarda, w którym te funkcje oblicza się nie wzdłuż trajektorii bieżącej, lecz zadanej. Algorytm Wena-Bayarda ma postać

$$u = Q(q_d)\ddot{q}_d + B(q_d, \dot{q}_d) - K_1 \dot{e} - K_0 e.$$



Rysunek 7.2: Algorytm obliczanego momentu

Ceną, jaką należy zapłacić za zwiększenie efektywności obliczeniowej jest pogorszenie warunków zbieżności algorytmu. Macierze wzmocnień należy dobrać w zależności od warunków początkowych algorytmu, nie ma więc nastaw „uniwersalnych”, jak w algorytmie obliczanego momentu.

7.2.4. Algorytm Freunda

Oprócz zadania śledzenia trajektorii w przestrzeni przegubowej można rozważać zadanie śledzenia trajektorii $y_d(t)$ w przestrzeni zadaniowej. Niech będzie dana kinematyka

$$y = k(q)$$

manipulatora wyrażona w pewnych współrzędnych. Zadanie śledzenia trajektorii zadaniowej polega na znalezieniu sterowania $u(t)$ przegubami manipulatora, które zapewni asymptotyczną zbieżność

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_d(t).$$

Istnieją dwa sposoby podejścia do tego zadania. Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu odwrotnego zadania kinematyki, wyliczeniu trajektorii przegubowej $q_d(t)$, takiej że $k(q_d(t)) = y_d(t)$ i sprowadzeniu zadania

do śledzenia trajektorii przegubowej. Drugi sposób podejścia polega na bezpośrednim rozwiązywaniu zadania śledzenia trajektorii zadaniowej.

W dalszym ciągu zajmiemy się podejściem bezpośrednim. Załóżmy, że manipulator jest nieredundantny, tzn. wymiary przestrzeni przegubowej i zadaniowej są jednakowe, $n = m$. Weźmy model dynamiki manipulatora (7.3) i jego trajektorie $q(t)$. Wzdłuż tej trajektorii obliczamy pochodną względem czasu kinematyki manipulatora

$$\dot{y} = J(q)\dot{q}$$

i drugą pochodną

$$\ddot{y} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}.$$

Z modelu wyliczamy

$$\ddot{q} = -Q^{-1}B + Q^{-1}u$$

i podstawiamy do pochodnej rzędu drugiego otrzymując

$$\ddot{y} = -J(q)Q^{-1}(q)B(q, \dot{q}) + J(q)Q^{-1}(q)u + \dot{J}(q)\dot{q} = P(q, \dot{q}) + R(q)u.$$

Macierz $R = JQ^{-1}$ jest nieosobliwa w konfiguracjach regularnych manipulatora, można więc zdefiniować sprzężenie zwrotne

$$u = R^{-1}v - R^{-1}P$$

z nowym sterowaniem $v \in \mathbb{R}^n$. Po zastosowaniu sprzężenia zwrotnego otrzymamy zależność wejście-wyjście w postaci

$$\dot{y} = v.$$

Niech $e = y - y_d$ oznacza błąd śledzenia. Śledzenie trajektorii $y_d(t)$ zapewni sterownik typu PD

$$v = \ddot{y}_d - K_1\dot{e} - K_0e.$$

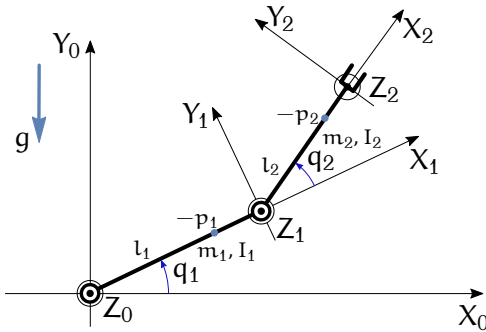
Tak samo jak w przypadku algorytmu obliczanego momentu otrzymujemy równanie błędu

$$\ddot{e} + K_1\dot{e} + K_0e = 0.$$

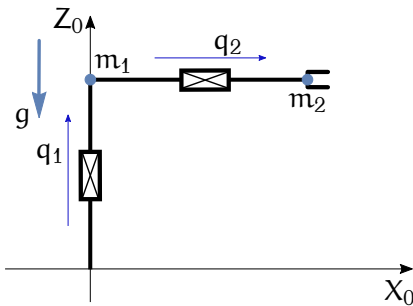
Wybór diagonalnych macierzy wzmocnienia z dodatnimi elementami na przekątnej zapewnia dążenie błędu do zera. Podsumowując przeprowadzoną analizę otrzymujemy algorytm śledzenia Freunda

$$u = R^{-1}(q)(\ddot{y}_d - K_1\dot{e} - K_0e) - R^{-1}(q)P(q, \dot{q}).$$

Algorytm został zdefiniowany dla manipulatora nieredundantnego i działa poprawnie w konfiguracjach regularnych manipulatora.



Rysunek 7.3: Manipulator 2R



Rysunek 7.4: Manipulator 2T

7.3. Zadania

Zadanie 7.1 Wyprowadzić model dynamiki manipulatora planarnego typu 2R przedstawionego na Rysunku 7.3. Oś Y_0 jest skierowana pionowo w górę. Założyć, że ramiona manipulatora mają długości l_1 , l_2 , masy m_1 , m_2 i momenty bezwładności I_1 , I_2 względem osi Z. Położenie środka masy w lokalnym układzie współrzędnych oznaczono jako $-p_1$ i $-p_2$. Przedstawić model dynamiki w postaci

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = u$$

i zdefiniować macierz $C(q, \dot{q})$ w taki sposób, żeby $\dot{Q} = C + C^T$.

Zadanie 7.2 Wyprowadzić równania dynamiki dla manipulatora typu 2T przedstawionego na Rysunku 7.4. Przyjąć założenie, że masy ramion m_1 i m_2 są skupione na ich końcach.

Zadanie 7.3 Wyznaczyć model dynamiki manipulatora RTR przedstawionego w Rozdziale 3 na Rysunku 3.2. Założyć, że ramiona manipu-

latora mają postać cienkich, jednorodnych prętów o długościach l_2 , l_3 i masach m_2 , m_3 .

7.4. Komentarze i odniesienia literaturowe

Podstawy mechaniki lagranżowskiej zostały omówione w notatkach [TM18]. Zasady modelowania dynamiki manipulatorów można znaleźć w książkach [Cra93, SV97, KDW03, Jez05, TMD⁺00]. Algorytmom sterowania sztywnych manipulatorów szeregowych poświęcono wiele miejsca w rozdziale 6 pracy [TMD⁺00].

Literatura

- [Cra93] J. J. Craig, *Wprowadzenie do robotyki: Mechanika i sterowanie*. WNT, Warszawa, 1993.
- [Jez05] E. Jezierski, *Dynamika robotów*. WNT, Warszawa, 2005.
- [KDW03] K. Kozłowski, P. Dutkiewicz, W. Wróblewski, *Modelowanie i sterowanie robotów*. PWN, Warszawa, 2003.
- [SV97] M. Spong, M. Vidyasagar, *Dynamika i sterowanie robotów*. WNT, Warszawa, 1997.
- [TM18] K. Tchoń, R. Muszyński, *Mechanika analityczna*. Projekt Azon, Wrocław, 2018.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 8

Dynamika manipulatora o elastycznych przegubach

Elastyczność przegubów manipulatora pochodzi z własności konstrukcyjnych przegubów, w tym z istnienia przekładni między wałami silników a przegubami manipulatora. Uwzględnienie elastyczności komplikuje model dynamiki manipulatora. Pokażemy to bardziej szczegółowo w tym rozdziale.

8.1. Model lagranżowski

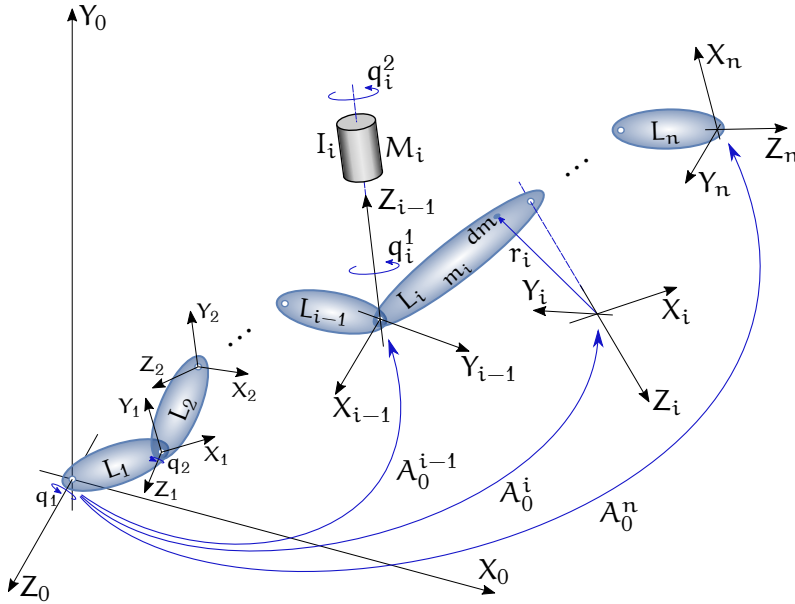
Niech będzie dany manipulator o n stopniach swobody, z elastycznymi przegubami, przedstawiony na Rysunku 8.1. Oznaczenia na tym rysunku są analogiczne do tych z Rysunku 7.1 z poprzedniego rozdziału. Różnica między tymi rysunkami polega na tym, że obecnie położenia przegubów nie są identyczne z położeniami wałów silników. Z tego powodu położenia przegubów oznaczamy symbolem $q^1 \in \mathbb{R}^n$, natomiast położenie silników opisuje wektor $q^2 \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że elastyczność przegubu i -tego modelujemy za pomocą sprężyny działającej na skręcanie, zob. Rysunek 8.2, ze stałą sprężystości k_i . Współrzędne uogólnione dla manipulatora o elastycznych przegubach obejmują położenia przegubów i położenia silników, $q = (q^1, q^2) \in \mathbb{R}^{2n}$. Odpowiednie prędkości uogólnione $\dot{q} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2)$.

Energia kinetyczna manipulatora elastycznego jest opisana formą kwadratową postaci

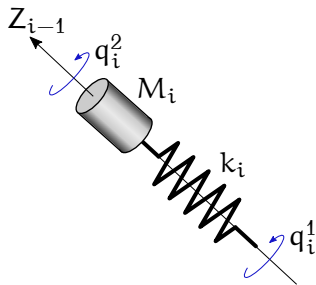
$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (\dot{q}^{1T}, \dot{q}^{2T}) \begin{bmatrix} Q_{11}(q^1, q^2) & Q_{12}(q^1, q^2) \\ Q_{21}(q^1, q^2) & Q_{22}(q^1, q^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \end{pmatrix},$$

gdzie Q jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną. Można pokazać, że w ogólnym przypadku macierz $Q_{12}(q^1, q^2) = Q_{21}^T(q^1, q^2)$ ma postać

$$Q_{12}(q^1, q^2) = \begin{bmatrix} 0 & S_{12}(q_1^1) & S_{13}(q_1^1, q_2^1) & \dots & S_{1n}(q_1^1, q_2^1, \dots, q_{n-1}^1) \\ 0 & 0 & S_{23}(q_2^1) & \dots & S_{2n}(q_2^1, \dots, q_{n-1}^1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_{n-1n}(q_{n-1}^1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$



Rysunek 8.1: Manipulator o elastycznych przegubach: dynamika



Rysunek 8.2: Model elastycznego przegubu

Przy założeniu, że silniki napędzające przeguby zostały umieszczone poza ramionami (na przykład, przy podstawie manipulatora) otrzymujemy zależności $Q_{12}(q^1, q^2) = 0$, a także $Q^1(q^1, q^2) = Q(q^1)$ i $Q_{22}(q^1, q^2) = \text{diag}\{I_1, I_2, \dots, I_n\}$, gdzie I_i oznacza moment bezwładności wirnika silnika numer i . W takim przypadku energia kinetyczna składa się z dwóch niezależnych członów, z których pierwszy opisuje energię kinetyczną manipulatora (bez uwzględnienia silników), a drugi energię kinetyczną silników,

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^1{}^T Q(q^1) \dot{q}^1 + \frac{1}{2} \dot{q}^2{}^T I \dot{q}^2.$$

Macierz $Q^1(q^1)$ bezwładności manipulatora jest zdefiniowana tą samą

formułą, co w przypadku manipulatora sztywnego, z tą różnicą, że nie zawiera momentów bezwładności silników. W dalszym ciągu będziemy się posługiwać tym wzorem na energię kinetyczną.

Energia potencjalna manipulatora o elastycznych przegubach składa się z energii pochodzącej od działania sił grawitacji i z energii sprężystości sprężyn służących jako model elastyczności przegubów. Mamy zatem

$$V(q) = V^1(q^1) + \frac{1}{2} (q^2 - q^1)^T K (q^2 - q^1),$$

gdzie diagonalna macierz

$$K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

jest macierzą elastyczności przegubów. Energia potencjalna $V^1(q^1)$ jest opisana tą samą formułą, co w przypadku manipulatora sztywnego. W ten sposób otrzymujemy lagranżian manipulatora o elastycznych przegubach

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q).$$

Lagranżowskie równania dynamiki manipulatora o elastycznych przegubach

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \text{siły i momenty sił niepotencjalnych}$$

przy założeniu, że jedyne siły niepotencjalne są sterowaniami przyjmują następującą postać

$$\begin{cases} Q(q^1) \ddot{q}^1 + C(q^1, \dot{q}^1) \dot{q}^1 + D(q^1) - K(q^2 - q^1) = 0 \\ I \ddot{q}^2 + K(q^2 - q^1) = u \end{cases}. \quad (8.1)$$

Symbol u oznacza siły i momenty sił wywierane przez silniki napędzające przeguby. Siły te działają na współrzędne uogólnione q^2 dotyczące silników. Zauważmy, że sterowania nie oddziałują bezpośrednio na współrzędne q^1 manipulatora. Uzyskany lagranżowski model dynamiki (8.1) manipulator o elastycznych przegubach nazywamy zredukowanym modelem Sponga.

8.2. Manipulator jako układ sterowania

Model dynamiki (8.1) można przedstawić w standardowej postaci układu sterowania. W tym celu definiujemy nowe zmienne stanu

$$\begin{cases} x^1 = q^1 \\ x^2 = \dot{q}^1 \\ x^3 = q^2 \\ x^4 = \dot{q}^2 \end{cases}$$

i zapisujemy równania dynamiki w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 \\ \dot{x}^2 = F_1(x^1, x^2) + G_1(x^1)x^3 \\ \dot{x}^3 = x^4 \\ \dot{x}^4 = F_2(x^1, x^2) + I^{-1}u \end{cases}, \quad (8.2)$$

przy oznaczeniach

$$\begin{aligned} F_1(x^1, x^2) &= -Q^{-1}(x^1)(C(x^1, x^2)x^2 + D(x^1) + Kx^1, \\ G_1(x^1) &= Q^{-1}(x^1)K, \quad F_2(x^1, x^3) = -I^{-1}K(x^3 - x^1). \end{aligned}$$

Podobnie, jak dla manipulatora sztywnego, podstawowym zadaniem sterowania manipulatora o elastycznych przegubach polega na śledzeniu zadanej trajektorii przegubowej $q_d^1(t)$, tzn. znalezieniu takiego sterowania $u(t)$, żeby trajektoria $q^1(t)$ przegubów manipulatora podanego temu sterowaniu dążyła asymptotycznie do trajektorii zadanej,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q^1(t) = q_d^1(t).$$

8.3. Algorytm obliczanego momentu

Zadanie śledzenia rozwiążemy korzystając z algorytmu obliczanego momentu, który zastosujemy do modelu (8.1). Dla ułatwienia zapiszemy ten model w nieco prostszej postaci

$$\begin{cases} Q(q^1)\ddot{q}^1 + B(q^1, \dot{q}^1) - K(q^2 - q^1) = 0 \\ I\ddot{q}^2 + K(q^2 - q^1) = u \end{cases},$$

gdzie $B(q^1, \dot{q}^1) = C(q^1, \dot{q}^1)\dot{q}^1 + D(q^1)$. Zaczynamy od tego, że z pierwszego równania tego modelu wyliczamy q^2 ,

$$q^2 = K^{-1}Q\ddot{q}^1 + K^{-1}B + q^1,$$

a następnie pochodne tej zmiennej względem czasu

$$\dot{q}^2 = K^{-1}Q\dot{q}^{1(3)} + K^{-1}\dot{Q}\dot{q}^1 + K^{-1}\dot{B} + \dot{q}^1$$

oraz

$$\ddot{q}^2 = K^{-1}Q\dot{q}^{1(4)} + 2K^{-1}\dot{Q}\dot{q}^{1(3)} + K^{-1}\ddot{Q}\dot{q}^1 + K^{-1}\ddot{B} + \ddot{q}^1.$$

Po podstawieniu q^2 i \ddot{q}^2 do drugiego z równań otrzymujemy

$$IK^{-1}Q\dot{q}^{1(4)} + 2IK^{-1}\dot{Q}\dot{q}^{1(3)} + I(K^{-1}\ddot{Q} + I_n)\ddot{q}^1 + IK^{-1}\ddot{B} + K(q^2 - q^1) = u,$$

co w skrócie można zapisać jako

$$IK^{-1}Qq^{1(4)} + E(q^1, \dot{q}^1, \ddot{q}^1, q^{1(3)}) = u.$$

Do ostatniego zastosujemy teraz sprzężenie zwrotne

$$u = E + IK^{-1}Qv,$$

które prowadzi do układu sterowania

$$q^{1(4)} = v$$

rzędu 4 ze względu na zmienną q^1 . Oznaczmy przez $e(t) = q^1(t) - q_d^1(t)$ błąd śledzenia. Wówczas algorytm śledzenia zadanej trajektorii można wybrać postaci

$$v = q_d^{1(4)} - K_3e^{(3)} - K_2\ddot{e} - K_1\dot{e} - K_0e,$$

z diagonalnymi macierzami wzmocnień K_0, K_1, K_2, K_3 . Równanie błędu

$$e^{(4)} + K_3e^{(3)} + K_2\ddot{e} + K_1\dot{e} + K_0e = 0$$

będzie stabilne, jeżeli elementy macierzy wzmocnień spełniają warunek Hurwitza. Przypominamy, że wielomian

$$W(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

jest hurwitzowski (ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych), jeżeli jego współczynniki spełniają warunki

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_1a_2 - a_0a_3 > 0, a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2 > 0.$$

Ze względu na to, że macierze wzmocnień są diagonalne równanie błędu dekomponuje się na n niezależnych równań różniczkowych, których równania charakterystyczne mają postać $W(x) = 0$. Po dokonaniu wyboru macierzy wzmocnienia otrzymujemy następujący algorytm śledzenia trajektorii przegubowej manipulatora o elastycznych przegubach

$$u = E(q^1, \dot{q}^1, \ddot{q}^1, q^{1(3)}) + IK^{-1}Q(q^1) \left(q_d^{1(4)} - K_3e^{(3)} - K_2\ddot{e} - K_1\dot{e} - K_0e \right). \quad (8.3)$$

Algorytm (8.3) nazywa się algorytmem obliczanego momentu lub algorytmem dynamiki odwrotnej. Zauważmy, że jego użycie wymaga obliczania w czasie rzeczywistym pochodnych trajektorii przegubowej do rzędu 3.

8.4. Komentarze i odniesienia literaturowe

Uzupełnienie wiadomości na temat modelowania i sterowania manipulatorów o elastycznych przegubach można znaleźć w Rozdziale 7 monografii [TMD⁺00].

Literatura

- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 9

Dynamika manipulatora o elastycznych ogniwach

W przypadku manipulatorów o długich i stosunkowo cienkich ogniwach, takich jak manipulatory montowane na stacjach kosmicznych, pojawia się konieczność uwzględnienia efektów związanych z elastycznością ogniw. Modelowanie dynamiki manipulatorów o elastycznych ogniwach jest zadaniem znacznie trudniejszym niż manipulatorów sztywnych, prowadzi bowiem do równań różniczkowych cząstkowych Eulera-Lagrange'a. Aby zaznajomić Czytelnika z metodologią tworzenia takiego modelu dynamiki rozważymy płaski manipulator elastyczny złożony z pojedynczego ogniwa przedstawiony na Rysunku 9.1. Zakładamy, że manipulator ma postać cienkiego, lekkiego, jednowymiarowego i jednorodnego pręta, który wykonuje ruch obrotowy na płaszczyźnie względem podstawowego układu współrzędnych (X_0, Y_0) . Ugięcie pręta również ma miejsce na płaszczyźnie. Układ ogniwa (X, Y) jest związany z manipulatorem w taki sposób, że ugięty pręt jest styczny do osi X tego układu. Zakładamy, że pręt ma długość l , a jego kąt obrotu oznaczamy symbolem θ . Obrót pręta następuje pod działaniem silnika umieszczonego w przegubie.

9.1. Model lagranżowski

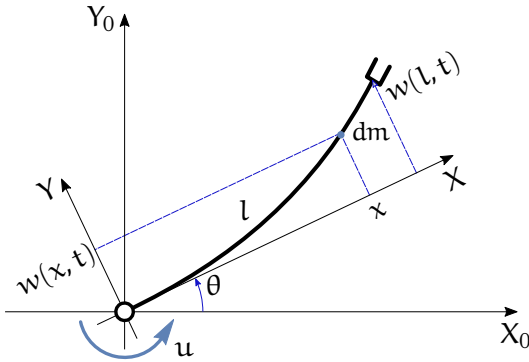
Niech P oznacza punkt ogniwa o masie dm , o współrzędnych (x, y) względem układu lokalnego. Oznaczamy przez $w(x, t)$ ugięcie ogniwa w punkcie P , w chwili t . Zakładamy, że ugięcie ogniwa jest małe. Chwilowe położenie punktu P w układzie podstawowym zdefiniujemy jako

$$y(x, t) = x\theta + w(x, t).$$

W celu zastosowania formalizmu lagranżowskiego obliczamy energię kinetyczną elementu dm ogniwa,

$$dK = \frac{1}{2} dm v^T v = \frac{1}{2} dm \|v\|^2,$$

gdzie v oznacza prędkość punktu P względem układu podstawowego. Ponieważ przekształcenie układu podstawowego w układ ogniwa polega



Rysunek 9.1: Manipulator o elastycznych ogniwach: dynamika

na obrocie na płaszczyźnie względem osi Z o kąt θ , położenie punktu P obliczamy jako

$$R(Z, \theta) \begin{pmatrix} x \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 \\ s_\theta & c_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xc_\theta - ws_\theta \\ xs_\theta + wc_\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wynika stąd, że

$$v = (-x\dot{\theta}s_\theta - w_t s_\theta - wc_\theta \dot{\theta}, x\dot{\theta}c_\theta + w_t c_\theta - ws_\theta \dot{\theta})$$

oraz

$$\|v\|^2 = x^2 \dot{\theta}^2 + w_t^2 + w^2 \dot{\theta}^2 + 2xw_t \dot{\theta},$$

gdzie $w_t(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}$. Ponieważ pręt stanowiący ogniwo jest jednorodny, jego gęstość liniowa ρ jest stała i $dm = \rho dx$. Korzystając z przeprowadzonych wyliczeń otrzymujemy

$$dK = \frac{1}{2} \rho (x^2 \dot{\theta}^2 + w_t^2 + w^2 \dot{\theta}^2 + 2xw_t \dot{\theta}) dx.$$

Na mocy założenia, że ugięcie ogniwa jest małe możemy pominąć w powyższym wzorze składnik zawierający w^2 , co daje wyrażenie

$$dK = \frac{1}{2} \rho (x^2 \dot{\theta}^2 + w_t^2 + 2xw_t \dot{\theta}) dx.$$

Przy założeniu, że pręt tworzący ogniwo jest lekki, jego energia potencjalna jest energią sprężystości. Energia elementu masy dm wynosi

$$dV = \frac{1}{2} EI \kappa^2 dx,$$

W powyższym wzorze EI oznacza moduł sprężystości (Younga) pręta, a κ jego krzywiznę w punkcie P zdefiniowaną jako

$$\kappa = \frac{d}{ds} w_x(x, t) = \frac{w_{xx}}{\sqrt{1 + w_x^2}} \cong w_{xx}(x, t),$$

gdzie $ds = \sqrt{1 + w_x^2} dx$ oznacza element długości ogniwa, a $w_x = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$, $w_{xx} = \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}$. Wykorzystaliśmy tu założenie, że ugięcie ogniwa jest małe, co pozwala przyjąć, że $w_x^2 \ll 1$.

W rezultacie, lagranżian elementu masy dm przybiera postać

$$dL = dK - dV = \frac{1}{2} \left(\rho x^2 \dot{\theta}^2 + \rho w_t^2 + 2\rho x \dot{\theta} w_t - EI w_{xx}^2 \right) dx.$$

Po uwzględnieniu energii potencjalnej silnika lagranżian układu ogniwo+silnik ma postać

$$L = \int_0^l dL = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\rho x^2 \dot{\theta}^2 + \rho w_t^2 + 2\rho x \dot{\theta} w_t - EI w_{xx}^2 \right) dx + \frac{1}{2} I_m \dot{\theta}^2,$$

Po podstawieniu $I_{lm} = \int_0^l \rho x^2 dx + I_m$ i przy założeniu, że $EI = 1$ lagranżian można wyrazić jako

$$L = \frac{1}{2} I_{lm} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho w_t^2 dx + \int_0^l \rho x \dot{\theta} w_t dx - \frac{1}{2} \int_0^l w_{xx}^2 dx. \quad (9.1)$$

9.1.1. Drgania pręta

W celu pokazania, jakiego rodzaju problemy pojawiają się przy wyznaczeniu lagranżowskiego modelu dynamiki drgającego ogniwa robota założymy na chwilę, że ogniwo nie obraca się, zatem kąt $\theta(t) = 0$. Otrzymamy wtedy funkcjonal działania

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \tilde{L}(w, w_t, w_x, w_{tt}, w_{tx}, w_{xx}) dx dt,$$

z lagranżianem

$$\tilde{L}(w, w_t, w_x, w_{tt}, w_{tx}, w_{xx}) = \frac{1}{2} \left(\rho w_t^2 - EI w_{xx}^2 \right).$$

Ekstremale tego funkcjonału spełniają równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w_t} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w_x} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w_{tx}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial w_{xx}} = 0.$$

Po wykonaniu stosownych obliczeń otrzymujemy równania Eulera-Lagrange'a

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie $a^2 = \frac{\rho}{EI}$. Równanie to można rozwiązać metoda separacji zmiennych. Załóżmy, że $w(x, t) = F(x)G(t)$. Otrzymujemy

$$\frac{d^4 F(x)}{dx^4} G(t) + a^2 F(x) \frac{d^2 G(t)}{dt^2} = 0,$$

czyli

$$\frac{1}{F(x)} \frac{d^4 F(x)}{dx^4} = -\frac{a^2}{G(t)} \frac{d^2 G(t)}{dt^2} = k^4 = \text{const}.$$

W konsekwencji mamy dwa liniowe równania różniczkowe zwyczajne

$$\frac{d^4 F(x)}{dx^4} - k^4 F(x) = 0 \quad \text{ i } \quad \frac{d^2 G(t)}{dt^2} + \frac{k^4}{a^2} G(t) = 0.$$

Przy oznaczeniu $\gamma^2 = \frac{k^4}{a^2}$ rozwiązania tych równań można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} F(x) &= A \sinh kx + B \cosh kx + C \sin kx + D \cos kx, \\ G(t) &= E \sin \gamma t + F \cos \gamma t, \end{aligned}$$

gdzie stałe A, B, C, D, E, F zależą od warunków początkowych ($w(0, x) = 0$) i brzegowych ($w(0, t) = w_x(0, t) = 0$, $w_{xx}(l, t) = 0$, $w_x^{(3)}(l, t) = 0$). W rezultacie, pokazaliśmy, że drgania pręta są opisane kombinacją hiperbolicznych funkcji trygonometrycznych i funkcji trygonometrycznych,

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \\ &= (A \sinh kx + B \cosh kx + C \sin kx + D \cos kx)(E \sin \gamma t + F \cos \gamma t). \end{aligned}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych prowadzi do następujących wniosków

$$\begin{aligned} B + D &= A + C = 0, \\ A(\sinh kl + \sin kl) + B(\cosh kl + \cos kl) &= 0, \\ A(\cosh kl + \cos kl) + B(\sinh kl - \sin kl) &= 0. \end{aligned}$$

Warunkiem istnienia nietrywialnego rozwiązania A, B ostatnich dwóch równań jest

$$\det \begin{bmatrix} \sinh kl + \sin kl & \cosh kl + \cos kl \\ \cosh kl + \cos kl & \sinh kl - \sin kl \end{bmatrix} = 0,$$

co wobec tożsamości $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ i $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ oznacza, że k powinno być rozwiązaniem równania

$$\cosh kl \cos kl = -1. \quad (9.2)$$

Oznaczmy przez k_i i -te rozwiązanie tego równania; można pokazać, że w przybliżeniu $k_i \cong \frac{(2i+1)\pi}{2l}$. Biorąc pod uwagę warunki brzegowe i warunek początkowy uzyskujemy rozwiązanie $w(x, t)$ w postaci nieskończonego szeregu

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) q_i(t), \quad (9.3)$$

gdzie

$$\varphi_i(x) = d_i ((\sinh k_i l + \sin k_i l)(\cosh k_i x - \cos k_i x) - (\cosh k_i l + \cos k_i l)(\sinh k_i x - \sin k_i x)),$$

$d_i = \text{const}$, oraz

$$q_i(t) = \sin \frac{k_i^2}{a} t$$

Przedstawiony wywód ułatwi nam zrozumienie postępowania opisanego w następnych rozdziale.

9.2. Lagranżian przybliżony

Kierując się wynikami uzyskanymi w ostatnim podrozdziale założymy, że funkcja ugięcia ogniwa jest opisana skończoną sumą szeregu (9.3), tzn.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) q_i(t), \quad (9.4)$$

gdzie funkcje $\varphi_i(x)$ stanowią pewną rodzinę ortogonalnych funkcji bazowych postaci

$$\varphi_i(x) = c_i \left(\sinh k_i x - \sin k_i x - \frac{(\sinh k_i l + \sin k_i l)(\cosh k_i x - \cos k_i x)}{\cosh k_i l + \cos k_i l} \right),$$

gdzie k_i spełnia warunek (9.2), a stała c_i jest wybrana w taki sposób, żeby

$$\int_0^l \varphi_i^2(x) dx = 1.$$

Ortogonalność funkcji bazowych oznacza

$$\int_0^l \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \delta_{ij}.$$

Przy założonej postaci funkcji ugięcia obliczamy pochodne

$$w_t = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \dot{q}_i, \quad w_{xx} = \sum_{i=1}^l \varphi_{i,xx}(x) q_i.$$

Po podstawieniu tych wyników do (9.1) otrzymamy przybliżone wyrażenie na lagranżian

$$L(\theta, \dot{\theta}, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} I_{lm} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i^2 + \dot{\theta} \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2, \quad (9.5)$$

w którym $\alpha_i = \int_0^l x \varphi_i(x) dx$ i $\omega_i^2 = \int_0^l (\varphi_{i,xx})^2(x) dx$. Lagranżian (9.5) zależy od skończonej liczby współrzędnych i prędkości uogólnionych, co pozwala nam napisać klasyczne równania Eulera-Lagrange'a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = u \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \end{cases}$$

Zakładamy, że momenty napędowe u działają na współrzędną θ , natomiast na współrzędne q_i nie działają żadne siły niepotencjalne. Po wykonaniu odpowiednich obliczeń uzyskujemy następujące równania Eulera-Lagrange'a

$$\begin{aligned} I_{lm} \dot{\theta} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \ddot{q}_i &= u, \\ \ddot{q}_i + \alpha_i \ddot{\theta} + \omega_i^2 q_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Po rozwikłaniu ze względu na przyspieszenia dochodzimy do równań

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \sum_{i=1}^n a_i q_i + b u \\ \ddot{q}_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} q_j + f_i u, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (9.6)$$

przy oznaczeniach

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{\alpha_i \omega_i^2 q_i}{I_{lm} - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}, \quad b = \frac{1}{I_{lm} - \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}, \\ c_{ij} &= -\left(\alpha_i a_j + \omega_i^2 \delta_{ij} \right), \quad f_i = -\alpha_i b. \end{aligned}$$

Równania (9.6) definiują liniowy układ sterowania. Wprowadźmy nowe współrzędne

$$\begin{cases} x_1 = q_1 \\ x_2 = \dot{q}_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} = q_n \\ x_{2n} = \dot{q}_n \\ x_{2n+1} = \theta \\ x_{2n+2} = \dot{\theta} \end{cases}.$$

Układ sterowania reprezentujący dynamikę ogniwa przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad (9.7)$$

z funkcją wyjścia oznaczającą położenie końca ogniwa, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & 0 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1 \\ 0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} \varphi_1(l) \\ 0 \\ \varphi_2(l) \\ 0 \\ \vdots \\ \varphi_n(l) \\ 0 \\ l \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Typowe zadanie sterowania manipulatora o elastycznych ogniwach polega na śledzeniu zadanej trajektorii $y_d(t)$ efektora. Korzystając z modelu (9.7) zadanie to można rozwiązać metodami liniowej teorii regulacji. Potrzebne w algorytmie chwilowe wartości θ i $\dot{\theta}$ uzyskujemy z bezpośrednich pomiarów. Wartości współrzędnych „ukrytych” q_i wyznaczamy pośrednio. W tym celu wybieramy na osi X_1 punkty o współrzędnych $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ i mierzymy ugięcia $w_i(t) = w(\xi_i, t)$ ogniwa w tych punktach. Niech $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \dots, w_r(t))^T$. Ze wzoru (9.4) uzyskujemy układ równań

$$w(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\xi_1) & \varphi_2(\xi_1) & \cdots & \varphi_n(\xi_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(\xi_r) & \varphi_2(\xi_r) & \cdots & \varphi_n(\xi_r) \end{bmatrix} q(t) = \Phi(\xi) q(t).$$

Aby wyznaczenie $q(t)$ było możliwe, macierz $\mathcal{W}(t)$ musi mieć rząd $\geq n$. Biorąc odpowiednią odwrotność macierzy $\mathcal{W}(t)$ wyliczamy ukryte współrzędne $q(t)$. Prędkości \dot{q} wyznaczamy przez różniczkowanie.

9.3. Komentarze i odniesienia literaturowe

Wywody przedstawione w niniejszym rozdziale opierają się na pracy [WV92]. Rozwiązanie równania drgań pręta wykorzystane w podrozdziale 9.1.1 można znaleźć w rozdziale 7, par. 19 podręcznika [Smi63].

Literatura

- [Smi63] W. I. Smirnow, *Matematyka wyższa*, wolumen II. PWN, Warszawa, 1963.
- [WV92] D. Wang, M. Vidyasagar, Passive control of a flexible link. *Int. Journal of Robotics Research*, 11(6):572–578, 1992.

Rozdział 10

Kinematyka robotów mobilnych

Robotem mobilnym nazywamy takiego robota, który może się przemieszczać w swoim otoczeniu. Do klasy robotów mobilnych należą m.in. kołowe roboty mobilne, roboty kroczące, roboty podwodne, latające, kosmiczne, etc. Załóżmy, że $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$ oznacza współrzędne uogólnione robota, \dot{q} jego prędkości. Przyjmiemy, że ruch robota mobilnego podlega ograniczeniom (więzom) fazowym w postaci Pfaffa,

$$A(q)\dot{q} = 0, \quad (10.1)$$

gdzie $A(q)$ oznacza macierz rozmiaru $l \times n$, $l \leq n$, zależną w sposób gładki od współrzędnych. Macierz $A(q)$ będziemy nazywać macierzą Pfaffa. Zakładamy, że ograniczenia (10.1) są niezależne, co oznacza, że $\text{rank } A(q) = l$. Spełnienie ograniczeń oznacza, że w każdym punkcie $q \in \mathbb{R}^n$ dopuszczalne prędkości robota należą do jądra macierzy $A(q)$, tzn. $\dot{q} \in \text{Ker } A(q)$. Jeżeli wybierzemy pola wektorowe

$$g_1(q), g_2(q), \dots, g_m(q),$$

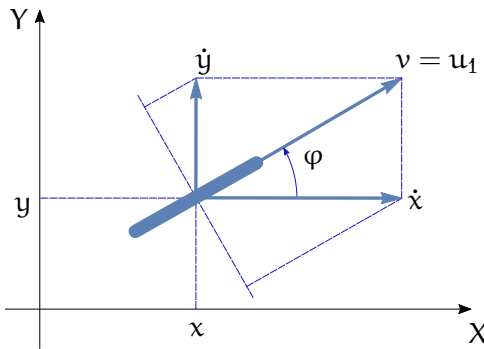
$m = n - l$, rozpinające przestrzeń $\text{Ker } A(q)$, to warunek (10.1) możemy zapisać w postaci układu sterowania

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m g_i(q)u_i = G(q)u, \quad (10.2)$$

z wektorem sterowań $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$ i macierzą sterowań $G(q)$, której kolumnami są pola $g_1(q), g_2(q), \dots, g_m(q)$, zależną w sposób gładki od współrzędnych q . Mówimy, że pola $g_i(q)$ są anihilowane przez macierz Pfaffa. Układ (10.2) będziemy traktować jako reprezentację kinematyki robota mobilnego.

10.1. Przykłady więzów w postaci Pfaffa

Typowym źródłem więzów (10.1) są kołowe roboty mobilne poruszające się bez poślizgu kół. Poniżej przedstawimy kilka przykładów.



Rysunek 10.1: Koło toczące się bez poślizgu bocznego

10.1.1. Koło, łyżwa, narta

Rozważmy koło toczące się po poziomej płaszczyźnie bez poślizgu poprzecznego przedstawione schematycznie na Rysunku 10.1. Tego rodzaju robot mobilny bywa nazywany monocyklem. Rysunek przedstawia widok koła z góry. Jako współrzędne $q = (x, y, \varphi)^T \in \mathbb{R}^3$ przyjmujemy położenie punktu kontaktu koła z podłożem względem układu (XY) i orientację koła. Ze względu na to, że nie bierzemy pod uwagę kąta obrotu koła, przykład ten odnosi się także do przypadku ruchu łyżwy lub narty.

Warunek braku poślizgu bocznego oznacza, że w punkcie kontaktu prędkości w kierunku prostopadłym do koła znoszą się, czyli

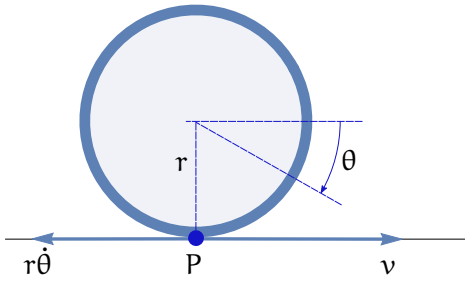
$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0.$$

Macierz Pfaffa ma postać

$$A(q) = [\sin \varphi \quad -\cos \varphi \quad 0]. \quad (10.3)$$

Macierz Pfaffa $A(q)$ ma rząd 1. Jej jądro jest generowane przez dwa pola, $l = 1$, $n = 3$, a więc $m = n - l = 2$, które można wybrać w postaci $g_1(q) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$ i $g_2 = (0, 0, 1)^T$. Zauważmy, że pola te nie są określone w sposób jednoznaczny (można wziąć ich dowolne kombinacje), jednak układ sterowania (10.2) jest zdefiniowany jednoznacznie. Z tego powodu pola sterujące będziemy się starali wybrać w taki sposób, żeby sterowania w układzie (10.2) miały jasny sens fizyczny. W przypadku koła toczącego się bez poślizgu bocznego kinematyka jest reprezentowana przez układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \varphi \\ \dot{y} = u_1 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = u_2 \end{cases}. \quad (10.4)$$



Rysunek 10.2: Koło toczące się

Nietrudno zauważyć, że sterowanie u_1 ma sens prędkości toczenia się koła, a sterowanie u_2 prędkości zmiany orientacji koła.

10.1.2. Koło toczące się

W modelu koła z poprzedniego podrozdziału uwzględnimy teraz kąt obrotu i założymy, że koło o promieniu r porusza się bez poślizgu bocznego i wzdłużnego (buksowania, blokowania). Taki ruch koła nazywamy właściwym toczeniem się. Widok z góry koła jest taki sam, jak na Rysunku 10.1, a jego widok z boku został pokazany na Rysunku 10.2. Wektor $q = (x, y, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^4$ współrzędnych opisujących toczenie się koła zawiera współrzędne punktu kontaktu koła z podłożem, orientację koła i kąt obrotu koła.

Warunek braku poślizgu bocznego będzie miał postać taką samą, jak poprzednio. Warunek braku poślizgu wzdłużnego oznacza, że wypadkowa prędkość w punkcie kontaktu koła z podłożem powinna wynosić zero, tzn.

$$v - r\dot{\theta} = 0,$$

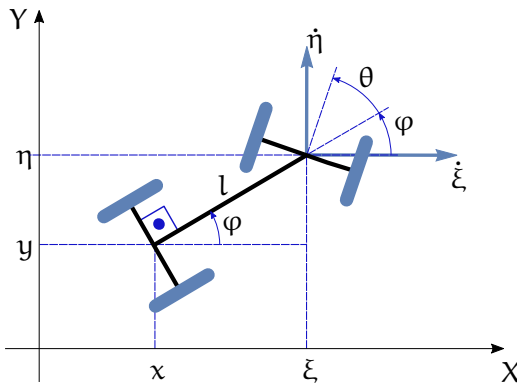
gdzie v oznacza prędkość przemieszczania się koła. Korzystając z zależności $\dot{x} = v \cos \varphi$, $\dot{y} = v \sin \varphi$ otrzymujemy

$$v = \dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi.$$

Oba warunki na brak poślizgu definiują macierz Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & -r \end{bmatrix}. \quad (10.5)$$

Rząd macierzy $A(q)$ wynosi 2, zatem jądro tej macierzy ma dwa generatory, które można wybrać w postaci $g_1(q) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0, 1)^T$



Rysunek 10.3: Samochód kinematyczny

i $g_2(q) = (0, 0, 1, 0)^T$. W konsekwencji, kinematyka koła toczącego się jest opisana układem sterowania

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 r \cos \varphi \\ \dot{y} = u_1 r \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = u_2 \\ \dot{\theta} = u_1 \end{cases} \quad (10.6)$$

Sterowanie u_1 oznacza prędkość obrotu koła, a sterowanie u_2 prędkość zmiany orientacji koła.

10.1.3. Samochód kinematyczny

Schematyczny widok samochodu kinematycznego został przedstawiony na Rysunku 10.3. Samochód kinematyczny jest pojazdem cztero-kołowym, który można traktować także jako dwukołowy traktor ciągnący dwukołową przyczepę. Wektor współrzędnych $q = (x, y, \varphi, \theta)^T \in \mathbb{R}^4$ składa się ze współrzędnych położenia środka osi tylnej, orientacji samochodu i kąta skreślenia osi przedniej (kierownicy).

Zakładamy, że ruch samochodu odbywa się bez poślizgu bocznego kół tylnych i przednich w punkcie kontaktu z podłożem. Ponieważ osie kół są sztywne, warunki poślizgu w punkcie kontaktu są równoważne brakowi poślizgu środka osi kół tylnych i przednich. Przy oznaczeniach z rysunku warunek braku poślizgu kół tylnych przyjmuje postać

$$\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0,$$

natomiast brak poślizgu kół przednich oznacza

$$\dot{\xi} \sin(\varphi + \theta) - \dot{\eta} \cos(\varphi + \theta) - l \cos \theta = 0.$$

Korzystając z zależności $\xi = x + l \cos \varphi$, $\eta = y + l \sin \varphi$ eliminujemy prędkości $\dot{\xi}$ i $\dot{\eta}$, i uzyskujemy macierz Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 \\ \sin(\varphi + \theta) & -\cos(\varphi + \theta) & -l \cos \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.7)$$

Łatwo sprawdzić, że rząd macierzy Pfaffa jest równy 2. Pola anihilowane przez macierz $A(q)$ możemy wybrać w postaci wektorów $g_1(q) = (l \cos \varphi \cos \theta, l \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta, 0)^T$ i $g_2(q) = (0, 0, 0, 1)^T$. Wówczas układ sterowania (10.2) jest następujący

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 l \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 l \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\varphi} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases}. \quad (10.8)$$

Sterowania występujące w układzie (10.8) mają dobry sens fizyczny. Sterowanie u_1 jest skalowaną przez l prędkością postępową środka przedniej osi samochodu, co można utożsamić z założeniem, że samochód ma napęd na przednie koła*. Sterowanie u_2 jest prędkością skręcania kierownicy. Zauważmy, że długość osi samochodu nie występuje w naszych rozważaniach, można je zatem odnieść także do roweru na dwóch kołach.

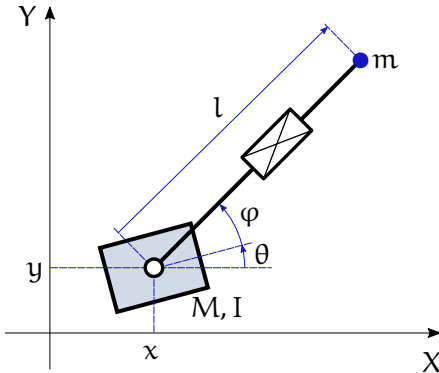
10.1.4. Robot kosmiczny

W tym podrozdziale pokażemy, że ograniczenia Pfaffa (10.1) mogą mieć zastosowanie nie tylko do kinematyki, lecz także do opisu dynamiki robota mobilnego. W tym celu rozważmy robota kosmicznego pokazanego na Rysunku 10.4. Robot składa się ze swobodnie szybującej platformy wyposażonej w manipulator pokładowy typu RT. Współrzędne robota $q = (\theta, \varphi, l)^T \in \mathbb{R}^3$ opisują orientację platformy, obrót ramienia względem lokalnego układu współrzędnych i wysunięcie ramienia manipulatora. Moment bezwładności platformy wynosi I , a efektor manipulatora pokładowego operuje znaną masą m .

Zakładamy, że ruch robota podlega Zasadzie Zachowania Momentu Pędu i że moment pędu robota = 0. Bilans momentów pędu daje zależność

$$I\dot{\theta} + ml^2(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) = 0,$$

*Wybierając alternatywnie wektor $g_1(q)$ w postaci $g_1(q) = (\cos \varphi, \sin \varphi, \frac{\sin \theta}{l \cos \theta}, 0)^T$ otrzymamy model (10.2), w którym u_1 będzie miało interpretację prędkości postępowej środka tylnej osi samochodu (samochód z tylnym napędem).



Rysunek 10.4: Robot kosmiczny

co prowadzi do macierzy Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} I + ml^2 & ml^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy Pfaffa jest równy 1. Przy wyborze generatorów jądra macierzy $A(q)$ w postaci $g_1(q) = \left(-\frac{ml^2}{I+ml^2}, 1, 0\right)^T$ i $g_2(q) = (0, 0, 1)^T$ otrzymujemy układ sterowania reprezentujący dynamikę robota kosmicznego

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -u_1 \frac{ml^2}{I+ml^2} \\ \dot{\phi} = u_1 \\ \dot{l} = u_2 \end{cases} \quad (10.9)$$

Jak łatwo widać, sterowanie u_1 oznacza prędkość obrotu, a u_2 prędkość wysuwu ramienia manipulatora pokładowego. Przedstawiony model bywa także stosowany do dynamiki jednonożnego robota skaczącego w fazie lotu, znajdującego się poza zasięgiem sił grawitacji. Miejsce ramienia manipulatora pokładowego zajmuje noga robota.

10.2. Więzy holonomiczne i nieholonomiczne

Jeżeli zależność (10.1) opisująca więzy da się sprowadzić do postaci zależnej wyłącznie od położenia q , to więzy nazywamy holonomicznymi lub całkowalnymi. W przypadku więzów holonomicznych mamy zatem

$$A(q)\dot{q} \iff F(q) = 0,$$

dla pewnej funkcji $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$. Z punktu widzenia mechaniki analitycznej, więzy holonomiczne można wyeliminować przez zdefiniowanie układu na pewnej $m = n - l$ -wymiarowej rozmaiłości

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(q) = 0\}$$

zawartej w \mathbb{R}^n . Istotne znaczenie ma zatem odróżnienie holonomicznych więzów typu Pfaffa od nieholonomicznych. W dalszym ciągu tego rozdziału opiszemy narzędzia pozwalające przeprowadzić takie rozróżnienie.

10.3. Stowarzyszona dystrybucja i algebra Liego

Niech będzie dana reprezentacja kinematyki robota mobilnego podlegającego więzom Pfaffa, w postaci układu sterowania (10.2). Zakładamy, że dla każdego stanu początkowego q_0 i każdego sterowania $u(t)$ istnieje trajektoria układu (10.2)

$$q(t) = \varphi_{q_0, t}(u(\cdot)).$$

Układ (10.2) jest zdefiniowany przez pola wektorowe sterujące

$$\mathcal{F} = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}.$$

Rozważmy obiekt złożony z pól sterujących i wszelkich ich kombinacji ze współczynnikami będącymi gładkimi funkcjami współrzędnych q ,

$$\mathcal{D} = \text{span}_{C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \{g_1, g_2, \dots, g_m\}. \quad (10.10)$$

Obiekt \mathcal{D} nazywamy dystrybucją stowarzyszoną z robotem mobilnym (lub z układem sterowania (10.2)). Pola g_i są generatorami dystrybucji. Na mocy definicji, elementami dystrybucji \mathcal{D} są kombinacje generatorów postaci

$$X = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i,$$

gdzie $\alpha_i = \alpha_i(q)$, $i = 1, 2, \dots, m$, oznaczają funkcje gładkie zmiennej q .

Mając dane dwa pola wektorowe $X, Y \in \mathcal{D}$ należące do dystrybucji definiujemy ich nawias Liego wzorem

$$[X, Y](q) = DY(q)X(q) - DX(q)Y(q), \quad (10.11)$$

gdzie symbol D oznacza pochodną (macierz Jacobiego), $DX(q) = \frac{\partial X(q)}{\partial q}$. Nawias Liego możemy traktować jako pewnego rodzaju iloczyn pól, o własnościach podobnych do własności iloczynu wektorowego w przestrzeni \mathbb{R}^3 . Następujące własności nawiasu Liego są przydatne przy obliczeniach:

1. Antyzwrotność: $[X, X] = 0$

2. Antysymetria: $[Y, X] = -[X, Y]$
3. Tożsamość Jacobiego: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$
4. Biliniowość: $[aX + bY, Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Y]$, dla $a, b \in \mathbb{R}$
5. $[\alpha X, \beta Y] = \alpha\beta[X, Y] + \alpha L_X \beta Y - \beta L_Y \alpha X$, gdzie $\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, a $(L_X \beta)(q) = d\beta(q)X(q)$ oznacza pochodną kierunkową (pochodną Liego) funkcji β względem pola X .

Warto zauważyć, że z tożsamości Jacobiego wynika niełączność nawiasu Liego, albowiem

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] - [Y, [Z, X]] \neq [[X, Y], Z].$$

Dystrybucję \mathcal{D} nazywamy inwolutywna, $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D}$, jeżeli nawiasy Liego pól z dystrybucje należą do dystrybucji. Na podstawie własności nawiasu Liego można pokazać, że inwolutywność wystarczy zbadać dla generatorów, tzn.

$$[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subset \mathcal{D} \iff [g_i, g_j] \in \mathcal{D}, \quad \text{dla każdego } i, j = 1, 2, \dots, m.$$

W każdym punkcie $q \in \mathbb{R}^n$ dystrybucja \mathcal{D} wyznacza podprzestrzeń liniową

$$\mathcal{D}(q) \subset \mathbb{R}^n,$$

w której znajdują się dopuszczalne kierunki ruchu robota mobilnego. Jeżeli dystrybucja jest inwolutywna, to można znaleźć rozmaitość $M \subset \mathbb{R}^n$, wymiaru m , taką że w każdym punkcie M przestrzeń $\mathcal{D}(q)$ jest styczna do M . Rozmaitość M nazywa się rozmaitością całkową dystrybucji \mathcal{D} . Jeżeli istnieje rozmaitość całkową, to położenia układu muszą znajdować się na tej rozmaitości, a więc więzy nałożone na ruch układu są holonomiczne. Sformułujemy to w postaci Twierdzenia.

Twierdzenie 10.3.1 *Jeżeli dystrybucja \mathcal{D} stowarzyszona z robotem mobilnym jest inwolutywna, to więzy (10.1), którym podlega ruch robota są holonomiczne.*

Bardzo istotną własnością układu sterowania reprezentującego kinematykę robot mobilnego jest sterowalność. Sterowalność układu oznacza, że dla dowolnych punktów $q_0, q_d \in \mathbb{R}^n$ można znaleźć sterowanie $u(t)$ takie że w pewnej chwili T trajektoria układu (10.2) zainicjowana w q_0 osiągnie punkt q_d , tzn. $\varphi_{q_0, T}(u(\cdot)) = q_d$. W rozważanych przez nas przykładach sterowalność oznacza, na przykład, że jest możliwe takie przetoczenie koła, że przyjmie ono zadane położenie i orientację, a także obróci się zadaną liczbę razy. Nie jest to sprawą oczywistą choćby z powodu, że liczba sterowań w układzie (10.2) jest z reguły mniejsza o wymiaru przestrzeni stanu. Natomiast jest rzeczą oczywistą, że jeżeli istnieje rozmaitość

całkowa dystrybucji \mathcal{D} , wymiaru $m < n$, to układ nie może być sterowalny.

W celu sformułowania warunku sterowalności wprowadzimy pojęcie algebry Liego \mathcal{L} stowarzyszonej z układem, rozumianej jako najmniejsza algebra Liego, nad zbiorem liczb rzeczywistych \mathbb{R} , zawierająca pola stowarzyszone g_1, g_2, \dots, g_m . W algebrze Liego układu znajdują się zatem pola stowarzyszone, wszelkie nawiasy Liego tych pól, nawiasy tych nawiasów, etc., a także kombinacje liniowe tych elementów ze współczynnikami rzeczywistymi. Mamy następujące Twierdzenie.

Twierdzenie 10.3.2 *Niech będzie dana algebra Liego \mathcal{L} układu (10.2). Jeżeli w każdym punkcie $q \in \mathbb{R}^n$ jest spełniony warunek*

$$\dim \mathcal{L}(q) = n,$$

to układ (10.2) jest sterowalny. Co więcej, ograniczenia (10.1) są nieholonomiczne.

Warunek sformułowany w Twierdzeniu 10.3.2 nazywa się Warunkiem Rzędu Algebry Liego (w języku angielskim LARC). Formalnie rzecz biorąc, algebra Liego \mathcal{L} zawiera nieskończenie wiele pól wektorowych i jej enumeratywne wyznaczenie nie jest możliwe. W praktyce jednak, jak to zobaczymy na przykładach, do sprawdzenia warunku rzędu wystarcza wyznaczenie kilku pól.

10.4. Przykłady

10.4.1. Koło, łyżwa, narta

Dla koła toczącego się bez poślizgu bocznego, łyżwy, narty mamy $q = (x, y, \varphi)^T$ i pola sterujące $g_1(q) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$ i $g_2 = (0, 0, 1)^T$. Algebra Liego

$$\mathcal{L} \ni g_1, g_2.$$

Te dwa pola nie wystarczą do spełnienia warunku rzędu, obliczymy więc nawias Liego

$$\begin{aligned} g_{12}(q) &= [g_1, g_2](q) = Dg_2(q)g_1(q) - Dg_1(q)g_2(q) = \\ &= -\frac{\partial g_1(q)}{\partial \varphi} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)^T. \end{aligned}$$

Pola $g_1, g_2, g_{12} \in \mathcal{L}$ spełniają warunek rzędu, ponieważ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

a zatem układ sterowania opisujący kinematykę koła jest sterowalny, a ograniczenia (10.3) są nieholonomiczne.

10.4.2. Koło toczące się

Koło toczące się jest scharakteryzowane przez $q = (x, y, \varphi, \theta)^T$ i, przy założeniu, że promień $r = 1$, pola sterujące przyjmują postać $g_1(q) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 1)^T$ i $g_2(q) = (0, 0, 1, 0)^T$. Algebra Liego zawiera te pola,

$$g_1, g_2 \in \mathcal{L}.$$

Obliczamy nawias Liego

$$\begin{aligned} g_{12}(q) &= [g_1, g_2](q) = Dg_2(q)g_1(q) - Dg_1(q)g_2(q) = \\ &= -\frac{\partial g_1(q)}{\partial \varphi} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Oczywiście, pola g_1, g_2, g_{12} nie wystarczą dla spełnienia warunku rzędu, dlatego wyliczamy kolejne nawiasy Liego

$$g_{112}(q) = [g_1, g_{12}](q) = Dg_{12}(q)g_1(q) - Dg_1(q)g_{12}(q) = 0$$

i

$$\begin{aligned} g_{212}(q) &= [g_2, g_{12}](q) = Dg_{12}(q)g_2(q) - Dg_2(q)g_{12}(q) = \\ &= \frac{\partial g_{12}(q)}{\partial \varphi} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

Ponieważ

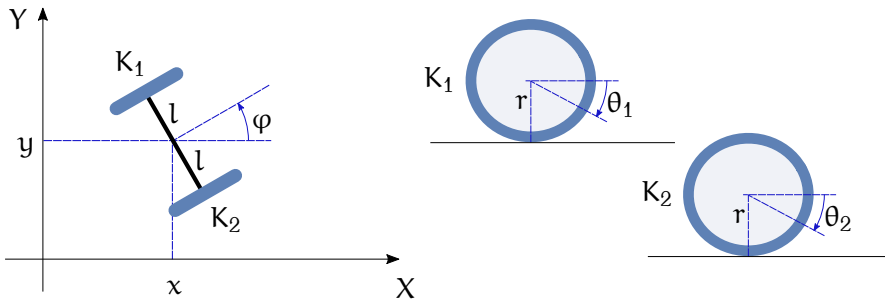
$$\text{rank} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4,$$

warunek rzędu jest spełniony. Układ (10.6) jest sterowalny a więzy opisane macierzą Pfaffa (10.5) są nieholonomiczne.

10.4.3. Samochód kinematyczny

Jako ostatni przykład rozważymy samochód kinematyczny o długości $l = 1$. Wektor stanu samochodu $q = (x, y, \varphi, \theta)^T$, a pola sterujące $g_1(q) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta, 0)^T$ i $g_2(q) = (0, 0, 0, 1)^T$. Oba te pola należą do algebry Liego, $g_1, g_2 \in \mathcal{L}$. Obliczamy nawias

$$\begin{aligned} g_{12}(q) &= [g_1, g_2](q) = Dg_2(q)g_1(q) - Dg_1(q)g_2(q) = -\frac{\partial g_1(q)}{\partial \theta} = \\ &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, -\cos \theta, 0)^T, \end{aligned}$$



Rysunek 10.5: Dwukołowa platforma mobilna

a następnie

$$\begin{aligned} g_{112}(q) &= [g_1, g_{12}](q) = Dg_{12}(q)g_1(q) - Dg_1(q)g_{12}(q) = \\ &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0)^T \end{aligned}$$

i

$$g_{212}(q) = [g_2, g_{12}](q) = Dg_{12}(q)g_2(q) - Dg_2(q)g_{12}(q) = g_1(q).$$

Warunek rzędu zbadamy korzystając z czterech pól wektorowych g_1 , g_{12} , g_{112} i g_2 . Otrzymujemy

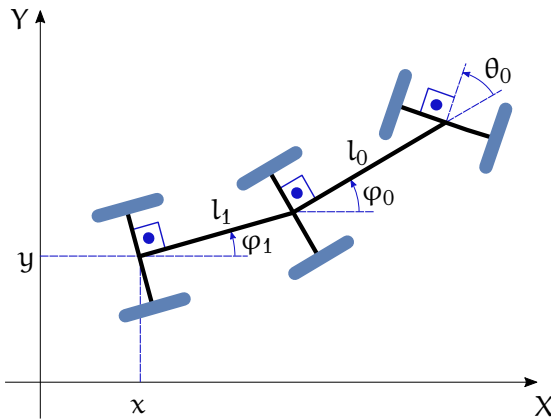
$$\text{rank} \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Na mocy Twierdzenia 10.3.2 układ (10.8) jest sterowalny, a ograniczenia z macierzą Pfaffa (10.7) nieholonomiczne.

10.5. Zadania

Zadanie 10.1 Dana jest dwukołowa platforma mobilna przedstawiona na Rysunku 10.5. Przyjąć, że oba koła mają promień r , a ich kąty obrotu są równe θ_1, θ_2 . Oś kół ma długość $2l$. Wybrać współrzędne uogólnione $q = (x, y, \varphi, \theta_1, \theta_2)^T$. Dla tej platformy:

1. Zakładając ruch bez poślizgu bocznego i wzdłużnego kół wyprowadzić wyrażenie na macierz Pfaffa.
2. Przedstawić kinematykę platformy w postaci bezdryfowego układu sterowania. Wyznaczyć dystrybucję stowarzyszoną z tym układem.



Rysunek 10.6: Samochód z przyczepą

3. Pokazać, że ograniczenia fazowe nie są (w pełni) nieholonomiczne. Wyznaczyć całkę pierwszą układu. Wyeliminować współrzędną φ .
4. Napisać równania ruchu układu we współrzędnych $(x, y, \theta_1, \theta_2)^T$. Pokazać, że więzy są teraz nieholonomiczne.

Zadanie 10.2 Dany jest czterokołowy samochód z przyczepą poruszający się bez poślizgu bocznego kół, przedstawiony na Rysunku 10.6. Dla tego układu:

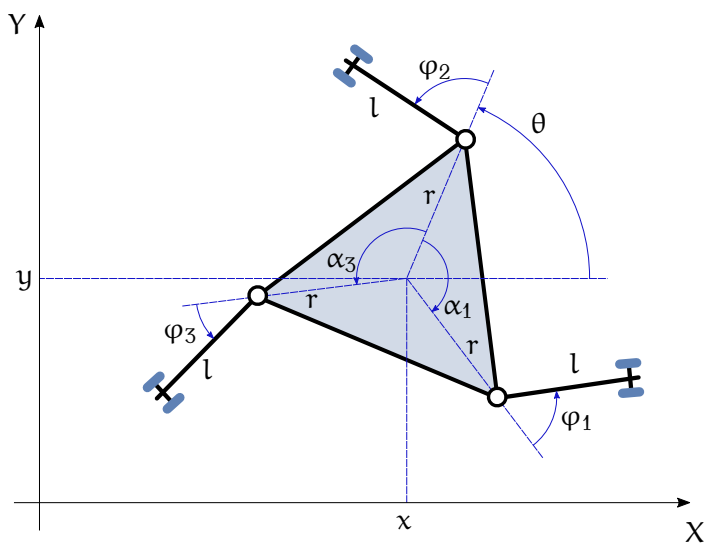
1. Wprowadzić postać macierzy Pfaffa,
2. Przedstawić kinematykę układu w postaci bezdryfowego układu sterowania.
3. Zbadać nieholonomiczność więzów.

Zadanie 10.3 Dany jest robot mobilny typu trójkątny smok, przedstawiony na Rysunku 10.7. Przy oznaczeniach jak na Rysunku przyjąć wektor współrzędnych $q = (x, y, \theta, \varphi_1, \varphi_2)^T$. Założyć, że $r = l = 1$, a także, że $\alpha_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$. Przyjmując, że macierz Pfaffa jest postaci

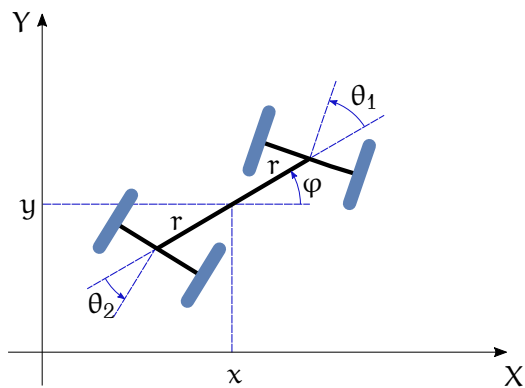
$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_1 + \varphi_1 + \theta) & -\cos(\alpha_1 + \varphi_1 + \theta) & -1 - \cos \varphi_1 & -1 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha_2 + \varphi_2 + \theta) & -\cos(\alpha_2 + \varphi_2 + \theta) & -1 - \cos \varphi_2 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\alpha_3 + \varphi_3 + \theta) & -\cos(\alpha_3 + \varphi_3 + \theta) & -1 - \cos \varphi_3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Przedstawić kinematykę robota w postaci bezdryfowego układu sterowania.
2. Zbadać nieholonomiczność więzów (sterowalność układu).

Zadanie 10.4 Dla przedstawionej na Rysunku 10.8 deskorolki o długości $2r$:



Rysunek 10.7: Trójkątny smok



Rysunek 10.8: Deskorolka

1. Wyznaczyć macierz Pfaffa przy założeniu braku poślizgu bocznego kół.
2. Przedstawić kinematykę deskorolki w postaci bezdryfowego układu sterowania.
3. Zbadać nieholonomiczność więzów.

10.6. Komentarze i odniesienia literaturowe

Jako uzupełnienie tego rozdziału mogą służyć notatki [TM18], a także, w pewnym stopniu, monografia [TMD⁺00]. Przydatne mogą się także okazać podstawy geometrycznej teorii sterowania wyłożone w rozdziałach 7 i 8 notatek [TM17]. Z literatury w języku angielskim polecamy drugą połowę książki [MLS94]. Zaawansowane zastosowania metod algebry Liego do planowania ruchu robotów mobilnych opisuje monografia [Dul98].

Literatura

- [Dul98] I. Dulęba, *Algorithms of Motion Planning for Nonholonomic Robots*. Oficyna Wydawnicza PWr, Wrocław, 1998.
- [MLS94] R. Murray, Z. Li, S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [TM17] K. Tchoń, R. Muszyński, *Metody matematyczne automatyki i robotyki*. Projekt Azon, Wrocław, 2017.
- [TM18] K. Tchoń, R. Muszyński, *Mechanika analityczna*. Projekt Azon, Wrocław, 2018.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 11

Sterowanie kinematyczne robota mobilnego

11.1. Interpretacja nawiasu Liego

Niech będzie dany układ sterowania o dwóch wejściach

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2, \quad (11.1)$$

$q \in \mathbb{R}^n$, reprezentujący kinematykę pewnego robota mobilnego. Pola wektorowe występujące po prawej stronie równania (11.1) definiują układy dynamiczne, których trajektorie $\phi_{1t}(q)$ i $\phi_{2t}(q)$ spełniają równania różniczkowe

$$\frac{d\phi_{1t}(q)}{dt} = g_1(\phi_{1t}(q)), \quad \frac{d\phi_{2t}(q)}{dt} = g_2(\phi_{2t}(q)).$$

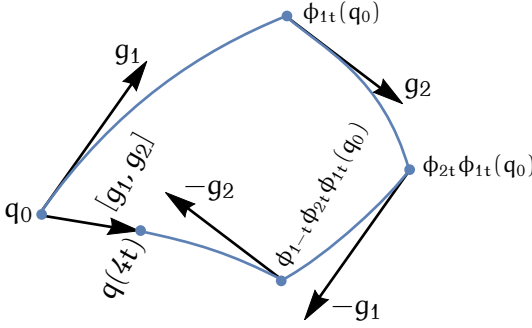
Założmy teraz, że w układzie (11.1) zastosowano kawałkami stałe sterowanie $u_4(\cdot)$ złożone z czterech segmentów postaci

1. $u_1 = 1, u_2 = 0$
2. $u_1 = 0, u_2 = 1$
3. $u_1 = -1, u_2 = 0$
4. $u_1 = 0, u_2 = -1,$

każdy trwający przez czas $\sqrt{\epsilon}$, dla pewnego $\epsilon > 0$. Niech q_0 oznacza stan początkowy układu. Przy założonym sterowaniu układ (11.1) będzie się poruszał po trajektoriach $\phi_{1t}(q)$ i $\phi_{2t}(q)$, odpowiednio w kierunku zgodnym z polem g_i lub przeciwnym do tego pola, jak pokazuje Rysunek 11.1.

Niech

$$q(4t) = \phi_{2t} \circ \phi_{1-t} \circ \phi_{2t} \circ \phi_{1t}(q_0)$$



Rysunek 11.1: Nawias Liego: interpretacja

oznacza trajektorię układu (11.1) zapoczątkowaną w $q(0) = q_0$, w chwili $4t$. Zamierzamy rozwinąć $q(4t)$ w szereg Taylora w punkcie $t = 0$. W tym celu obliczamy pochodną

$$\begin{aligned} \frac{dq(4t)}{dt} = & -g_2(q(4t)) - \frac{\partial \phi_{2-t}(q(4t))}{\partial q} g_1(\phi_{2t}(q(4t))) + \\ & \frac{\partial \phi_{2-t}(q(4t))}{\partial q} \frac{\partial \phi_{1-t}(\phi_{2t}(q(4t)))}{\partial q} g_2(\phi_{1t}(\phi_{2t}(q(4t)))) + \\ & \frac{\partial \phi_{2-t}(q(4t))}{\partial q} \frac{\partial \phi_{1-t}(\phi_{2t}(q(4t)))}{\partial q} \frac{\partial \phi_{2t}(\phi_{1t}(\phi_{2t}(q(4t))))}{\partial q} \times \\ & g_1(\phi_{2-t}(\phi_{1t}(\phi_{2t}(q(4t))))). \end{aligned}$$

Dla $t = 0$ otrzymujemy

$$\left. \frac{dq(4t)}{dt} \right|_{t=0} = -g_2(q_0) - g_1(q_0) + g_2(q_0) + g_1(q_0) = 0.$$

Po wykonaniu odpowiednich obliczeń można pokazać, że pochodna rzędu drugiego w $t = 0$ ma postać

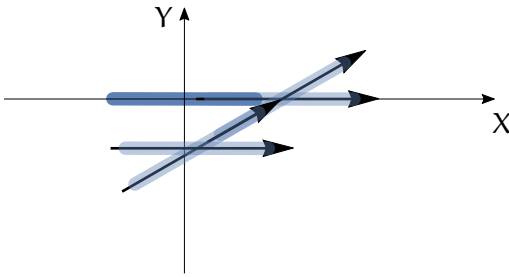
$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 q(4t)}{dt^2} \right|_{t=0} = & -[g_2, g_1](q_0) + [g_1, g_2](q_0) + \\ & + [g_2, g_1](q_0) - [g_2, g_1](q_0) = 2[g_1, g_2](q_0). \end{aligned}$$

Poprzestając na składnikach rzędu drugiego obliczamy

$$q(4t) \cong q_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 q(4t)}{dt^2} \right|_{t=0} t^2 = q_0 + [g_1, g_2](q_0) t^2.$$

Po podstawieniu $t = \sqrt{\epsilon}$ mamy

$$q(4\sqrt{\epsilon}) \cong q_0 + \epsilon [g_1, g_2](q_0),$$



Rysunek 11.2: Parkowanie monocykla

co oznacza, że wypadkowy kierunek ruchu układu (11.1) poddanego działaniu kawałkami stałego sterowania $u_4(\cdot)$ pokrywa się z nawiasem Liego pól sterujących. Okazuje się, że przez odpowiedni dobór kawałkami stałych sterowań potrafimy spowodować ruch w kierunku dowolnego pola wektorowego należącego do algebry Liego układu. Uzyskany ruch może mieć postać dość skomplikowanego manewru.

11.1.1. Manewr parkowania

Dla ilustracji najprostszej sytuacji przeanalizujemy manewr parkowania monocykla, którego kinematyka jest opisana wzorem (10.4). Współrzędne monocykla $q = (x, y, \varphi)^T$, a jego pola sterujące są równe $g_1(q) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$ i $g_2 = (0, 0, 1)^T$. Załóżmy, że monocykl znajduje się w punkcie $q_0 = 0$, zob. Rysunek 11.2. Parkowanie monocykla polega na przemieszczeniu go w kierunku osi $-Y$ układu współrzędnych. Pola sterujące pozwalają w tym punkcie na ruch w kierunkach

$$g_1(0) = (1, 0, 0)^T \quad \text{ i } \quad g_2(0) = (0, 0, 1)^T.$$

Zauważmy, że nawias Liego

$$[g_1, g_2](0) = (0, -1, 0)^T$$

daje potrzebny kierunek ruchu, zatem w celu zaparkowania monocykla potrzebne jest zastosowanie sterowania $u_4(\cdot)$. Zaparkowanie polega na wykonaniu następujących ruchów: jazda do przodu, skręcenie kół w lewo, jazda do tyłu i wyprostowanie kół.

11.2. Sterowanie robota mobilnego

Dwa typowe zadania sterowania robota mobilnego na poziomie kinematyki polegają na osiągnięciu zadanego punktu q_d w przestrzeni

stanu robota lub na śledzeniu zadanej trajektorii $q_d(t)$ współrzędnych uogólnionych. Pierwsze z tych zadań nazywa się zadaniem planowania ruchu robota, a drugie zadaniem śledzenia trajektorii. Załóżmy, że jest dany układ sterownia (10.2) reprezentujący kinematykę robota mobilnego. Zadanie planowania ruchu polega na znalezieniu sterowania $u(\cdot)$, takiego, że dla pewnego $T > 0$ $q(T) = \varphi_{q_0, T}(u(\cdot)) = q_d$. Zadanie śledzenia trajektorii sprowadza się do wyznaczenia takiego sterowania $u(\cdot)$, które zapewni asymptotyczną zbieżność trajektorii $q(t) = \varphi_{q_0, t}(u(\cdot))$ robota do $q_d(t)$. W praktyce, w obu tych zadaniach występują różne dodatkowe warunki, jak przechodzenie przez zadane punkty pośrednie lub omijanie przeszkód; mogą one być także formułowane jako zadania sterowania optymalnego. W naszym wykładzie ograniczymy się do podstawowego sformułowania zadań sterowania i zilustrujemy na przykładach metody ich rozwiązania.

11.2.1. Postać łańcuchowa

Jednym ze sposobów podejścia do zadania sterowania robotem mobilnym jest wykorzystanie postaci normalnych układu (10.2), tzn. prostych układów sterowania równoważnych układowi (10.2), dla których łatwo skonstruować algorytmy sterowania. Relacją równoważności, którą mamy na myśli jest równoważność przez sprzężenie zwrotne. Dwa układy sterowania

$$\sigma : \dot{q} = G(q)u \quad \text{ i } \quad \hat{\sigma} : \dot{p} = F(p)v,$$

$q, p \in \mathbb{R}^n$, $u, v \in \mathbb{R}^m$ nazywamy równoważnymi przez sprzężenie zwrotne, jeżeli istnieje przekształcenie współrzędnych $p = \Phi(q)$ i przekształcenie zmiennych sterujących $u = \beta(q)v$, takie że

$$D\Phi(q)G(q)\beta(q) = F(\Phi(q)),$$

przy czym Φ jest przekształceniem wzajemnie jednoznaczny i gładkim, z gładkim przekształceniem odwrotnym Φ^{-1} , a β jest nieosobliwą macierzą wymiaru $m \times m$, gładko zależną od q . Przekształcenie Φ nazywa się dyfeomorfizmem; często dopuszczamy, że jest to dyfeomorfizm lokalny, określony na pewnym (otwartym) podzbiorze \mathbb{R}^n . Mówimy wtedy o lokalnej równoważności przez sprzężenie zwrotne.

Ze względu na dostępność algorytmów sterowania szczególne znaczenie mają układy $\hat{\sigma}$ w postaci łańcuchowej. W dalszym ciągu ograniczymy

się do układów σ o dwóch wejściach sterujących. Postacią łańcuchową układu o dwóch wejściach nazywamy układ

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = v_1 \\ \dot{p}_2 = v_2 \\ \dot{p}_3 = v_1 p_2 \\ \vdots \\ \dot{p}_n = v_1 p_{n-1} \end{cases} . \quad (11.2)$$

Dla szczególnie niskich wymiarów przestrzeni stanu prawdziwe jest następujące Twierdzenie.

Twierdzenie 11.2.1 — *Jeżeli $n = m = 2$ i pola sterujące są niezależne, to układ σ jest równoważny przez sprzężenie zwrotne układowi*

$$\dot{p} = v.$$

— *Dla $n = 3$ lub $n = 4$ układ σ spełniający warunek rzędu algebry Liego (a więc sterowalny) jest lokalnie równoważny przez sprzężenie zwrotne odpowiedniej postaci łańcuchowej (11.2).*

Samochód kinematyczny

W celu zilustrowania Twierdzenia 11.2.1 przeanalizujemy model kinematyki samochodu kinematycznego (10.8) (zakładamy, że $l = 1$)

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \varphi \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 \sin \varphi \cos \theta \\ \dot{\varphi} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases} . \quad (11.3)$$

Na wstępie zastosujmy do tego układu sprzężenie zwrotne

$$\begin{cases} s_1 = u_1 \cos \varphi \cos \theta \\ s_2 = u_2 \end{cases} ,$$

które jest dobrze określone, pod warunkiem że kąty φ , θ spełniają warunek $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ i $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Przy takim założeniu kinematyka samochodu kinematycznego jest lokalnie równoważna przez sprzężenie zwrotne układowi sterowania

$$\begin{cases} \dot{x} = s_1 \\ \dot{y} = s_1 \tan \varphi \\ \dot{\varphi} = s_1 \frac{\tan \theta}{\cos \varphi} \\ \dot{\theta} = s_2 \end{cases} .$$

Zdefiniujmy teraz dyfeomorfizm współrzędnych

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4)^T = \Phi(x, y, \varphi, \theta) = \left(x, \frac{\tan \theta}{\cos^3 \varphi}, \operatorname{tg} \varphi, y \right)^T.$$

W nowych współrzędnych zapisujemy równania

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = \dot{x} = s_1 \\ \dot{p}_2 = s_1 \frac{3 \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \theta}{\cos^5 \varphi} + s_2 \frac{1}{\cos^3 \varphi \cos^2 \theta} \\ \dot{p}_3 = s_1 \frac{\operatorname{tg} \theta}{\cos^3 \varphi} \\ \dot{p}_4 = \dot{y} = s_1 \operatorname{tg} \varphi \end{cases}.$$

Kładąc $v_1 = s_1$ i $v_2 = s_1 \frac{3 \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \theta}{\cos^5 \varphi} + s_2 \frac{1}{\cos^3 \varphi \cos^2 \theta}$ i korzystając z definicji nowych współrzędnych otrzymujemy postać łańcuchową

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = v_1 \\ \dot{p}_2 = v_2 \\ \dot{p}_3 = v_1 p_2 \\ \dot{p}_4 = v_1 p_3 \end{cases}.$$

11.2.2. Sterowanie sinusoidalne

Znaczenie układów w postaci łańcuchowej polega na tym, że istnieją dla nich algorytmy sterowania. Jeden z takich algorytmów wykorzystuje sterowania sinusoidalne (harmoniczne) w następujący sposób. Załóżmy, że mamy zadanie planowania ruchu układu łańcuchowego o trzech zmiennych stanu i dwóch wejściach,

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = v_1 \\ \dot{p}_2 = v_2 \\ \dot{p}_3 = v_1 p_2 \end{cases}.$$

Naszym zadaniem jest znaleźć sterowania $v_1(t)$ i $v_2(t)$, które w zadanym czasie $T > 0$ przeprowadzą układ ze stanu początkowego $p(0) = 0$ do stanu końcowego $p_d = p(T)$. Idea sterowania sinusoidalnego polega na tym, żeby najpierw, na przykład w czasie $\tau = \frac{1}{2}T$, doprowadzić do stanu końcowego zmienne p_1 i p_2 . Można w tym celu użyć sterowań stałych $v_1 = \text{const}$ i $v_2 = \text{const}$. Zmienna p_3 w chwili τ osiągnie pewną wartość $p_3(\tau)$. W drugim kroku sterowania, dla czasów $\tau \leq t \leq T$, zastosujemy sterowania w postaci

$$\begin{cases} v_1(t) = v_1 \cos \omega t \\ v_2(t) = a_2 \sin \omega t + v_2 \cos \omega t \end{cases},$$

gdzie v_1 i v_2 oznaczają stałe sterowania wyznaczone w etapie pierwszym, a_2 jest amplituda sterowania, którą należy wyliczyć z warunku $p_3(T) = p_{d3}$, a częstotliwość $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. Zauważmy, że sterowania są ciągłe w chwili τ . Przeprowadźmy te obliczenia w sposób szczegółowy. Niech $0 \leq t \leq \tau$. Korzystając ze sterowań $v_1(t) = v_1$ i $v_2(t) = v_2$ wyznaczamy

$$p_1(t) = v_1 t, \quad p_2(t) = v_2 t \quad \text{ i } \quad p_3(t) = \frac{1}{2} v_1 v_2 t^2.$$

Zakładamy, że wartości v_1 i v_2 sterowań mają zapewnić osiągnięcie zadanych wartości $p_1(\tau) = p_{d1}$ i $p_2(\tau) = p_{d2}$. Wynika stąd, że

$$\begin{cases} v_1 = \frac{p_{d1}}{\tau} \\ v_2 = \frac{p_{d2}}{\tau} \end{cases}.$$

Następnie, w przedziale czasu $\tau \leq t \leq T$, przy sterowaniu sinusoidalnym $v_2(t)$, obliczamy

$$p_2(t) = p_2(\tau) - \frac{a_2}{\omega} (\cos \omega t - 1) + \frac{v_2}{\omega} \sin \omega t$$

i wstawiamy do równania różniczkowego dla zmiennej p_3 ,

$$\dot{p}_3 = p_2(t)v_1(t) = \left(p_2(\tau) + \frac{a_2}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{v_2}{\omega} \sin \omega t \right) v_1 \cos \omega t.$$

Jako rozwiązanie otrzymujemy

$$p_3(t) = p_3(\tau) + \left(\frac{v_1 p_{d2}}{\omega} + \frac{a_2 v_1}{\omega^2} \right) \sin \omega t - \frac{a_2 v_1}{2\omega} \cos 2\omega t.$$

Wymaganie $p_3(T) = p_{d3}$ pozwala nam wyznaczyć amplitudę sterowania

$$a_2 = \frac{2\omega(p_3(\tau) - p_{d3})}{v_1}.$$

Pokazany sposób postępowania można uogólnić na inne układy w postaci łańcuchowej.

11.2.3. Śledzenie trajektorii

Dla kinematyki (11.3) samochodu kinematycznego rozważmy zadanie śledzenia trajektorii $(x_d(t), y_d(t))$ położenia środka tylnej osi. Składowe położenia będziemy traktować jak wyjścia (y_1, y_2) układu. Załóżmy, że kąt skręcenia kierownicy spełnia warunek $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ i zastosujmy wstępne

sprężenie zwrotne $s_1 = u_1 \cos \theta$ i $s_2 = u_2$, po którym układ przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{x} = s_1 \cos \varphi \\ \dot{y} = s_1 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = s_1 \operatorname{tg} \theta \\ \dot{\theta} = s_2, \\ y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases} . \quad (11.4)$$

Założmy teraz, że do układu zastosowano pewne różniczkowalne względem czasu sygnały sterujące $s_1(t)$, $s_2(t)$. Będziemy się starali znaleźć zależności między sygnałami sterującymi a odpowiadającą im trajektorią wyjścia $(y_1(t), y_2(t))$. Jak wynika z równań układu, pierwsze pochodne funkcji wyjścia zależą tylko od sterowania s_1 . Obliczmy pochodne rzędu drugiego

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \dot{s}_1 \cos \varphi - s_1 \dot{\varphi} \sin \varphi = \dot{s}_1 \cos \varphi - s_1^2 \sin \varphi \operatorname{tg} \theta \\ \ddot{y}_2 = \dot{s}_1 \sin \varphi + s_1 \dot{\varphi} \cos \varphi = \dot{s}_1 \sin \varphi + s_1^2 \cos \varphi \operatorname{tg} \theta \end{cases} . \quad (11.5)$$

Korzystając z różniczkowalności sygnału s_1 wprowadźmy nowe sterowania

$$\begin{cases} w_1 = \dot{s}_1 \\ w_2 = s_2 \end{cases} .$$

Zauważmy, że przy takiej definicji sterowań zmienna s_1 staje się zmienną stanu, a układ (11.4) przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{x} = s_1 \cos \varphi \\ \dot{y} = s_1 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = s_1 \operatorname{tg} \theta \\ \dot{s}_1 = w_1 \\ \dot{\theta} = w_2 \\ y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases} . \quad (11.6)$$

Zależność między wyjściem a sterowaniem tego układu jest następująca

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = w_1 \cos \varphi - s_1^2 \sin \varphi \operatorname{tg} \theta \\ \ddot{y}_2 = w_1 \sin \varphi + s_1^2 \cos \varphi \operatorname{tg} \theta \end{cases} ,$$

i nadal po prawej stronie występuje deficyt sterowania. Korzystając z heurystycznej wskazówki „różniczkować aż do skutku”, wyliczamy pochodne wyjść rzędu trzeciego

$$\begin{cases} y_1^{(3)} = \dot{w}_1 \cos \varphi - w_1 s_1 \sin \varphi \operatorname{tg} \theta - 2s_1 w_1 \sin \varphi \operatorname{tg} \theta - s_1^3 \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \theta - \frac{s_1^2 \sin \varphi}{\cos^2 \theta} w_2 \\ y_2^{(3)} = \dot{w}_1 \sin \varphi + w_1 s_1 \cos \varphi \operatorname{tg} \theta + 2s_1 w_1 \cos \varphi \operatorname{tg} \theta - s_1^3 \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \theta + \frac{s_1^2 \cos \varphi}{\cos^2 \theta} w_2 \end{cases}.$$

Potraktujmy w_1 jako zmienną stanu i zdefiniujmy nowe sterowania

$$\begin{cases} r_1 = \dot{w}_1 \\ r_2 = w_2 \end{cases}.$$

W rezultacie, otrzymamy układ sterowania

$$\begin{cases} \dot{x} = s_1 \cos \varphi \\ \dot{y} = s_1 \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = s_1 \operatorname{tg} \theta \\ \dot{s}_1 = w_1 \\ \dot{w}_1 = r_1 \\ \dot{\theta} = r_2 \\ y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases}, \quad (11.7)$$

w którym zależność między wyjściem a sterowaniem ma postać

$$\begin{pmatrix} y_1^{(3)} \\ y_2^{(3)} \end{pmatrix} = f(x, y, \varphi, \theta, s_1, r_1) + D(x, y, \varphi, \theta, s_1, w_1) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad (11.8)$$

przy czym

$$f(x, y, \varphi, \theta, s_1, w_1) = \begin{pmatrix} w_1 s_1 \sin \varphi \operatorname{tg} \theta - 2s_1 w_1 \sin \varphi \operatorname{tg} \theta - s_1^3 \cos \varphi \operatorname{tg}^2 \theta \\ w_1 s_1 \cos \varphi \operatorname{tg} \theta + 2s_1 w_1 \cos \varphi \operatorname{tg} \theta - s_1^3 \sin \varphi \operatorname{tg}^2 \theta \end{pmatrix}$$

i

$$D(x, y, \varphi, \theta, s_1, w_1) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\frac{s_1^2 \sin \varphi}{\cos^2 \theta} \\ \sin \varphi & \frac{s_1^2 \cos \varphi}{\cos^2 \theta} \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik $\det D(x, y, \varphi, \theta, s_1, w_1) = \frac{s_1^2}{\cos^2 \theta}$, co oznacza, że macierz D jest nieosobliwa, pod warunkiem że samochód się porusza (s_1 , a więc także $u_1 \neq 0$). Macierz tę nazywamy macierzą odsprężania, ponieważ pozwala zdefiniować w układzie (11.7) sprzężenie zwrotne

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = f + Dr, \quad (11.9)$$

przy którym zależność między wyjściem a sterowaniem upraszcza się do postaci

$$\begin{cases} y_1^{(3)} = v_1 \\ y_2^{(3)} = v_2 \end{cases} \quad (11.10)$$

Podsumowując całą procedurę, mając dany układ (11.4), w którym zostało sformułowane zadanie śledzenia trajektorii wyjścia $(y_{d1}(t), y_{d2}(t))$ rozszerzyliśmy przestrzeń stanu tego układu do postaci (11.7) i zastosowaliśmy sprzężenie zwrotne (11.9) uzyskując liniowe równania (11.10). Zadanie śledzenia trajektorii wyjścia może być teraz rozwiązane metodami liniowej teorii regulacji. Niech $e_1 = y_1 - y_{d1}$, $e_2 = y_2 - y_{d2}$ oznaczają błędy śledzenia. Nietrudno sprawdzić, że zadanie śledzenia rozwiązuje liniowy regulator

$$\begin{cases} v_1 = y_{d1}^{(3)} - a_2 \ddot{e}_1 - a_1 \dot{e}_1 - a_0 e_1 \\ v_2 = y_{d2}^{(3)} - b_2 \ddot{e}_2 - b_1 \dot{e}_2 - b_0 e_2 \end{cases} \quad (11.11)$$

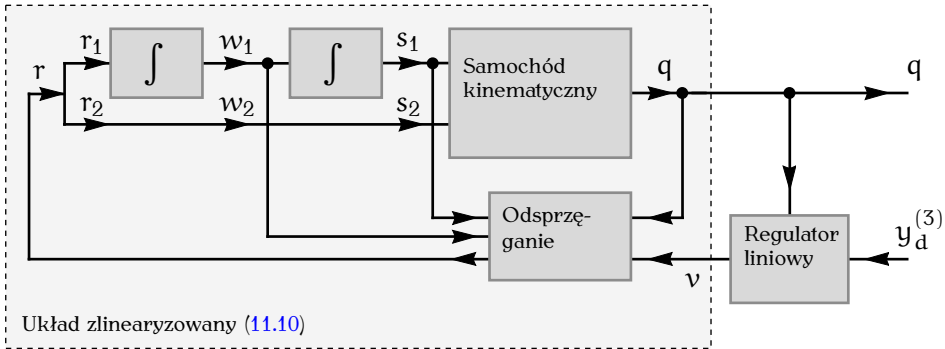
Równanie błędu śledzenia jest postaci

$$\begin{cases} \ddot{e}_1^{(3)} + a_2 \ddot{e}_1 + a_1 \dot{e}_1 + a_0 e_1 = 0 \\ \ddot{e}_2^{(3)} + b_2 \ddot{e}_2 + b_1 \dot{e}_2 + b_0 e_2 = 0 \end{cases} \quad .$$

Dla zapewnienia stabilności wzmocnienia regulatora należy wybrać, na przykład w oparciu o kryterium Hurwita. Metoda zastosowana do rozwiązania zadania śledzenia korzysta z własności zwanej różniczkową płaskością układu sterowania i polega na wykorzystaniu dynamicznego sprzężenia zwrotnego. Uzyskany algorytm śledzenia nadaje się do zastosowania wyłącznie podczas ruchu robota. Całą procedurę syntezy algorytmu śledzenia dla samochodu kinematycznego przedstawia schematycznie Rysunek 11.3 (gdzie $q = (x, y, \varphi, \theta)^T$).

11.3. Komentarze i odniesienia literaturowe

Rozwinięcie idei sterowania robotami mobilnymi na poziomie kinematycznym można znaleźć w Rozdziale 9 monografii [TMD⁺00]. Postać łańcuchowa układu sterowania została omówiona w Rozdziale 11 notatek [TM17], gdzie wzorowaliśmy się na książce [MLS94]. W tejże książce opisano także ideę sterowania sinusoidalnego. Metodzie odsprzęgania wejściowo-wyjściowego i układom różniczkowo płaskim poświęcono rozdziały 10 i 12 notatek [TM17].



Rysunek 11.3: Algorytm śledzenia

Literatura

- [MLS94] R. Murray, Z. Li, S. S. Sastry, *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press, Boca Raton, 1994.
- [TM17] K. Tchoń, R. Muszyński, *Metody matematyczne automatyki i robotyki*. Projekt Azon, Wrocław, 2017.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Duleba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Rozdział 12

Dynamika i sterowanie robotów mobilnych

12.1. Równania dynamiki

Do opisu dynamiki robota mobilnego zastosujemy formalizm Lagrange'a. Załóżmy, że robot mobilny o współrzędnych uogólnionych $q \in \mathbb{R}^n$ i prędkościach uogólnionych $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ jest opisany lagranżianem

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - V(q),$$

gdzie forma kwadratowa $K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T Q(q) \dot{q}$ oznacza energię kinetyczną robota, a funkcja $V(q)$ – jego energię potencjalną. Przyjmujemy, że ruch robota podlega nieholonomicznym więzom w postaci Pfaffa

$$A(q) \dot{q} = 0,$$

zdefiniowanym przez macierz Pfaffa $A(q)$ o wymiarze $l \times n$, rzędu l . Z więzami nieholonomicznymi wiążemy układ sterowania

$$\dot{q} = G(q) \eta, \quad (12.1)$$

reprezentujący kinematykę robota, taki że $A(q)G(q) = 0$. Elementy wektora $\eta \in \mathbb{R}^k$, $k = n - l$ mają sens prędkości; bywają one nazywane quasi-prędkościami.

Równania Eulera-Lagrange'a dynamiki robota mają standardową postać

$$Q(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + D(q) = F + B(q)u, \quad (12.2)$$

gdzie $C(q, \dot{q})$ jest macierzą sił odśrodkowych i Coriolisa, $D(q)$ jest wektorem sił potencjalnych, F oznacza siły przyczepności generujące więzy, $u \in \mathbb{R}^m$ jest wektorem sterowań, które działają na poszczególne współrzędne robota za pośrednictwem macierzy sterowań $B(q)$. Siły przyczepności F podlegają Zasadzie d'Alemberta, która orzeka, że siły F nie wykonują pracy na dopuszczalnych przemieszczeniach. Oznacza to, że

$$A(q) \dot{q} = 0 \implies F^T \dot{q} = 0.$$

Z Zasady d'Alemberta wynika, że siły przyczepności można wyrazić w postaci

$$F^T = \lambda^T A(q),$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}^l$. Podstawiając tę zależność do równań Eulera-Lagrange'a (12.2) otrzymujemy równanie

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = A^T(q)\lambda + B(q)u. \quad (12.3)$$

Równanie to dostarcza dwojakiego rodzaju informacji. Jeżeli interesuje nas ruch robota, eliminujemy z niego wektor λ , jeżeli natomiast przedmiotem naszego zainteresowania są siły przyczepności, wyliczamy wektor λ . Zajmijmy się najpierw równaniami ruchu robota. Korzystając z własności $A(q)G(q) = 0$, a więc $G^T(q)A^T(q) = 0$, pomnożymy lewostronnie równanie (12.3) przez macierz $G^T(q)$

$$G^T(q)Q(q)\ddot{q} + G^T(q)C(q, \dot{q})\dot{q} + G^T(q)D(q) = G^T(q)B(q)u.$$

Skorzystamy teraz z równania kinematyki (12.1) w celu wyznaczenia przyspieszeń

$$\ddot{q} = G(q)\dot{\eta} + \dot{G}(q)\eta,$$

gdzie $\dot{G}(q)$ oznacza pochodną macierzy $G(q)$ względem czasu, wzdłuż trajektorii $q(t)$. Po podstawieniu i uporządkowaniu składników otrzymujemy równania ruchu robota mobilnego

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)\eta \\ M(q)\dot{\eta} + N(q, \eta) = B(q)u \end{cases}, \quad (12.4)$$

gdzie $M = G^T Q G$, $N = G^T (-Q\dot{G}\eta - CG\eta - D)$, $B = G^T B$. Równania te można zapisać w postaci układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)\eta \\ \dot{\eta} = P(q, \eta) + R(q)u \end{cases}, \quad (12.5)$$

gdzie $P(q, \eta) = M^{-1}N$ i $R(q) = M^{-1}B$. W równaniu (12.5) sterowania (napędy robota) oddziałują na quasiprędkości η za pośrednictwem macierzy $R(q)$ o wymiarze $k \times m$. Wymiar wektora quasiprędkości odnosi się do liczby stopni swobody ruchu dopuszczanej przez więzy nieholonomiczne. Z tego powodu liczba napędów powinna być nie większa od wymiaru wektora quasiprędkości, mamy zatem $m \leq k$. Jeżeli $m = k$, mówimy, że robot mobilny jest w pełni napędzany, w przeciwnym wypadku robot ma deficyt napędów.

W celu wyznaczenia sił przyczepności mnożymy równanie (12.3) lewostronnie przez macierz $A(q)$ i otrzymujemy

$$A(q) (Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) - B(q)u) = A(q)A^T(q)\lambda,$$

skąd wynika, że

$$\lambda = (A(q)A^T(q))^{-1} A(q) (Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) - B(q)u),$$

Siły przyczepności są dane wzorem

$$F = A^T(q)\lambda = A^T(q) (A(q)A^T(q))^{-1} A(q) (Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) - B(q)u). \quad (12.6)$$

Znajomość sił przyczepności może być przydatna przy wyznaczaniu warunków wejścia robota mobilnego w poślizg.

12.2. Sterowanie dynamiką robota mobilnego

Podobnie, jak w przypadku sterowania kinematyką, definiujemy dwa zadania sterowania robota na poziomie dynamiki: zadanie planowania ruchu i zadanie śledzenia trajektorii. W obu przypadkach zadanie odnosi się do układu sterowania (12.5). W zadaniu planowania ruchu chodzi o znalezienie sterowania, które przeprowadzi stan robota do zadanego punktu, w chwili $T > 0$. Zadanie śledzenia trajektorii polega na znalezieniu sterowania, które zapewni asymptotyczną zbieżność trajektorii robota do zadanej trajektorii. Jeżeli interesujące nas wielkości zostały wyodrębnione jako funkcja wyjścia robota, zadajemy punkt docelowy lub trajektorię wyjścia robota; w ogólnym przypadku stan robota obejmuje współrzędne i quasiprędkości $(q, \eta) \in \mathbb{R}^{n+k}$.

Zauważmy, że w przypadku robota w pełni napędzanego sprzężenie zwrotne

$$v = P(q, \eta) + R(q)u$$

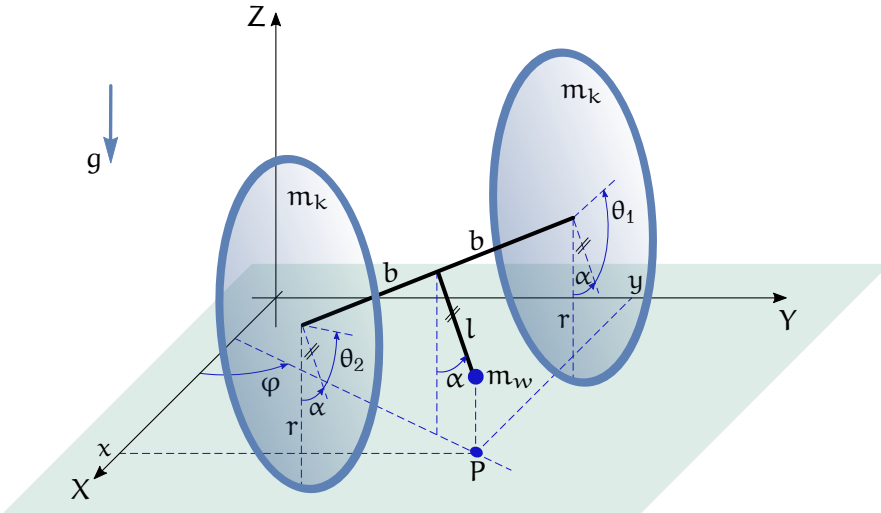
przekształca układ (12.3) do postaci

$$\begin{cases} \dot{q} = G(q)\eta \\ \dot{\eta} = v \end{cases}.$$

W takim wypadku sterowanie dynamiką redukuje się do sterowania kinematyką. Jeżeli sterowanie kinematyczne η jest klasy C^1 , to po jego wyznaczeniu sterowanie dynamiczne

$$u = R^{-1}(q)(\dot{\eta} - P(q, \eta)).$$

Z punktu widzenia sterowania robotów mobilnych wyzwanie stanowią roboty z deficytem napędów.



Rysunek 12.1: Wahadło mobilne

12.2.1. Wahadło mobilne

Wyrowadzenie równań ruchu i syntezę algorytmu śledzenia trajektorii przeanalizujemy na przykładzie wahadła mobilnego pokazanego na Rysunku 12.1. Robot składa się z dwukołowej platformy mobilnej, na której zostało zamontowane wahadło. Zakładamy, że długość wahadła jest mniejsza od promienia kół, $l < R$. Współrzędne uogólnione $q = (x, y, \varphi, \theta_1, \theta_2, \alpha) \in \mathbb{R}^6$ obejmują położenie środka osi platformy, orientację robota, kąty obrotu kół i kąt odchylenia wahadła od pionu. Kąty obrotu kół są liczone względem wahadła. Współrzędne i parametry robota zostały zaznaczone na Rysunku: R oznacza promień kół, b jest połową długości osi platformy, l oznacza długość wahadła, przez m_k , m_w oznaczamy masy kół i masę skupioną na końcu wahadła. Koła mają moment bezwładności I_1 względem osi obrotu i I_2 względem osi pionowej do płaszczyzny ruchu robota, przechodzącej przez środek koła. Pomijamy masę osi i pręta wahadła.

Przyjmujemy, że platforma porusza się po poziomej płaszczyźnie, bez poślizgu bocznego i wzdłużnego kół; odpowiednia macierz Pfaffa ma zatem postać

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & -b & -R & 0 & -R \\ \cos \varphi & \sin \varphi & b & 0 & -R & -R \end{bmatrix} \quad (12.7)$$

Układ sterowania opisujący kinematykę robota przyjmuje postać

$$\dot{q} = G(q)\eta,$$

gdzie $\eta \in \mathbb{R}^3$. Macierz sterowania tego układu

$$G(q) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos \varphi & \cos \varphi \\ \sin \varphi & \sin \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{2}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}, \quad (12.8)$$

co oznacza, że są spełnione równania

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_{123} \cos \varphi \\ \dot{y} = \eta_{123} \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = -\eta_1 \frac{1}{b} + \eta_2 \frac{1}{b} \\ \dot{\theta}_1 = \eta_1 \frac{2}{R} \\ \dot{\theta}_2 = \eta_2 \frac{2}{R} \\ \dot{\alpha} = \eta_3 \frac{1}{R} \end{cases},$$

gdzie $\eta_{123} = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3$. Zauważmy, że równania kinematyki ujawniają zależność współrzędnych φ , θ_1 i θ_2 , mianowicie, przy założeniu, że $\varphi(0) = \theta_1(0) = \theta_2(0)$ jest spełniony warunek

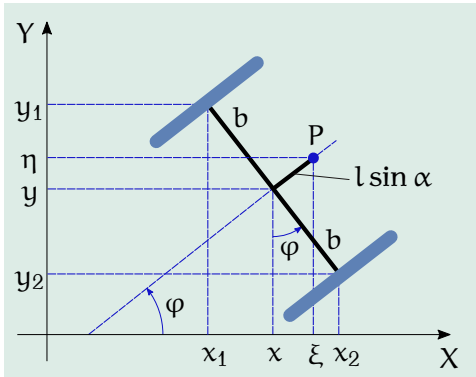
$$\varphi = \frac{R}{2b}(\theta_2 - \theta_1). \quad (12.9)$$

Oznacza to, że do opisu robota wystarczy wziąć współrzędne uogólnione $(x, y, \theta_1, \theta_2, \alpha) \in \mathbb{R}^5$. Po redukcji współrzędnych okazuje się, że warunki na brak poślizgu wzdłużnego koła lewego i prawego platformy mobilnej pokrywają się, a macierz Pfaffa

$$A(q) = \begin{bmatrix} \sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & -\frac{1}{2}R & -\frac{1}{2}R & -R \end{bmatrix}. \quad (12.10)$$

Stosownie do tego, macierz

$$G(q) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \cos \varphi & \cos \varphi \\ \sin \varphi & \sin \varphi & \sin \varphi \\ \frac{2}{R} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}, \quad (12.11)$$



Rysunek 12.2: Punkty kontaktu kół z podłożem

a układ sterowania reprezentujący kinematykę robota redukuje się do postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_{123} \cos \varphi \\ \dot{y} = \eta_{123} \sin \varphi \\ \dot{\theta}_1 = \eta_1 \frac{2}{R} \\ \dot{\theta}_2 = \eta_2 \frac{2}{R} \\ \dot{\alpha} = \eta_3 \frac{1}{R} \end{cases}, \quad (12.12)$$

przy czym kąt φ jest zdefiniowany przez (12.9).

Wyznamy teraz lagranżian $L = K - V$. Energia kinetyczna robota składa się z energii kół i energii wahadła. Każde z kół wykonuje ruch postępowy, a także obraca się względem własnej osi i względem osi pionowej przy zmianie orientacji robota. Stąd otrzymujemy energie kinetyczne kół

$$K_1 = \frac{1}{2} m_k v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_1)^2,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_k v_2^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_1)^2,$$

gdzie v_1 i v_2 oznaczają prędkości ruchu postępowego koła numer 1 i numer 2. Niech (x_1, y_1) i (x_2, y_2) oznaczają współrzędne punktu kontaktu kół z podłożem. Z Rysunku 12.2 wynika, że

$$\begin{cases} x_1 = x - b \sin \varphi \\ x_2 = x + b \sin \varphi \\ y_1 = y + b \cos \varphi \\ y_2 = y - b \cos \varphi \end{cases},$$

skąd wyliczamy

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} - b\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{x}_2 = \dot{x} + b\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y}_1 = \dot{y} - b\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y}_2 = \dot{y} + b\dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases}.$$

Ponieważ $v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$, $v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$, po wykonaniu odpowiednich podstawień otrzymujemy sumaryczną energię kinetyczną kół

$$K_{12} = K_1 + K_2 = m_k (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + b^2 \dot{\varphi}^2) + I_1 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta}_2)^2.$$

W celu wyznaczenia energii kinetycznej wahadła korzystamy z zależności

$$K_w = \frac{1}{2} m_w v^2,$$

gdzie v jest prędkością ruchu wahadła. Przyjmując dla współrzędnych końca wahadła oznaczenia (ξ, η, ζ) mamy $v^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2$. Na podstawie Rysunków 12.1 i 12.2 obliczamy

$$\begin{cases} \xi = x + l \sin \alpha \cos \varphi \\ \eta = y + l \sin \alpha \sin \varphi \\ \zeta = R + l \cos \alpha \end{cases}$$

i, po zróżniczkowaniu i podstawieniu do wzoru na energię kinetyczną wahadła, otrzymujemy

$$K_w = \frac{1}{2} m_w (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l^2 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^2) + 2l\dot{x}\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \varphi + \\ - 2l\dot{x}\dot{\varphi} \sin \alpha \sin \varphi + 2l\dot{y}\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \varphi + 2l\dot{y}\dot{\varphi} \sin \alpha \cos \varphi).$$

Ponieważ robot porusza się po poziomej płaszczyźnie, jego energia potencjalna pochodzi wyłącznie od wahadła,

$$V(q) = -m_w g (l \cos \alpha + R).$$

Stały składnik $m_w g R$ energii potencjalnej nie odgrywa roli w równaniach Eulera-Lagrange'a, dlatego możemy go opuścić. Łącząc ze sobą uzyskane wzory na energię kinematyczną i potencjalną, i wyliczając na podstawie (12.9)

$$\dot{\varphi} = \frac{R}{2b} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$$

wyznaczamy lagranżian robota

$$\begin{aligned}
 L = K_{12} + K_w - V = & \frac{1}{2}a(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}r\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}r\dot{\theta}_2^2 + \\
 & + \frac{1}{2}(2I_2 + m_w l^2)\dot{\alpha}^2 + p \sin \alpha \sin \varphi \dot{\theta}_1 - p \sin \alpha \sin \varphi \dot{\theta}_2 + \\
 & - p \sin \alpha \cos \varphi \dot{\theta}_1 + p \sin \alpha \cos \varphi \dot{\theta}_2 - m_w l \cos \alpha \cos \varphi \dot{\alpha} + \\
 & + m_w l \cos \alpha \sin \varphi \dot{\alpha} - r\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + I_2 \dot{\theta}_1 \dot{\alpha} + \\
 & + I_2 \dot{\theta}_2 \dot{\alpha} + m_w g l \cos \alpha, \quad (12.13)
 \end{aligned}$$

przy oznaczeniach $a = (m_w + 2m_k)$, $p = m_w l \frac{R}{2b}$ i $r = (m_w l^2 \sin^2 \alpha + 2m_k b^2 + 2I_1) \frac{R^2}{4b^2}$. Równania Eulera-Lagrange'a (12.2) są postaci

$$Q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D(q) = F + B(q)u, \quad (12.14)$$

gdzie, przy oznaczeniach $s_\alpha = \sin \alpha$, $c_\alpha = \cos \alpha$, etc., macierz bezwładności

$$Q(q) = \begin{bmatrix} a & 0 & ps_\alpha s_\varphi & -ps_\alpha s_\varphi & m_w lc_\alpha c_\varphi \\ 0 & a & -ps_\alpha c_\varphi & ps_\alpha c_\varphi & m_w lc_\alpha s_\varphi \\ ps_\alpha s_\varphi & -ps_\alpha c_\varphi & r & -r & I_2 \\ -ps_\alpha s_\varphi & ps_\alpha c_\varphi & -r & r & I_2 \\ m_w lc_\alpha c_\varphi & m_w lc_\alpha s_\varphi & I_2 & I_2 & 2I_2 + m_w l^2 \end{bmatrix},$$

wektor sił odśrodkowych i Coriolisa

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{pmatrix} p(c_\alpha s_\varphi \dot{\alpha} + s_\alpha c_\varphi \dot{\varphi})(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - m_w l(s_\alpha c_\varphi + c_\alpha s_\varphi \dot{\varphi})\dot{\alpha} \\ p(-c_\alpha c_\varphi \dot{\alpha} + s_\alpha s_\varphi \dot{\varphi})(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + m_w l(-s_\alpha s_\varphi \dot{\alpha} + c_\alpha c_\varphi \dot{\varphi})\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a wektor sił grawitacji

$$D(q) = (0, 0, 0, 0, m_w g l s_\alpha)^T.$$

Wektor F dotyczy sił przyczepności i będzie wyznaczony w oparciu o Zasadę d'Alemberta. Przy założeniu, że sterowaniami robota są momenty silników napędzających koła platformy, macierz

$$B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Z uzyskanych równań dynamiki robota (12.14) eliminujemy siły przyczepności i przechodzimy do równań postaci (12.4). Po wykonaniu odpowiednich obliczeń otrzymujemy

$$\begin{cases} \dot{x} = \eta_{123} \cos \varphi \\ \dot{y} = \eta_{123} \sin \varphi \\ \dot{\theta}_1 = \eta_1 \frac{2}{R} \\ \dot{\theta}_2 = \eta_2 \frac{2}{R} \\ \dot{\alpha} = \eta_3 \frac{1}{R} \\ a\ddot{\eta}_{123} + \left(\frac{m_w l \cos \alpha}{R} + \frac{2I_2}{R^2} \right) \ddot{\eta}_3 + \frac{4r}{R^2} (\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2) - \frac{p \sin \alpha}{b} (\eta_1 - \eta_2)^2 + \\ \quad - \frac{m_w l \sin \alpha}{R^2} \eta_3^2 + \frac{p \sin \alpha}{b} \eta_{123} (\eta_1 - \eta_2) = \frac{2}{R} u_1 \\ a\ddot{\eta}_{123} + \left(\frac{m_w l \cos \alpha}{R} + \frac{2I_2}{R^2} \right) \ddot{\eta}_3 - \frac{4r}{R^2} (\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2) - \frac{p \sin \alpha}{b} (\eta_1 - \eta_2)^2 + \\ \quad - \frac{m_w l \sin \alpha}{R^2} \eta_3^2 - \frac{p \sin \alpha}{b} \eta_{123} (\eta_1 - \eta_2) = \frac{2}{R} u_2 \\ \left(a + \frac{m_w l \cos \alpha}{R} \right) \ddot{\eta}_{123} + \frac{I_2}{R^2} (\ddot{\eta}_1 + \ddot{\eta}_2) + \left(\frac{m_w l \cos \alpha}{R} + \frac{2I_2 + m_w l^2}{R^2} \right) \ddot{\eta}_3 + \\ \quad - \frac{p \sin \alpha}{b} (\eta_1 - \eta_2)^2 - \frac{m_w l \sin \alpha}{R^2} \eta_3^2 + \frac{m_w l g \sin \alpha}{R} = 0 \end{cases} \quad (12.15)$$

Ostatnie trzy równania mają postać

$$M(\alpha)\ddot{\eta} + N(\alpha, \eta - \eta_2, \eta_3) = Bu,$$

przy czym elementy macierzy M zależą wyłącznie od kąta α wychylenia wahadła i spełniają warunki

$$M_{12} = M_{22}, \quad M_{12} = M_{21}, \quad M_{13} = M_{23} = M_{31} = M_{32}.$$

Układ sterowania (12.15) opisujący ruch wahadła mobilnego ma deficyt sterowań. Jego macierz sterowań

$$B = \begin{bmatrix} \frac{2}{R} I_2 \\ 0_{1 \times 2} \end{bmatrix}$$

W układzie (12.15) definiujemy wyjścia

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = y \end{cases}$$

i rozważamy zadanie śledzenia zadanej trajektorii wyjścia $(y_{d1}(t), y_{d2}(t))$. W celu rozwiązania tego zadania postaramy się znaleźć taki związek między sterowaniami a wyjściami układu, żeby zapewnić możliwość sterowania każdego z nich. Załóżmy, że układ porusza się po pewnej trajektorii $q(t)$, która definiuje trajektorię wyjścia $(y_1(t), y_2(t))$. Zróżniczkowanie tej trajektorii względem czasu daje

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x} = \eta_{123} c_\varphi \\ \dot{y}_2 = \dot{y} = \eta_{123} s_\varphi \end{cases}$$

i dalej

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = \dot{\eta}_{123} c_\varphi - \eta_{123} s_\varphi \dot{\phi} \\ \ddot{y}_2 = \dot{\eta}_{123} s_\varphi + \eta_{123} c_\varphi \dot{\phi} \end{cases}.$$

Dodając stronami równania numer 3 i 4, a następnie równania numer 3, 4 i 5 układu (12.15) wyliczamy

$$\begin{cases} \dot{\eta}_{123} = a_{123}(\alpha, \eta_1 - \eta_2, \eta_3) + b_{123}(\alpha)(u_1 + u_2) \\ \dot{\eta}_3 = a_3(\alpha, \eta_1 - \eta_2, \eta_3) + b_3(\alpha)(u_1 + u_2) \end{cases},$$

gdzie a_{123} , a_3 , b_{123} , b_3 są pewnymi funkcjami, które łatwo wyliczyć na podstawie (12.15). Po podstawieniu do wzorów na drugie pochodne wyjść i wykorzystaniu wyrażenia na $\dot{\phi}$ otrzymujemy

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = d_1(q, \eta_1 - \eta_2, \eta_3) + \frac{s_\varphi}{b} \eta_{123}(\eta_1 - \eta_2) + b_{123}(\alpha) c_\varphi (u_1 + u_2) \\ \ddot{y}_2 = d_2(q, \eta_1 - \eta_2, \eta_3) - \frac{s_\varphi}{b} \eta_{123}(\eta_1 - \eta_2) + b_{123}(\alpha) s_\varphi (u_1 + u_2) \end{cases}.$$

dla odpowiednich funkcji d_1 , d_2 . Rozszerzmy teraz układ (12.15) o nową zmienną stanu $u_1 + u_2 = v$ i wprowadźmy nowe sterowanie $w_1 = \dot{v}$. Wynik kolejnego zróżniczkowania wyjść po czasie można przedstawić w następującej postaci

$$\begin{cases} y_1^{(3)} = e_{11}(q, \eta, v) + e_{12}(q, \eta)(\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2) + e_{13}(q, \eta)w_1 \\ y_2^{(3)} = e_{21}(q, \eta, v) + e_{22}(q, \eta)(\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2) + e_{23}(q, \eta)w_1 \end{cases}.$$

Przez odjęcie równań numer 3 i 4 układu (12.15) wyliczamy

$$\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2 = n(q, \eta) + m(\alpha)(u_1 - u_2),$$

dla pewnych funkcji n i m . Zdefiniujemy nowe sterowanie $w_2 = u_1 - u_2$. W efekcie, pochodne rzędu trzeciego wyjść można przedstawić w postaci

$$\begin{cases} y_1^{(3)} = f_{11}(q, \eta, v) + f_{12}(q, \eta)w_1 + f_{13}(q, \eta)w_2 \\ y_2^{(3)} = f_{21}(q, \eta, v) + f_{22}(q, \eta)w_1 + f_{23}(q, \eta)w_2 \end{cases},$$

albo, przyjmując oznaczenie $y = (y_1, y_2)$, w postaci wektorowej

$$y^{(3)} = f(q, \eta, v) + F(q, \eta)w.$$

Nietrudno pokazać, że macierz odsprężania $F = [f_{ij}]$ jest nieosobliwa. Pozwala to na zastosowanie sprzężenia zwrotnego

$$w = F^{-1}(s - f),$$

gdzie s oznacza nowy wektor sterowań. Po zastosowaniu tego sprzężenia zwrotnego rozszerzony układ (12.15) ma zależność sterowanie-wyjście postaci

$$y^{(3)} = s.$$

Rozwiązanie zadania śledzenia zadanej trajektorii $y = (y_{d1}(t), y_{d2}(t))$ użyjemy metodami liniowej teorii regulacji. Niech $e = y(y) - y_d(t)$ oznacza błąd śledzenia. Jako sterowanie $s(t)$ bierzemy

$$s(t) = y^{(3)}(t) - K_2 \ddot{e} - K_1 \dot{e} - K_0 e,$$

dla diagonalnych macierzy wzmocnienia K_0 , K_1 i K_2 . W celu zapewnienia zbieżności błędu śledzenia do zera, elementy tych macierzy powinny być wybrane, na przykład, na podstawie kryterium Hurwitza. Podsumowując, zaproponowany w tym rozdziale algorytm śledzenia trajektorii położenia robota typu wahadło mobilne wymaga podstawienia $u_1 + u_2 = v$, rozszerzenia dynamicznego równań ruchu (12.15) o równanie $\dot{v} = w_1$ i wprowadzenia sterowania $w_2 = u_1 - u_2$, a następnie zastosowania sprzężenia zwrotnego

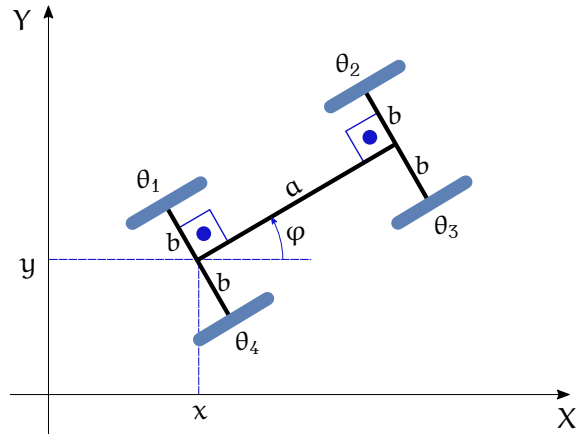
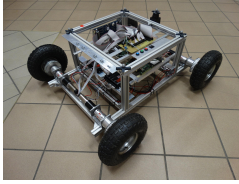
$$w = F^{-1} \left(y^{(3)}(t) - K_2 \ddot{e} - K_1 \dot{e} - K_0 e - f \right).$$

12.3. Zadania

Zadanie 12.1 Dla platformy mobilnej Rex przedstawionej na Rysunku 12.3 napisać macierze Pfaffa dla wybranych spośród 64 możliwych rodzajów ruchu (brak poślizgu, poślizg boczny koła nr 1, poślizg boczny i wzdłużny koła nr 2, etc.) opisanych w rozdziale 6 raportu [Aea13]. Korzystając z danych zawartych w tym raporcie napisać odpowiednie modele dynamiki platformy Rex. Przyjąć liniowe modele sił reakcji poślizgowych działających na koła ślizgające się.

12.4. Komentarze i odniesienia literaturowe

Równania dynamiki robotów mobilnych uzyskano za pomocą formalizmu Lagrange’a-d’Alemberta omówionego w notatkach [TM18], zob. także początek Rozdziału 11 monografii [TMD⁺00]. Przy rozwiązaniu zadania można skorzystać z raportu [Aea13].



Rysunek 12.3: Platforma mobilna Rex

Literatura

- [Aea13] K. Arent, et al., Koncepcja modelu matematycznego i fizycznego eksperymentalnej platformy mobilnej Rex. Raport nr PRE09/2013, IIAiR PWr, Wrocław, 2013.
- [TM18] K. Tchoń, R. Muszyński, *Mechanika analityczna*. Projekt Azon, Wrocław, 2018.
- [TMD⁺00] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, R. Hossa, R. Muszyński, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000. (Politechnika Wrocławska, projekt AZON, 2018).

Skorowidz

A		J	
algebra Liego		jakobian	
układu	93	analityczny	34
warunek rzędu	93	geometryczny	
algorytm		w ciele	53
Denavita-Hartenberga	25	w przestrzeni	53
Freunda	68	manipulatora	54
jakobianu transponowanego	45	pseudoodwrotny	45
Newtona		transponowany	35
ogólny	48		
podstawowy	45	K	
obliczanego momentu	66	koło toczące się	87
powtarzalny	51	konfiguracja	
Takegaki-Arimoto	66	izotropowa	50
Wena-Bayarda	67	manipulowalność	49
		osobliwa	35
		regularna	35
		wsp. uwarunkowania	50
		kwaternion	16
		jednostkowy	17
C		L	
ciało sztywne	4	ETEX	VI
przemieszczenie	5		
D		M	
drgania pręta	79	macierz	
lagranżian	79	manipulowalności	49
równania Eulera-Lagrange'a	80	bezwładności	63
dystribucja		macierzowa prędkość	
inwolutywna	92	kątowna	
rozmaitość całkowita	92	w ciele	9
stowarzyszona	91	w przestrzeni	9
		w ciele	11
		w przestrzeni	11
E		manipulator	
elementarne przesunięcie	7	mobilny	28
elementarny obrót	8	o elastycznych ogniwach	77
elipsoida manipulowalności	49	śledzenie trajektorii	83
		lagranżian	79
F		lagranżian przybliżony	82
faktoryzacja SVD	46		
G			
grupa obrotów	14		
topologia	14		

równania dynamiki	83	zadanie planowania ruchu	102
o elastycznych przegubach..	71	równania ruchu	111
algorytm obliczanego momen-		ruch	
tu	75	ciała sztywnego	7
dynamika	73	punktu materialnego	4
lagranżian	73		
sztywny	24	S	
2R	36	samochód kinematyczny	88
dynamika	63	śledzenie trajektorii	105
kinematyka	24	siły	
kinematyka we współrzędnych		odśrodkowe i Coriolisa	63
29		potencjalne	63
lagranżian	62	przyczepności	110
RTR	26	skretnik	
metoda		w ciele	11
analityczno-geometryczna ..	43	w przestrzeni	11
homotopii	44	specjalna grupa euklidesowa	6
jakobianowa	45	symbole Christoffela	64
monocykl	86		
manewr parkowania	101	U	
		układ sterowania	
N		afiniczny	64
nawias Liego	51	postać łańcuchowa	103
interpretacja	99	różniczkowo płaski	108
		sprężenie zwrotne	102
P		sterowanie sinusoidalne ...	104
parametryzacja	19	układ współrzędnych	18
Cayleya	19	kartezjańskich	21
Eulera	20	sferycznych	21
KKM	20	walcowych	21
oś-kąt	19		
Rodriguesa	20	W	
przestrzeń		wahadło mobilne	113
przegubowa	24	lagranżian	117
ruchu własnego	40	równania ruchu	118
zadaniowa	42	zadanie śledzenia trajektorii	118
		wektorowa prędkość kątowa	
R		w ciele	10
robot kosmiczny	89	w przestrzeni	10
robot mobilny	85	więzy	
dynamika		holonomiczne	90
zadanie śledzenia trajektorii		nieholonomiczne	93
112		więzy Pfaffa	85
zadanie planowania ruchu	112		
Zasada d'Alemberta	110	Z	
kinematyka	85	zadanie	
zadanie śledzenia trajektorii		śledzenia trajektorii	
102		przegubowej	64

zadaniowej.....	67
kinematyki	
odwrotne	42
proste	42
stabilizacji	64

Spis rysunków

1.1	Ciało sztywne	5
1.2	Przemieszczenie ciała sztywnego	6
1.3	Obrót elementarny wokół osi X	8
1.4	Manipulator planarny	12
2.1	Obroty o kąt π	16
2.2	Obraz $\phi(\text{SO}(3))$ grupy $\text{SO}(3)$	16
2.3	Identyczne obroty	18
2.4	Kierunek osi obrotu v	19
2.5	Parametryzacja walcowa	21
2.6	Parametryzacja sferyczna	22
3.1	Sztywny manipulator szeregowy	25
3.2	Manipulator typu RTR	27
3.3	Manipulator mobilny	28
3.4	Manipulator 1R2T	30
3.5	Manipulator typu SCARA	31
3.6	Manipulator stanfordzki	31
3.7	Manipulatory typu PUMA	31
3.8	Manipulator IRb6 i schemat jego kinematyki po zamocowaniu na torze jezdny	32
3.9	Manipulator FANUC typu LR Mate	32
4.1	Manipulator typu 2R	36
4.2	Konfiguracje osobliwe	37
4.3	Konfiguracje osobliwe – analiza prędkości i sił	37
4.4	Konfiguracje osobliwe $q_3 = 0, q_3 = \pi$	39
4.5	Konfiguracja osobliwa $q_3^* = \arccos\left(-\frac{l_2}{l_3}\right)$	40
5.1	Zadanie odwrotne – rozwiązanie geometryczne	44
5.2	Przekształcenie prędkości	49
5.3	Elipsoida manipulowalności	50
6.1	Jakobian manipulatora	55
7.1	Sztywny manipulator szeregowy: dynamika	61
7.2	Algorytm obliczania momentu	67

7.3	Manipulator 2R	69
7.4	Manipulator 2T	69
8.1	Manipulator o elastycznych przegubach: dynamika	72
8.2	Model elastycznego przegubu	72
9.1	Manipulator o elastycznych ogniwach: dynamika	78
10.1	Koło toczące się bez poślizgu bocznego	86
10.2	Koło toczące się	87
10.3	Samochód kinematyczny	88
10.4	Robot kosmiczny	90
10.5	Dwukołowa platforma mobilna	95
10.6	Samochód z przyczepą	96
10.7	Trójkątny smok	97
10.8	Deskorolka	97
11.1	Nawias Liego: interpretacja	100
11.2	Parkowanie monocykla	101
11.3	Algorytm śledzenia	109
12.1	Wahadło mobilne	113
12.2	Punkty kontaktu kół z podłożem	115
12.3	Platforma mobilna Rex	121