



COURS DE GÉODÉSIE

Chapitre 1 Généralités sur la Géodésie

ES1



Cham

CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET MÉTIERS

Françoise et Henri DUQUENNE
1^{ère} édition 1998
dernière révision : Février 2002

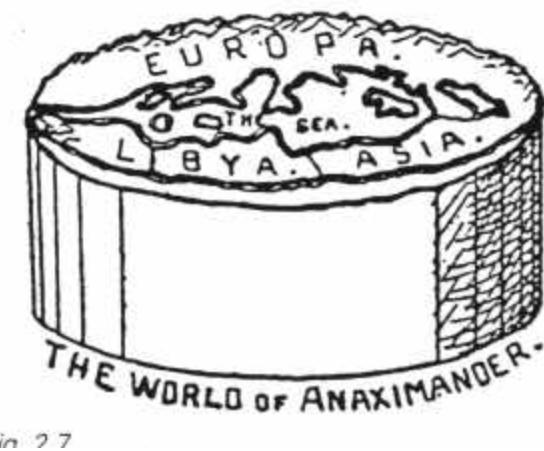
1. DEFINITION DE LA GEODESIE

Le mot géodésie vient du mot grec geodaisia qui veut dire partage de la Terre. Ce sens remonte à l'antiquité, en ancienne Egypte en particulier, et s'applique aux travaux d'arpentage correspondant à la délimitation de parcelles cadastrales. Aujourd'hui le sens a évolué et la géodésie est la science de la mesure de la Terre. En fait le terme de géométrie serait plus adapté mais les mathématiciens se sont emparés de ce terme pour un domaine des mathématiques qui n'est plus lié à la Terre. Il faut dire que les premiers géodésiens étaient aussi de grands mathématiciens (Pythagore, Thalès...).

La géodésie s'intéresse à la forme et aux dimensions de la Terre, à l'étude du champ de pesanteur terrestre et aux déformations de la croûte terrestre (tectonique des plaques, géodynamique).

2. HISTORIQUE

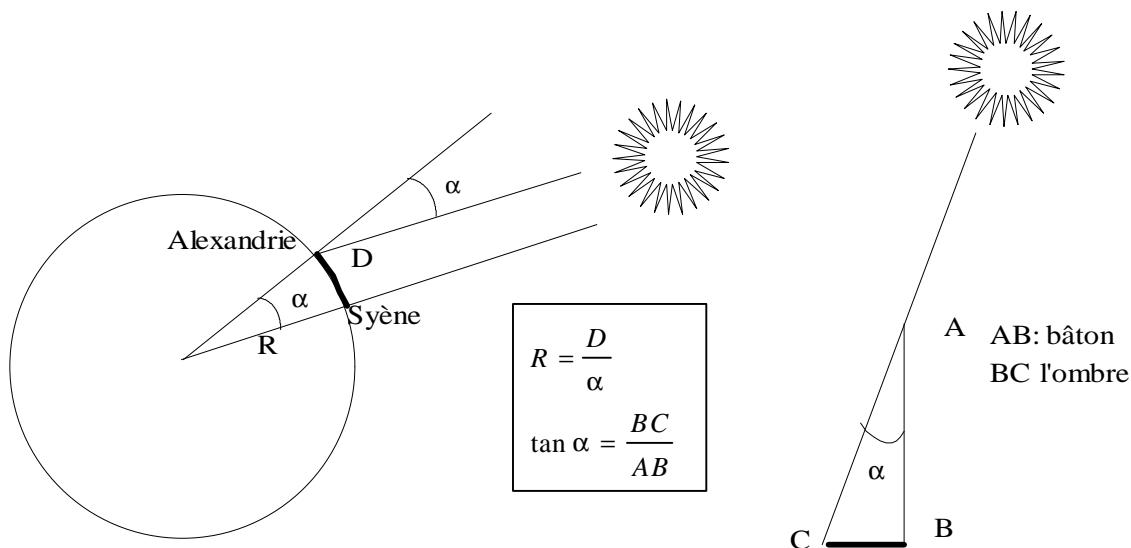
L'étude de la forme de la Terre remonte à l'antiquité, mais notre connaissance historique est très partielle car peu de documents nous sont parvenus de cette époque. En Occident on fait remonter cet intérêt de la forme de la Terre à l'antiquité grecque vers 600 ans avant Jésus-Christ. À cette époque plusieurs modèles de Terre sont proposés. Thalès qui est reconnu comme le découvreur de la trigonométrie propose une Terre en forme de disque flottant sur un océan infini. En fait son modèle est basé sur l'Océan, ensemble des terres connues des navigateurs et conquérants. Ses contemporains Anaximandre et Anaximène proposent un modèle, proche du sien, celui d'une Terre cylindrique ou parallépipédique flottant sur un océan fini, le tout en suspension dans l'espace.



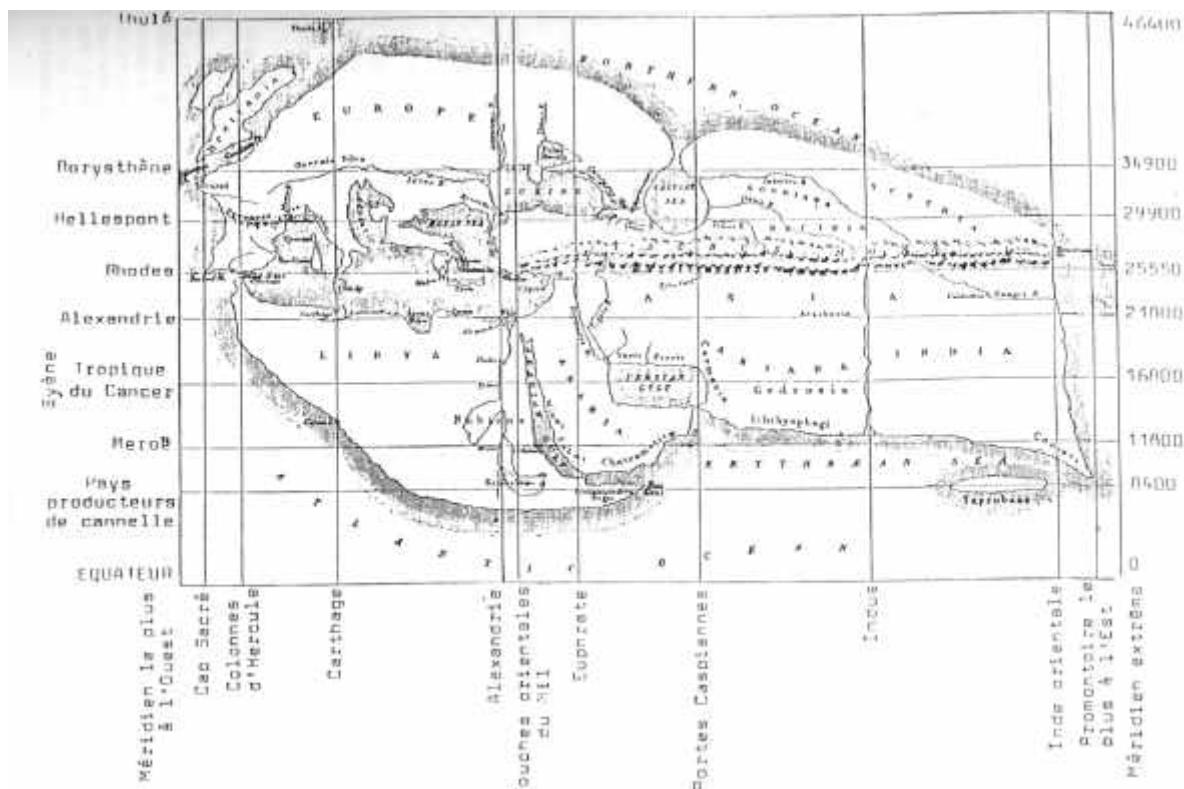
Pythagore (570 à 480 avant J-C) est le premier à proposer une Terre sphérique qui permet enfin d'expliquer la disparition visuelle des bateaux à l'horizon. L'école de Pythagore (500 à 200 avant J.C.) qui regroupe mathématiciens, philosophes, politiques et religieux propose un système de l'univers dont le centre est une Terre sphérique qui tourne sur elle-même, les planètes (Mercure, Venus, Mars, Jupiter, Saturne), le Soleil et la Lune tournant autour de la Terre. Plus loin les étoiles sont reparties sur la sphère des Fixes.

On prête à Aristote (384 à 322 avant J-C) et à Archimède (287 à 212 avant J.C) des estimations de la circonférence terrestre entre 400000 et 300000 stades mais aucun récit de techniques de mesures n'est parvenu jusqu'à nous. Eratosthène (284 à 192 avant J.C) donne une valeur relativement précise de la circonférence terrestre (250000 stades valeur estimée entre 40000km et 50000 km selon les estimations de l'unité stade). Une description presque complète de la méthode utilisée est parvenue jusqu'à nous.

Le principe de la détermination d'Eratosthène est la mesure d'un arc de méridien entre Alexandrie et Syène, deux villes situées à peu près sur le même méridien. Depuis longtemps les astronomes avaient remarqué que le jour du solstice d'été (le jour le plus long de l'année) et au milieu de la journée (midi) le fond des puits de Syène étaient entièrement éclairé par le Soleil. Syène est à peu près situé sur le tropique et donc à l'instant considéré le soleil est à la verticale du lieu. Au même instant Eratosthène observe à Alexandrie l'ombre d'un bâton (gnomon). Ceci lui permet de déterminer la portion de la circonférence de la Terre correspondant à l'arc Alexandrie -Syène. Il trouve 1/50^{ème}. La distance entre Alexandrie et Syène est mesurée, mais on ne connaît pas vraiment la méthode de la mesure et plusieurs hypothèses sont proposées : des marcheurs officiels auraient parcouru la distance (environ 800km) d'un pas régulier, ou alors ce sont des chameaux qui auraient été utilisés, enfin on pense à des bateaux qui auraient suivi le Nil. En tout cas la distance est estimée à 5000 stades et donc la circonférence de la Terre à 250000 stades.



Il faut signaler ici qu'Eratosthène fut un grand cartographe et que parallèlement à ses travaux sur la Terre sphérique il s'employa à représenter cette Terre sous forme de carte. Apparaissaient alors la notion de coordonnées (qu'on appelle maintenant longitude et latitude) ainsi que des techniques pour positionner des lieux à partir de l'astronomie. La mesure en latitude était assez bonne alors qu'en longitude les erreurs étaient fréquentes, la mesure étant liée à la détermination de temps qu'on ne savait pas encore faire précisément. On voit donc que dès l'antiquité la géodésie est aussi la technique qui propose des repères et des techniques pour positionner des points sur la Terre.



Carte d'Eratosthène

Un siècle plus tard Poséidonius trouvait une valeur similaire à celle d'Eratosthène pour la circonférence terrestre (240000 stades) avec une méthode proche mais en utilisant une étoile à l'horizon à Alexandrie et en mesurant sa hauteur à Rhodes. Ptolémée au deuxième siècle améliore les processus de positionnement astronomique (réfraction) et de cartographie.

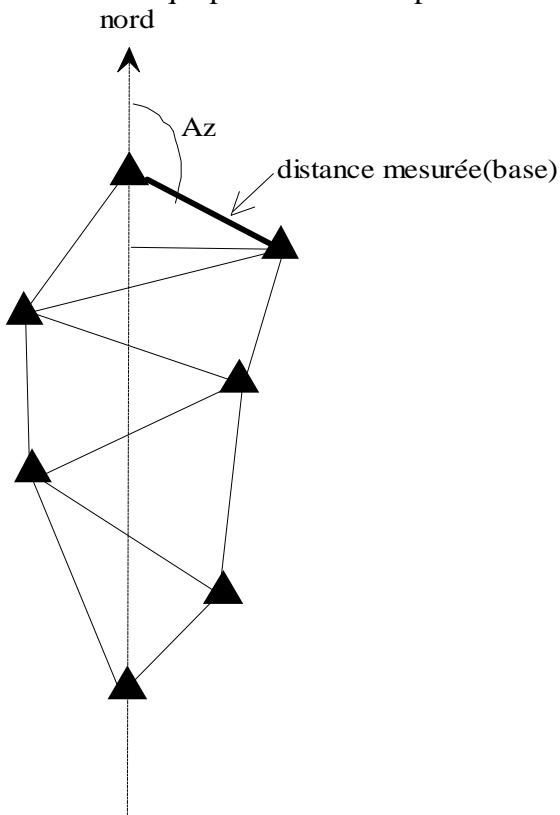
La mesure de Poséidonius est la dernière mesure connue en occident avant le 16^{ème} siècle. On connaît cependant une mesure en Chine au 8^{ème} siècle (I-HSING) et au 9^{ème} siècle en Arabie(AL-MAMUM). Leurs résultats ne furent pas meilleurs.

En occident, pendant le Moyen-âge, tombé dans l'obscurantisme religieux, on oublia les résultats de l'antiquité et la Terre redevint plate, immobile au centre de l'univers. Heureusement à cette période les Arabes qui étaient des grands admirateurs de la science grecque, retranscrivirent les textes (l'Almageste, la Géographie de Ptolémée) et développèrent les instruments de mesures astronomiques (astrolabes).

C'est à la renaissance en occident que l'étude de la Terre reprend vie. Tout d'abord ce sont les grands navigateurs qui, à la fin du 15^{me} siècle et début du 16^{me}, au fil de leurs voyages commerciaux tracent des cartes des pays visités. Entre autres, Christophe Colomb qui s'appuyant sur une Terre sphérique pense rejoindre l'Inde en partant du Portugal vers l'ouest et en estimant la distance à parcourir à 6400 km, ce qui est erroné et on connaît mal l'origine de cette estimation. Cependant il découvre le nouveau monde. Amerigo Vespucci, Vasco de Gama, Magellan feront évoluer les connaissances géographiques (Afrique, Amérique) et cartographiques.

En 1525 le Français Fernel mesure un arc de méridien de 1° entre Paris et Amiens. La distance est mesurée par le nombre de tours d'une roue de charrette et l'angle en observant la hauteur du soleil au passage au méridien du point de départ et en fixant la fin de l'arc lorsque la hauteur du soleil a augmenté de 1° par rapport au départ. La longueur de l'arc mesuré serait 56746 toises

Durant la même période des scientifiques comme Képler et Copernic proposent à nouveau des modèles d'univers indépendants des croyances religieuses. L'univers est centré sur le Soleil, la Terre et les planètes tournent autour du soleil. En 1600, Giordano Bruno, philosophe italien, est brûlé pour hérésie pour avoir repris la théorie de Copernic. Galilée qui eut l'idée d'observer le ciel avec une lunette qu'il perfectionna pour en faire une lunette astronomique et qui découvrira les satellites de Jupiter confirmant ainsi la théorie de Copernic, dû renoncer toute sa vie à ses découvertes à cause de l'inquisition. Tycho Brahe, profitant des découvertes de Galilée, améliore les techniques d'observations et fournit par ses nombreuses observations les données qui permettent à Képler d'établir la théorie des mouvements des planètes.



Frisius (1533) et Snellius (1620) mettent au point une nouvelle méthode de mesure d'un arc de méridien. Au lieu de faire une mesure directe pour la longueur de l'arc on établit de part et d'autre du méridien une triangulation. Tous les angles des triangles sont mesurés. On fait une mesure de distance directe du 1^{er} coté et on mesure, par astronomie, sa direction par rapport au méridien. Les calculs sont effectués par résolution de triangles et de proche en proche on déduit la longueur de petits morceaux de méridien pour finalement obtenir la longueur de l'arc. La méthode a été expérimentée par Snellius en Hollande entre Alkmaar et Berg op Zoom.

Le Français Picard mesure en 1669 la méridienne Paris-Amiens par la méthode de triangulation et pour cela fabrique ses instruments de mesure d'angles pour la hauteur des étoiles et pour les angles des triangles. Il utilise une lunette munie d'un réticule, et la mesure des angles se fait sur un quart de cercle gradué qui peut être incliné. Pour un arc de 1° il trouve une distance de 57060 toises.



quart de cercle de Picard

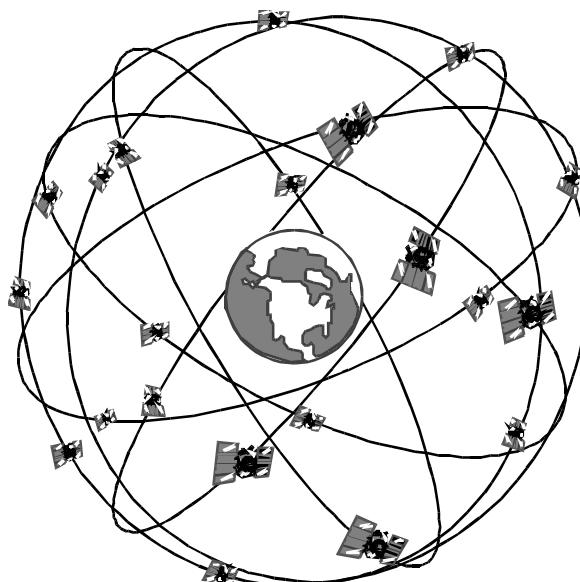
En même temps que l'on perfectionnait les mesures d'arcs de méridien commençait une polémique sur la forme de la Terre. Des théoriciens dont Newton et Huygens prédirent que la Terre étaient probablement aplatie aux pôles par théorie de la rotation, mais aussi par l'étude du comportement du pendule en des lieux de latitudes différentes, tandis que les Cassini, dynastie de cartographes, qui avaient prolongé la méridienne de France, pensaient en s'appuyant sur leurs mesures qu'elle était allongée aux pôles.

En 1730 deux expéditions sont organisées pour mesurer deux arcs de méridien, l'un près de l'équateur, l'autre près du pôle. La mission qui part en Laponie comporte entre autres Maupertuis et Clairaut, la mission du Pérou Bouguer et Lacondamine. Les mesures donnent pour 1° une longueur de 57438 toises au nord et 56748 toises à l'équateur confirmant que la Terre était un sphéroïde aplati aux pôles. La méridienne de France est refaite par Cassini de Thury et La Caille, 1° correspond en France à 57074 toises. Poursuivant l'œuvre de Newton, Clairaut (1713-1765) en s'appuyant sur des mesures de gravité montre que la Terre est un sphéroïde de révolution aplati aux pôles.

En exploitant les différentes mesures un doute apparaît sur la valeur de la toise utilisée dans les différentes missions et le besoin d'unifier les unités de longueur se fit de plus en plus sentir. Delambre et Méchain exécutent la mesure d'arc de méridien entre Dunkerque et Barcelone en Espagne (1000 kilomètres). De leurs travaux est déduite la nouvelle unité de longueur , le mètre, comme étant la 10 millionième partie du quart de méridien.

La méthode de triangulation sera employée pendant trois siècles pour établir des réseaux de points géodésiques sur lesquels s'appuieront les cartographies nationales. Les améliorations et innovations portent sur les instruments (théodolites, distancemètres) et dans la deuxième partie du 20^{ème} siècle sur les méthodes de calculs principalement par l'apparition des ordinateurs.

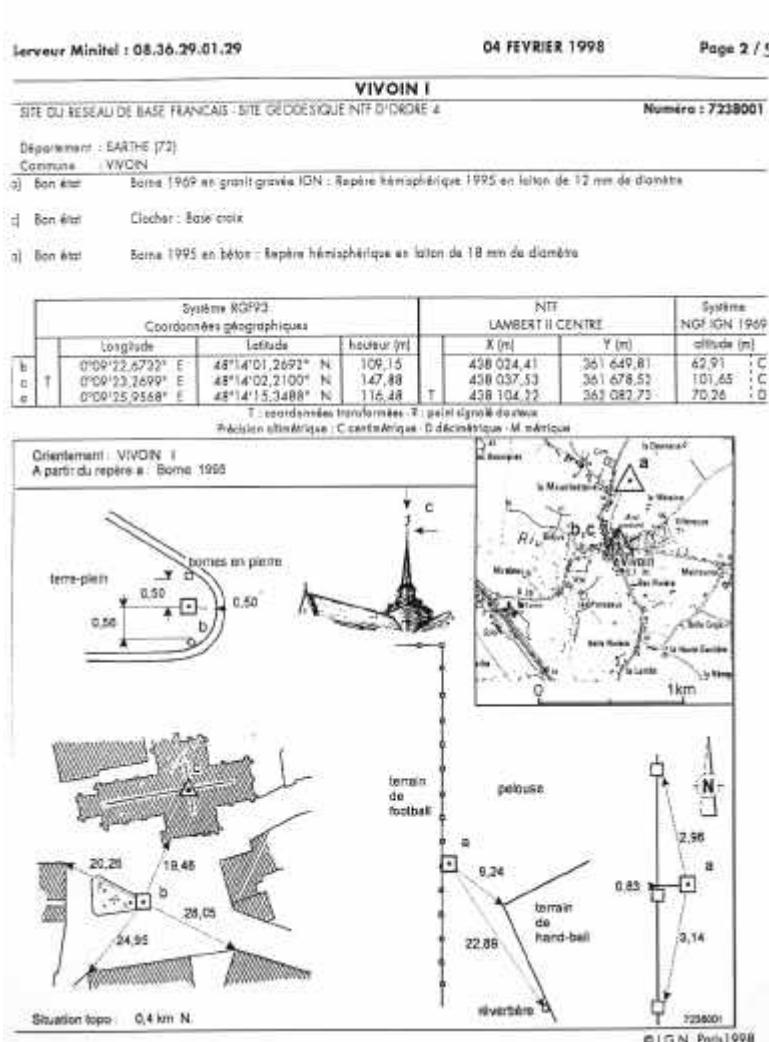
Vers le milieu du 20^{ème} siècle les lancements dans l'espace de satellites artificiels font passer la géodésie dans l'ère spatiale. Les mesures ne se font plus directement d'un point de la terre à un autre mais passe par l'intermédiaire d'un objet dans l'espace. Ces techniques spatiales permettent enfin de joindre les continents les uns aux autres et d'établir des réseaux géodésiques mondiaux. Elles permettent des positionnements très précis (quelques millimètres) qui font de la géodésie une science très utile pour l'ensemble des sciences de la Terre.



3.OBJECTIFS, DOMAINES D'ACTIVITES, TECHNIQUES DE LA GEODESIE

3.1 objectifs

L'étude géométrique de la Terre amène la géodésie à établir des systèmes de références dans lesquels on positionne des points matérialisés de la surface en attribuant des coordonnées et éventuellement des vitesses. Comme on le verra dans la suite de ce cours les référentiels et les systèmes de coordonnées sont multiples (coordonnées tridimensionnelles, coordonnées sur l'ellipsoïde, coordonnées planes, etc...). Les utilisateurs ont accès au référentiel en rattachant leurs travaux aux points géodésiques qui sont à présent diffusés sous forme télématique et pour lesquels on obtient les renseignements pour les situer géographiquement et les retrouver sur le terrain, ainsi que les coordonnées dans les systèmes légaux.



fiche signalétique d'un site géodésique (IGN)

Un autre objectif de la géodésie est de fournir des techniques ou systèmes de positionnement comme par exemple la mise en place de satellites de telle sorte qu'un utilisateur puisse se positionner à tout instant et quelque soit le lieu.

3.2 domaines d'activités

Comme pour de nombreuses sciences faire de la géodésie veut dire intervenir à différents niveaux correspondant à des compétences différentes allant de l'homme de science au technicien supérieur. Parmi les activités des géodésiens, on peut citer :

La modélisation qui correspond à l'élaboration de théories décrivant les objets de la géodésie (mesures, inconnues, paramètres...), et leur interdépendance.

L'étude et le développement des techniques de mesures (l'appareillage et leur technique d'utilisation). Les mesures sont réalisées entre des points de la surface de la Terre ou vers des satellites ou vers des étoiles. Exemples de types de mesures : angles, distances, pesanteurs, temps, phase, Doppler...

L'étude et le développement des techniques de traitement qui consistent en une mise en œuvre informatique des résultats de la modélisation et à la mise à disposition d'outils de production.

L'exécution des mesures et traitements à l'aide des appareils et logiciels développés comme vu précédemment.

La documentation et diffusion qui constitue la phase ultime du travail sont essentielles car si ces phases sont négligées cela remet en cause l'utilité des étapes précédentes.

3.3 Techniques spécifiques

L'astro-géodésie comme son nom l'indique fait intervenir des mesures sur des astres à partir de points sur la Terre pour déterminer des positions et des directions sur Terre. Un chapitre spécial est consacré à cette technique dans ce cours.

La géodésie terrestre et la topométrie: on appelle ainsi les techniques de mesures qui se font d'un point à un autre point sur la Terre. Ces techniques utilisent des mesures d'angles horizontaux et verticaux, et de distance. On peut dire qu'entre la géodésie et la topométrie la différence joue sur la distance entre les points mesurés et donc on fera des approximations en topométrie qui ne sont pas applicables en géodésie. Dans ce cours on suppose que la topométrie est enseignée en parallèle et donc on s'intéresse aux particularités de la géodésie.

Les techniques spatiales de positionnement : les mesures se font entre des points de la Terre et des objets extra terrestres. Ces objets sont souvent proches de la Terre (satellites) mais peuvent aussi être très loin (radio sources extragalactiques). Les mesures se font sur des ondes électromagnétiques qui sont émises soit par l'objet soit par une balise au sol et qui sont reçues par un récepteur soit au sol soit embarqué dans un satellite. En simplifiant on peut dire que le principe consiste en des mesures de distances et à un positionnement dans l'espace. Un chapitre est consacré à ces techniques dans ce cours.

Le nivelllement et la gravimétrie :

Ces deux techniques servent à la détermination de l'altitude. Le nivelllement est une technique de mesure d'une différence géométrique de hauteur et la gravimétrie permet de mesurer l'intensité de l'accélération de la pesanteur (g). Dans ce cours un chapitre est consacré à la

notion d'altitude et de mesures de gravité mais les techniques de mesures de nivellation sont supposées traitées dans un cours de topométrie.

Les techniques inertielles : il s'agit de mesurer l'accélération et la direction d'un véhicule et d'en déduire sa position instantanée et sa vitesse. Les instruments utilisés sont des gyroscopes et accéléromètres. Ces techniques ne sont pas étudiées dans ce cours.

4.RELATIONS AVEC LES DISCIPLINES VOISINES

Les relations avec les disciplines voisines peuvent être selon le cas qualifiées par le fait que la discipline va être une discipline de base, connexe ou utilisatrice.

Les mathématiques, la physique et l'informatique sont les disciplines de base car ce sont les outils de la géodésie. La géodésie utilise dans les mathématiques particulièrement l'algèbre, l'analyse, la géométrie, les statistiques, le traitement du signal. Dans la physique c'est particulièrement la mécanique, la gravitation, l'optique, la propagation des ondes qui intéressent la géodésie. Enfin l'informatique est utilisée majoritairement pour des traitements numériques mais aussi un peu pour la gestion de données.

Les sciences connexes sont les sciences qui font des échanges dans les deux sens avec la géodésie: elles ont besoin de la géodésie et la géodésie a besoin d'elles. On citera en particulier :

L'Astronomie: on a vu dans la partie historique que l'on ne peut pas vraiment dissocier la géodésie et l'astronomie dans sa composante astrométrie optique. En particulier l'astronomie fournira jusqu'au milieu du 20^{ème} siècle le seul moyen de faire un positionnement absolu sur Terre. Ce lien reste très fort au niveau scientifique car la géodésie spatiale et particulièrement les réseaux géodésiques mondiaux permettent de déterminer la position instantanée du pôle et la variabilité de la rotation terrestre. Une des techniques de géodésie spatiale, le VLBI, est aussi une technique de radio-astronomie . Enfin le référentiel céleste et le référentiel terrestre sont définis conjointement à partir des mesures spatiales sur le réseau mondial (ITRF).

La Géophysique :

La géodésie est pour les géophysiciens un outil de mesure de déformation de l'écorce terrestre. L'apparition de géodésie spatiale a été un événement essentiel pour les géophysiciens car elle a permis enfin de faire des mesures intercontinentales, mesures impossibles par les techniques de mesures angulaires. En particulier la grande précision des mesures spatiales (quelques millimètres à des milliers de kilomètres de distances) permet de vérifier et d'améliorer les modèles de mouvements des plaques tectoniques, modèles bâtis au départ sur des observations géologiques qui permettent en remontant très loin dans le temps et en constatant de grand déplacement d'appréhender des déplacements de quelques centimètres par an. La géodésie spatiale permet de mesurer ces déplacements sur de très courtes périodes (annuelles par exemple).

Les techniques de géodésie sont utilisées aussi pour des déformations plus locales comme les tremblements de Terre ou des déformations de Volcans.

La géodésie fournit les données de déplacements qui permettent ensuite aux géophysiciens de faire des modèles de la dynamique de la Terre.

L'océanographie : la surface des océans joue un très grand rôle en géodésie puisqu'elle visualise la surface de référence des altitudes (géoïde). La géodésie contribue à la détermination de cette surface en particulier en faisant des mesures altimétriques à partir de satellites (mesure de la hauteur du satellite au-dessus du niveau de la mer). La géodésie permet de positionner très précisément le satellite dans un référentiel mondial et on peut ainsi

vérifier les variations du niveau de la mer comme par exemple le phénomène du El Nino ou la montée globale du niveau des mers due à l'effet de serre.

La météorologie: très tôt la géodésie s'est inquiétée de la correction des observations d'angles et de distances due à la traversée de l'atmosphère. La géodésie spatiale est-elle aussi très sensible à ce phénomène et selon les techniques de calculs elle a besoin de modèles atmosphérique (ionosphère, troposphère) ou bien contribue à l'aide de ses propres observations à la détermination de ces modèles.

Les techniques spatiales : il s'agit ici des techniques liées à la fabrication et aux lancements de satellites dans l'espace. Ces techniques fournissent évidemment à la géodésie les outils mais la géodésie permet aussi de contribuer à l'orbitographie des satellites par mesures entre des stations géodésiques au sol et les satellites.

Enfin on trouvera les utilisateurs de la géodésie dont la liste est difficile à établir et dont on donne quelques exemples dans ce qui suit :

L'utilisateur historique et privilégié est la cartographie. Pour établir une carte il faut d'abord avoir des points géodésiques qui permettent d'appuyer les levés topographiques ou photogrammétriques. La géodésie fournit ainsi le référentiel et la représentation plane dans lesquels sera représentée la carte. La version moderne est la carte numérisée gérée par des SIG (Système d'Information Géographiques). Les utilisateurs de SIG (géographes, écologistes, forestiers, aménageurs, etc...) sont donc aussi des utilisateurs de géodésie. En effet leur but est de reporter sur la carte numérique des données thématiques qui correspondent à leur application. Le positionnement de ces données peut se faire en repérant des détails sur la carte mais peut aussi être déduit d'un positionnement sur le terrain par exemple par la technique spatiale GPS (mobilier urbain, suivi d'animaux, ...). On trouve d'autres utilisateurs dans l'aménagement du territoire qui tracent leur projet sur un plan, une carte et qui ont besoin ensuite d'un positionnement sur le terrain (implantation). Enfin, avec les techniques de positionnement en temps réel apparaissent de nouveaux utilisateurs pour le guidage d'engins (travaux publics, bâtiments, agriculture, ...).

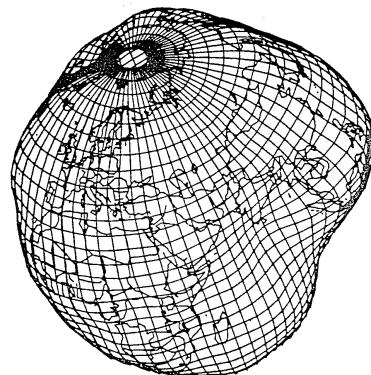
5.LES SURFACES DE REFERENCES EN GEODESIE

5.1 La surface topographique :

C'est la surface physique de séparation de l'atmosphère ou de la mer avec la Terre solide . Cette surface est très irrégulière, elle varie de -11000m à + 8800m par rapport au niveau de la mer. C'est sur cette surface que sont situées les stations d'observation.

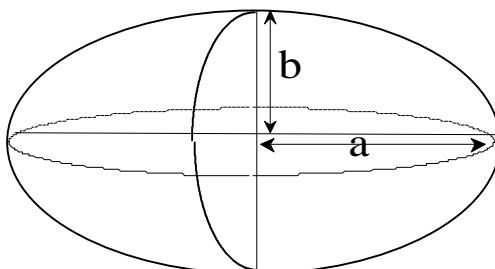
5.2 Le géoïde:

C'est une équipotentielle du champ de pesanteur correspondant au niveau moyen des mers. Cette surface est irrégulière mais à courbure très lentement variable, elle comporte des trous et des bosses de quelques centaines de mètres. L'écart entre la surface topographique et le géoïde s'appelle le relief. On peut dire de manière simple que le géoïde représente la Terre débarrassée de son relief.



5.3 L'ellipsoïde :

C'est une surface géométrique simple donnant une approximation du géoïde. Cette surface est un ellipsoïde de révolution engendré par une ellipse tournant autour du petit axe. Le petit axe est proche de l'axe de rotation de la Terre et le centre proche du centre de gravité.



a: demi-grand-axe

b: demi petit axe

$$f: \text{aplatissement } f = \frac{a-b}{a}$$

$$e: \text{excentricité } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

Ordre de grandeur d'un ellipsoïde terrestre:

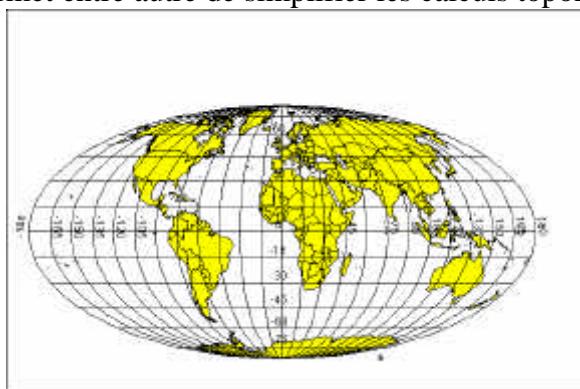
$$a \approx 6378 \text{ km} \quad b \approx 6356 \text{ km} \quad f \approx \frac{1}{300}$$

Il existe de nombreux ellipsoïdes dont les dimensions peuvent varier entre eux de plusieurs centaines de mètres.

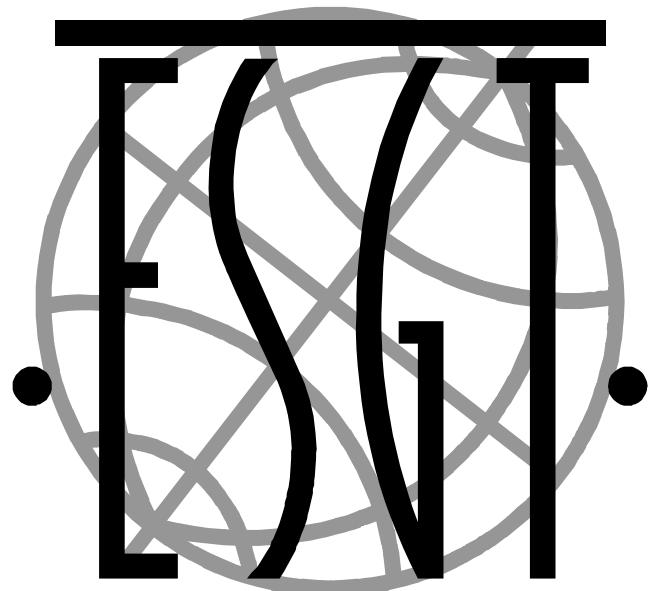
5.4 Le plan, la carte:

Pour représenter la Terre on transforme l'ellipsoïde en un plan par une transformation mathématique dite représentation plane. Il existe de nombreuses représentations planes, quelques unes seront étudiées dans ce cours.

Cette transformation permet entre autre de simplifier les calculs topométriques.



1.DEFINITION DE LA GEODESIE	1
2.HISTORIQUE.....	1
3.OBJECTIFS, DOMAINES D'ACTIVITES,TECHNIQUES DE LA GEODESIE.....	6
3.1 OBJECTIFS.....	6
3.2 DOMAINES D'ACTIVITÉS	7
3.3 TECHNIQUES SPÉCIFIQUES	7
4.RELATIONS AVEC LES DISCIPLINES VOISINES	8
5.LES SURFACES DE REFERENCES EN GEODESIE.....	9
5.1 LA SURFACE TOPOGRAPHIQUE :	9
5.2 LE GÉOÏDE :.....	10
5.3 L'ELLIPSOÏDE :	10
5.4 LE PLAN, LA CARTE:.....	10



ECOLE SUPERIEURE DES GEOMETRES ET TOPOGRAPHES

1, Boulevard Pythagore - 72000 LE MANS

Téléphone : 02.43.43.31.00 Télécopie : 02.43.43.31.02

[http : www.esgt.cnam.fr](http://www.esgt.cnam.fr)

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ÉCOLE SUPÉRIEURE
DES GÉOMÈTRES ET
TOPOGRAPHES



COURS DE GÉODÉSIE

Chapitre 2 Astronomie

ES1



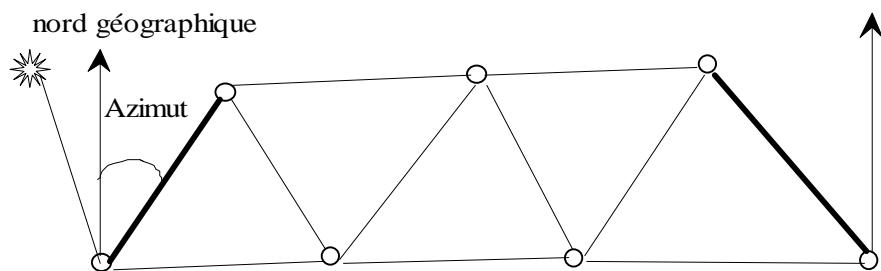
Cham

CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET MÉTIERS

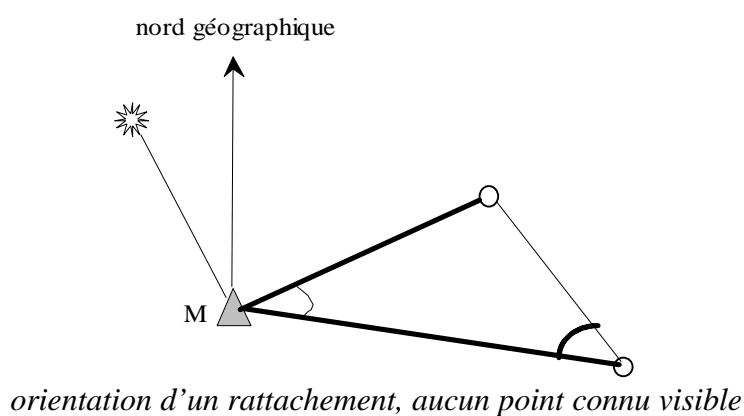
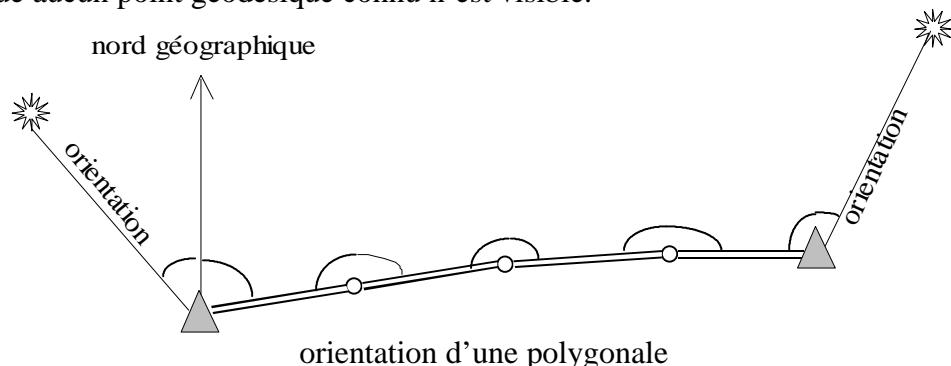
Françoise et Henri DUQUENNE
1^{ère} édition 1998
dernière révision : Février 2002

1. INTRODUCTION A L'ASTRO-GEODESIE

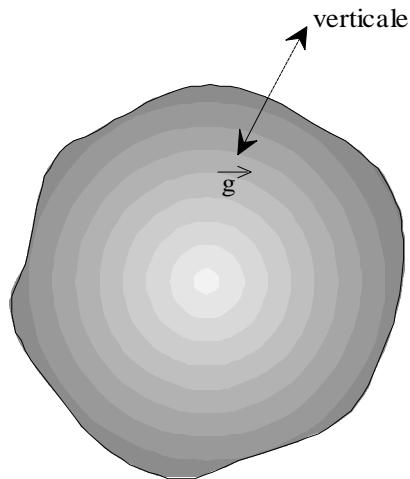
L'astronomie géodésique (dite aussi de position) a pour but de déterminer des positions ou des directions à la surface de la Terre à partir d'observations d'objets célestes (étoiles, planètes, etc...). Maintenant dépassée par les techniques spatiales (en particulier sur satellites) cette technique a longtemps été utilisée pour se positionner de manière absolue sur la Terre comme par exemple pour la navigation en plein océan, ou dans les déserts. Elle a été la technique fondamentale pour la construction des premiers réseaux géodésiques fournissant les coordonnées de départ des réseaux (point fondamental) ainsi que l'orientation et la réorientation des triangulations (points de Laplace) (cf 5^{ème} partie de ce cours).



Si le positionnement astronomique est dépassé au niveau précision par les techniques spatiales il n'en est pas de même pour l'orientation. En particulier, en géodésie ou topographie, on peut utiliser des méthodes de détermination d'azimut (le plus souvent sur le soleil ou sur l'étoile polaire) pour orienter une polygonale ou implanter des repères auxiliaires dans des milieux difficiles comme les forêts, lorsque aucun point géodésique connu n'est visible.



Enfin, comme on le verra par la suite, l'objet de l'astronomie est d'orienter la verticale du lieu d'observation dans l'espace. Dans ce sens elle contribue à la connaissance du champ de pesanteur puisque la verticale est la tangente à la ligne de force du champ de pesanteur au lieu de mesure. Elle contribue en particulier à la détermination du géoïde qui est une équipotentielle particulière du champ de pesanteur.



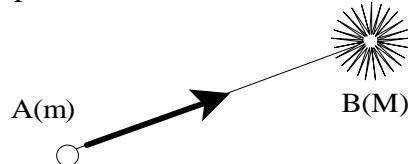
Déterminer des positions sur Terre en observant des objets célestes présentent la difficulté d'avoir des cibles en mouvement par rapport au lieu d'observation. En fait, bien sûr se sont les différents mouvements de la Terre par rapport aux étoiles qui rendent les calculs un peu compliqués. Pour résoudre un problème d'astronomie il faut donc définir :

- Un repère dans lequel on pourra positionner les objets célestes par des coordonnées
- Un repère dans lequel on pourra positionner des objets sur la Terre
- Un repère dans lequel on pourra exprimer les observations faites à partir de la Terre sur des objets célestes
- Les processus de passage d'un repère à l'autre

Ces repères sont définis à partir de l'étude des différents mouvements de la Terre qui permettent de mettre en évidence des plans et directions particuliers.

2. LES MOUVEMENTS DE LA TERRE

La Terre, comme tout objet de l'espace, est en mouvement sous l'effet de l'attraction universelle :



Le corps A de masse m est attiré par le corps B de masse M sous l'effet de la force d'attraction qui est proportionnelle à la masse de A, à la masse de B, à la constante G de gravitation universelle et inversement proportionnelle au carré de la distance entre A et B.

$$\vec{F} = \frac{GMm}{\left\| \vec{AB} \right\|^3} \vec{AB}$$

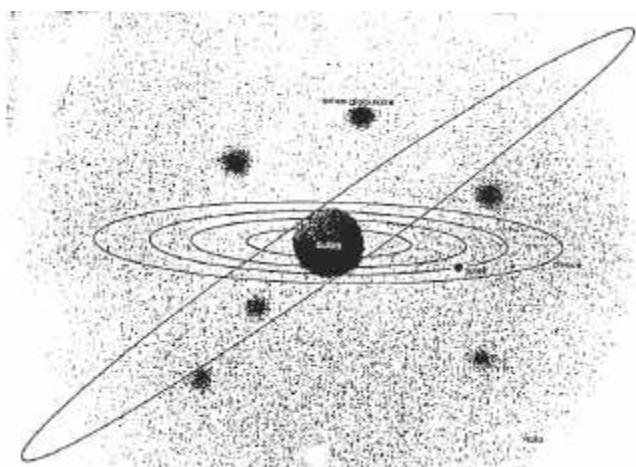
Le mouvement de la Terre est composé de plusieurs mouvements :

- elle participe au mouvement de notre galaxie par rapport aux autres galaxies
- elle participe au mouvement du système solaire dans notre galaxie
- elle tourne autour du soleil
- elle tourne sur elle-même

On peut remarquer que le premier mouvement ne peut être visible que si on observe des objets extragalactiques. Ce n'est pas le cas de l'étude de ce chapitre qui se consacre aux mesures optiques et donc à des objets visés qui sont dans la Galaxie. Par contre en géodésie spatiale la VLBI (Very Long Base Interferometry) dont la technique consiste à observer des radiosources extragalactiques (cf. 6^{ème} partie) est concernée.

2.1 Le mouvement du système solaire dans la Galaxie :

La Galaxie dans laquelle se trouve le système solaire est une galaxie spirale dont le centre (le bulbe) est occupé par une forte concentration d'étoiles et les autres étoiles étant principalement réparties dans un plan que l'on appelle le plan galactique. Le soleil se trouve à la périphérie de ce disque et tourne autour du centre dans un mouvement quasi-circulaire, de rayon environ $3,5 \cdot 10^7$ km avec une période de 220 millions d'années. A l'échelle humaine ce mouvement peut-être assimilé à un mouvement rectiligne uniforme dans la direction de l'*Apex* (point virtuel situé dans la constellation d'Hercule) avec une vitesse de 20 km/s.



2.2 Le mouvement annuel

Comme toutes les planètes du système solaire la Terre est en mouvement autour du Soleil et répond en première approximation aux trois lois de Képler :

- les planètes décrivent des ellipses dont le centre du soleil occupe un des foyers
- au cours du mouvement le rayon vecteur joignant le centre du soleil à la planète balaie des aires égales en des temps égaux
- le rapport des cubes des demi grand axes des orbites au carré des périodes est le même pour toutes les planètes

Ces lois sont déduites :

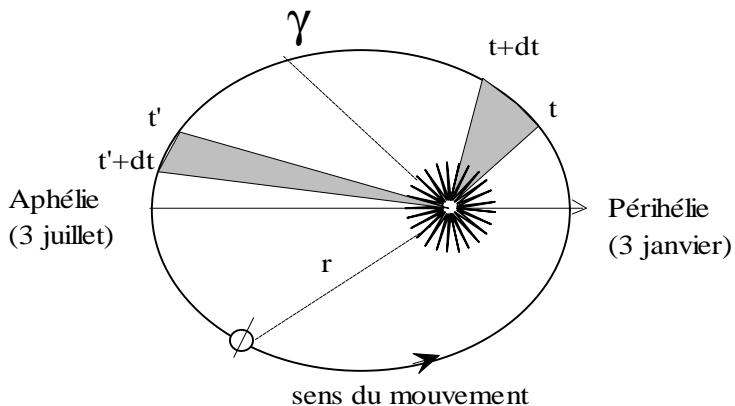
- du principe fondamental de la dynamique :

$$- \quad \vec{F} = m \frac{\vec{v}}{\gamma}$$

- de la loi d'attraction universelle :

$$\vec{F} = \frac{GMm}{\|\vec{AB}\|^3} \vec{AB}$$

Particularités du mouvement de la Terre autour du Soleil :

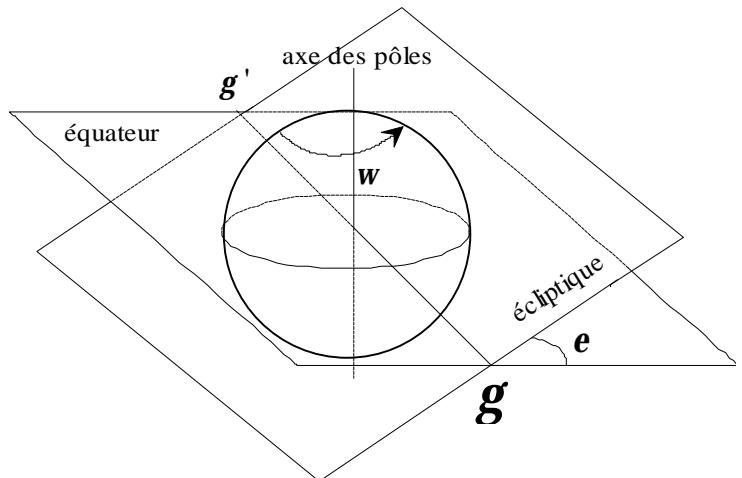


Le plan de la trajectoire de la Terre s'appelle *l'écliptique*, la distance de la Terre au Soleil est d'environ 150 millions de kilomètres, la période du mouvement est *l'année sidérale*.

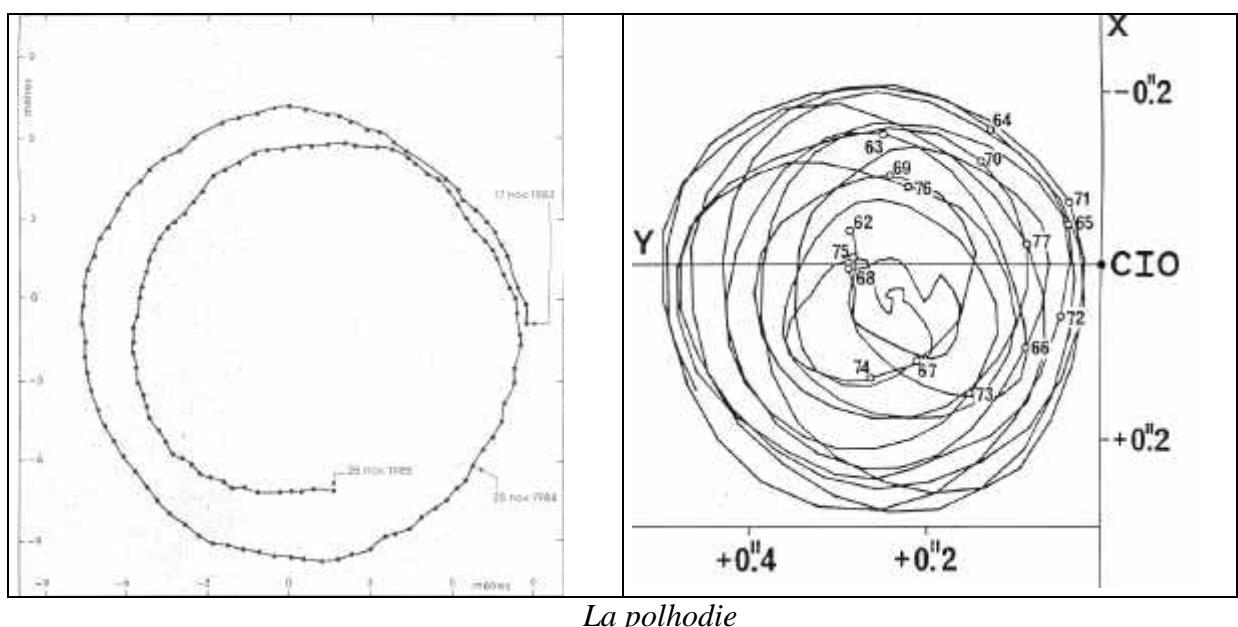
Le système Terre-Soleil n'étant pas isolé le mouvement n'est pas tout à fait képlérien mais il est perturbé en particulier par les planètes Jupiter, Saturne et Vénus. L'effet est que les éléments de la trajectoire varient et particulièrement l'écliptique bascule d'environ 0°47 par an. Cette perturbation est appelée *précession planétaire*.

2.3 le mouvement diurne

La Terre est en rotation autour d'un axe appelé *axe des pôles*. Le plan perpendiculaire à l'axe des pôles passant par le centre de la Terre s'appelle *l'équateur* et fait un angle ϵ appelé *obliquité* d'environ $23^{\circ}26'$ avec le plan de l'écliptique. L'intersection des deux plans est *la ligne des équinoxes* $\gamma\gamma'$. Le point γ qui correspond à l'équinoxe de printemps s'appelle *le point vernal*. La période de la rotation est un jour et le mouvement est le mouvement diurne. La vitesse de rotation angulaire est en moyenne : $w = 7292115 \times 10^{-11} \text{ rad.s}^{-1}$



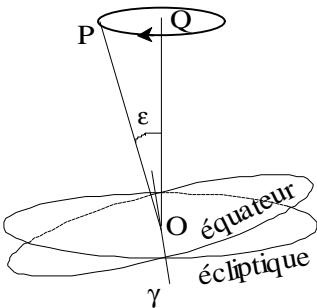
La Terre est un solide déformable, non sphérique, non homogène et sa rotation est perturbée . L'axe de rotation n'est pas fixe par rapport à la Terre car n'étant ni sphérique ni homogène ses moments d'inertie ne sont pas égaux. Le pôle se déplace sur la Terre dans un mouvement quasi-circulaire de diamètre environ 20 mètres en 435 jours (période de Chandler). Il existe aussi une petite dérive de la position moyenne. On définit un pôle conventionnel (CIO : Conventional International Origin) qui correspond à la position moyenne entre 1900 et 1905. La trajectoire du pôle instantané à la surface de la Terre est la *polhodie*.



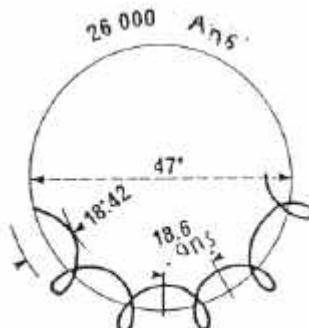
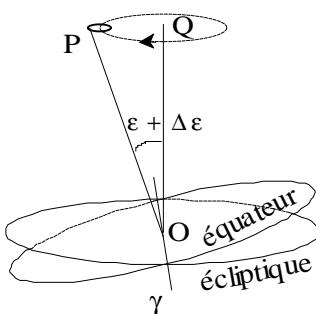
La polhodie

L'axe de rotation n'est pas fixe dans l'espace à cause de l'attraction différentielle de la Lune et du Soleil sur le renflement équatorial. Il est habituel de décomposer ce mouvement de l'axe de rotation en deux, la **précession** et la **nutation luni-solaire** :

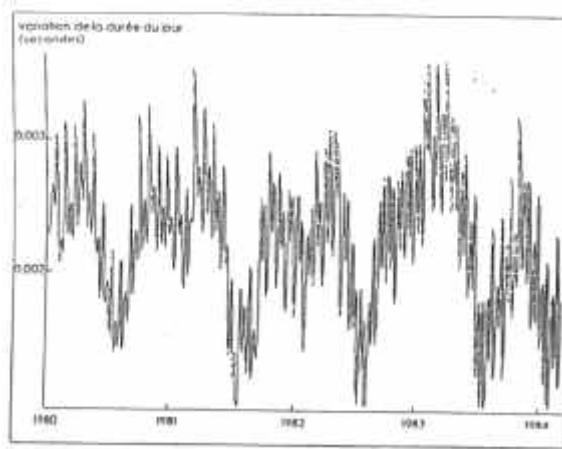
La **précession** correspond à un mouvement de longue période (26 000 ans), où l'axe des pôles décrit un cône de demi-angle au sommet $23^{\circ}26'$ autour de l'axe de l'écliptique. L'effet de ce mouvement est un déplacement annuel de la ligne des équinoxes (et donc du point γ) sur l'équateur d'environ $50,2''$ dans le sens rétrograde.



La **nutation** correspond à des mouvements de courtes périodes liés aux positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil. Le terme principal a une période de 18,6 ans correspondant au SAROS période correspondant à la reproduction à l'identique d'une éclipse. Cette période correspond au temps qu'il faut pour que la Terre, le Soleil et la Lune se retrouvent exactement dans la même position. Dans ce mouvement le pôle décrit autour d'une position moyenne une petite ellipse de demi-grand axe $9,21''$ et demi-petit axe $6,87''$. D'autres termes d'amplitude et de périodes plus petites font vibrer l'axe de rotation.



La vitesse de rotation diminue : la Terre est freinée à cause de sa déformation sous l'effet des marées et de l'attraction de la Lune. Ceci provoque une augmentation de la durée du jour d'environ 2 millisecondes en 100 ans. D'autres variations plus faibles et souvent périodiques sont dues à des phénomènes atmosphériques (moussons), océaniques (El Niño), internes à la Terre (couplage manteau-noyau).



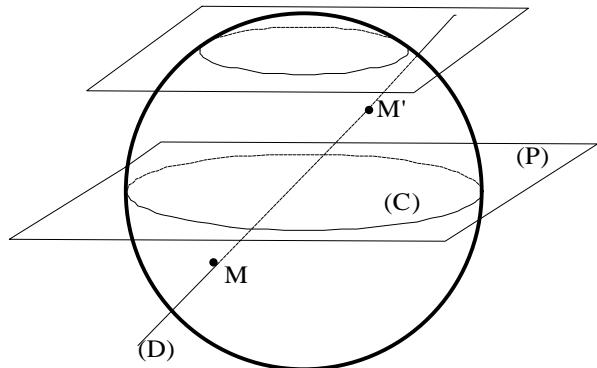
3.LES REPERES ET COORDONNEES EN ASTRONOMIE

3.1 La sphère céleste

3.1.1 Définition :

Les étoiles sont réparties dans l'univers à des distances qui sont très grandes et aussi très variées. Pour l'astro-géodésie seules les directions importent puisque les observations sont des mesures d'angles. De là l'idée d'utiliser comme outil de représentation mathématique une sphère de rayon l'unité, appelée sphère céleste, sur laquelle les étoiles seront repérées par l'intersection de la direction avec la sphère.

Dans cette représentation, l'image d'une droite est constituée des deux points intersection avec la sphère, l'image d'un plan sera un cercle



Le centre de la sphère pourra être suivant les besoins :

- la Terre réduite à un point (sphère géocentrique)
- le Soleil réduit à un point (sphère héliocentrique)
- le point de la station où sont effectuées les mesures (sphère topocentrique)

Passer d'une sphère à une autre consiste en une translation du centre qui se traduit par une correction d'angle appelée parallaxe.

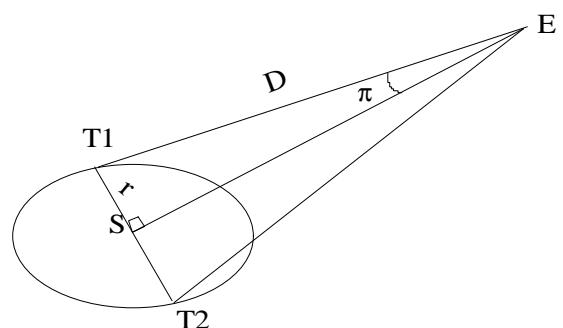
3.1.2 La parallaxe annuelle :

Elle correspond au passage sphère héliocentrique \leftrightarrow sphère géocentrique.

La parallaxe annuelle est l'angle sous lequel on verrait le rayon de l'orbite terrestre à partir d'une étoile (ou un astre) E. Il peut se calculer en fonction de r la distance Terre Soleil et D la distance Terre étoile.

$$\sin \pi = \frac{r}{D}$$

Pour l'étoile la plus proche (environ 4 années lumières), la parallaxe vaut environ 1''. Cette correction est prise en compte dans les tables (ou programmes de calculs) qui donnent la position d'étoiles à l'instant de l'observation.



3.1.3 La parallaxe de hauteur :

Elle correspond au passage sphère topocentrique \leftrightarrow sphère géocentrique .

La parallaxe de hauteur est l'angle sous lequel serait vu le rayon terrestre à partir d'un astre. On voit sur la figure que la parallaxe de hauteur dépend comme son nom l'indique de la hauteur de l'astre dans le ciel, la valeur étant maximale lorsque l'astre est à l'horizon. On appelle P_o la parallaxe horizontale :

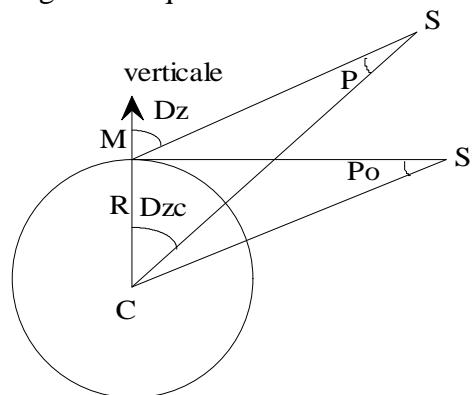
$$\sin P_o = \frac{R}{D}$$

Pour l'étoile la plus proche P_o vaut environ 10^{-8} grades. Cette correction n'est pas négligeable pour les objets du système solaire: $P_o \approx 0,0027$ grades pour le soleil.

La correction s'applique à la distance zénithale observée à la surface de la Terre (D_z) pour obtenir la distance zénithale que l'on aurait observée au centre de la Terre (D_{zc}). Pour une direction non horizontale on a : $\frac{\sin P}{R} = \frac{\sin(\pi - D_z)}{D}$

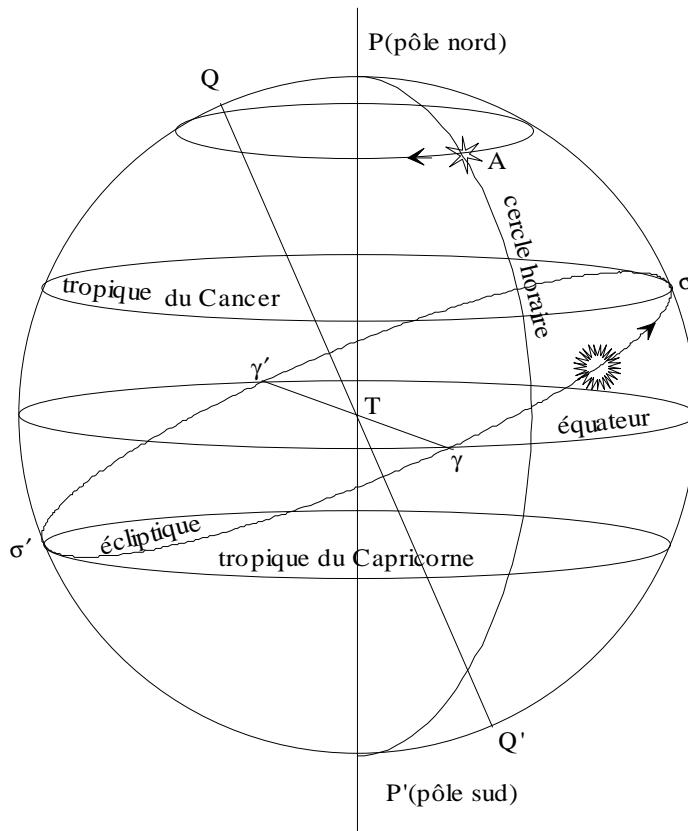
$$\sin P = \frac{R}{D} \sin D_z = \sin P_o \sin D_z$$

$$P = P_o \sin D_z \quad D_{zc} = D_z - P$$



3.1.4 Représentation des axes et plans liés aux mouvements de la Terre (sphère des fixes)

L'astro-géodésien préfère représenter les mouvements apparents tels qu'un observateur peut les voir. Ainsi, pour lui, la Terre sera fixe et les étoiles et le Soleil seront en mouvement sur la sphère céleste.



L'axe instantané de rotation a pour image sur la sphère céleste les points P (pôle Nord céleste) et P' (pôle Sud céleste). La droite PP' est appelée **axe du monde**. Du point de vue du géodésien la sphère céleste tourne autour de l'axe du monde, dans le sens rétrograde : c'est le mouvement diurne.

L'équateur céleste est le grand cercle intersection du plan perpendiculaire à l'axe du monde passant par avec la sphère céleste.

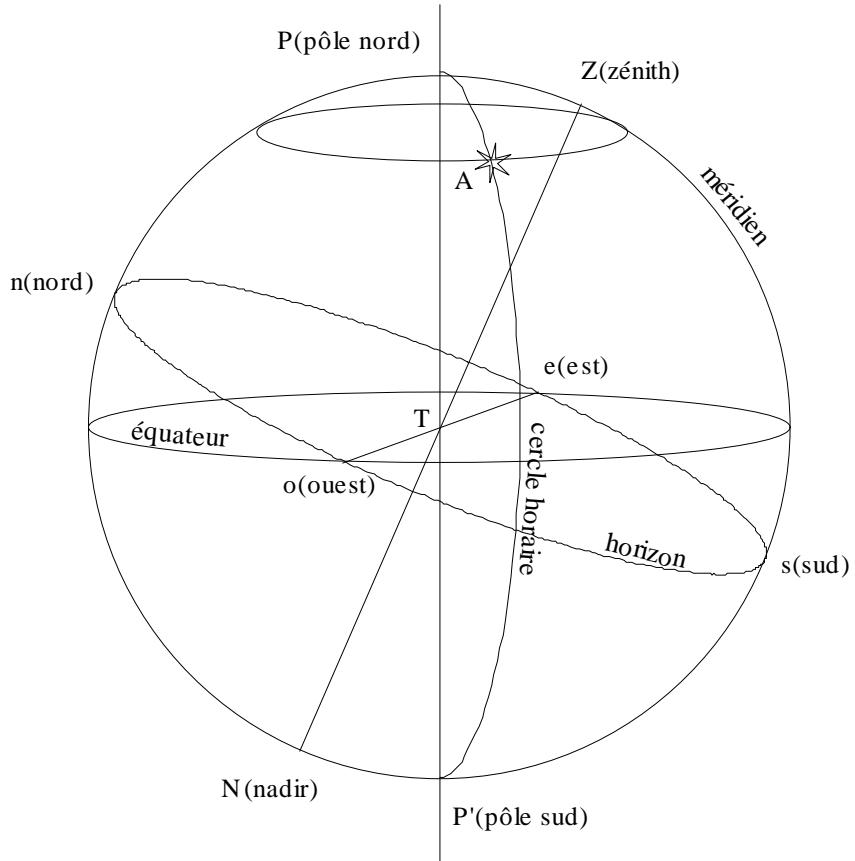
L'écliptique est le grand cercle intersection du plan de la trajectoire de la Terre autour du soleil avec la sphère céleste. Du point de vue du géodésien c'est la trace du mouvement apparent du soleil sur la sphère céleste dans le sens direct.

L'écliptique et l'équateur se coupent sur la sphère céleste en deux points γ, γ' . γ est **le point vernal** et correspond à **l'équinoxe de printemps**. γ' correspond à **l'équinoxe d'automne**. Soit $\sigma\sigma'$ la droite perpendiculaire à la ligne des équinoxes $\gamma\gamma'$ dans le plan de l'écliptique. $\sigma\sigma'$ est la ligne des solstices, σ correspond au **solstice d'été** et σ' au **solstice d'hiver**. L'écliptique est incliné sur l'équateur d'un angle ϵ appelé **obliquité** ($\epsilon \approx 23^\circ 26'$).

Les parallèles extrêmes atteints par le soleil s'appellent les tropiques: tropique du **cancer** dans l'hémisphère céleste nord, du **capricorne** dans l'hémisphère céleste sud.

Le cercle horaire d'une étoile est le demi grand cercle contenant l'étoile A intersection de la sphère céleste avec le plan contenant l'axe du monde PP' et la direction de l'astre TA.

3.1.5 Images des axes et plans liés aux observations (sphère locale)



La verticale est une direction accessible par l'observation en un lieu donné sur la Terre : c'est la direction que prend le fil à plomb ou l'axe principal du théodolite, c'est la tangente à la ligne de fore du champ de pesanteur en ce lieu. La verticale est représentée sur la sphère céleste par Z (**Zénith**) trace de la verticale ascendante et N (**nadir**) trace de la verticale descendante. Pour représenter un lieu sur la sphère céleste on indique Z et N de ce lieu.

L'horizon d'un lieu est le grand cercle de la sphère céleste intersection de celle-ci avec le plan perpendiculaire à ZN passant par T .

Le méridien d'un lieu est le demi grand cercle passant par Z trace sur la sphère céleste du plan contenant l'axe du monde PP' et la verticale du lieu ZN.

Le vertical d'une étoile est le demi grand cercle contenant l'étoile A trace du plan contenant la verticale du lieu ZN et la direction de l'étoile TA. Le vertical qui est perpendiculaire au méridien s'appelle **le premier vertical**.

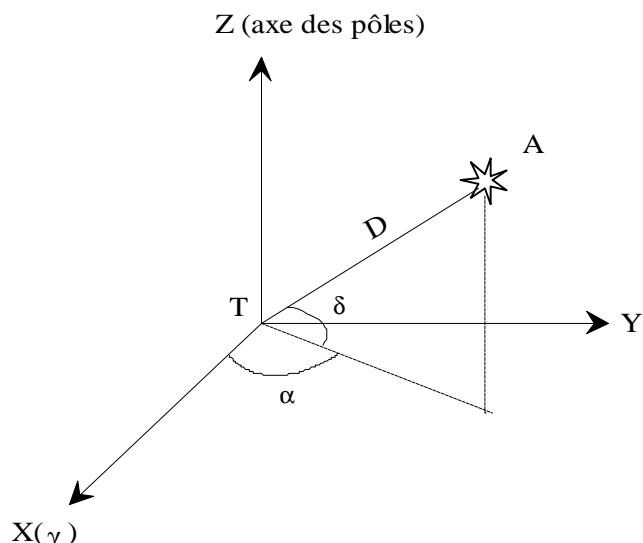
L'intersection du méridien et de l'horizon est le couple de points **n(nord)** du côté du pôle nord et **s(sud)** du côté du pôle sud. La droite perpendiculaire à ns dans le plan de l'horizon est la ligne **e (est)o(ouest)**.

Du fait du mouvement diurne le méridien et le cercle horaire de l'étoile forment un angle qui varie de 360° en un jour sidéral.

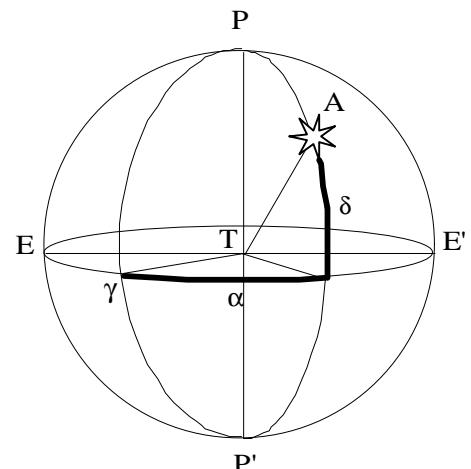
3.2 Le repère céleste équatorial. Les coordonnées célestes équatoriales

C'est le repère dans lequel on exprime les coordonnées des astres .Il est défini par :

- l'axe de rotation de la Terre
- l'équateur
- le point vernal g



Repère équatorial céleste



coordonnées équatoriales

Un astre A sera représenté par ses *coordonnées équatoriales* :

l'ascension droite *a* : angle dièdre entre le cercle horaire du point γ et le cercle horaire de l'étoile, compté de 0 à 24 heures dans le sens direct.

la déclinaison *d* : angle entre la direction de l'étoile et l'équateur, compté de -90° (au pôle sud) à $+90^\circ$ au pôle nord. Sur l'équateur $\delta = 0^\circ$. Dans le repère équatorial, les coordonnées cartésiennes d'astre sont:

$$\boxed{\begin{aligned} X &= D \cos \delta \cos \alpha \\ Y &= D \cos \delta \sin \alpha \\ Z &= D \sin \delta \end{aligned}}$$

Les coordonnées équatoriales des étoiles varient lentement avec le temps du fait :

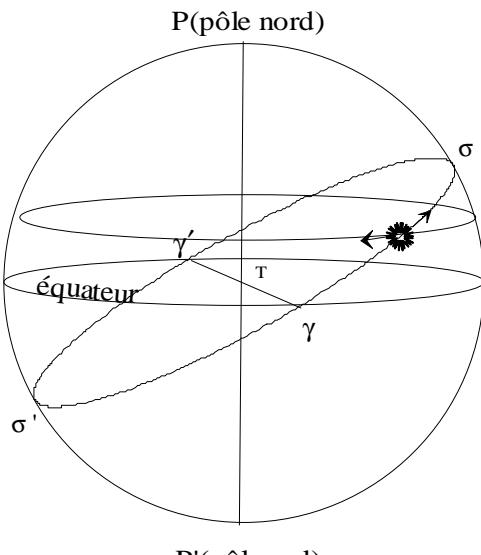
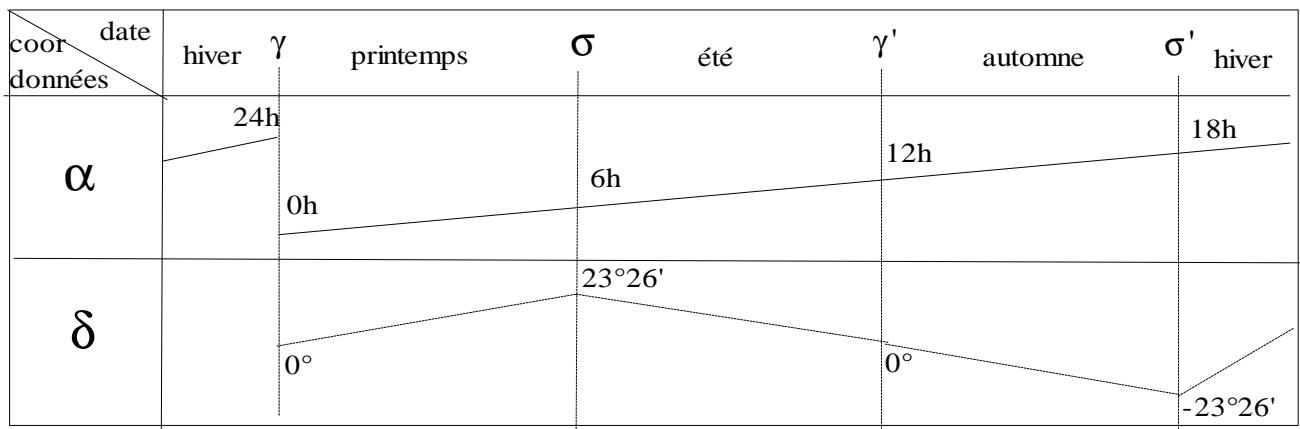
- de leur mouvement propre (composition du mouvement de l'étoile et du mouvement du système solaire dans la Galaxie)
- du mouvement de l'équateur (nutation luni-solaire)
- du déplacement du point vernal γ sur l'équateur (nutation et précession luni-solaire)

Des programmes de calcul ou des éphémérides donnent les coordonnées équatoriales des étoiles en fonction de la date.

	Janvier	0 h UT	Février	0 h UT	Mars	0 h UT
	Ascension droite	Déclinaison	Ascension droite	Déclinaison	Ascension droite	Déclinaison
01	2 30 01.001 ^h	+ 89°15'16.04"	2 29 12.481 ^h	+ 89°15'19.28"	2 28 27.729 ^h	+ 89°15'16.94"
02	2 29 59.554	+ 89 15 16.21	2 29 10.960	+ 89 15 19.27	2 28 26.472	+ 89 15 16.76
03	2 29 58.157	+ 89 15 16.37	2 29 09.470	+ 89 15 19.27	2 28 25.236	+ 89 15 16.60
04	2 29 56.819	+ 89 15 16.53	2 29 07.971	+ 89 15 19.28	2 28 23.981	+ 89 15 16.45
05	2 29 55.538	+ 89 15 16.69	2 29 06.417	+ 89 15 19.30	2 28 22.670	+ 89 15 16.30
06	2 29 54.292	+ 89 15 16.86	2 29 04.767	+ 89 15 19.33	2 28 21.279	+ 89 15 16.15
07	2 29 53.045	+ 89 15 17.04	2 29 03.008	+ 89 15 19.34	2 28 19.810	+ 89 15 15.99
08	2 29 51.746	+ 89 15 17.24	2 29 01.160	+ 89 15 19.34	2 28 18.297	+ 89 15 15.80
09	2 29 50.346	+ 89 15 17.44	2 28 59.279	+ 89 15 19.31	2 28 16.799	+ 89 15 15.59
10	2 29 48.819	+ 89 15 17.64	2 28 57.430	+ 89 15 19.24	2 28 15.381	+ 89 15 15.36
11	2 29 47.171	+ 89 15 17.83	2 28 55.666	+ 89 15 19.15	2 28 14.086	+ 89 15 15.10
12	2 29 45.443	+ 89 15 17.99	2 28 54.010	+ 89 15 19.05	2 28 12.921	+ 89 15 14.84
13	2 29 43.694	+ 89 15 18.12	2 28 52.453	+ 89 15 18.95	2 28 11.863	+ 89 15 14.59
14	2 29 41.981	+ 89 15 18.23	2 28 50.966	+ 89 15 18.85	2 28 10.870	+ 89 15 14.34
15	2 29 40.341	+ 89 15 18.32	2 28 49.513	+ 89 15 18.76	2 28 09.900	+ 89 15 14.11
16	2 29 38.782	+ 89 15 18.39	2 28 48.059	+ 89 15 18.68	2 28 08.920	+ 89 15 13.88
17	2 29 37.291	+ 89 15 18.47	2 28 46.577	+ 89 15 18.60	2 28 07.907	+ 89 15 13.66
18	2 29 35.842	+ 89 15 18.55	2 28 45.047	+ 89 15 18.52	2 28 06.853	+ 89 15 13.44
19	2 29 34.402	+ 89 15 18.64	2 28 43.462	+ 89 15 18.44	2 28 05.757	+ 89 15 13.21
20	2 29 32.938	+ 89 15 18.74	2 28 41.823	+ 89 15 18.35	2 28 04.629	+ 89 15 12.98
21	2 29 31.423	+ 89 15 18.84	2 28 40.142	+ 89 15 18.25	2 28 03.488	+ 89 15 12.73
22	2 29 29.839	+ 89 15 18.94	2 28 38.440	+ 89 15 18.13	2 28 02.356	+ 89 15 12.46
23	2 29 28.180	+ 89 15 19.04	2 28 36.738	+ 89 15 18.00	2 28 01.257	+ 89 15 12.19
24	2 29 26.451	+ 89 15 19.13	2 28 35.063	+ 89 15 17.84	2 28 00.217	+ 89 15 11.89
25	2 29 24.666	+ 89 15 19.20	2 28 33.440	+ 89 15 17.68	2 27 59.257	+ 89 15 11.59
26	2 29 22.845	+ 89 15 19.26	2 28 31.889	+ 89 15 17.50	2 27 58.392	+ 89 15 11.28
27	2 29 21.014	+ 89 15 19.29	2 28 30.421	+ 89 15 17.31	2 27 57.623	+ 89 15 10.98
28	2 29 19.200	+ 89 15 19.31	2 28 29.038	+ 89 15 17.12	2 27 56.944	+ 89 15 10.67
29	2 29 17.424	+ 89 15 19.32			2 27 56.331	+ 89 15 10.38
30	2 29 15.708	+ 89 15 19.31			2 27 55.755	+ 89 15 10.10
31	2 29 14.060	+ 89 15 19.30			2 27 55.180	+ 89 15 09.83

Extrait des éphémérides 1997 de la polaire (SAF-AFT)

Les coordonnées équatoriales du Soleil varient beaucoup plus que les coordonnées des étoiles car le Soleil décrit sur la sphère céleste un tour en un jour dans le sens rétrograde (comme les étoiles) mais il fait aussi un tour en un an dans le sens direct (mouvement annuel).



Jour du mois de la semaine	$\text{à } 0^{\circ} \text{ UT}$						S	
	Temps sidéral vrai à Greenwich	Ascension droite	Décli- naton	Distance à la Terre	Équa- tion du temps			
	$h\ m\ s$	$h\ m\ s$	*	*	UA	$m\ s$		
1 Mar	22 39 49	10 40 02	+ 8 25 52	1.00929	+ 0 12			
2 Mer	22 43 46	10 43 39	+ 8 04 06	1.00904	- 0 07			
3 Jeu	22 47 42	10 47 17	+ 7 42 13	1.00880	- 0 26			
4 Ven	22 51 39	10 50 53	+ 7 20 12	1.00855	- 0 46			
5 Sam	22 55 36	10 54 30	+ 6 58 04	1.00830	- 1 06			
6 Dim	22 59 32	10 58 07	+ 6 35 50	1.00805	- 1 26			
7 Lun	23 03 29	11 01 43	+ 6 13 29	1.00780	- 1 46			
8 Mar	23 07 25	11 05 19	+ 5 51 01	1.00755	- 2 07			
9 Mer	23 11 22	11 08 55	+ 5 28 28	1.00730	- 2 27			
10 Jeu	23 15 18	11 12 30	+ 5 05 50	1.00705	- 2 48			
11 Ven	23 19 15	11 16 06	+ 4 43 06	1.00679	- 3 09			
12 Sam	23 23 11	11 19 41	+ 4 20 17	1.00654	- 3 30			
13 Dim	23 27 08	11 23 17	+ 3 57 24	1.00628	- 3 52			
14 Lun	23 31 05	11 26 52	+ 3 34 26	1.00602	- 4 13			
15 Mar	23 35 01	11 30 27	+ 3 11 24	1.00576	- 4 34			
16 Mer	23 38 58	11 34 02	+ 2 48 19	1.00550	- 4 55			
17 Jeu	23 42 54	11 37 38	+ 2 25 10	1.00523	- 5 17			
18 Ven	23 46 51	11 41 13	+ 2 01 59	1.00496	- 5 38			
19 Sam	23 50 47	11 44 48	+ 1 38 44	1.00469	- 5 59			
20 Dim	23 54 44	11 48 23	+ 1 15 28	1.00442	- 6 21			
21 Lun	23 58 40	11 51 59	+ 0 52 10	1.00414	- 6 42			
22 Mar	0 02 37	11 55 34	+ 0 28 50	1.00386	- 7 03			
23 Mer	0 06 33	11 59 10	+ 0 05 29	1.00358	- 7 24			
24 Jeu	0 10 30	12 02 45	- 0 17 53	1.00330	- 7 45			
25 Ven	0 14 27	12 06 21	- 0 41 15	1.00301	- 8 06			
26 Sam	0 18 23	12 09 57	- 1 04 38	1.00273	- 8 27			
27 Dim	0 22 20	12 13 33	- 1 28 00	1.00244	- 8 47			
28 Lun	0 26 16	12 17 09	- 1 51 22	1.00215	- 9 07			
29 Mar	0 30 13	12 20 45	- 2 14 43	1.00186	- 9 28			
30 Mer	0 34 09	12 24 22	- 2 38 02	1.00157	- 9 47			

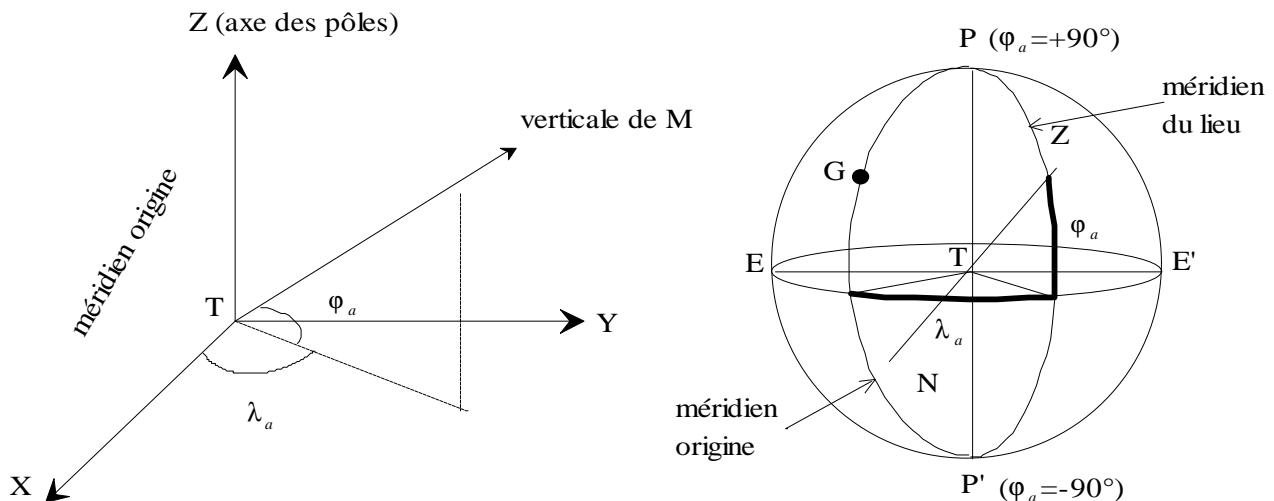
Équinoxe (début de l'automne astronomique) le 23 septembre à $5^{\circ}37' \text{ UT}$

extrait des éphémérides 1998 du Soleil (SAF-AFT)septembre

3.3 Le repère terrestre général. Les coordonnées géographiques astronomiques

C'est le repère dans lequel on exprime la position de points sur la Terre. Il est défini par :

- l'axe instantané de rotation de la Terre
- l'équateur
- le méridien origine (anciennement appelé méridien de Greenwich, maintenant méridien international).



Un lieu de la Terre sera représenté par ses *coordonnées géographiques astronomiques* :

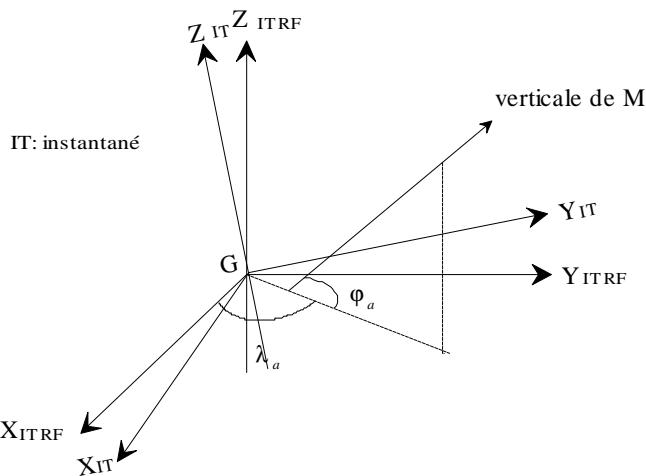
la longitude astronomique λ_a : c'est l'angle dièdre entre le méridien origine et le méridien du lieu, compté entre 0 et 24 heures dans le sens direct à partir du méridien origine.

la latitude astronomique \mathbf{j}_a : c'est l'angle entre la verticale du lieu et l'équateur, compté de 0 à 90° et de 0 à -90° à partir de l'équateur respectivement dans les hémisphères nord et sud. Dans le repère terrestre, les composantes du vecteur unitaire vertical d'un lieu sont:

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \cos \varphi_a \cos \lambda_a \\ Y &= \cos \varphi_a \sin \lambda_a \\ Z &= \sin \varphi_a \end{aligned}}$$

L'axe instantané de rotation est mobile par rapport à la Terre. Pour avoir un repère fixe par rapport à la Terre on définit un repère conventionnel, le repère CIO-BIH remplacé par ITRF (IERS Terrestrial Reference Frame).

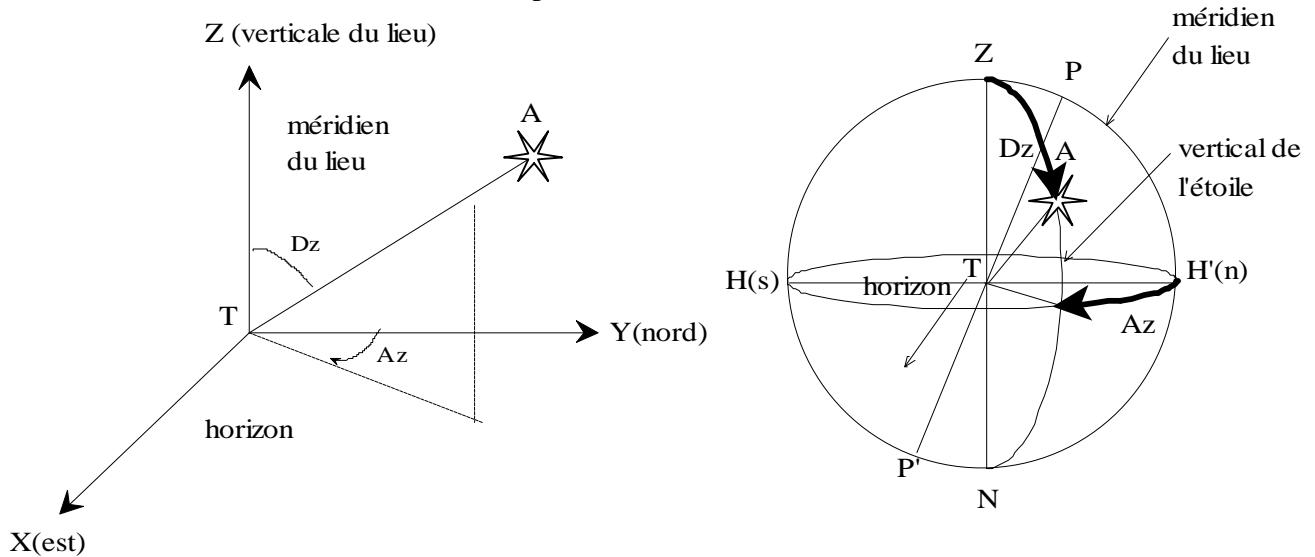
- origine : centre des masses de la Terre
- les axes sont définis implicitement par les coordonnées de stations de référence
- les coordonnées du pôle instantané sont calculées et publiées par l'IERS (International Earth Rotation Service) et permettent le passage du repère terrestre instantané au repère conventionnel.



3.4 Le repère terrestre local astronomique. Les coordonnées horizontales locales

C'est le repère dans lequel on exprime les observations sur les objets célestes faites à partir d'un point de la Terre . Il est défini par :

- la verticale du lieu
- le plan horizontal
- le plan méridien du lieu



Une étoile est représentée dans ce repère par ses coordonnées horizontales locales :

l'azimut Az est l'angle dièdre entre le méridien du lieu et le vertical de l'étoile , compté de 0 à 400 grades dans le sens rétrograde à partir du nord (n).

la distance zénithale Dz : angle entre la verticale et la direction de l'étoile, compté de 0 à 200 grades à partir du zénith. On définit aussi la hauteur h, quantité complémentaire :

$$Dz + h = 100 \text{ grades}$$

Dans le repère local, les composantes du vecteur unitaire de la direction d'une étoile sont:

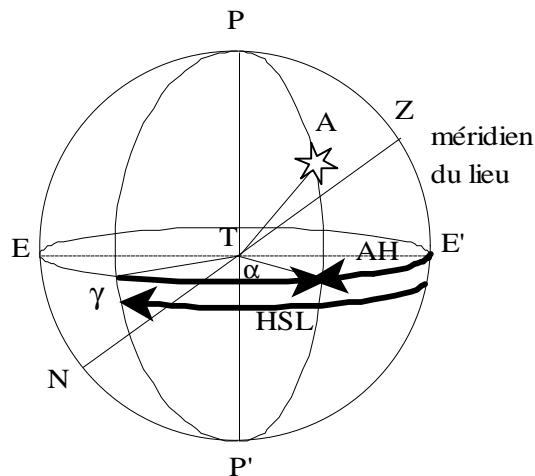
$X = \sin Dz \sin Az$ $Y = \sin Dz \cos Az$ $Z = \cos Dz$

3.5 Relations entre les repères et coordonnées

3.5.1 Relation entre le repère équatorial céleste et le repère horizontal local :

On appelle **angle horaire AH**, l'angle dièdre d'arête PP' entre le méridien du lieu et le cercle horaire de l'étoile. Cet angle est compté de 0 à 24 heures dans le sens rétrograde à partir du méridien du lieu. L'angle horaire du point vernal γ s'appelle **l'heure sidérale locale (HSL)**.

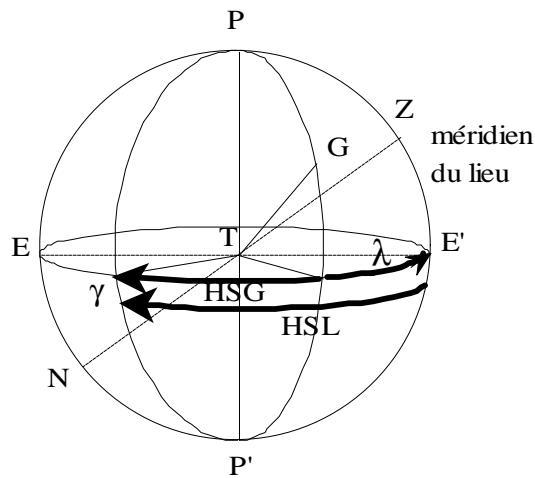
$$AH_\gamma = HSL$$



On peut écrire la relation :

$$HSL = \alpha + AH$$

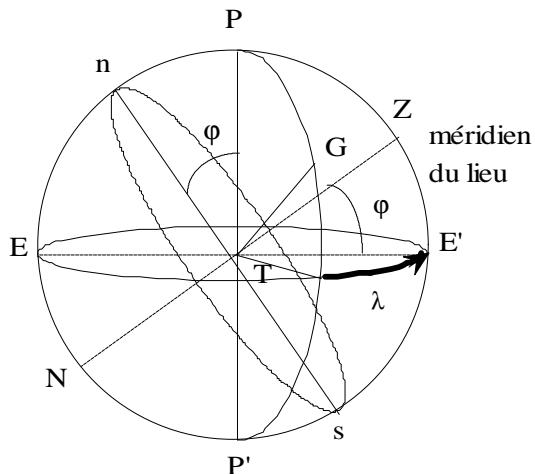
3.5.2 Relation entre le repère équatorial céleste et le repère terrestre général :



On appelle HSG (Heure Sidérale Greenwich) l'heure sidérale du méridien origine. Pour un lieu de longitude λ on a la relation :

$$HSL = HSG + \lambda$$

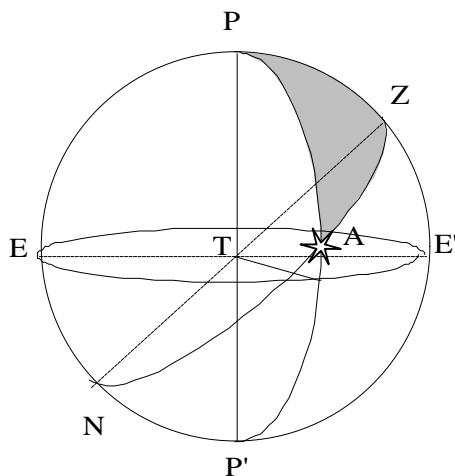
3.5.3 Relation entre le repère horizontal local et le repère terrestre général :



La latitude d'un lieu est égale à la hauteur du pôle sur l'horizon de ce lieu :

$$\phi = h_{pôle} = \frac{\pi}{2} - Dz_{pôle}$$

3.5.4 Le triangle de position.



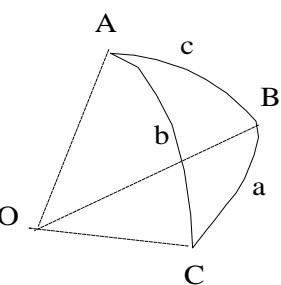
Le triangle PZA s'appelle le triangle de position : c'est un triangle sphérique auquel on peut appliquer les formules de trigonométrie sphérique.

Un triangle sphérique est un triangle tracé sur une sphère de rayon unité et dont les côtés sont des arcs de grands cercles.

Les côtés a, b, c du triangle sont des arcs égaux aux angles aux centres qu'ils sous-tendent . Les angles sont des angles dièdres :

L'angle \hat{A} est l'angle entre les plans AOC et AOB. La somme des angles d'un triangle est supérieur à π radians:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi S}{R^2}$ où S représente la surface du triangle sur la sphère. Pour la sphère céleste on a : $R=1$.



Les formules de trigonométrie sphérique :

Ces formules lient au moins 4 éléments du triangle sphérique et selon la nature de ces éléments portent un nom différent :

Nom de la formule	Formule
Formule fondamentale (un angle, 3côtés)	$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$
Formule des sinus (2angles, 2 côtés opposés)	$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$
Formule des sinus et cosinus (2 angles, 3 côtés)	$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$
Formule des cotangentes (2 angles, 2 côtés adjacents)	$\sin A \cot B = \cot b \sin c - \cos c \cos A$
Formule corrélative (3angles, 1 côté)	$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

Application de la trigonométrie sphérique au triangle de position

Les éléments du triangle de positions sont :

$$\begin{aligned} \text{Les côtés : } PZ &= \frac{\pi}{2} - \varphi \\ ZA &= Dz \\ PA &= \frac{\pi}{2} - \delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Les angles : } \hat{Z} &= \pm Az \\ \hat{P} &= \pm AH \\ A &= \pm S \text{ angle à l'astre} \end{aligned}$$

Etoile à l'est du méridien	
<p>L'angle horaire est compté à partir du méridien dans le sens rétrograde, donc il est à l'extérieur du triangle. A l'intérieur on a donc $-AH$.</p> <p>$12 h < AH < 24h.$</p> <p>L'azimut est compté à partir du méridien dans le sens rétrograde, donc il est à l'intérieur du triangle.</p> <p>$0 \text{ grades} < Az < 200 \text{ grades}$</p> <p>L'angle à l'astre est compté à partir du vertical de l'étoile et dans le sens rétrograde, donc il est à l'intérieur du triangle</p> <p>$0 \text{ grades} < S < 200 \text{ grades}$</p>	

Etoile à l'ouest du méridien

L'angle horaire est compté à partir du méridien dans le sens rétrograde, donc il est à l'intérieur du triangle.

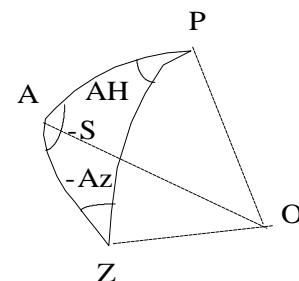
$$0 \text{ h} < AH < 12 \text{ h.}$$

L'azimut est compté à partir du méridien dans le sens rétrograde, donc il est à l'extérieur du triangle. A l'intérieur on a $-Az$.

$$200 \text{ grades} < Az < 400 \text{ grades}$$

L'angle à l'astre est compté à partir du vertical de l'étoile et dans le sens rétrograde, donc il est à l'extérieur du triangle. A l'intérieur on a $-S$.

$$200 \text{ grades} < S < 400 \text{ grades}$$



Que l'étoile soit à l'est ou à l'ouest on obtient pour le triangle de position les formules suivantes:

Formules fondamentales (un angle, 3 côtés) :

$$\begin{aligned}\cos Dz &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos AH \\ \sin \delta &= \sin \varphi \cos Dz + \cos \varphi \sin Dz \cos Az \\ \sin \varphi &= \sin \delta \cos Dz + \cos \delta \sin Dz \cos S\end{aligned}$$

Formules des sinus (2 angles, 2 côtés opposés):

$$\frac{\sin Dz}{\sin AH} = \frac{\cos \varphi}{\sin S} = \frac{\cos \delta}{\sin Az}$$

Formules des sinus cosinus (2 angles, 3 côtés)

$$\begin{aligned}\sin Dz \cos S &= \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos AH \\ \sin Dz \cos Az &= \sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos AH \\ \cos \varphi \cos Az &= \sin \delta \sin Dz - \cos \delta \cos Dz \cos S \\ \cos \varphi \cos AH &= \cos Dz \cos \delta - \sin Dz \sin \delta \cos S \\ \cos \delta \cos AH &= \cos Dz \cos \varphi - \sin Dz \sin \varphi \cos Az \\ \cos \delta \cos S &= \sin \varphi \sin Dz - \cos \varphi \cos Dz \cos Az\end{aligned}$$

Formules des cotangentes (2 angles, 2 côtés adjacents)

$$\begin{aligned}-\sin AH \cot S &= \tan \mathbf{j} \cos \mathbf{d} - \sin \mathbf{d} \cos AH \\-\sin AH \cot Az &= \tan \mathbf{d} \cos \mathbf{j} - \sin \mathbf{j} \cos AH \\\sin S \cot Az &= \tan \mathbf{d} \sin Dz - \cos Dz \cos S \\-\sin S \cot AH &= \cot Dz \cos \mathbf{d} - \sin \mathbf{d} \cos S \\-\sin Az \cot AH &= \cot Dz \cos \mathbf{j} - \sin \mathbf{j} \cos Az \\\sin Az \cot S &= \tan \mathbf{j} \sin Dz - \cos Dz \cos Az\end{aligned}$$

Formules corrélatives (3 angles, 1 côté)

$$\begin{aligned}\cos AH &= -\cos S \cos Az + \sin S \sin Az \cos Dz \\\cos S &= -\cos Az \cos AH - \sin Az \sin AH \sin \phi \\\cos Az &= -\cos AH \cos S - \sin AH \sin S \sin \delta\end{aligned}$$

Dans la plupart des cas résoudre un problème d'astronomie c'est résoudre le triangle de position. Connaissant 3 éléments on en déduit le quatrième en appliquant la trigonométrie sphérique.

4.LE TEMPS

4.1 Introduction :

La notion de temps est intuitive dès qu'il y a changement d'état ou mouvement. Le paramètre temps s'impose pour la description de tels phénomènes. Réciproquement, la définition et la mesure du temps se déduisent de l'étude d'un mouvement ou d'un changement d'état.

4.1.1 Unité de temps :

On appelle **durée** l'écart ($t_B - t_A$) correspondant, pour le phénomène considéré, au changement de l'état A en l'état B. En astronomie, les phénomènes sont en général des mouvements d'astres dans l'espace et le paramètre t résulte de mesures géométriques (par exemple des angles) qui permettent de définir une **unité de durée** (ou unité de temps). Le phénomène choisi s'appelle **horloge** et la table qui permet de décrire le phénomène en fonction des valeurs du temps s'appelle **éphéméride**. La qualité essentielle d'une unité de temps est la reproductibilité en tout lieu et à tout instant (problème de la relativité). En choisissant une origine des temps (origine d'une chronologie) et en exprimant les durées par des nombres d'unités de temps comptés depuis l'origine, on obtient une **échelle de temps**. La chronologie est communément exprimée par la **date et l'heure**.

4.1.2 Qualités d'une échelle de temps

Pour constituer une bonne échelle de temps il faut que celle respecte les critères de qualité suivants :

- **l'universalité** : on doit pouvoir l'utiliser quel que soit le lieu
- **la pérennité** : il ne doit pas y avoir d'interruptions.
- **l'accessibilité et précision de lecture** : en tout lieu et à tout moment on doit pouvoir y accéder précisément .
- **l'uniformité**: un système physique (l'horloge) est observé dans l'état A à la date t_A , et dans l'état B la date t_B . Si on l'observe à nouveau dans l'état A à la date t'_A et dans l'état B à la date t'_B , on dit que l'échelle de temps est uniforme si : $t'_B - t'_A = t_B - t_A$

4.1.3 Les principales échelles de temps et les horloges associées.

Nom	Désignation	Horloge ou étalon
Temps sidéral	TS	Rotation de la Terre sur elle-même
Temps universel	UT1	Rotation de la Terre sur elle-même
Temps des éphémérides	TE	Translation de la Terre autour du Soleil
Temps atomique	TAI	Étalon atomique de fréquences
Temps universel coordonné	TUC	Déduit de TAI

4.2 Le temps sidéral :

4.2.1 Définition

Horloge : le mouvement de référence est la rotation de la Terre sur elle-même. Ce mouvement est, en première approximation, uniforme, c'est à dire qu'on a : $\theta = \omega t$

Durée: un intervalle de temps est mesuré par la différence d'angle horaire en un même lieu d'une même étoile à deux instants différents:



Unité: l'unité de temps est la période du mouvement, appelée jour sidéral. Elle est divisée en 24 heures, elles-mêmes divisées en 3600 secondes sidérales.

Remarque: ainsi se trouve justifié le choix, comme unités d'angle horaire, des heures, minutes et secondes. On a en effet:

$$\omega = 2\pi \text{ rd / jour} = 1 \text{ heure / heure}$$

$$AH_2 - AH_1 (\text{h mn s}) = t_2 - t_1 (\text{h mn s})$$

4.2.2 Chronologie sidérale

Il n'y a pas à proprement parler, d'instant origine pour le temps sidéral et d'échelle de temps sidéral. Il y a cependant une chronologie interne, l'instant origine étant l'instant du passage de l'astre de référence au méridien du lieu. L'astre choisi est le point γ , qui est un astre fictif. On définit *l'heure sidérale locale* par:

$$\boxed{\text{HSL} = \text{AH}_\gamma}$$

On a bien $\text{HSL} = 0$ quand le point γ passe au méridien du lieu.

Du fait de la précession et de la nutation, le point n'est pas fixe sur la sphère céleste et on définit donc:

- le **temps sidéral moyen** dont l'astre de référence est le **point γ moyen**.
- le **temps sidéral vrai** dont l'astre de référence est le **point γ vrai**.

Temps sidéral de Greenwich :

L'heure sidérale locale dépend du lieu. Par souci d'universalité, on prend le temps sidéral de Greenwich comme temps sidéral de référence. On le note HSG. On a :

$$\boxed{\text{HSL} = \text{HSG} + \lambda}$$

4.3 Les temps solaires

Le temps sidéral présente l'inconvénient de ne pas tenir compte de la position du Soleil par rapport au méridien local et ne convient donc pas pour régler la vie quotidienne. Les étoiles passent toujours à peu près à la même heure sidérale au méridien ; mais le Soleil, qui n'est pas fixe sur la sphère céleste (un tour en une année), passe au méridien à une heure sidérale variable suivant 1'époque de 1'année. L'idée est donc de définir une échelle de temps basée aussi sur la rotation de la Terre, mais définie à partir du Soleil.

4.3.1 Le temps solaire vrai

L'horloge est le mouvement apparent du Soleil, donc une composition des deux mouvements de la Terre :

- rotation diurne
- mouvement annuel

Le jour solaire vrai est la durée entre deux passages successifs du Soleil au méridien. Ce n'est pas une unité de temps car il n'est pas constant.

L'heure solaire vraie est l'angle horaire du Soleil vrai (AH_o)

Le temps solaire vrai n'est pas uniforme pour deux raisons :

- le mouvement du Soleil sur l'écliptique n'est pas uniforme (loi des aires pour une trajectoire elliptique).
- le plan de la trajectoire est incliné par rapport à l'équateur : même si le Soleil parcourait l'écliptique d'un mouvement uniforme, son angle horaire ne varierait pas uniformément.

Le temps solaire vrai n'étant pas uniforme, on construit un temps uniforme proche du temps solaire vrai.

4.3.2 Le temps solaire moyen

Horloge: cette échelle de temps est bâtie à partir d'un soleil « moyen », tel que son angle horaire (AH_{om}) varie linéairement avec le temps, tout en restant proche de l'angle horaire du soleil vrai.

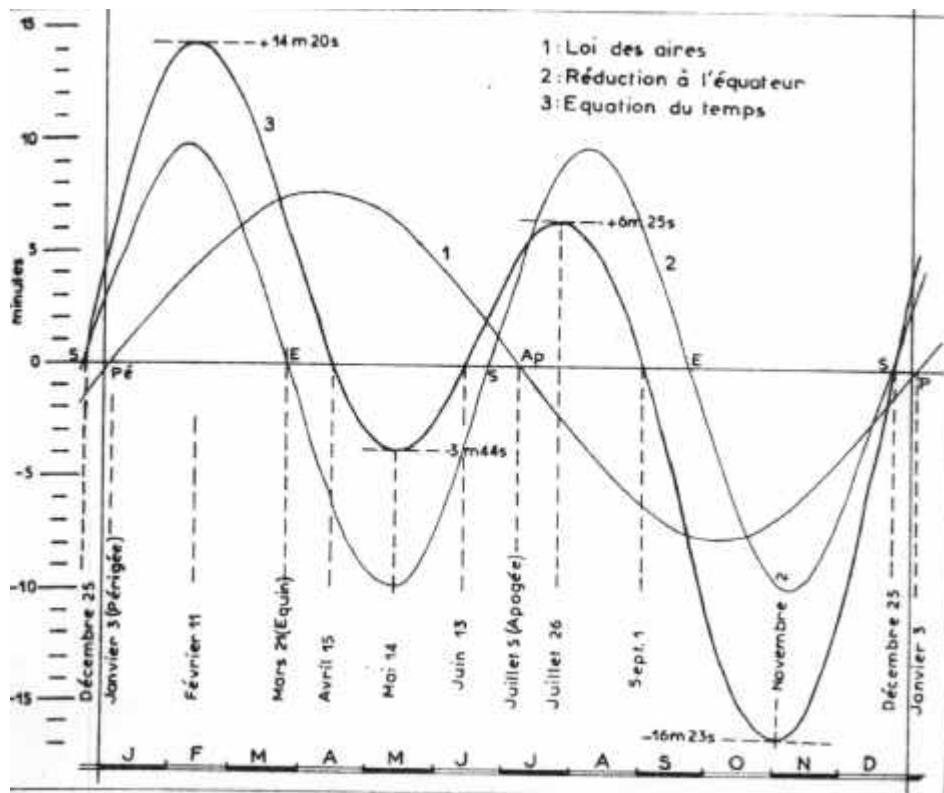
Unité: on appelle jour solaire moyen la durée entre deux passages successifs du soleil moyen au méridien. La seconde de temps moyen est 1a partie 1/86400 du jour solaire moyen.

Chronologie: on appelle heure solaire moyenne l'angle horaire du soleil moyen.

4.3.3 L'équation du temps

On appelle équation du temps l'écart entre l'heure solaire vraie et l'heure solaire moyenne

$$E(t) = AH_{om} - AH_o = \alpha_o - \alpha_{om}$$



équation du temps en fonction de la date

4.3.4 Le temps civil local :

Le temps solaire moyen présente l'inconvénient de s'annuler au milieu de la journée :

$AH_{om} = 0$ lorsque le soleil moyen passe au méridien, à midi moyen. Pour des raisons de commodité (changement de jour en pleine nuit), on a donc défini une **heure civile locale** (HCL) décalée de 12 heures :

$$HCL = AH_{om} + 12h$$

Pour disposer d'une échelle de temps ayant le caractère d'universalité, on a choisi l'heure civile de Greenwich qu'on a appelé Temps Universel (UT) :

$$HCG = UT$$

on a donc :

$$HCL = HCG + \lambda = UT + \lambda$$

La non-uniformité de UT :

Le Temps Universel est lié à la rotation de la Terre et affecté des irrégularités de cette rotation:

- vitesse de rotation non constante,
- mouvement du pôle.

On désigne par UT_0 les valeurs du Temps Universel brutes d'observation.

Corrigées du mouvement du pôle, ces valeurs deviennent UT_1 . Enfin, le Temps Universel corrigé des irrégularités saisonnières de la rotation de la Terre s'appelle UT_2 .

4.4 Le temps des éphémérides :

Vu la non-uniformité de la rotation de la terre on a cherché à définir un temps à partir d'une autre horloge. Le mouvement de référence est le mouvement de la Terre autour du soleil. La période de référence est l'année tropique.

On définit la seconde TE par : $1\text{ s TE} = 1/31\ 556\ 925,974\ 7$ année tropique pour 1900, janvier 0 à 12h TE (on précise la date car la durée de l'année tropique varie un peu avec le temps). Le TE ainsi défini est uniforme mais ses limites tiennent aux difficultés des observations qui limitent sa précision. Ce temps est maintenant remplacé par le TT (Temps Terrestre voir § 4.5)

4.5 Le temps atomique

L'horloge adoptée universellement depuis 1967 n'est plus astronomique, mais issue d'un phénomène atomique.

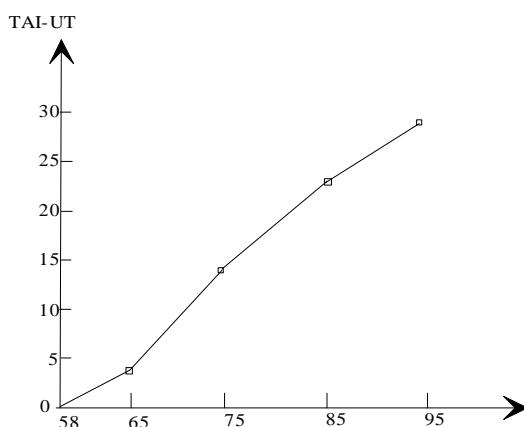
La propriété utilisée est la suivante : lorsqu'on excite un atome au moyen d'une source extérieure, on constate que l'atome émet des radiations électromagnétiques, et qu'à un passage d'un état énergétique donné à un autre, correspond toujours la même fréquence émise; réciproquement il faut une fréquence bien déterminée pour que l'atome passe d'un état énergétique à un autre.

Unité de temps atomique

1 seconde T.A = 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à une transition entre niveaux hyperfins de l'état fondamental de Caesium 133.

Cette valeur a été choisie de telle sorte que la seconde atomique soit très proche de la seconde T.E.

Chronologie atomique UT et TAI coïncidaient le 1^{er} janvier 1988 à 0h. Pour assurer la continuité du TAI, une centaines d'horloges atomiques sont réparties à la surface de la Terre, et le TAI est défini comme valeur moyenne des valeurs de toutes ces horloges.



On a pu montrer par accumulation des observations que les secondes T.E et T.A.I n'avaient pas d'écart significatif, aussi depuis 1984 on a convenu de définir TT (Temps Terrestre) le nouveau temps des éphémérides par :

$$\boxed{\text{TT} = \text{TAI} + 32,184\text{ s}}$$

4.6 UTC : temps universel coordonné :

Ce temps est directement issu du TAI (même horloge) ; il est traduit d'un nombre entier variable de secondes de telle sorte que UTC soit proche de UT1.

$$|UT1 - UTC| < 0,9s$$

$$UTC = TAI + n \text{ secondes}$$

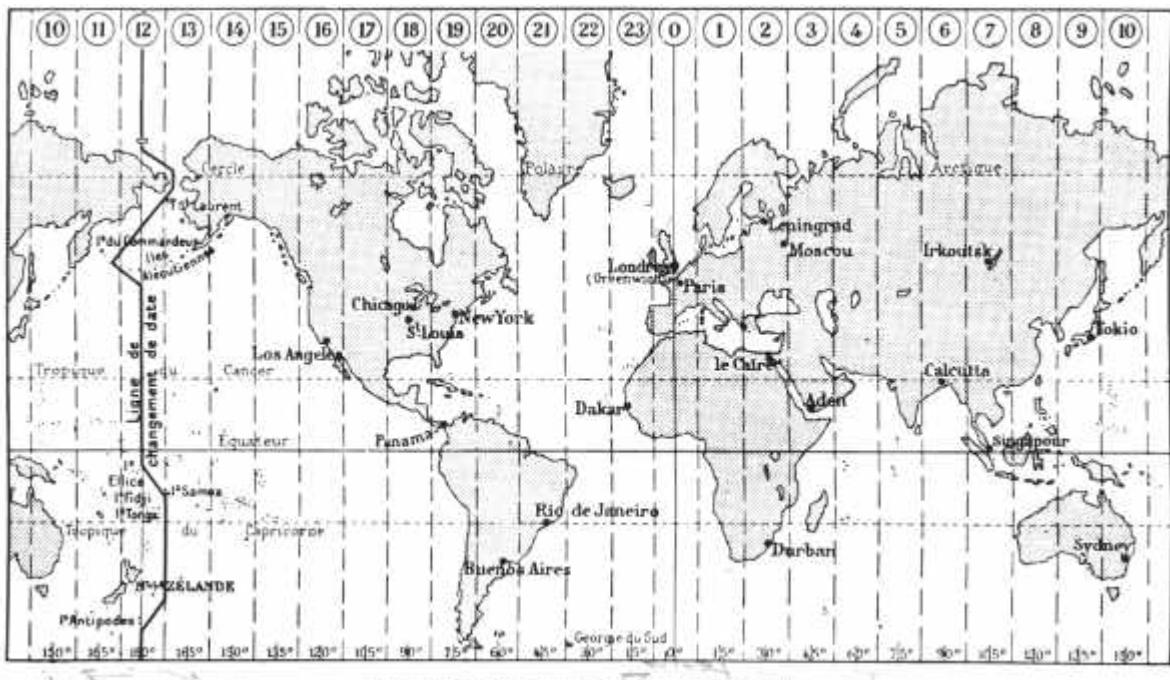
n entier, changé 0,1 ou 2 fois par an.

4.7 L'heure légale

L'heure civile locale dépend de la longitude : on change d'heure civile locale à chaque fois qu'on se déplace en dehors du méridien. On a donc divisé la Terre en 24 fuseaux dont l'amplitude en longitude vaut 1 heure (15 degrés). Le méridien de Greenwich est le méridien central du fuseau numéroté 0. La numérotation est croissante vers l'Est. L'heure de référence, pour tout point d'un fuseau, est l'heure civile locale du méridien central du fuseau, qu'on peut encore modifier d'un petit nombre entier d'heures pour des raisons socio-économiques.

L'heure légale en France :

La France métropolitaine est contenue dans le fuseau n° 0, dont l'heure est *UTC*. En hiver, l'heure légale est actuellement *UTC+1*, tandis que l'heure légale d'été est *UTC+2*.



4.8 Accessibilité, reproductibilité

4.8.1 Diffusion du temps :

Le temps doit être accessible en tout lieu et en tout temps. L'émission de *signaux horaires* se fait par ondes radio et de telle sorte qu'en tout lieu de la Terre on puisse recevoir plusieurs émissions horaires. L'heure qui est diffusée est le UTC. En plus des tops de secondes, est diffusé un code qui permet de connaître la quantité $DUT1=UT1 - UTC$.

Le système GPS permet lui aussi d'accéder au temps. Ce système satellitaire est décrit dans le module géodésie spatiale. Il comprend 24 satellites qui envoient un signal généré par une horloge atomique très précise. On appelle temps GPS le temps moyen à partir de l'ensemble des horloges embarquées. Ce temps est constamment comparé au TAI du laboratoire USNO qui est à la fois une station de référence TAI et une station de référence GPS. Au sol un utilisateur GPS muni d'un récepteur reçoit le temps GPS et peut le convertir en UTC à l'aide de la correction contenue dans son message qui a été déterminé par l'USNO.

4.8.2 Les garde-temps :

Il n'est pas suffisant de pouvoir recevoir l'heure en un lieu quelconque de la Terre, il faut aussi pouvoir la reproduire avec une assez bonne précision.

Pour cela on a besoin d'appareil garde temps (appelé aussi horloges), que l'on puisse d'une part synchroniser sur UTC , (ou mesurer le décalage entre le temps du garde temps et UTC) et d'autre part qui permettent de garder l'heure pendant un intervalle de temps relativement court (durée des observations)

Trois types d'horloges:

- *mécaniques* : on utilise l'écoulement d'un liquide avec une vitesse constante, ou le mouvement du pendule pour reproduire des fréquences proches de celles du temps défini précédemment. Ces horloges ne sont pratiquement plus utilisées.

- *à quartz* : ces horloges utilisent les propriétés piézo-électriques d'un quartz cristallisé: si l'on dépose des électrons sur une face du quartz, il se crée à l'intérieur du cristal des contraintes mécaniques qui le font osciller. Ces horloges sont maintenant les plus répandues.

- *atomiques* : le principe a été décrit succinctement précédemment, ces horloges sont lourdes et peu transportables, elles sont plutôt utilisées en laboratoires.

4.9 Chronologie : année, date

L'heure, telle qu'on vient de la définir, est une chronologie interne au jour. Cela n'est pas suffisant pour construire une chronologie, puisque l'heure ne recouvre qu'une petite durée à l'échelle humaine.

4.9.1 L'année

La période du mouvement de la Terre autour du Soleil est la principale période utilisée, mais sa définition n'est pas simple et dépend du repère utilisé pour étudier le mouvement.

On appelle **année tropique** la durée nécessaire pour que la longitude céleste moyenne de la Terre, rapportée au point γ (équinoxe moyen mobile) augmente de 360° . Une année tropique vaut environ 365,2422 jours moyens.

On appelle **année sidérale** la durée d'une révolution de la Terre autour du Soleil, rapportée à un point fixe, c'est à dire débarrassée de la précession. Une année sidérale vaut à peu près 365,2564 jours moyens.

Une **année anomalistique** est la durée séparant deux passages successifs de la Terre à son périhélie. Une année anomalistique dure environ 365,2596 jours moyens, c'est à dire 4mn 43s de plus que l'année sidérale. La différence provient du mouvement des absides (aphélie, périhélie) par rapport à un repère galiléen, de 11,63" par an.

L'année tropique comporte 365,2422 jours moyens. Il est peu commode de changer de millésime à un instant quelconque, au milieu de la journée. On a donc défini une **année civile** formée d'un nombre entier de jours moyens. Les règles adoptées pour définir la longueur de chaque année civile constituent le calendrier.

L'ancien calendrier julien comportait deux genres d'années:

- les années **communes**, de 365 jours, et dont le millésime n'était pas divisible par 4 ;
- les années **bissextilles**, de 366 jours.

La durée moyenne de **l'année julienne** était ainsi de 365,25 jours, soit une différence de 0,0078 jours avec l'année tropique entraînant un décalage progressif de la date du début des saisons.

Au 16^e siècle, le Pape Grégoire XIII institua le calendrier grégorien, en vigueur en France depuis 1582 et dont les règles de construction sont les suivantes :

- l'année civile comporte 365 jours (années communes) ou 366 jours (années bissextilles);
- les années dont le millésime est multiple de 4, sans être multiple de 100, sont bissextilles;
- les années dont le millésime est multiple de 400 sont bissextilles ;
- les autres années sont communes.

De cette façon, l'année civile du calendrier grégorien dure, en moyenne, 365,2425 jours. Il existe encore un décalage de 0,0003 jours entre la durée de l'année tropique et celle de l'année civile du calendrier grégorien. Ce résidu est très faible (3 s par an) et donc insensible pour le moment.

4.9.2 Echelle de temps et date.

Une date est une numérotation qui permet de repérer dans une échelle de temps l'instant d'un événement. On utilise une numérotation de l'année, du mois, du jour, de l'heure. Pour cela, il faut définir l'origine de la chronologie, début de l'année n° 0 .

Le début de l'année 0 du calendrier grégorien est défini par référence au calendrier julien.

Le début de l'année tropique est, par convention, l'instant où la longitude apparente du Soleil atteint 280° . La date de cet instant est dénommée « janvier 0 ». Elle est proche du début de l'année civile (1^{er} janvier à 0 heure UT).

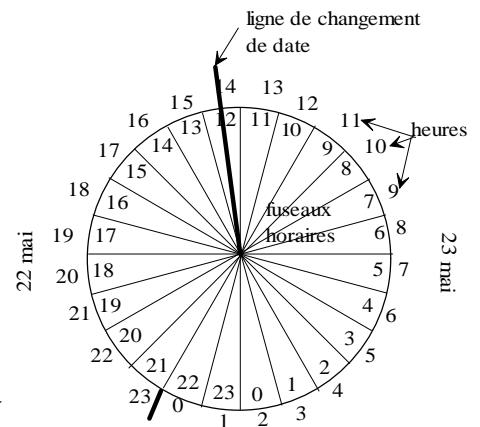
4.9.3 Période julienne.

Cette chronologie est due à Scaliger (1540-1604). Elle est une numérotation des jours (sans faire intervenir d'année) et simplifie les calculs astronomiques portant sur des longues durées. La journée

n° 0 débute le 1^{er} janvier 4713 avant J.-C. à 12 heures dans le calendrier julien. Le jour qui commence le 1 janvier 2000 (à 12h UT) du calendrier grégorien porte le numéro 2 451545 dans la période julienne.

4.9.4 Changement de date.

Dans un fuseau donné, on change de date lorsque l'heure légale passe de 24 h à 0 h. Mais ceci n'est pas suffisant. Supposons qu'il soit 0 h le 23 mai pour le fuseau 22 (on simplifie ici en prenant l'heure civile du fuseau comme heure légale). Il est donc 23 h le 22 mai dans le fuseau 21. Si on se déplaçait en traversant les fuseaux 20, 19, ..., 0, 23, 22, on se retrouverait le 22 mai dans le fuseau 22. Il faut donc un changement de date supplémentaire et arbitraire, qui se produit à chaque fois qu'on traverse **la ligne de changement de date**, approximativement située à l'antiméridien de Greenwich(voir carte §4.7). Dans l'exemple, la date est 22 mai à l'est de la ligne de changement de date, et le 23 mai à l'ouest de celle-ci. On doit modifier la date à chaque fois qu'on traverse cette ligne.

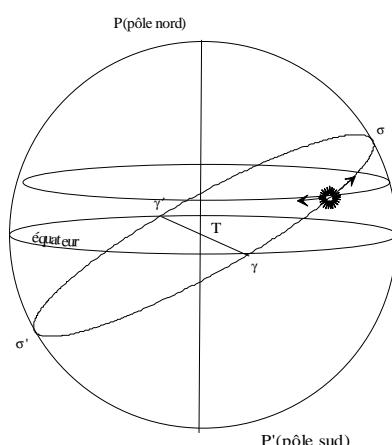


4.10 Relation entre les échelles de temps

Comme nous l'avons vu précédemment l'heure sidérale locale, bien que non retenue comme échelle de temps, est très utile pour les observations sur les étoiles. En effet une même étoile passe toujours à peu près à la même heure sidérale locale au méridien du lieu, ce qui est pratique pour établir des catalogues d'observations . Elle permet aussi de passer du repère céleste au repère terrestre. On a la relation:

$$\begin{aligned} 1 \text{ année tropique} &= 365,2422 \text{ jours moyens} \\ &= 366,2422 \text{ jours sidéraux.} \end{aligned}$$

En effet pendant que les étoiles font 366,2422 tours sur la sphère céleste dans le sens rétrograde, le Soleil fait un tour complet sur l'écliptique dans le sens direct. le Soleil a donc fait $(366,2422 - 1)$ tours



Relation entre les deux unités de temps :

$$TS = \frac{366 \cdot 2422}{365 \cdot 2422} \text{ UT}$$

TS : durée exprimée en Temps Sidéral.

UT : durée exprimée en temps universel.

en particulier 1 jour **sidéral** =23h56m04s en temps universel

Relation entre les chronologies :

L'heure sidérale Greenwich à 0hUT permet de positionner les deux chronologies l'une par rapport à l'autre. Le temps sidéral moyen est donné en heures décimales par :

$$HSG(0hUT) = 6,697974558 + 2400,051337T + 0,000025862T^2$$

avec T temps écoulé depuis 2000, 0 en siècles Juliens.

Il existe aussi des tables qui nous donne HSG(0hUT) en fonction de la date (voir §3.2).

En un lieu de longitude à l'heure sidérale locale sera donnée par :

$$HSL = HSG(0h) + (366 \cdot 2422 / 365 \cdot 2422) UT + \lambda$$

Par la suite, on notera K la quantité $366.2422/365.2422$.

5.DETERMINATIONS ASTRO-GEODESIQUES

5.1 Déterminations d'azimut :

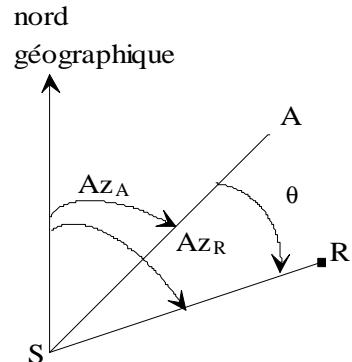
5.1.1 Principe

Le principe général est le suivant :

On stationne S de coordonnées (λ, ϕ) connues. On désire orienter la direction SR, R repère d'azimut de coordonnées inconnues.

Pour déterminer l'azimut Az_R on passe par l'intermédiaire d'une détermination astronomique d'azimut sur un astre (Soleil ou étoile) de coordonnées (α, δ) . On mesure simultanément l'angle horizontal soit : $\theta = l_R - l_A$ (l lecture sur le limbe horizontal du théodolite).

$$Az_R = Az_A + l_R - l_A$$



Détermination de l'azimut sur l'astre

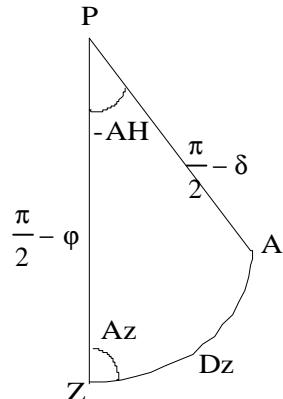
Dans le triangle de position,
on connaît :

$$PA = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$PZ = \frac{\pi}{2} - \phi$$

on cherche : $PZA = Az$

on mesure : soit $ZA = Dz$
soit $ZPA = AH$



donc deux méthodes d'observations sont possibles :

- l'azimut par la distance zénithale
- l'azimut par l'heure.

En effet déterminer AH revient à faire une mesure d'heure :

$$AH = HSL - \alpha = HSG(0hUT) + \frac{366.2422}{365.2422} UT + \lambda - \alpha$$

$HSG(0hUT)$: donnée en fonction de la date

λ : coordonnées connue

α : connu, fonction de l'astre et de la date

UT : mesuré

5.1.2 Azimut par la distance zénithale :

Dans le triangle de position on utilise la formule fondamentale :

$$\sin \delta = \cos Dz \sin \varphi + \sin Dz \cos \varphi \cos Az$$

d'où

$$Az = \pm \arccos\left(\frac{\sin \delta - \cos Dz \sin \varphi}{\sin Dz \cos \varphi}\right)$$

Az = +arcos si l'astre est à l'est (0 < Az < 200grades)

Az = 400- arcos si l'astre est à l'ouest (200grades < Az < 400grades)

Pour le soleil, on teste selon que l'on a observé avant midi (est) ou après (ouest). Pour une étoile le test se fait sur AH : AH < 12h étoile à l'ouest, AH > 12h étoile à l'est.

Les observations :

On mesure simultanément la distance zénithale Dzobs et la lecture azimutale l_A sur l'astre puis on fait la lecture azimutale l_R sur le repère. Pour éliminer les erreurs de collimation horizontale et verticale on fait un double retournement de la lunette .

Il importe dans cette méthode que l'axe principal soit bien vertical donc que la bulle transversale du théodolite soit bien calée .

On mesure la température et la pression pour la correction de réfraction. On note l'heure approximative de l'observation pour pouvoir interpoler la déclinaison.

Choix de l'instant de l'observation :

On étudie la variation de l'azimut de l'astre en fonction de Dz , on montre que l'on a :

$$\frac{\partial AZ}{\partial Dz} = \frac{\cos S}{\sin AH \cos \varphi}$$

Cette expression montre que la variation est minimale pour $S = \pm \frac{\pi}{2}$ (digressions de l'astre) et

quelle est maximale pour $AH = 0$ (passage de l'astre au méridien du lieu).

D'autrepart pour minimiser l'erreur sur la correction de réfraction que l'on applique à Dz il faut observer l'astre le plus haut possible.

L'astre observé avec cette méthode est souvent le soleil. En adoptant un compromis entre les conditions précédentes on observe souvent 2heures avant ou après la culmination (passage au méridien). La précision est faible: de l'ordre de 0,01 grades.

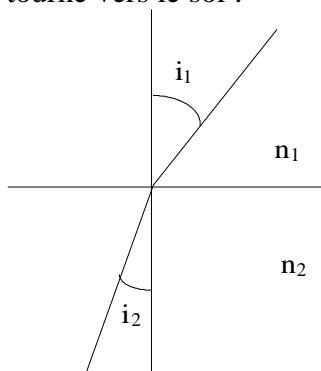
Les calculs :

Les observations doivent être corrigées :

La réfraction atmosphérique :

L'atmosphère de la Terre étant un milieu non homogène tout rayon lumineux ou onde électromagnétique qui s'y propage subit une déviation. D'après le principe de Fermat, dans un milieu d'indice variable, le trajet optique tourne sa concavité vers les densités les plus élevées.

Dans le cas de l'atmosphère la densité croît lorsque l'altitude décroît. La concavité du rayon sera donc tourné vers le sol :

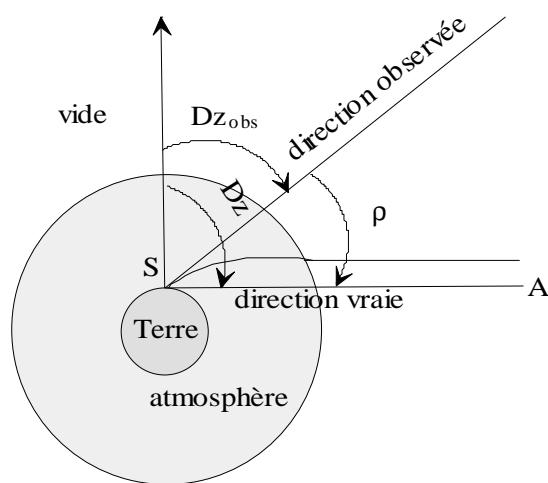


$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

$$\text{si } n_1 < n_2$$

$$\text{alors } i_1 > i_2$$

Dans le vide on suppose que la lumière se propage en ligne droite, aussi en astronomie on aura le schéma suivant :



Pour l'observateur la direction apparente de l'étoile sera celle de la tangente à la courbe au point de station et on aura :

$$Dz = Dz_{obs} + \rho$$

On considère ici que la réfraction entraîne une déformation uniquement dans le plan vertical, c'est à dire celle qui modifie les zénithales ; et la correction sera apportée aux zénithales observées.

Pour calculer, l'on doit se donner un modèle du milieu de propagation.

Pour les distances zénithales <40°, on pourra prendre un modèle avec des couches d'air homogènes planes parallèles et de densité décroissante avec l'altitude et dans les autres cas on prendra un modèle de couches sphériques .

Couches planes

Dans ce cas, la normale à la couche extérieure de l'atmosphère est parallèle à la verticale du lieu. On a alors :

- à l'entrée dans l'atmosphère $i = Dz$, $n = 1$
- au sol $i = Dz_{obs}$, $n = ns$ (indice au sol) d'autre part l'angle d'incidence d'une couche est égal à l'angle d'émergence de la couche supérieure.
- d'après la loi de Descartes : $n \sin i = cste$

d'où

$$\sin Dz = ns \sin Dz_{obs} \text{ et :}$$

$$Dz = Dz_{obs} + \rho$$

$$\sin (Dz_{obs} + \rho) = ns \sin Dz_{obs}$$

$$\sin Dz_{obs} \cos \rho + \cos Dz_{obs} \sin \rho = ns \sin Dz_{obs}$$

ρ infiniment petit du 1^{er} ordre :

$$\boxed{r = (ns - 1) \tan Dz_{obs}}$$

ns indice de l'air au sol dépend des conditions météorologiques puisque n varie avec la densité. On appelle ρ_o la réfraction normale, c'est à dire dans les conditions normales de pression et de température (760 mmHg, 0°C)

$$\rho_o \text{ (en grades)} = 0.01854 \tan Dz_{obs}$$

Dans des conditions atmosphériques quelconques on a :

$$\rho = \rho_o \left(\frac{273,15}{T} \right) \left(\frac{P}{760} \right)$$

P en mm de Hg
T en Kelvin = 273,15 + t (° Celsius)

Couches sphériques :

Pour $Dz > 40$ grades on utilise un modèle sphérique pour les couches atmosphériques ce qui correspond à une petite correction à apporter au ρ_o :

$$r_o \text{ (en grades)} = 0.01854 \tan Dz_{obs} - 0.000021 \tan^3 Dz$$

La parallaxe de hauteur (§3.1.2) :

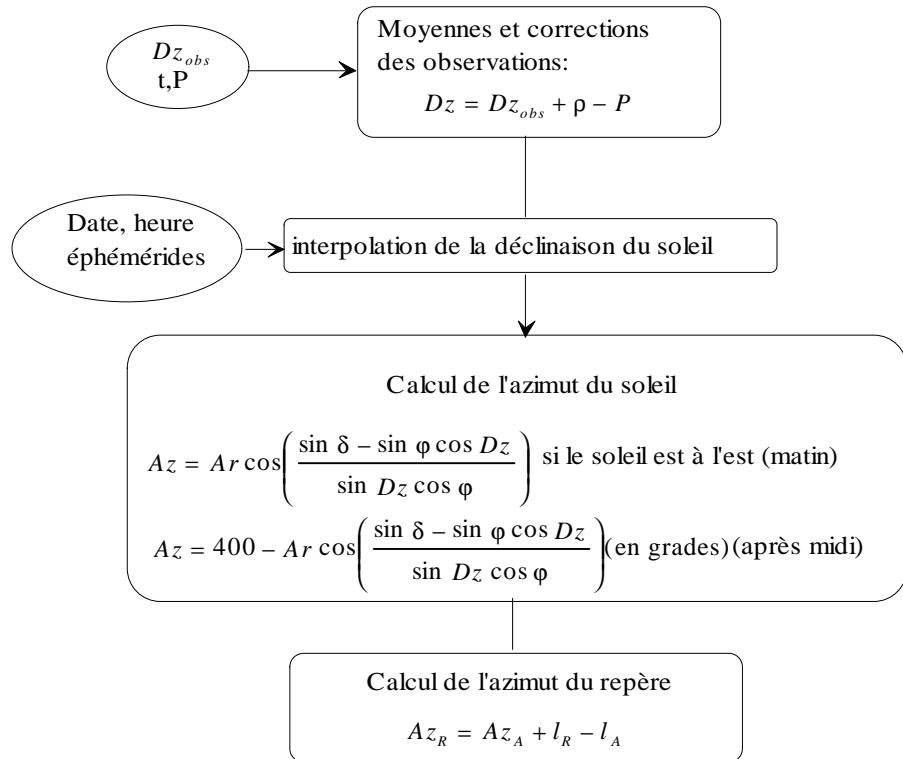
Cette correction ne s'applique que lorsque l'astre est le soleil, car pour les étoiles elle est négligeable.

$$P = P_0 \sin Dz$$

$P_0 = 0,0027$ grades pour le soleil

$$Dzc = Dz - P$$

Organigramme des calculs d'un azimut sur le soleil :



5.1.3 Azimut par l'heure :

La formule en cotangente dans le triangle de position donne :

$$\cot Az \sin AH = \sin \varphi \cos AH - \cos \varphi \tan \delta$$

d'où

$$\tan Az = \frac{\sin AH}{\sin \varphi \cos AH - \cos \varphi \tan \delta}$$

On a d'autre part :

astre à l'est : $12h < AH < 24h$ et $0\text{grades} < Az < 200\text{grades}$

astre à l'ouest : $0h < AH < 12h$ et $200\text{grades} < Az < 400\text{grades}$

Les observations :

On fait simultanément une lecture de l'heure (avec un chronomètre synchronisé sur les tops radio) et une lecture azimutale sur l'astre, puis une lecture azimutale sur le repère.

Choix du moment de l'observation:

On cherche le moment d'observation le plus favorable pour minimiser l'écart type sur Az :

$$\frac{\partial Az}{\partial UT} = \frac{\partial Az}{\partial AH} = \frac{\cos \delta \cos S}{\sin Dz}$$

On voit que $\frac{\partial Az}{\partial AH} = 0$ pour $S = \frac{\pi}{2}$ donc l'instant le

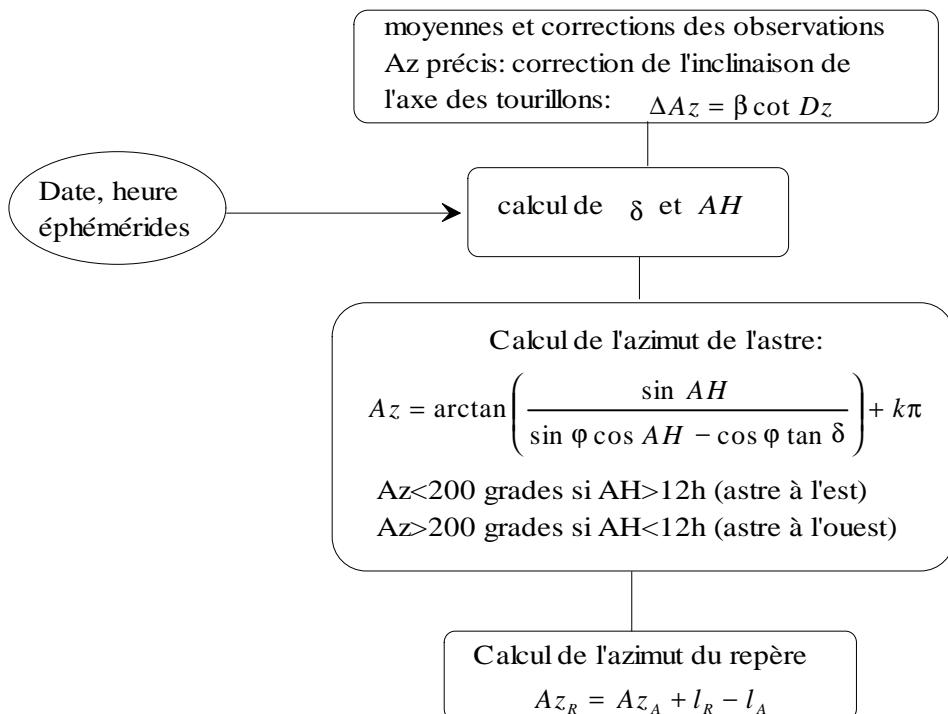
plus favorable est le passage à la digression. Pour les astres n'ayant pas de digression on voit que le minimum est obtenu pour S et Dz maximaux, c'est à dire le lever ou le coucher. De plus les étoiles poches du pôle sont les plus favorables ($\delta \approx 90^\circ$). L'étoile polaire est donc souvent utilisée pour cette méthode : pour un lieu de latitude 45° la variation de l'azimut de la polaire est au maximum 0.0001 grade par seconde. Pour des déterminations précises on mesure l'inclinaison de l'axe principal à l'aide d'une nivelle cavalière posée sur l'axe des tourillons.



THEODOLITE KERN DKM 3 - A

Pour des déterminations peu précises on observe aussi le soleil une à deux heures après son lever ou avant son coucher.

Les calculs :



En topographie ou en géodésie classique, les calculs se font en représentation plane il faut donc transformer l'azimut en gisement par :

$$V = Az + \gamma$$

γ : Gisement du méridien.

5.2 Déterminations de latitude

5.2.1 Latitude par observations méridiennes :

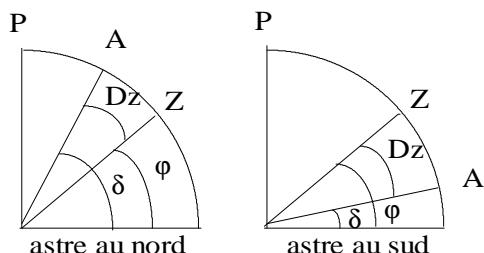
A la culmination on a :

Pour un astre qui culmine au nord :

$$\varphi = \delta - Dz$$

Pour un astre qui culmine au sud :

$$\varphi = \delta + Dz$$



On mesure la distance zénithale de l'astre au moment de son passage au méridien. Pour cela on calcule l'heure de passage en constatant que à cet instant $AH=0$. On a donc $HSL=a$ et donc

$$HSL = HSG(0HUT) + K \times UT + \lambda$$

et

$$UT = \frac{1}{K} (HSL - HSG(0HUT) - \lambda)$$

On observe en fait un peu avant et un peu après le passage au méridien et on trouve le Dz au méridien en prenant la valeur minimale de la courbe $Dz = f(t)$. On remarque qu'à cet instant Dz varie très peu (extremum d'une courbe)

On prend la température et la pression pour calculer la réfraction. La distance zénithale est aussi corrigée de la parallaxe si l'astre est le soleil.

5.2.2 Latitude par observation de la polaire :

La latitude d'un lieu est exactement la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon. L'étoile qui est la plus proche du pôle est l'étoile α de la Petite Ourse aussi appelée étoile polaire. On appelle distance polaire la quantité : $p = \frac{\pi}{2} - \delta \approx 1^\circ$.

On a :

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\pi}{2} - Dz_{polaire} + x \\ \text{avec } x &\text{ petit et variable au cours d'un jour} \\ x &= -p \cos AH\end{aligned}$$

Les observations :

Sur la polaire on mesure simultanément, la distance zénithale et l'heure. On prend la température et la pression pour corriger de la réfraction.

5.3 Déterminations de longitude

5.3.1 Longitude par observations méridiennes :

Au moment du passage d'un astre au méridien d'un lieu $AH=0$ et donc :

$$\begin{aligned}HSL &= HSG(0HUT) + KUT + \lambda = \alpha \\ \lambda &= \alpha - (HSG(0hUT) + KUT)\end{aligned}$$

Le principe d'observation est simple : on mesure l'heure de passage à la culmination. L'application est plus difficile car la distance zénithale de l'astre varie peu au moment de la culmination et donc on ne peut pas identifier avec précision l'heure du passage au méridien.

5.3.2 Longitude par l'heure et la distance zénithale :

Le principe ici est de faire des mesures lorsque l'astre n'est pas dans le méridien. On a alors :

$$AH = HSL + \alpha = HSG(0hUT) - K \times UT + \alpha$$

$$\lambda = AH - HSG(0hUT) - K \times UT + \alpha$$

UT est mesuré et AH déduit d'une mesure de Dz et la relation fondamentale du triangle de position :

$$\cos Dz = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos AH$$

$$\boxed{AH = \arccos\left(\frac{\cos Dz - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}\right) \text{ si astre à l'ouest}}$$

$$AH = 24h - \arccos\left(\frac{\cos Dz - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}\right) \text{ si astre à l'est}$$

Les observations :

On mesure simultanément l'heure et la distance zénithale. On prend la température et la pression pour corriger de la réfraction. Si l'astre est le soleil on corrige aussi de la parallaxe de hauteur.

5.4 Détermination simultanée de longitude et latitude : méthode des droites de hauteurs :

Les déterminations précédentes de latitude et longitude supposaient qu'en déterminant une coordonnée l'autre était déjà connue. Or en général lorsqu'on fait du positionnement on ne connaît ni la longitude, ni la latitude. On peut procéder par itération pour le calcul :

- calcul d'une latitude approchée par la polaire
- calcul d'une longitude par l'heure et la distance zénithale
- recalcul de la latitude
- recalcul de la longitude

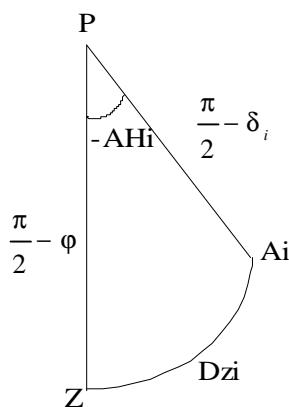
Pour des déterminations plus précises on préférera des méthodes de déterminations simultanées de longitude et latitude comme la méthode des droites de hauteurs.

Le principe :

Soit une étoile A_i de coordonnées α_i, δ_i . On observe cette étoile en mesurant simultanément la distance zénithale Dz_i et l'heure UT_i . Dans le triangle de position on a :

$$\boxed{\cos Dz_i = \sin \varphi \sin \delta_i + \cos \varphi \cos \delta_i \cos AH_i}$$

avec $AH_i = HSG(0hUT) + KUT_i + \lambda - \alpha_i$
et λ, φ inconnues



On obtient une relation d'observation à deux inconnues que l'on peut linéariser en se donnant des coordonnées approchées : λ_o, φ_o .

Soit :

$$\begin{aligned} d\lambda &= \lambda - \lambda_o & Dz_{oi} &: \text{distance zénitale que l'on aurait mesuré à l'instant } UT_i \\ d\varphi &= \varphi - \varphi_o & \text{si on avait observé au point approché } (\lambda_o, \varphi_o) : \\ dDz_i &= Dz_i - Dz_{oi} & \cos Dz_{oi} &= \sin \varphi_o \sin \delta_i + \cos \varphi_o \cos \delta_i \cos AH_{oi} \\ && \text{avec } AH_{oi} &= HSG(0hUT) + KUT_i + \lambda_o - \alpha_i \end{aligned}$$

En développant au premier ordre et en combinant avec des relations de trigonométrie sphérique on obtient la relation d'observation linéarisée :

$$dDz_i = -\cos Az_{oi} d\phi - \sin Az_{oi} \cos \phi_o d\lambda$$

On pose : $\begin{pmatrix} x = \cos \phi_o d\lambda \\ y = d\phi \end{pmatrix}$. La relation d'observation devient alors :

$$-dDz_i = x \sin Az_{oi} + y \cos Az_{oi}$$

Pour résoudre, il faut au moins une deuxième étoile. En fait, on observe n étoiles avec $n > 2$ et on résout le système linéaire à 2 inconnues et n équations par la méthodes des moindres carrés. Le système d'équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} + \mathbf{V}$$

où

\mathbf{X} est la matrice (2,1) des inconnues $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

\mathbf{A} est une matrice (n,2)

$$\begin{pmatrix} \sin Az_{o1} & \cos Az_{o1} \\ \dots & \dots \\ \sin Az_{oi} & \cos Az_{oi} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \sin Az_{on} & \cos Az_{on} \end{pmatrix}$$

\mathbf{B} la matrice (n,1) des termes constants

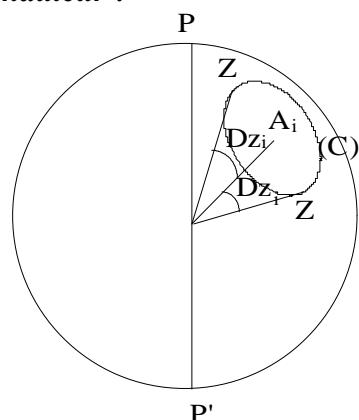
$$\begin{pmatrix} -dDz_1 \\ \dots \\ -dDzi \\ \dots \\ \dots \\ -dDzn \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}$$
 matrice (n,1) des résidus $\begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_i \\ \dots \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$

Pour résoudre par moindres carrés on calcule $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}$. Le résultat est un système (2,2) facile à résoudre.

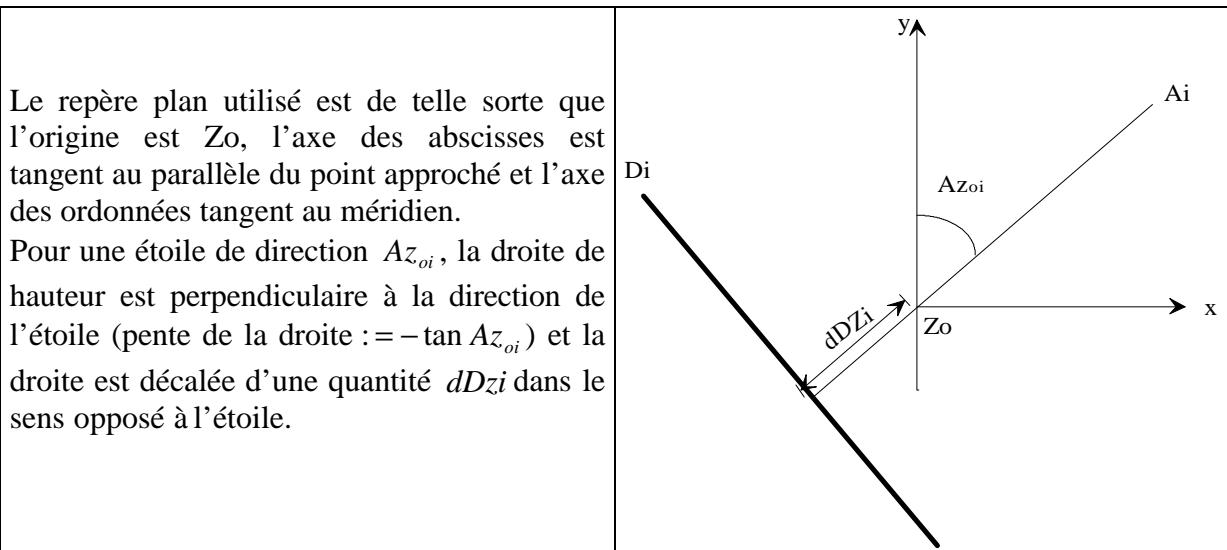
Interprétation géométrique : cercle de hauteur et droite de hauteur :

Pour une étoile A_i , les lieux tels que Dz_i est une valeur observée connue sont tel que leurs zéniths appartiennent sur la sphère céleste à un cercle de centre A_i et de rayon Dz_i appelé cercle de hauteur. Une deuxième étoile donnera un deuxième cercle de hauteur dont l'intersection avec le premier sera deux points. Une troisième étoile est nécessaire pour trouver un point (intersection des trois cercles).



Solution du point approché : on assimile en Zo la sphère à son plan tangent, le cercle de hauteur est alors représenté par sa tangente qu'on appelle droite de hauteur. Pour tracer cette droite il suffit de reprendre la relation linéarisée :

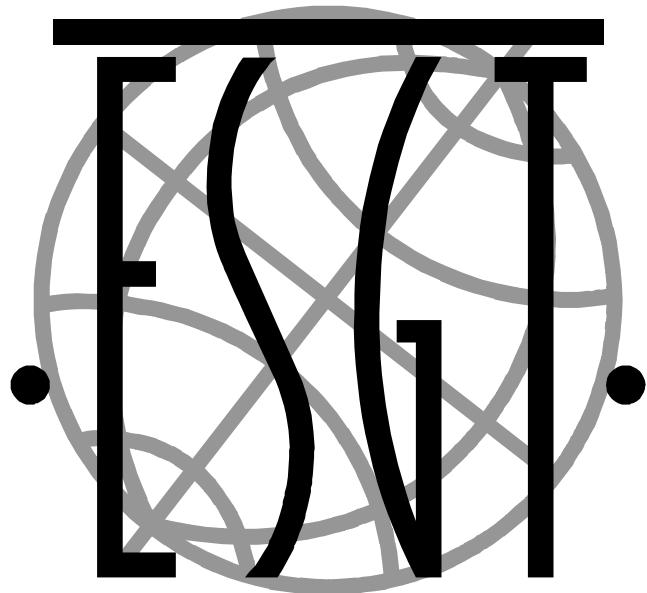
$$-dDz_i = x \sin Az_{oi} + y \cos Az_{oi}$$



SOMMAIRE

1. INTRODUCTION A L'ASTRO-GEODESIE	0
2. LES MOUVEMENTS DE LA TERRE	3
2.1 LE MOUVEMENT DU SYSTÈME SOLAIRE DANS LA GALAXIE :	3
2.2 LE MOUVEMENT ANNUEL	4
2.3 LE MOUVEMENT DIURNE	5
3. LES REPERES ET COORDONNEES EN ASTRONOMIE	7
3.1 LA SPHÈRE CÉLESTE	7
3.1.1 <i>Définition</i> :	7
3.1.2 <i>La parallaxe annuelle</i> :	7
3.1.3 <i>La parallaxe de hauteur</i> :	8
3.1.4 <i>Représentation des axes et plans liés aux mouvements de la Terre (sphère des fixes)</i>	8
3.1.5 <i>Images des axes et plans liés aux observations (sphère locale)</i>	9
3.2 LE REPÈRE CÉLESTE ÉQUATORIAL. LES COORDONNÉES CÉLESTES ÉQUATORIALES	10
3.3 LE REPÈRE TERRESTRE GÉNÉRAL. LES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES ASTRONOMIQUES	13
3.4 LE REPÈRE TERRESTRE LOCAL ASTRONOMIQUE. LES COORDONNÉES HORIZONTALES LOCALES	14
3.5 RELATIONS ENTRE LES REPÈRES ET COORDONNÉES	15
3.5.1 <i>Relation entre le repère équatorial céleste et le repère horizontal local</i> :	15
3.5.2 <i>Relation entre le repère équatorial céleste et le repère terrestre général</i> :	15
3.5.3 <i>Relation entre le repère horizontal local et le repère terrestre général</i> :	16
3.5.4 <i>Le triangle de position</i>	16
4. LE TEMPS	20
4.1 INTRODUCTION :	20
4.1.1 <i>Unité de temps</i> :	20
4.1.2 <i>Qualités d'une échelle de temps</i>	20
4.1.3 <i>Les principales échelles de temps et les horloges associées</i>	20
4.2 LE TEMPS SIDÉRAL :	21
4.2.1 <i>Définition</i>	21
4.2.2 <i>Chronologie sidérale</i>	21
4.3 LES TEMPS SOLAIRES	22
4 . 3 . 1 <i>Le temps solaire vrai</i>	22
4.3.2 <i>Le temps solaire moyen</i>	22
4.3.3 <i>L'équation du temps</i>	22
4.4 LE TEMPS DES ÉPHÉMÉRIDES :	24
4.5 LE TEMPS ATOMIQUE	24
4.6 UTC : TEMPS UNIVERSEL COORDONNÉ	25
4.7 L'HEURE LÉGALE	25
4.8 ACCESSIBILITÉ, REPRODUCTIBILITÉ	26
4.8.1 <i>Diffusion du temps</i> :	26
4.8.2 <i>Les garde-temps</i> :	26
4.9 CHRONOLOGIE : ANNÉE, DATE	26
4.9.1 <i>L'année</i>	27
4.9.2 <i>Echelle de temps et date</i>	27
4.9.3 <i>Période julienne</i>	27
4.9.4 <i>Changement de date</i>	28
4.10 RELATION ENTRE LES ÉCHELLES DE TEMPS	28

5.DETERMINATIONS ASTRO-GEODESIQUES	30
5.1 DÉTERMINATIONS D' AZIMUT :.....	30
5.1.1 <i>Principe</i>	30
5.1.2 <i>Azimut par la distance zénithale</i> :	31
5.1.3 <i>Azimut par l'heure</i> :.....	34
5.2 DÉTERMINATIONS DE LATITUDE	35
5.2.1 <i>Latitude par observations méridiennes</i> :.....	35
5.2.2 <i>Latitude par observation de la polaire</i> :	36
5.3 DÉTERMINATIONS DE LONGITUDE	36
5.3.1 <i>Longitude par observations méridiennes</i> :	36
5.3.2 <i>Longitude par l'heure et la distance zénithale</i> :	36
5.4 DÉTERMINATION SIMULTANÉE DE LONGITUDE ET LATITUDE : MÉTHODE DES DROITES DE HAUTEURS :.....	37



ÉCOLE SUPÉRIEURE DES GÉOMÈTRES ET TOPOGRAPHES

1, Boulevard Pythagore - 72000 LE MANS-FRANCE

Téléphone : 33.(0)2.43.43.31.00 Télécopie : 33.(0)2.43.43.31.02

<http://www.esgt.cnam.fr>

Impression : Service de Reprographie ESGT



COURS DE GÉODÉSIE

Chapitre 3 Géodésie géométrique

ES1



1 Introduction

Les Anciens pensaient que la Terre était une sphère ou un plan. Les travaux théoriques de Huyghens et Newton, puis les mesures du rayon de courbure de la méridienne ont fait préférer, dès le 17^e siècle, une image ellipsoïdale de notre planète. La géodésie contemporaine a montré que ce modèle était lui-même insuffisant : par rapport à un ellipsoïde de révolution, même convenablement choisi, le géoïde présente des irrégularités atteignant une centaine de mètres. Néanmoins, le modèle ellipsoïdal reste largement suffisant, du moins tant qu'on dissocie la recherche des coordonnées géographiques de celle de l'altitude. L'étude de l'ellipsoïde est donc, à l'heure actuelle, encore une nécessité. Les calculs géodésiques sur l'ellipsoïde sont cependant complexes, et les navigateurs et géodésiens ont depuis fort longtemps utilisé des représentations planes de la sphère et de l'ellipsoïde. La seconde partie de ce chapitre leur est consacrée. Une place particulière est réservée à la représentation conique conforme de Lambert, dont l'usage est courant en France.

L'étude de ce chapitre ne nécessite pas de connaissances particulières en géodésie, mais suppose la maîtrise de certains éléments de mathématiques :

- dérivée partielle, différentielle
- coordonnées cartésiennes et polaires, vecteurs en géométrie, produit vectoriel
- équations paramétriques d'une courbe, d'une surface
- tangente, normale à une surface
- abscisse curviligne dans le plan et dans l'espace, longueur d'un arc de courbe, notions sur la courbure
- intégrales définies, intégrales curvilignes
- développement en série, intégration d'un développement
- trigonométrie sphérique

2 Géométrie de l'ellipse et de l'ellipsoïde de révolution

2.1 Définition et propriétés de l'ellipsoïde de

Soit un repère orthonormé (OXYZ), de dimension 3, et un réel k . On appelle affinité d'axe OZ et de rapport k la transformation qui, au point $m(X_m, Y_m, Z_m)$, associe le point $M(X_M, Y_M, Z_M = kZ_m)$. Si le point m appartient à la sphère de centre O, de rayon a , alors le point M appartient à l'ellipsoïde de révolution autour de OZ, de demi axes a et $b = k a$ (figure 1).

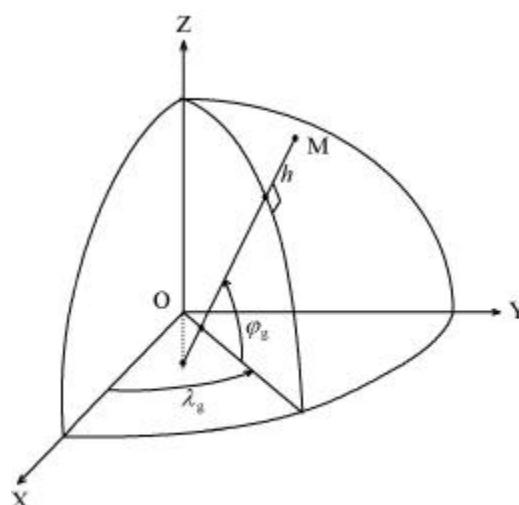


Figure 1. Ellipsoïde de révolution.

Le plan OXY est le plan équatorial, le plan OXZ est le plan méridien origine, le plan OMZ est le plan méridien ellipsoïdal (ou géodésique) du point M. P, intersection de l'axe OZ avec l'ellipsoïde, est le pôle nord. La courbe OMP, affine du cercle de centre O, de rayon $OM = a$, est l'ellipse méridienne. L'angle dièdre λ du plan méridien avec le plan méridien origine, compté dans le sens direct, est la longitude géographique ellipsoïdale (ou géodésique) du point M. L'angle u entre le plan de l'équateur et le rayon Om est la latitude sphérique de m, et la latitude paramétrique de M. Il a le même signe que z et Z.

Les équations paramétriques de la sphère sont :

$$\begin{aligned} X_m &= a \cos \lambda \cos u \\ Y_m &= a \sin \lambda \cos u \\ Z_m &= a \sin u \end{aligned} \quad (1)$$

Celles de l'ellipsoïde s'en déduisent par l'affinité :

$$\begin{aligned} X_M &= a \cos \lambda \cos u \\ Y_M &= a \sin \lambda \cos u \\ Z_M &= b \sin u \end{aligned} \quad (2)$$

L'ensemble des points de l'ellipsoïde pour lesquels λ est constant est une ellipse méridienne. Pour u constant, on obtient un cercle centré sur OZ, situé dans un plan parallèle à l'équateur, de rayon $a \cos u$. Ce cercle est appelé parallèle. On retrouve facilement les équations cartésiennes de l'ellipsoïde en combinant quadratiquement les équations (2). Dans la suite, on omet l'indice M pour désigner les coordonnées de M :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

On définit les paramètres d'aplatissement :
aplatissement :

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (4)$$

première excentricité :

$$e = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^{1/2} \quad (5)$$

seconde excentricité :

$$e' = \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad (6)$$

Entre ces quantités, on démontre les relations suivantes :

$$f = 1 - (1 - e^2)^{1/2} = 1 - (1 + e'^2)^{-1/2} \quad (7)$$

$$e^2 = \frac{e'^2}{1 + e'^2} = 2f - f^2 \quad (8)$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{2f-f^2}{(1-f)^2} \quad (9)$$

2.2 Normale à l'ellipsoïde de latitudes

Sur la figure 2, on distingue les vecteurs \vec{t}_λ et \vec{t}_u , respectivement tangents à l'ellipse méridienne et au parallèle. Les composantes de chacun de ces vecteurs peuvent être obtenues en dérivant les équations paramétriques de l'ellipsoïde par rapport à u et λ :

$$\vec{t}_\lambda = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} = \begin{vmatrix} -a \cos \lambda \sin u \\ -a \sin \lambda \sin u \\ b \cos u \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\vec{t}_u = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} -a \sin \lambda \cos u \\ a \cos \lambda \cos u \\ 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

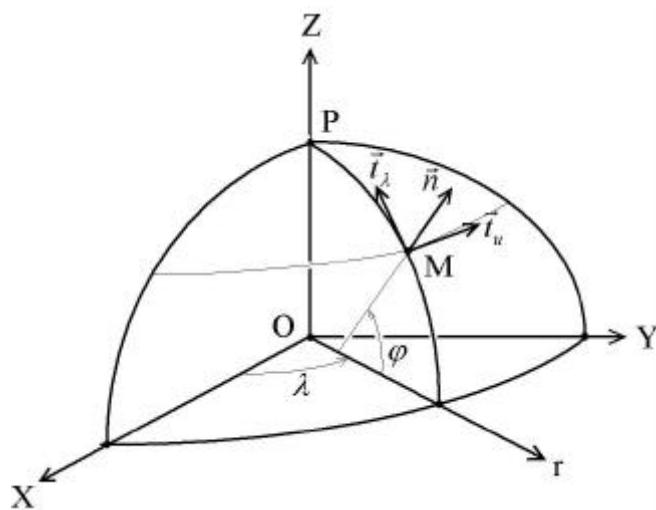


Figure 2. Vecteurs tangents et normaux à l'ellipsoïde

Le plan défini par \vec{t}_λ et \vec{t}_u est tangent à l'ellipsoïde. Le produit vectoriel de ces deux vecteurs est perpendiculaire à chacun d'entre eux, il est donc normal à l'ellipsoïde. Pour obtenir un vecteur normal unitaire \vec{n} , il suffit de diviser le produit vectoriel par sa propre norme, ce qui donne :

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}_u \wedge \vec{t}_\lambda}{\|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_\lambda\|} \quad (12)$$

Les composantes du produit vectoriel sont :

$$\vec{t}_u \wedge \vec{t}_\lambda = \begin{vmatrix} ab \cos \lambda \cos^2 u \\ ab \sin \lambda \cos^2 u \\ a^2 \sin u \cos u \end{vmatrix} \quad (13)$$

On pose :

$$w = b(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{-1/2} \quad (14)$$

Il vient :

$$\|\vec{t}_u \wedge \vec{t}_\lambda\| = \frac{ab \cos u}{w} \quad (15)$$

et finalement :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} w \cos \lambda \cos u \\ w \sin \lambda \cos u \\ \frac{aw}{b} \sin u \end{pmatrix} \quad (16)$$

La latitude géographique ellipsoïdale (ou géodésique) est l'angle de \overrightarrow{OM} avec le plan de l'équateur. On la note φ . λ et φ sont les coordonnées géographiques ellipsoïdales (ou géodésiques). En fonction de ces coordonnées, les composantes du vecteur unitaire normal sont :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \cos \varphi \\ \sin \lambda \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (17)$$

Par identification de (16) et (17), on obtient des relations :

$$\cos \varphi = w \cos u \quad (18)$$

$$\sin \varphi = \frac{a}{b} w \sin u \quad (19)$$

$$\tan \varphi = \frac{a}{b} \tan u \quad (20)$$

On notera les formules utiles :

$$w = (1 + e'^2 \sin^2 u)^{-1/2} \quad (21)$$

$$w = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \quad (22)$$

Pour établir une équation différentielle entre u et φ , on utilise (20) :

$$\frac{du}{\cos^2 u} = \frac{b}{a} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \quad (23)$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de (18) :

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{b}{aw^2} \quad (24)$$

Les équations paramétriques de l'ellipsoïde en fonction des coordonnées géographiques et le rayon du parallèle r , se déduisent aisément de (2), (18) et (19) :

$$X = a \frac{\cos \lambda \cos \varphi}{w}$$

$$Y = a \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{w}$$

$$Z = a(1 - e^2) \frac{\sin \varphi}{w}$$

$$r = (X^2 + Y^2)^{1/2} = a \frac{\cos \varphi}{w}$$

(25)

2.3 Abscisse curviligne et arc d'ellipse méridienne

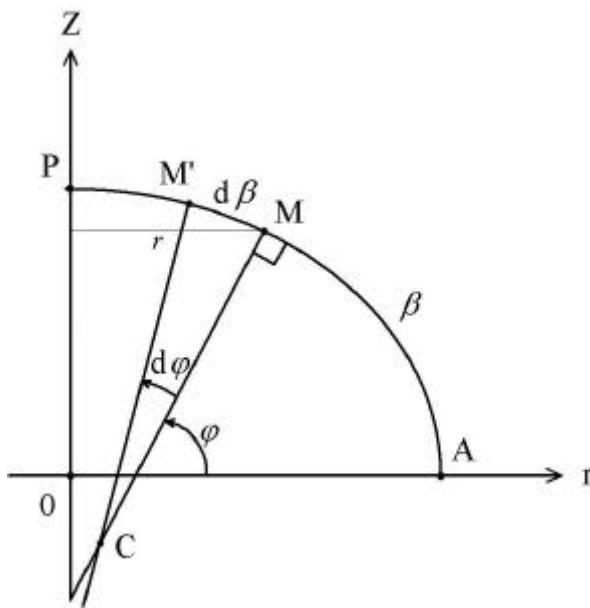


Figure 3. Abscisse curviligne de l'ellipse méridienne.

Sur la figure 3, les points M et M' sont dans le même plan méridien OrZ, qui est le plan de figure. L'axe Or est dans l'quateur. r est le rayon du parallèle. La courbe AMM'P est l'ellipse méridienne. φ est la latitude géographique de M, $\varphi + d\varphi$ celle de M'. On oriente l'arc d'ellipse positivement de A vers P, et on désigne par β l'abscisse curviligne de M compt e depuis A, et par $d\beta$ sa différentielle, l'arc MM'. On calcule $d\beta$ par :

$$d\beta^2 = dr^2 + dZ^2 \quad (26)$$

On différentie les ´equations paramétriques de l'ellipse :

$$\begin{aligned} r &= a \cos u \\ Z &= b \sin u \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} dr &= -a \sin u du \\ dZ &= b \cos u du \end{aligned} \quad (28)$$

$d\beta^2$ devient :

$$d\beta^2 = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) du^2 \quad (29)$$

Utilisant 14 et 24, il vient successivement :

$$d\beta = \frac{b}{w} dw = \frac{b^2}{aw^3} d\varphi \quad (30)$$

De 5, on déduit la valeur de b^2 / a en fonction de e et finalement :

$$d\beta = \frac{a(1-e^2)}{w^3} d\varphi \quad (31)$$

L'intégration de (31) donne la longueur d'un arc d'ellipse. On a par exemple, pour l'arc AM, en combinant (31) et (22) :

$$\beta = a(1-e^2) \int_0^\varphi \frac{d\phi}{(1-e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \quad (32)$$

On ne sait pas exprimer cette intégrale à l'aide de fonctions élémentaires et, pour la calculer, on a recours à des méthodes numériques itératives ou à l'intégration terme à terme de développements limités, par exemple :

$$\boxed{\begin{aligned} \beta &= a \left(b_0 \varphi + \sum_{i=1}^4 b_i \sin 2i\varphi \right) \\ b_0 &= 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \frac{175e^8}{16384} \\ b_1 &= -\frac{3e^2}{8} - \frac{3e^4}{32} - \frac{45e^6}{1024} - \frac{105e^8}{4096} \\ b_2 &= \frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} + \frac{525e^8}{16384} \\ b_3 &= -\frac{35e^6}{3072} - \frac{175e^8}{12288} \\ b_4 &= \frac{315e^8}{131072} \end{aligned}} \quad (33)$$

2.4 Courbures

Soit (figure 4) un point M sur une surface quelconque σ , et \vec{n} le vecteur normal en M. π est un plan normal, c'est à dire qu'il contient M et \vec{n} . γ est l'intersection de σ et π . C est le centre de courbure de γ en M. CM = R est le rayon de courbure de la courbe γ en M. C'est le rayon du cercle qui approche au mieux la courbe γ au voisinage de M (cercle osculateur). R est appelé rayon de courbure normale, puisque π est un plan normal. Si le plan π tourne autour de \vec{n} , γ varie et R également. R dépend donc en général du point M, mais aussi, M et \vec{n} restant fixes, du plan π . R n'est constant que si la surface σ est une sphère ou un plan. On montre que, pour une surface convexe régulière, M restant fixe et π tournant autour de \vec{n} , R varie entre deux valeurs finies R_1 et R_2 appelées rayons de courbures normaux principaux :

$$R_1 \leq R \leq R_2 \quad (34)$$

Ces deux rayons de courbure correspondent à deux courbes particulières γ_1 et γ_2 appelées sections normales principales. Les centres de courbures correspondant sont les centres de

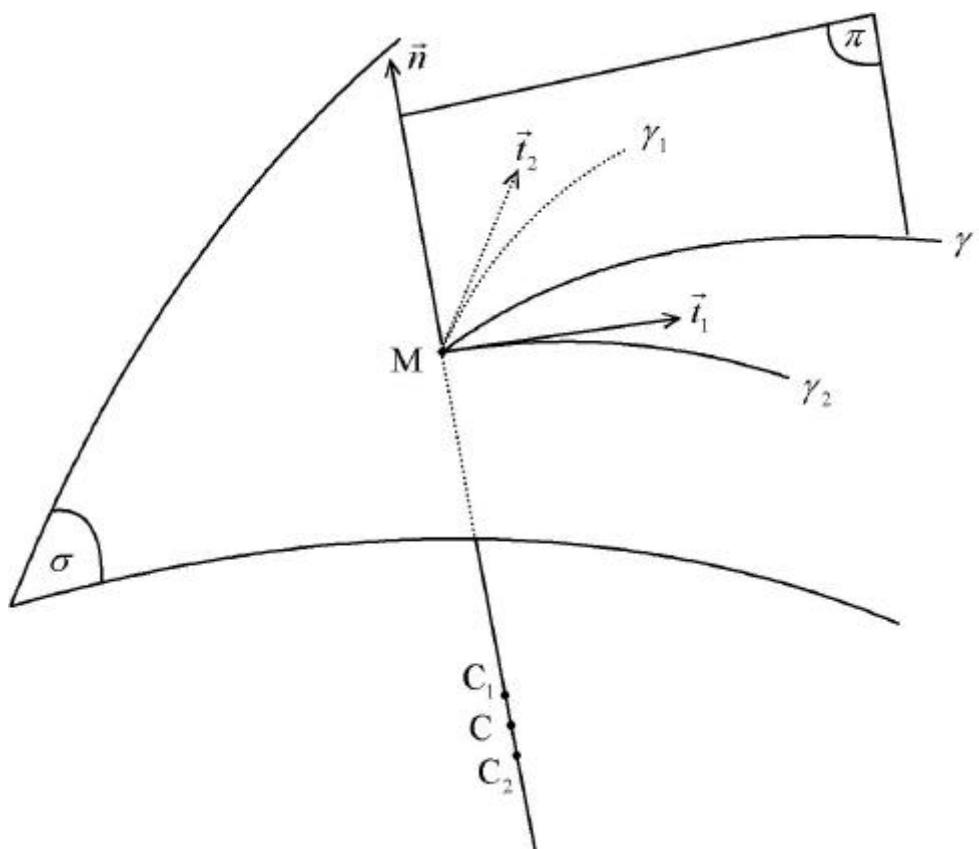


Figure 4. Courbures normales principales d'une surface.

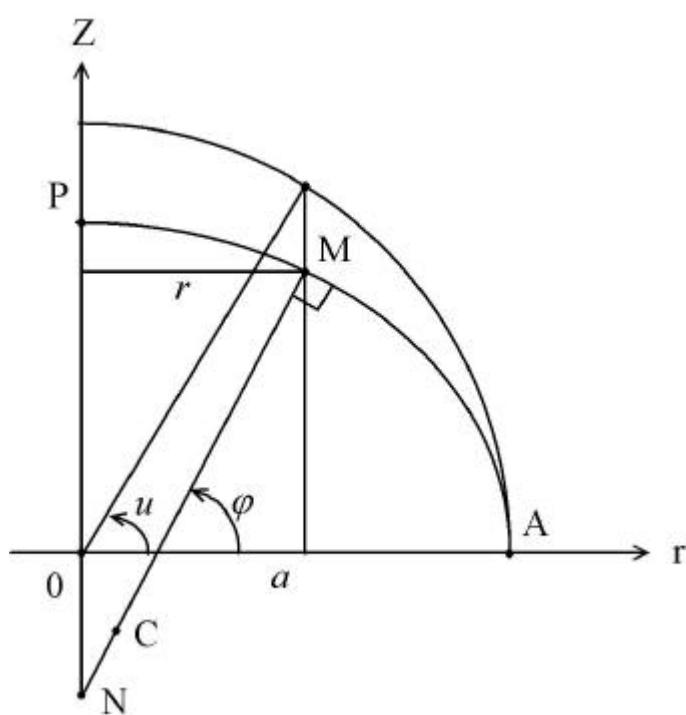


Figure 5. Courbures normales principales de l'ellipsoïde de révolution.

courbures principaux C_1 et C_2 . Les directions des tangentes en M à γ_1 et γ_2 sont les directions principales de σ en M. Elles sont notées \vec{t}_1 et \vec{t}_2 sur la figure 4.

Pour l'ellipsoïde de révolution, on démontre que, en un point M quelconque, l'ellipse méridienne est la section normale principale de rayon de courbure minimal. Son rayon de courbure est déduit de la formule (31) et vaut :

$$\boxed{\rho = \frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{a(1-e^2)}{w^3} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}} \quad (35)$$

Le rayon de courbure maximal est la portion de normale MN comprise entre le point M et l'axe de révolution (figure 5). On l'appelle "grande normale", et sa valeur est :

$$v = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a \cos u}{\cos \varphi} \quad (36)$$

$$\boxed{v = \frac{a}{w} = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}} \quad (37)$$

Le rayon de courbure R d'une section normale d'azimut Az est donné par la formule d'Euler :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 Az}{\rho} + \frac{\sin^2 Az}{v}} \quad (38)$$

On peut souhaiter approximer l'ellipsoïde de révolution par une sphère au voisinage d'un point M. Le meilleur choix est souvent la sphère de Gauss dont le rayon R_G est donné par :

$$\boxed{\frac{1}{R_G^2} = \frac{1}{\rho v}} \quad (39)$$

$1/R_G^2$ s'appelle la courbure totale, ou la courbure de Gauss. Une autre solution est la sphère de courbure moyenne de rayon R_M :

$$\boxed{\frac{1}{R_M} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{v} \right)} \quad (40)$$

2.5 Abscisse curviligne et coordonnées symétriques sur l'ellipsoïde

La figure 6 permet d'évaluer le carré de la différentielle de l'abscisse curviligne sur l'ellipsoïde :

$$ds^2 = r^2 d\lambda^2 + d\beta^2 \quad (41)$$

Dans cette expression, il n'existe pas de terme en $d\lambda \cdot d\varphi$. On dit que les coordonnées λ et φ sont orthogonales. On expliquera au paragraphe 3 qu'il est intéressant de trouver une coordonnée \mathcal{L} telle que ds^2 se mette sous la forme :

$$ds^2 = r^2 (d\lambda^2 + d\mathcal{L}^2) \quad (42)$$

Les coefficients de $d\lambda^2$ et de $d\mathcal{L}^2$ étant égaux, et ds^2 ne comportant pas de terme en $d\lambda \cdot d\mathcal{L}$, les coordonnées λ et \mathcal{L} sont dites symétriques. \mathcal{L} est la latitude isométrique. En

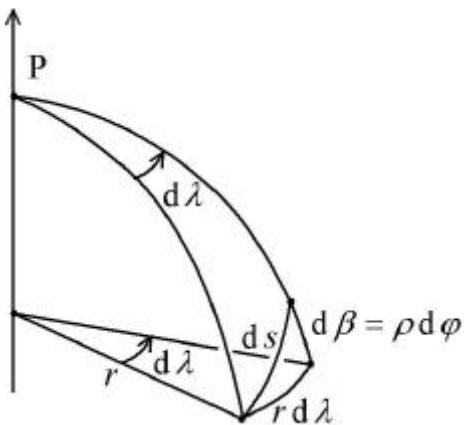


Figure 6. Abscisse curviligne sur l'ellipsoïde de révolution.

identifiant (41) et (42), et en utilisant (31) et (22), on trouve :

$$d\mathcal{L} = \frac{(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} d\varphi \quad (43)$$

Cette équation différentielle définit la latitude isométrique à une constante près, et on impose qu'elle s'annule avec la latitude géographique, de sorte que :

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{(1-e^2) d\phi}{(1-e^2 \sin^2 \phi) \cos \phi} \quad (44)$$

L'intégration conduit à :

$$\boxed{\mathcal{L}(\varphi) = \ln \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1-e \sin \varphi}{1+e \sin \varphi}} \quad (45)$$

ou \ln est la fonction logarithme népérien et φ est en radians.

2.6 Lignes géodésiques de l'ellipsoïde

Etant donnés deux points sur une surface, on appelle ligne géodésique la courbe de longueur minimale joignant ces deux points. Sur l'ellipsoïde de révolution, une ligne géodésique possède des propriétés caractéristiques. Soit (figure 7) deux points voisins M et M'.

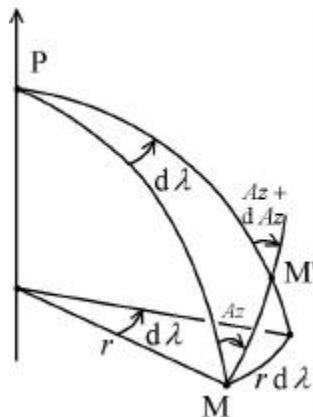


Figure 7. Elément de géodésique sur l'ellipsoïde.

L'azimut de la géodésique en M est l'angle Az entre l'ellipse méridienne, en direction du nord, et la géodésique, compté dans le sens rétrograde. En M' , l'azimut est $Az + dAz$. Le rayon du parallèle r et l'azimut Az vérifient la relation de Clairaut :

$$r \sin Az = Cte \quad (46)$$

La variation d'azimut dAz et celle de la longitude $d\lambda$ sont liées par la relation de Laplace :

$$dAz = \sin \varphi d\lambda \quad (47)$$

L'intégration des relations (46) et (47) permet de résoudre de nombreux problèmes de géodésie et de navigation. Cependant, en raison de la difficulté des calculs, on préfère chaque fois que possible utiliser une représentation plane de l'ellipsoïde. On peut cependant suggérer l'intérêt des lignes géodésiques de la manière suivante : soit deux points M_1 et M_2 sur l'ellipsoïde (figure 8). En M_1 , on met en station un théodolite dont l'axe principal est supposé normal à l'ellipsoïde, suivant \vec{n}_1 . Le plan normal à l'ellipsoïde en M_1 passant par M_2 découpe sur l'ellipsoïde une section normale $\Gamma_{1,2}$ qui est une ellipse. La visée M_1M_2 se projette donc sur l'ellipsoïde suivant cette courbe. La visée réciproque, M_2M_1 , se projette suivant une ellipse légèrement différente $\Gamma_{2,1}$ car les normales en M_1 et M_2 ne sont pas coplanaires. La ligne géodésique M_1M_2 se trouve entre les deux sections normales et les approche très bien. Même à des distances importantes (30 km), les deux sections normales et la géodésique peuvent être considérées comme confondues.

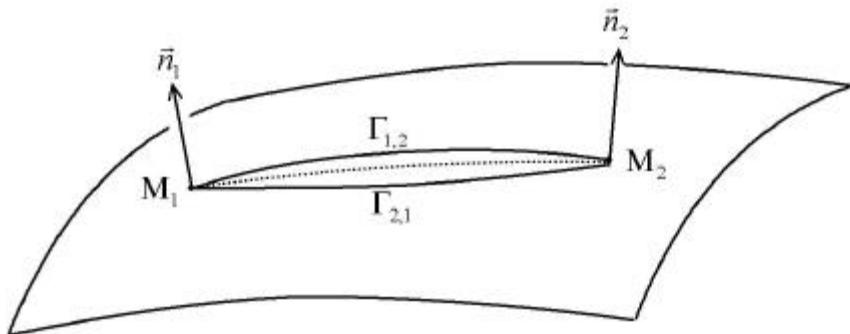


Figure 8. Sections normales et géodésique sur l'ellipsoïde.

3 Représentations planes de l'ellipsoïde

3.1 Définitions

On considère deux surfaces régulières σ et Σ . Sur chacune d'elle, on définit un système de coordonnées : (u, v) sur σ et (U, V) sur Σ (figure 9). Par exemple, σ peut être l'ellipsoïde et

(u, v) sont les coordonnées géographiques (λ, φ) . Σ est un plan et (U, V) des coordonnées cartésiennes (E, N) ou polaires (figure 10). On appelle représentation \mathcal{F} (ou projection) de σ sur Σ une application qui, à tout point $m(u, v)$ de σ associe un point $M(U, V)$ de Σ :

$$m(u, v) \in \sigma \mapsto M(U, V) \in \Sigma \quad (48)$$

σ est le modèle, et Σ son image. Pour définir une représentation, outre les surfaces et les systèmes de coordonnées, il suffit de se donner deux fonctions de deux variables u et v :

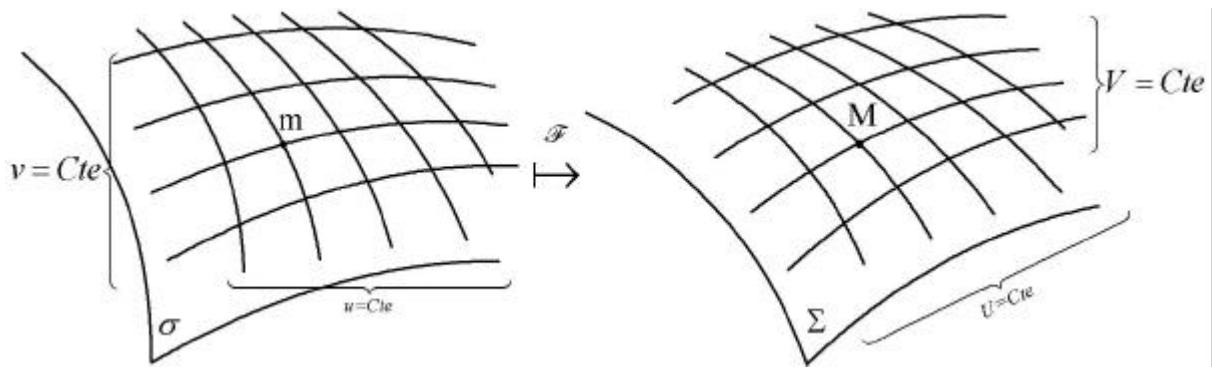


Figure 9. Représentation d'une surface sur une autre.

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{U}(u, v) \\ V &= \mathcal{V}(u, v) \end{aligned} \tag{49}$$

Dans la suite, on suppose que les surfaces et les fonctions vérifient des conditions sévères de continuité et de dérivabilité et que l'application \mathcal{F} est bijective, sauf peut-être en quelques points singuliers. L'application inverse \mathcal{F}^{-1} existe donc. Lorsqu'un élément de Σ (point, ou ensemble de points) est l'image par \mathcal{F} d'un élément de σ , on dit que les éléments se correspondent. Sur la figure 11 par exemple, les points m et M sont correspondants, les courbes γ et Γ sont correspondantes, de même que γ' et Γ' . Cette notion de correspondance est, par abus de langage, étendue aux vecteurs tangents, à leurs directions et aux angles qu'ils forment : \vec{t} et \vec{t}' étant unitaires respectivement tangents à γ et γ' sur σ , et \vec{T} et \vec{T}' unitaires tangents à Γ et Γ' sur Σ , \vec{T} correspond à \vec{t} et \vec{T}' correspond à \vec{t}' . L'angle Θ de \vec{T} et \vec{T}' correspond à l'angle θ de \vec{t} et \vec{t}' .

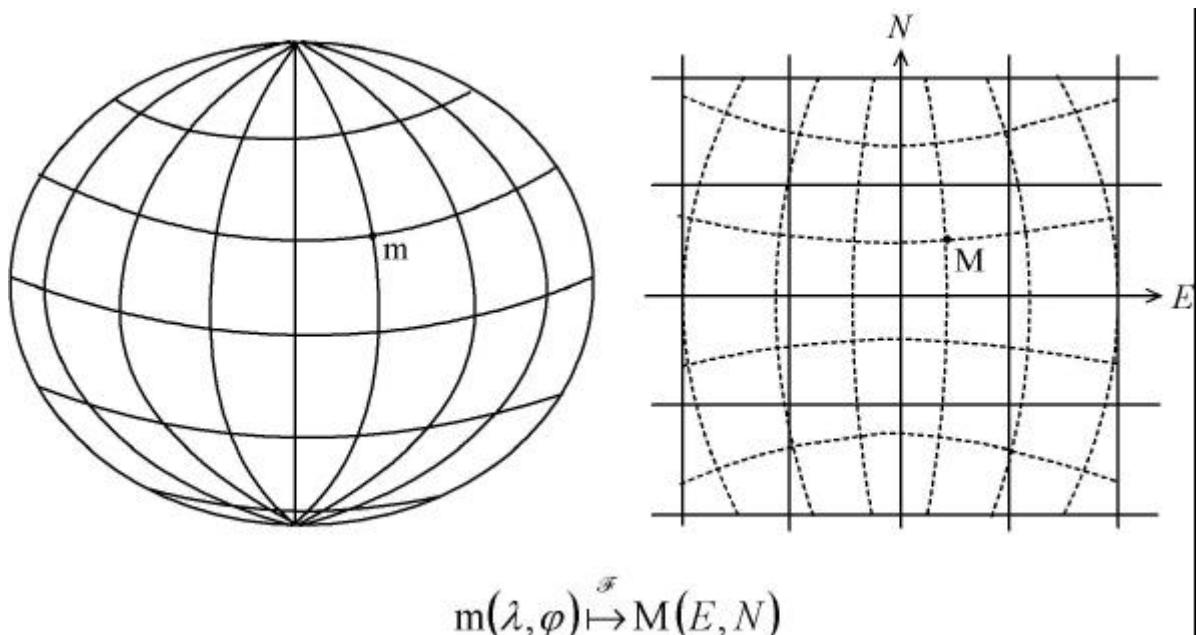


Figure 10. Représentation de l'ellipsoïde sur un plan.

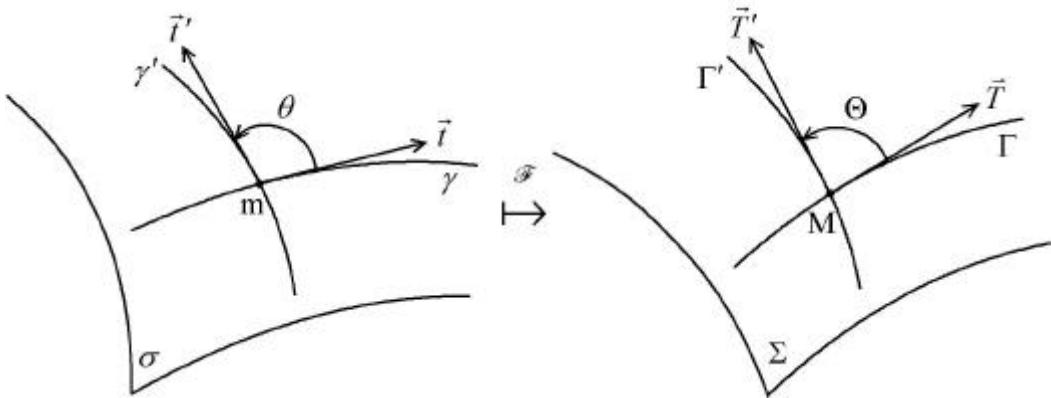


Figure 11. Éléments correspondants.

3.2 Altérations, indicatrice de Tissot

En général, une représentation déforme les figures. Il n'existe de représentations non déformantes entre deux surfaces que si leur courbure de Gauss sont égales en chaque couple de points correspondants. En particulier, il n'est pas possible de trouver des représentations non déformantes entre une sphère ou un ellipsoïde et un plan, alors qu'il existe des représentations non déformantes d'un cylindre sur un plan. Les concepts définis ci dessous permettent de quantifier les déformations du point de vue des longueurs, des angles et des aires.

Soit γ une courbe de la surface σ , et deux points voisins m et m' sur cette courbe (figure 12). s est la longueur mm' . t est la tangente à γ au point m . Les éléments correspondants sur Σ sont respectivement Γ , M , M' , S et \vec{T} . Le module linéaire est :

$$\mu = \lim_{m' \rightarrow m} \frac{S}{s} = \frac{dS}{ds} \quad (50)$$

On définit également l'altération linéaire :

$$\varepsilon = \mu - 1 \quad (51)$$

Le module linéaire et l'altération linéaire sont fonction de la représentation, de la position du point m sur le modèle mais aussi, en général, de \vec{t} .

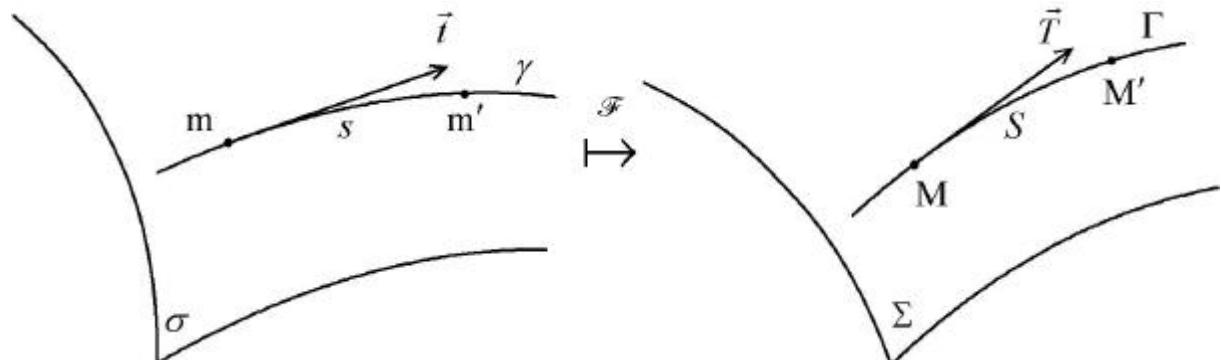


Figure 12. Eléments de courbes correspondants.

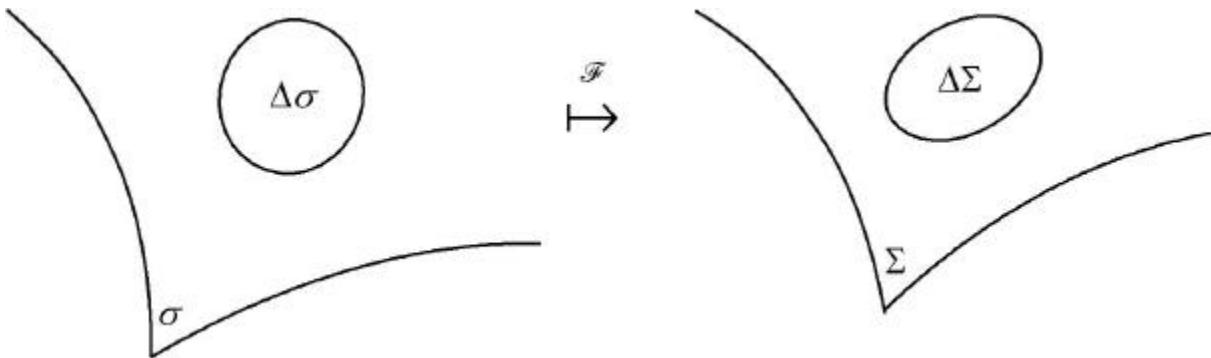


Figure 13. Domaines correspondants.

On considère à nouveau des angles correspondants (figure 11). L'altération angulaire est la différence :

$$\delta = \Theta - \theta \quad (52)$$

La figure 13 montre deux domaines de chaque surface limités par deux courbes fermées correspondantes. Les aires des de $\mu_2 \times$ domaines sont $\Delta\sigma$ et $\Delta\Sigma$. On appelle module aréolaire la quantité :

$$k = \lim_{m' \rightarrow m} \frac{\Delta\Sigma}{\Delta\sigma} = \frac{d\Sigma}{d\sigma} \quad (53)$$

Soit, sur la surface σ , un cercle de centre m et de rayon Δs (figure 14). On démontre que, pour un rayon tendant vers 0, la courbe correspondante du cercle est une ellipse au second ordre près. Cette ellipse est l'indicatrice de Tissot. Ses axes de symétries MM' et MM'' correspondent aux directions mm' et mm'' sur σ pour lesquelles le module linéaire est maximal (respectivement minimal). Les directions de ces axes sont les directions principales de la représentation au point m . MM' et MM'' sont évidemment orthogonaux, on démontre que mm' et mm'' le sont également. Les longueurs des axes de symétrie de l'indicatrice de Tissot se déduisent des modules linéaires μ_1 et μ_2 dans les directions principales, et valent $\mu_1\Delta s$ et $\mu_2\Delta s$. L'aire du cercle sur σ est $\pi\Delta s^2$, celle de l'ellipse indicatrice de Tissot est $\pi\mu_1\mu_2\Delta s^2$. On en déduit, en appliquant (53) :

$$k = \mu_1\mu_2 \quad (54)$$

L'indicatrice de Tissot apporte une information très synthétique sur les altérations.

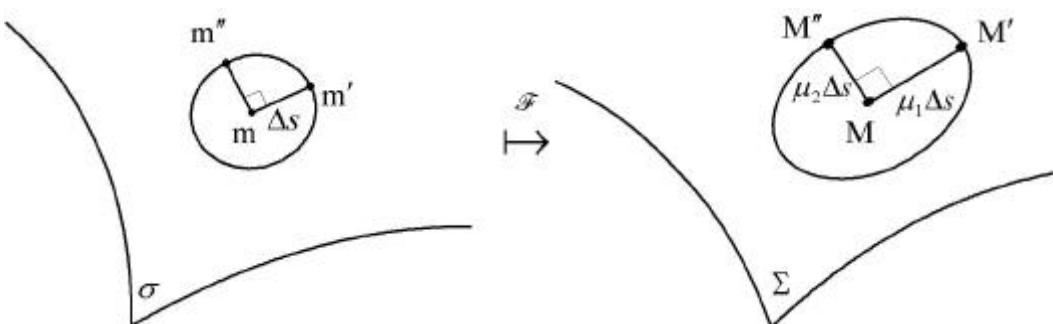


Figure 14. Indicatrice de Tissot.

3.3 Classification des représentations.

On peut classer les représentations suivant les déformations qu'elles provoquent, suivant la forme de leur canevas, suivant leur aspect (direct, oblique, transverse).

3.3.1 Classification par les déformations

Les représentations qui n'altèrent pas les angles sont dites conformes :

$$\forall m \in \sigma, \quad \Theta - \theta = 0 \quad (55)$$

En un point quelconque, les modules linéaires principaux sont égaux, l'indicatrice de Tissot est un cercle. En géodésie et en topographie, on utilise exclusivement ces représentations en raison de leurs propriétés géométriques.

Les représentations qui conservent les aires sont équivalentes. En tout point, elles vérifient :

$$k = \mu_1 \mu_2 = 1 \quad (56)$$

Une représentation ne peut être à la fois conforme et équivalente que si le modèle et l'image ont même courbure de Gauss. Il n'existe donc pas de représentation à la fois conforme et équivalente de l'ellipsoïde sur un plan. Les projections équivalentes sont fréquemment utilisées dans les atlas, pour représenter des densités. Les représentations qui ne sont ni conformes ni équivalentes sont appelées aphyllactiques. Certaines d'entre elles sont très utiles pour représenter la Terre entière sans trop de déformations globales.

3.3.2 Classification par la forme du canevas

Le canevas d'une représentation de l'ellipsoïde de révolution sur un plan est l'image plane d'un ensemble de méridiens dont les longitudes sont en progression arithmétique et de parallèles équidistants en latitude. Le tableau 1 et la figure 15 donnent quelques types de représentations classées suivant leurs canevas.

Tableau 1. Classification des représentations planes par la forme du canevas.

Type	Images des méridiens	Images des parallèles	Figure
Polyconique	méridien central : droite images des autres méridiens quelconques	cercles centrés sur l'image du méridien central	15 a
Mériconique	méridien central : droite images des autres méridiens quelconques	cercles concentriques, centrés sur l'image du méridien central	15 b
Circulaire	cercles centrés sur l'image de l'équateur	équateur : droite images des autres parallèles quelconques	15 c
Conique	droites concourant à l'image d'un pôle, formant des angles proportionnels à l'accroissement des longitudes	arcs de cercles centrés sur l'image du pôle	15 d
Méricylindrique	méridien central : droite images des autres méridiens quelconques	droites parallèles (perpendiculaires à l'image du méridien central)	15 e
Azimutale	droites concourant à l'image d'un pôle, angles égaux à l'accroissement des longitudes	cercles centrés sur l'image du pôle	15 f
Cylindrique	droites parallèles équidistantes	droites perpendiculaires aux images des méridiens	15 g

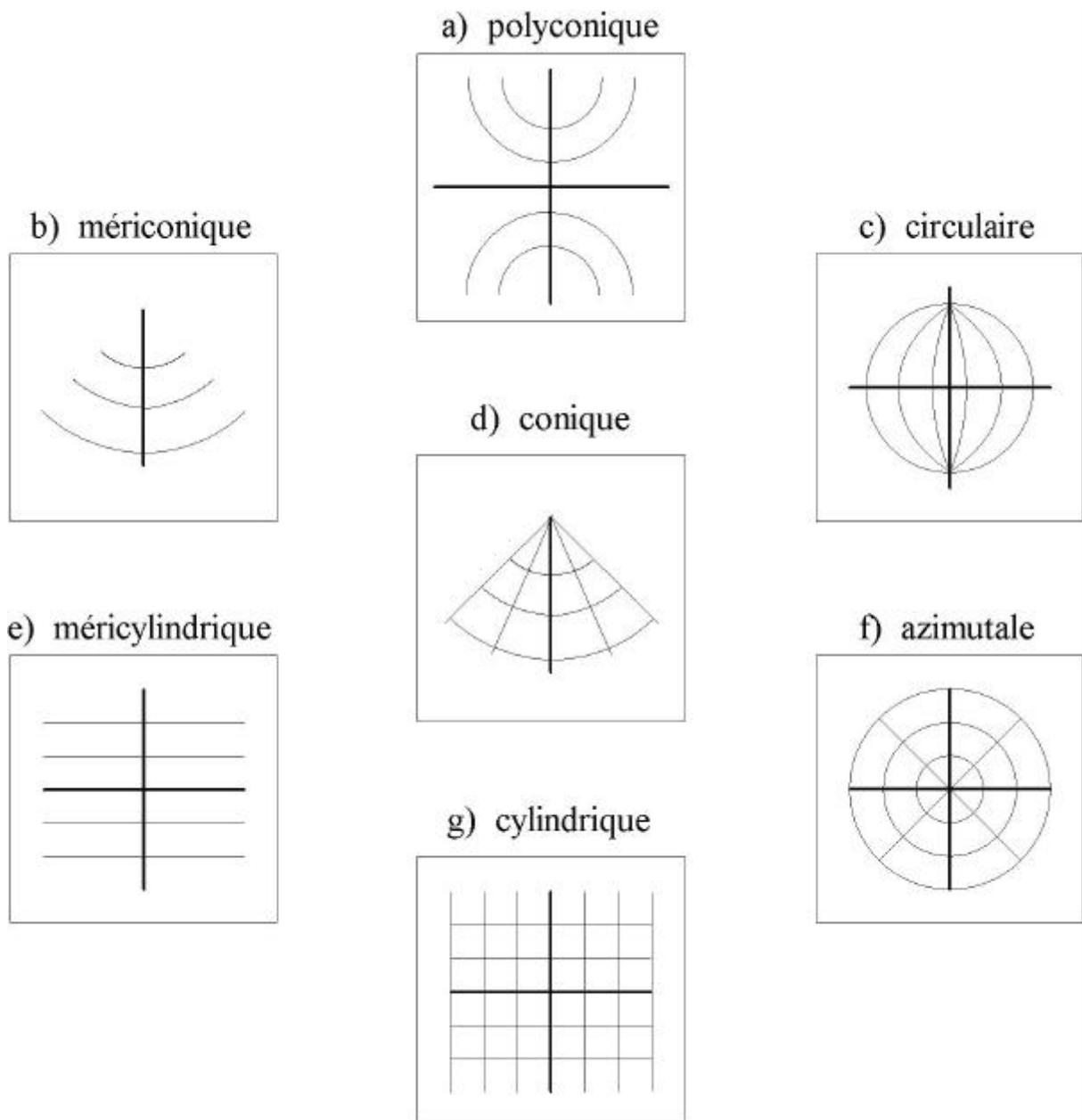


Figure 15. Classification des représentations planes par la forme du canevas.

3.3.3 Classification par l'aspect

On envisage pour simplifier une représentation \mathcal{F}_D d'une sphère sur un plan, définie par les coordonnées cartésiennes fonctions de la longitude et de la latitude (il s'agit ici de coordonnées sphériques) :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\lambda, \varphi) &\mapsto \mathbf{M}(x, y) \\ x &= X(\lambda, \varphi) \\ y &= Y(\lambda, \varphi) \end{aligned} \tag{57}$$

A partir de la représentation \mathcal{F}_D , dite directe, on peut construire d'autres représentations dites obliques ou transverses en changeant le système de coordonnées géographiques sur la sphère.

On procède de la manière suivante. Soient p et p' les pôles nord et sud sur la sphère, à partir desquels on définit les coordonnées géographiques ordinaires λ et φ (figure 16a). Soit deux points q et q' diamétralement opposés, nommés pseudo-pôles (figure 16b). À partir de ces points, on construit un réseau de pseudo-méridiens et pseudo-parallèles correspondant aux pseudo-coordonnées géographiques Λ et Φ . On passe de λ, φ à Λ et Φ par des formules de trigonométrie sphérique. On peut définir une nouvelle représentation \mathcal{F}_o :

$$\begin{aligned} m(\lambda, \varphi) &\xrightarrow{\mathcal{F}_o} M(x, y) \\ x &= X(\Lambda, \Phi) \\ y &= Y(\Lambda, \Phi) \end{aligned} \tag{58}$$

Dans les formules (58), les fonctions X et Y sont les mêmes que dans les formules (57) mais on les applique aux pseudo-coordonnées. La représentation \mathcal{F}_o est l'aspect oblique de la représentation \mathcal{F}_d . Si q et q' sont dans l'équateur, la représentation obtenue est dite transverse. Un exemple est présenté au paragraphe 6. Dans le cas des représentations cylindriques ou coniques, on peut visualiser le processus en imaginant qu'il soit possible d'utiliser une surface intermédiaire (cylindre ou cône) pour représenter la sphère (figure 16). On représente la sphère sur la surface intermédiaire, puis on développe la surface sur le plan. Si l'axe du cylindre ou du cône est l'axe des pôles, on obtient l'aspect direct de la représentation. Si l'axe est incliné par rapport à l'axe des pôles, on obtient l'aspect oblique. Si l'axe du cylindre ou du cône est dans l'équateur, on obtient l'aspect transverse.

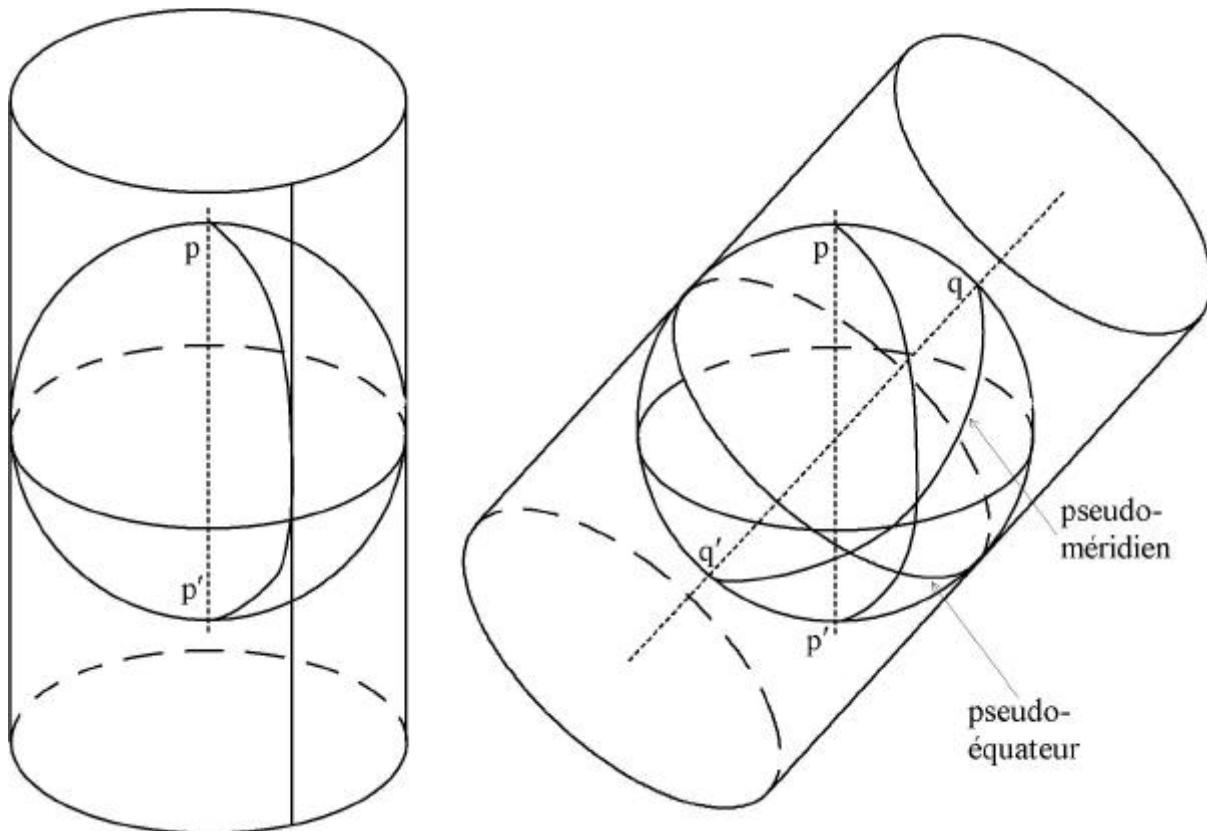


Figure 16. Représentation cylindrique directe et oblique.

3.3.4 Représentation tangente, sécante

Dans le cas des représentations cylindriques ou coniques, il peut exister des parallèles le long desquels le module linéaire vaut 1. Ces parallèles sont dits "automécoïques", ce qui signifie "d'échelle conservée". Dans le cas général, il y a deux parallèles automécoïques et la projection est dite sécante. Si le parallèle automécoïque est unique, il correspond en général à une valeur minimale du module linéaire et la projection est "tangente". La partie gauche de la figure 16 illustre une projection cylindrique directe tangente.

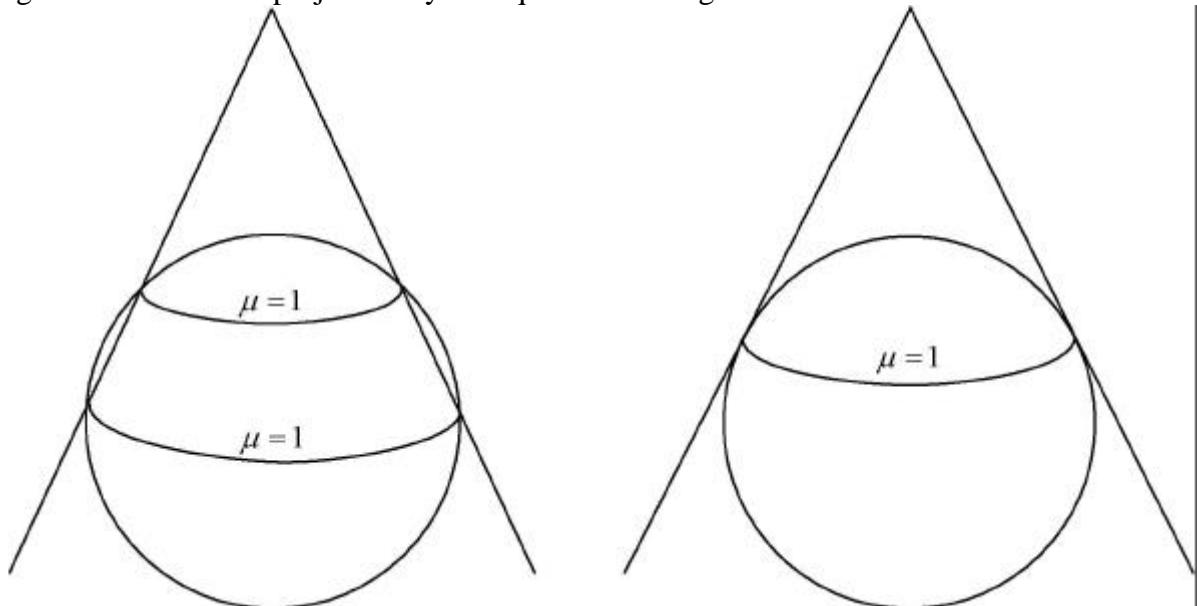


Figure 17. Schématisation des représentations coniques sécantes et tangentes.

Sur la figure 17, on a schématisé des représentations coniques sécantes et tangentes, avec les parallèles automécoïques.

3.4 Représentations conformes

Comme on l'a déjà signalé, le module linéaire d'une représentation dépend de la position du point M sur le modèle, mais aussi, pour un point m donné, de la direction du vecteur \vec{t} . Pour une représentation conforme, le module linéaire ne dépend que de la position du point m. Les représentations conformes possèdent d'autres propriétés caractéristiques :

- l'indicatrice de Tissot est un cercle (de rayon cependant variable)
- en un point donné, les modules linéaires principaux sont égaux
- l'altération angulaire est toujours nulle.

Une condition analytique de conformité peut être obtenue en utilisant des coordonnées symétriques : on suppose que, sur le modèle σ et sur son image Σ , les coordonnées (u, v) et (U, V) soient choisies de telle sorte que les différentielles d'abscisses curvilignes aient une forme particulière :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (h(u, v))^2 (du^2 + dv^2) \\ dS^2 &= (H(U, V))^2 (dU^2 + dV^2) \end{aligned} \tag{59}$$

Les coordonnées cartésiennes du plan sont symétriques, les coordonnées géographiques de l'ellipsoïde ne le sont pas, mais, comme on l'a vu au paragraphe 2.5, la longitude et la latitude isométrique forment un couple de coordonnées symétriques.

Soit une représentation conforme qui s'exprime par les formules (49), en coordonnées symétriques. Alors l'une ou l'autre des conditions suivantes, dues à Cauchy, est vérifiée :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial u} &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v} & \text{et} & \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v} \\ &&\text{ou}& \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial u} &= -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial v} & \text{et} & \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial v} \end{aligned}} \quad (60)$$

On appelle isomètre une courbe du modèle le long de laquelle le module linéaire est constant. Lorsqu'on représente l'ellipsoïde entier sur un plan par une représentation conforme, il existe une isomètre centrale, le long de laquelle le module linéaire est minimum. On note ce minimum μ_0 . Il existe toujours des points de l'ellipsoïde dont l'image plane est à l'infini, et en ces points, le module linéaire est infini. On a donc :

$$\mu_0 \leq \mu \leq \infty \quad (61)$$

Si μ_0 est inférieur à 1, il existe nécessairement des isomètres pour lesquelles $\mu = 1$. Elles sont automécoïques. Au voisinage de l'isomètre centrale, en un point m à distance d de celle-ci, le module linéaire se développe sous la forme :

$$\boxed{\mu = \mu_0(1 + pd^2 + o(d^2))} \quad (62)$$

où p dépend un peu du point m et où $o(d^2)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à d^2 .

Soit s la distance séparant deux points m_1 et m_2 de l'ellipsoïde (figure 18). La distance correspondante en plan est S . Si l'arc de courbe sur l'ellipsoïde est une géodésique, son image plane est peu courbée et, sur le plan, on peut confondre la longueur de l'image de la géodésique et la longueur du segment M_1M_2 .

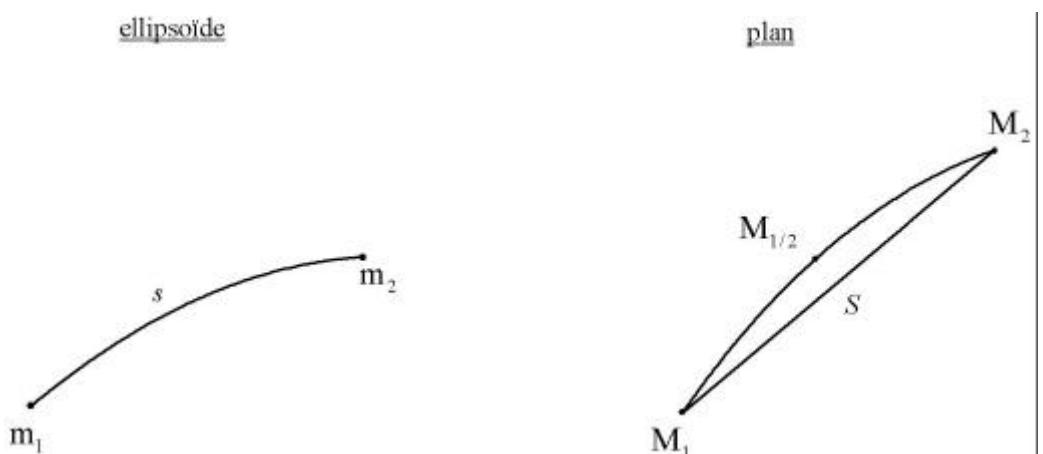


Figure 18. Réduction d'une distance de l'ellipsoïde au plan.

En toute rigueur, S est donné par l'intégrale curviligne :

$$S = \int_{m_1 m_2} \mu \, d\,s \quad (63)$$

Pour une distance courte (quelques centaines de mètres), μ peut être considéré comme constant :

$$S = \mu \, s \quad (64)$$

Pour des distances plus longues, il est nécessaire de calculer une valeur moyenne du module linéaire :

$$S = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \, s \quad (65)$$

Pour les distances très longues (plusieurs dizaines de kilomètres), on utilise la formule des trois niveaux, qui nécessite le calcul du module linéaire aux deux extrémités et au milieu de l'arc de géodésique :

$$S = \frac{\mu_1 + 4\mu_{1/2} + \mu_2}{6} \, s \quad (66)$$

Une transformation conforme conserve les angles. Cependant, l'image plane d'une ligne géodésique de l'ellipsoïde n'est en général pas une géodésique du plan (une droite), mais une courbe tournant sa concavité vers l'isomètre centrale (figure 17). Ceci entraîne qu'une petite correction doit être apportée aux angles horizontaux observés avant de les utiliser pour des calculs en projection. Sur la partie gauche de la figure 19, l'azimut de la direction $m_1 m_2$ est considéré comme égal à l'angle entre l'ellipse méridienne vers le nord et la ligne géodésique $m_1 m_2$. En projection conforme, l'azimut est conservé, c'est l'angle entre l'image du méridien et l'image de la géodésique (courbe $M_1 M_2$ sur la partie droite de la figure). Pour utiliser en projection les formules classiques de la géométrie plane, il faut corriger l'azimut du petit

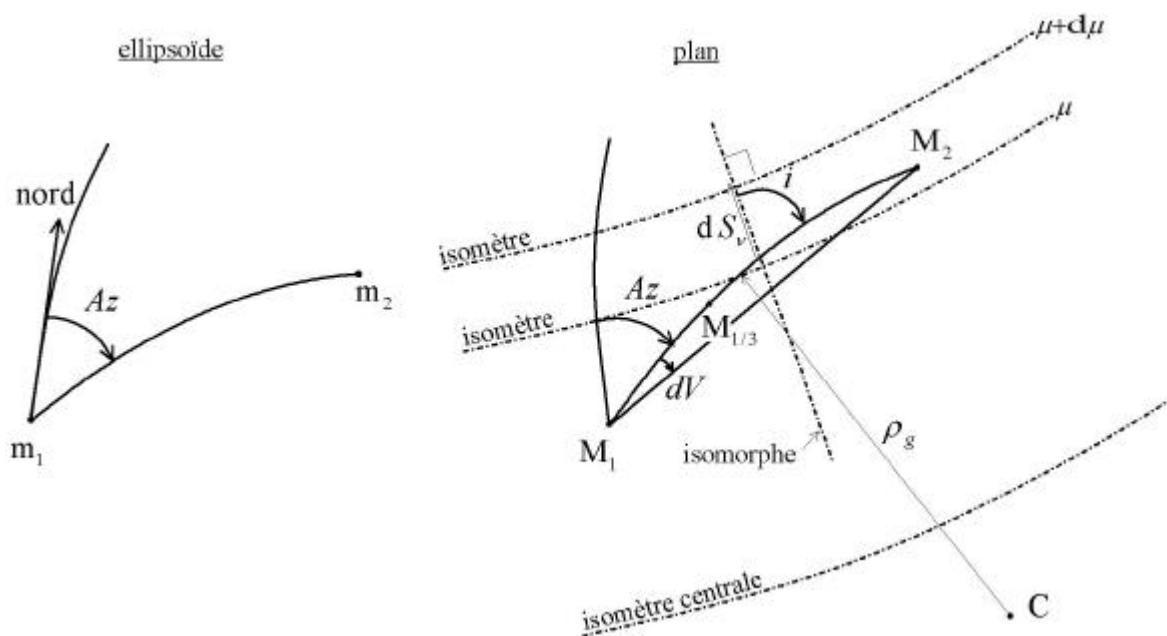


Figure 19. Transformation conforme d'une géodésique de l'ellipsoïde.

angle entre l'image de la géodésique et le segment de droite $M_1 M_2$. Cette correction est notée dV , on l'obtient à partir de ρ_g , rayon de courbure de l'image de la géodésique. Celle-ci tourne sa concavité vers l'isomètre centrale, vers laquelle se trouve donc le centre de courbure C . On appelle isomorphes les courbes orthogonales aux isomètres, et on note S_v leur abscisse curviligne. La distance entre deux isomètres d'équations $\mu = Cste$ et $\mu + d\mu = Cste$ est donc la différentielle de l'abscisse curviligne sur l'isomorphe, dS_v . On désigne par i l'angle entre l'isomorphe et l'image de la géodésique. ρ_g est donné par la formule de Schols :

$$\boxed{\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial S_v} \sin i} \quad (67)$$

On peut montrer que, comme ρ_g n'est pas rigoureusement constant entre M_1 et M_2 , il convient de le calculer pour le point $M_{1/3}$ situé sur l'image de la géodésique au tiers de $M_1 M_2$. On a ensuite :

$$\boxed{dV = \frac{1}{2} \frac{S}{\rho_{g^{1/3}}}} \quad (68)$$

Suivant la précision requise, la projection utilisée, la longueur des visées et l'éloignement de l'isomètre centrale, il convient de contrôler si dV peut être négligé.

4 Représentation conique conforme de Lambert

4.1 Définitions et propriétés

On considère la figure 20. Le plan est rapporté au repère Pxy, mais il est aussi commode d'utiliser des coordonnées polaires, de pôle P, l'axe polaire étant opposé à Py. L'angle polaire d'un point M est désigné par γ et est appelé convergence du méridien. Le rayon vecteur de M est noté R . L'ellipsoïde est projeté sur le plan par une représentation conique conforme :

- l'image du pôle p est le point P du plan
- les méridiens (courbes $\lambda = Cste$) sont représentés par des droites concourant en P (courbes $\gamma = Cste$)
- les parallèles ($\varphi = Cste$) sont représentés par des arcs de cercles centrés en P ($R = Cste$)
- la représentation est conforme

Pour exprimer les coordonnées polaires d'un point du plan en fonction des coordonnées géographiques de son correspondant sur l'ellipsoïde, il est clair que γ n'est fonction que de λ et que R n'est fonction que de φ :

$$\gamma = \gamma(\lambda) \quad (69)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = 0 \quad (70)$$

$$R = R(\varphi) \quad (71)$$

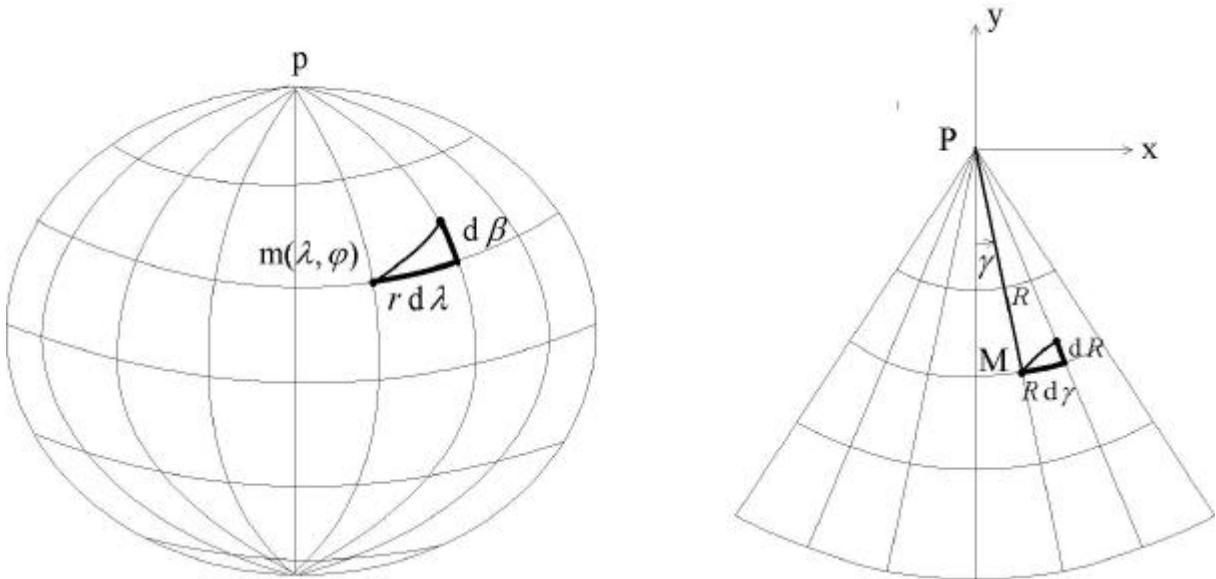


Figure 20. Représentation conique conforme de l'ellipsoïde.

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda} = 0 \quad (72)$$

Pour trouver une condition nécessaire de conformité, on calcule les modules linéaires en un point dans la direction du parallèle (μ_φ) et dans celle du méridien (μ_λ), et on identifie les résultats. On a :

$$\mu_\varphi = \left(\frac{dS}{ds} \right)_{\varphi=Cste} = \frac{R d\gamma}{r d\lambda} \quad (73)$$

Avec $r = v \cos \varphi$ et (36), on parvient à :

$$r = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \cos \varphi \quad (74)$$

et pour le module linéaire le long du parallèle :

$$\mu_\varphi = \frac{R(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi} \frac{d\gamma}{d\lambda} \quad (75)$$

Le long du méridien, un élément de longueur $d\beta$ se projette en un élément de droite de longueur dR , mais les sens de variation de β et R sont inversés :

$$\mu_\lambda = -\frac{dR}{d\beta} \quad (76)$$

On remplace $d\beta$ par (35) :

$$\mu_\lambda = -\frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1 - e^2)} \frac{dR}{d\varphi} \quad (77)$$

L'égalité de μ_φ et μ_λ entraîne l'équation différentielle :

$$\frac{R(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi} \frac{d\gamma}{d\lambda} = - \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}{a(1-e^2)} \frac{dR}{d\varphi} \quad (78)$$

On isole dans le membre de gauche ce qui ne dépend que de la longitude :

$$\frac{d\gamma}{d\lambda} = - \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}{1-e^2} \frac{\cos \varphi}{R} \frac{dR}{d\varphi} \quad (79)$$

Puisque les variables λ et φ sont séparées et indépendantes, chaque membre est égal à une constante n , et on est ramené à un système de deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\lambda} &= n \\ - \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi)}{1-e^2} \frac{\cos \varphi}{R} \frac{dR}{d\varphi} &= n \end{aligned} \quad (80)$$

L'intégration de la première est immédiate :

$$\boxed{\gamma = n(\lambda - \lambda_0)} \quad (81)$$

λ_0 est une constante arbitraire, c'est la longitude du méridien dont l'image est l'axe polaire. (81) montre que l'angle polaire dans le plan est proportionnel à la longitude. La seconde équation du système (80) s'écrit :

$$\frac{dR}{R} = -n \frac{(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \quad (82)$$

On intègre en introduisant la constante arbitraire R_E (rayon de l'image de l'équateur) :

$$\ln \frac{R}{R_E} = -n \int_0^\varphi \frac{(1-e^2) d\varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \quad (83)$$

En prenant l'exponentielle, et en observant que l'intégrale est la latitude isométrique (45), on aboutit à :

$$\boxed{R = R_E \exp(-n\mathcal{L})} \quad (84)$$

4.2 Altérations

Le module linéaire étant indépendant de la direction, on peut se contenter de l'évaluer le long d'un parallèle :

$$\mu = \mu_\varphi = \frac{R(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi} \frac{d\gamma}{d\lambda} \quad (85)$$

En tenant compte de la première équation de (80) et de (84) il vient :

$$\mu = nR_E \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \exp(-n\mathcal{L})}{a \cos \varphi} \quad (86)$$

On peut obtenir une formule très simple en utilisant (73) et (80) :

$$\boxed{\mu = n \frac{R}{r}} \quad (87)$$

où r est le rayon du parallèle et R celui de son image. Clairement, le module linéaire ne dépend que de la latitude, \mathcal{L} étant calculé par (45). On étudie ses variations en le dérivant par rapport à la latitude. Le calcul est laborieux, mais le résultat peut s'exprimer simplement :

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \mu \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} (\sin \varphi - n) \quad (88)$$

Si n est, en valeur absolue, inférieur à 1, il existe une valeur φ_0 de la latitude telle que :

$$\boxed{\sin \varphi_0 = n} \quad (89)$$

Autour de cette valeur de φ , le module linéaire varie peu puisque sa dérivée première est voisine de 0. Inversement, si on veut représenter une zone peu étendue en latitude autour de la valeur φ_0 , il est avantageux de choisir n égal à φ_0 . Le parallèle de latitude φ_0 s'appelle parallèle central. Son image est un cercle de rayon :

$$R_0 = R_E \exp(-n\mathcal{L}_0) = R_E \exp(-\mathcal{L}_0 \sin \varphi_0) \quad (90)$$

avec :

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(\varphi_0) = \ln \tan \left(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1-e \sin \varphi_0}{1+e \sin \varphi_0} \quad (91)$$

Il est utile d'écrire l'expression du rayon de l'image d'un parallèle quelconque en se servant de R_0 plutôt que de R_E :

$$R = R_0 \exp(-n(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)) \quad (92)$$

Le long du parallèle central, le module linéaire vaut, d'après (85) :

$$\mu_0 = \frac{R_0 (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{1/2}}{a} \tan \varphi_0 \quad (93)$$

Au voisinage du parallèle de latitude φ_0 , μ peut être développé au second ordre :

$$\mu = \mu_0 + \left(\frac{d\mu}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} (\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^2 + o((\varphi - \varphi_0)^2) \quad (94)$$

On calcule la dérivée seconde, en partant de (88) qu'on considère comme un produit :

$$\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} = (\sin \varphi - n) \frac{d}{d\varphi} \left(\mu \frac{1-e^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} \right) + \mu \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \quad (95)$$

Pour $\sin \varphi = \sin \varphi_0 = n$, le premier terme est nul et il reste :

$$\left(\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} = \mu_0 \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0} \quad (96)$$

(94) s'écrit en définitive :

$$\boxed{\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0} (\varphi - \varphi_0)^2 \right) + o((\varphi - \varphi_0)^2)} \quad (97)$$

Si on connaît les coordonnées Lambert, on peut éviter le calcul des coordonnées géographiques en développant le module linéaire en fonction de $R - R_0 = \sqrt{x^2 + y^2} - R_0$. L'arc d'ellipse méridienne compté depuis le parallèle central vaut :

$$\beta - \beta_0 \approx \rho_0 (\varphi - \varphi_0) \quad (98)$$

où ρ_0 est le rayon de courbure de la méridienne pour le parallèle central :

$$\rho_0 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_0)^{3/2}} \quad (99)$$

Pour un module linéaire voisin de 1, $R - R_0 \approx \beta - \beta_0$ et $\varphi - \varphi_0 \approx (R - R_0) / \rho_0$ et :

$$\boxed{\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi_0} \left(\frac{R - R_0}{\rho_0} \right)^2 \right) + o((R - R_0)^2)} \quad (100)$$

$$\boxed{\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{1}{2v_0 \rho_0} (R - R_0)^2 \right) + o((R - R_0)^2)} \quad (101)$$

v_0 est la grande normale pour le parallèle central. Sous les latitudes moyennes, dans une bande de 1,6 grades de part et d'autre du parallèle central, la précision des développements (100) et (101) est meilleure que 4×10^{-6} . Pour des calculs de haute précision, on emploiera une formule exacte telle que (87), ou celle-ci tirée de (86) et (90) :

$$\boxed{\mu = R_0 \sin \varphi_0 \frac{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \exp(-(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) \sin \varphi_0)}{a \cos \varphi}} \quad (102)$$

On s'intéresse maintenant à la réduction des mesures d'azimuts et d'angles horizontaux. La figure 19 ci-dessus est à nouveau utilisée, elle représente un arc de géodésique et sa projection. Celle-ci tourne sa concavité vers l'isomètre centrale, qui est ici le parallèle central. L'image de la géodésique présente donc un point d'inflexion sur le parallèle central. On trouve sa courbure par la formule de Schols (67). L'isomorphe est ici le méridien, S_v est R , i est l'azimut Az . De plus, en utilisant (35), (36), (37) et (88) :

$$\frac{\partial \mu}{\partial S_v} = \frac{d \mu}{d R} = \frac{d \mu}{\mu \rho d \varphi} = \frac{1}{\mu} \frac{\sin \varphi - n}{v \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi - n}{nR} \quad (103)$$

On calcule la correction de courbure de l'image de géodésique (dV) par (68) :

$$\boxed{dV = \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi_{1/3} - n}{\mu_{1/3} v_{1/3} \cos \varphi_{1/3}} S \sin Az_{1/3} = \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi_{1/3} - n}{n R_{1/3}} S \sin Az_{1/3}} \quad (104)$$

S est la longueur de la transformée de l'arc de géodésique, pratiquement égale à la distance en projection. L'indice 1/3 désigne une quantité se rapportant au point $M_{1/3}$ situé au tiers de la géodésique (revoir la figure 19).

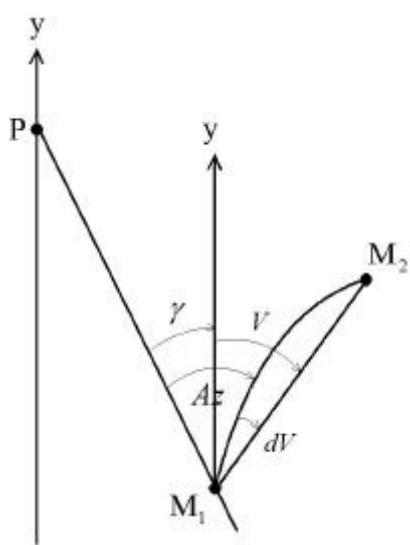


Figure 21. Azimut et gisement en représentation de Lambert.
(Les angles sont comptés dans le sens rétrograde)

Le gisement V de la direction de deux points de l'ellipsoïde est l'angle entre l'axe des y du plan de projection et le segment joignant les images des deux points (figure 21). Pour transformer un azimut en gisement, il faut prendre en compte l'angle $(\vec{M}_1y, \vec{M}_1P) = -\gamma$ et la correction de dV . En comptant les gisements et dV dans le sens rétrograde, on a :

$$V = Az - \gamma + dV \quad (105)$$

4.3 La représentation conforme de Lambert en France

4.3.1 La représentation Lambert associée à la Nouvelle Triangulation Française

Associée au système de référence géodésique réalisé par la Nouvelle Triangulation Française (NTF), la représentation conique conforme de Lambert est largement utilisée en France, et son emploi est obligatoire pour tous les travaux réalisés pour le compte de l'Etat ou des collectivités locales. L'ellipsoïde de la NTF est l'ellipsoïde de Clarke 1880-IGN dont les constantes de définition sont :

$$\begin{aligned} a &= 6378249,2 \text{ m} \\ b &= 6356515 \text{ m} \end{aligned} \quad (106)$$

Le méridien origine est celui de Paris, et les longitudes sont comptées positivement vers l'Est à partir de ce méridien : λ_0 est nul. L'unité angulaire est le grade. Des constantes C_x et $R_0 + C_y$ sont ajoutées aux coordonnées x et y de façon à éviter les valeurs négatives. La France est divisée en 4 zones pour réduire les altérations linéaires. Le tableau 2 donne les constantes de définition relatives à chaque zone. La projection est définie comme étant tangente le long du parallèle de latitude φ_0 , avec un coefficient de réduction d'échelle μ_0 . Le tableau 3 permet le passage des coordonnées géographiques aux coordonnées en projection et réciproquement.

Tableau 2. Constantes de définition des projections de Lambert utilisées en France.

n°	Nom	φ min. grades	φ max. grades	φ_0	μ_0	C_x (m)	C_y (m)
I	Nord	53,50		55	0,999877341	600000	200000
II	Centre	50,50	53,50	52	0,999877420	600000	200000
III	Sud	47,..	50,50	49	0,999877499	600000	200000
IV	Corse	45,90	48,0	46,85	0,999944710	234,358	185861,369

Tableau 3. Formules des projections de Lambert utilisées en France avec la NTF.

Calcul des constantes dérivées	
$e = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \right)^{1/2}$	$n = \sin \varphi_0$
$R_0 = \mu_0 a \left(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0 \right)^{-1/2} \cot \varphi_0$	
Formules directes : $\lambda, \varphi \mapsto X, Y$ $\gamma = n(\lambda - \lambda_0)$ $\mathcal{L} = \ln \tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}$ $R = R_0 \exp(-n(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0))$ $x = R \sin \gamma$ $y = -R \cos \gamma$ $X = C_x + x$ $Y = R_0 + C_y + y$	Formules inverses : $X, Y \mapsto \lambda, \varphi$ $x = X - C_x$ $y = Y - R_0 - C_y$ $\gamma = \arctan \left(-\frac{x}{y} \right)$ $\lambda = \frac{\gamma}{n} + \lambda_0$ $R = \left(x^2 + y^2 \right)^{1/2}$ $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{n} \ln \frac{R}{R_0}$ Formule itérative pour le calcul de la latitude en radians : $\varphi_1 = 2 \arctan(\exp \mathcal{L}) - \pi / 2$ $\varphi_{i+1} = 2 \arctan \left(\left(\frac{1 + e \sin \varphi_i}{1 - e \sin \varphi_i} \right)^{e/2} \exp \mathcal{L} \right) - \pi / 2$ 4 itérations : $\varphi = \varphi_5$

Sur certaines cartes récentes, les formules ci-dessus ont été légèrement transformées pour rendre possible l'identification de la zone d'un point au vu de ses coordonnées : on a ajouté à Y le numéro de zone multiplié par 1000000. Pour certaines applications, par exemple les bases de données géographiques et les systèmes d'informations géographiques, il est nécessaire d'utiliser un seul système de coordonnées planes, donc une seule zone Lambert. La zone Lambert II (Centre) est alors étendue à toute la France, avec une constante C_y égale à 2 200 000 m.

4.3.2 La représentation Lambert 93

Le développement rapide des techniques spatiales de positionnement et plus particulièrement du GPS a rendu le réseau géodésique NTF désuet : bidimensionnel, trop peu précis, il devait être remplacé. Depuis 1993, l'Institut Géographique National (IGN) élabore un nouveau réseau, dénommé Réseau Géodésique Français (RGF), auquel est associée une nouvelle représentation plane conique conforme, appelée Lambert 93. L'ellipsoïde du référentiel

géodésique RGF est GRS80, dont les constantes de définition sont :

$$\begin{aligned} a &= 6378137 \text{ m} \\ J_2 &= 108263 \times 10^{-8} \end{aligned} \quad (107)$$

L'aplatissement et le carré de l'excentricité correspondants sont :

$$\begin{aligned} f &= 0,003\,352\,810\,681\,18 = 1 / 298,257\,222\,101 \\ e^2 &= 0,006\,694\,380\,022\,90 \end{aligned} \quad (108)$$

On définit un point origine C dont les coordonnées géographiques sont :

$$\begin{aligned} \lambda_C &= 3^\circ \text{ est Greenwich} \\ \varphi_C &= 46^\circ 30' \text{ nord} \end{aligned} \quad (109)$$

et dont les coordonnées planes Lambert 93 sont fixées conventionnellement :

$$\begin{aligned} X_C &= 700\,000 \text{ m} \\ Y_C &= 6\,600\,000 \text{ m} \end{aligned} \quad (110)$$

La représentation est sécante suivant deux parallèles automécoïques de latitudes :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 44^\circ \\ \varphi_2 &= 49^\circ \end{aligned} \quad (111)$$

Le module linéaire vaut donc 1 le long de chacun de ces parallèles. Si on désigne par r_1 (respectivement r_2) le rayon du parallèle de latitude φ_1 (respectivement φ_2), et par R_1 (respectivement R_2) le rayon de l'image de ce parallèle, on a, d'après l'équation (87) :

$$1 = n \frac{R_1}{r_1} = n \frac{R_2}{r_2} \quad (112)$$

On appelle φ_0 la latitude du parallèle central (de module linéaire minimal). φ_0 n'est pas la moyenne de φ_1 et φ_2 . Pour un parallèle quelconque, on a, d'après (92) :

$$R = R_0 \exp(-n(\mathcal{L} - \mathcal{L}_0)) \quad (113)$$

On exprime R_1 et R_2 par cette formule. On substitue dans (112), et on utilise la dernière des formules (25) pour calculer r_1 et r_2 . Il vient, après simplification :

$$\frac{\exp(-n(\mathcal{L}_1 - \mathcal{L}_0))}{r_1} = \frac{\exp(-n(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0))}{r_2} \quad (114)$$

soit, en prenant le logarithme :

$$n = \frac{\ln r_1 - \ln r_2}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1} \quad (115)$$

Ceci donne $\varphi_0 = \arcsin(n)$. On calcule ensuite facilement le rayon de l'image d'un parallèle automécoïque en utilisant (112), (25) et (22) :

$$R_1 = \frac{a \cos \varphi_1}{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1)^{1/2}} \quad R_2 = \frac{a \cos \varphi_2}{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi_2)^{1/2}} \quad (116)$$

Les formules de transformation sont alors :

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma &= n(\lambda - \lambda_C) \\ R &= R_1 \exp(-n(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1)) = R_2 \exp(-n(\mathcal{L} - \mathcal{L}_2)) \\ X &= X_C + R \sin \gamma \\ Y &= Y_C + R \cos \gamma\end{aligned}} \quad (117)$$

où l'indice C désigne des quantités relatives au point origine (et non au parallèle central). Le module linéaire peut se calculer en remplaçant r et R dans (87) :

$$\boxed{\mu = n \frac{R_1 \exp(-n(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1))(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi} = n \frac{R_2 \exp(-n(\mathcal{L} - \mathcal{L}_2))(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi}} \quad (118)$$

La correction de courbure de l'image de géodésique se calcule par (104). Il est important de remarquer qu'en Lambert 93, l'altération linéaire et la correction de courbure des images de géodésiques (dV) peuvent atteindre des valeurs considérables, puisqu'il n'y a qu'une zone de projection. L'altération linéaire vaut par exemple 3 m/km à Bonifacio, en Corse. Cela peut conduire à appliquer ces corrections dans des conditions où, en Lambert NTF, elles sont inutiles, ou à préférer des formules exactes alors qu'en Lambert NTF des formules simplifiées ou des développements limités suffisent.

5 Représentation de Mercator

Connue depuis le 16^e siècle, la représentation de Mercator est cylindrique directe conforme. Les méridiens sont donc représentés par des droites parallèles dont l'écartement est proportionnel aux différences de longitudes (figure 22). Les parallèles se projettent suivant des droites parallèles, orthogonales aux images des méridiens. Ces conventions ainsi que la condition de conformité conduisent aux formules :

$$\begin{aligned}X &= C_x + n\lambda \\ Y &= C_y + n\mathcal{L}(\varphi)\end{aligned} \quad (119)$$

dans lesquelles C_x, C_y, n sont des constantes et \mathcal{L} la latitude isométrique (formule(45)). Le module linéaire, indépendant de la direction, peut être calculé le long d'un parallèle :

$$\mu = \mu_\varphi = \frac{dX}{r d\lambda} \quad (120)$$

soit, avec (25), (22) et (119) :

$$\mu = \frac{n(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{a \cos \varphi} \quad (121)$$

On note que le module linéaire tend vers l'infini lorsque la latitude tend vers $\pm\pi/2$. La représentation dilate exagérément les régions polaires. Puisque le module linéaire ne dépend que de la latitude, les isomètres sont les parallèles. En dérivant (121), il vient :

$$\frac{d\mu}{d\varphi} = \frac{n}{a} \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \cos^2 \varphi} \quad (122)$$

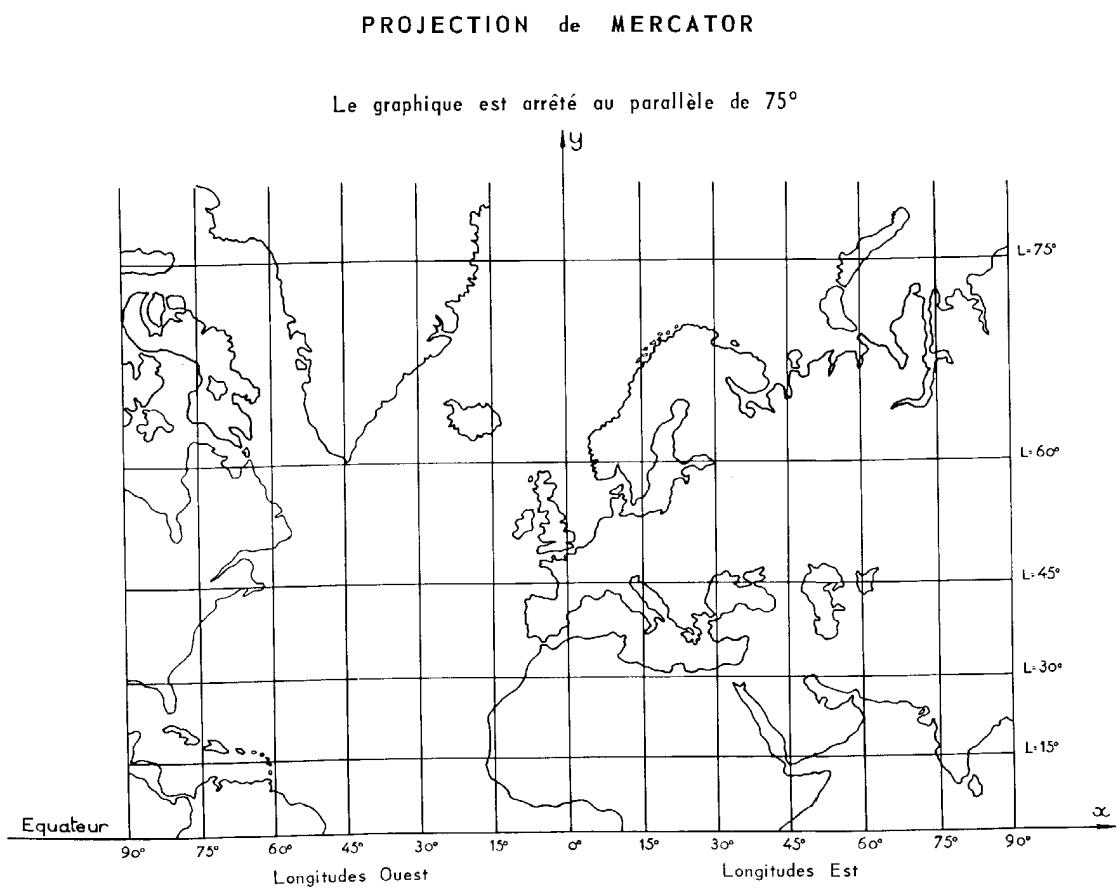


Figure 22. Projection de Mercator.

Cette dérivée s'annule à l'équateur qui est donc l'isomètre centrale. Le module linéaire à l'équateur est :

$$\mu_0 = \frac{n}{a} \quad (123)$$

Si $n = a$, $\mu_0 = 1$, l'équateur est automécoïque, la représentation est dite tangente le long de l'équateur. Si $n < a$, $\mu_0 < 1$ et il existe deux parallèles automécoïques, la représentation est dite sécante.

On appelle loxodromie sur l'ellipsoïde une courbe d'azimut constant. C'est la route suivie par un mobile naviguant à cap constant. Son image en projection de Mercator est évidemment une droite dont l'angle avec les images des méridiens est l'azimut de la loxodromie.

6 Représentation de Mercator transverse

6.1 Coordonnées de Cassini-Soldner sur la sphère

Soit une sphère de centre O dont les pôles nord et sud sont respectivement p et p' (figure 23). On choisit un méridien origine, de longitude λ_0 . Sur l'équateur, on considère les deux points

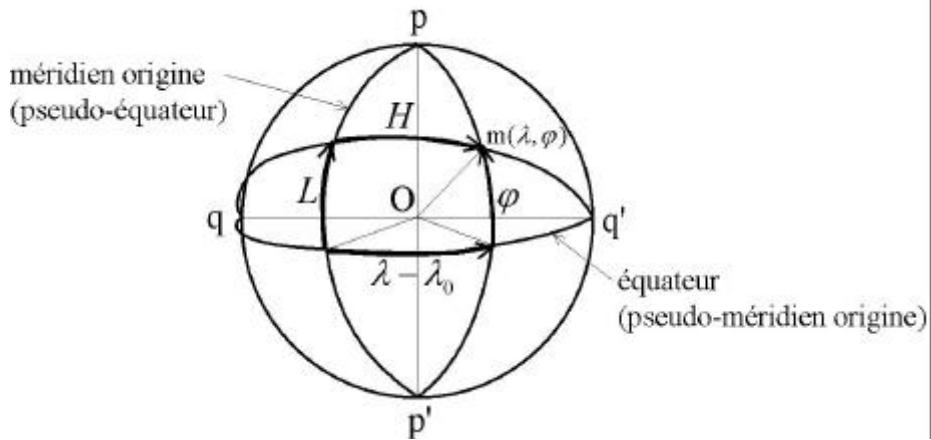


Figure 23. Coordonnées de Cassini-Soldner.

q , de longitude $\lambda_0 + \pi/2$ et q' , de longitude $\lambda_0 - \pi/2$. Ces deux points sont appelés pseudo-pôles. Le méridien origine est le pseudo-équateur, et l'équateur est le pseudo-méridien origine. m est un point de coordonnées sphériques λ et φ . On appelle pseudo-méridien du point m le demi-grand cercle limité par q et q' passant par m . La pseudo longitude de m est l'angle dièdre L du plan du pseudo-méridien, avec le pseudo-méridien origine. La pseudo-latITUDE de m est l'angle H de Om avec le pseudo-équateur. L et H sont les coordonnées de Cassini-Soldner du point m . On passe des coordonnées sphériques à celles de Cassini-Soldner ou inversement par des formules de trigonométrie sphérique (figure 23) :

$$\tan L = \frac{\tan \varphi}{\cos(\lambda - \lambda_0)} \quad (124)$$

$$\sin H = \sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \quad (125)$$

$$\tan(\lambda - \lambda_0) = \frac{\tan H}{\cos L} \quad (126)$$

$$\sin \varphi = \sin L \cos H \quad (127)$$

6.2 Représentation de Mercator transverse de la sphère

Si on applique les formules de la représentation de Mercator aux coordonnées de Cassini-Soldner, on obtient l'aspect transverse de la représentation de Mercator. Pour la sphère, les formules directes résultent du remplacement de λ et φ par L et H dans (119) et de (124) et (125) :

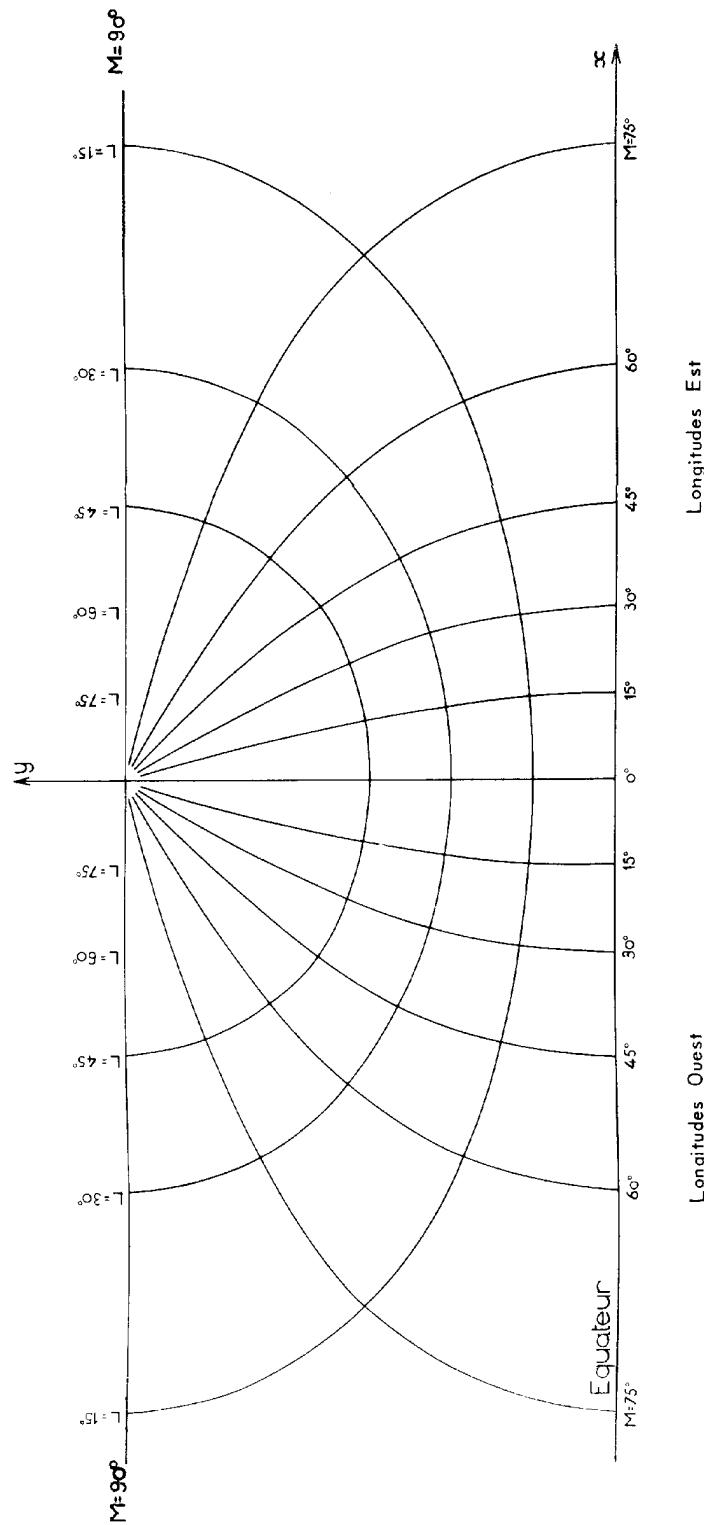
$$X = C_x + n \ln \left(\tan \left(\frac{1}{2} \arcsin (\sin(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi) + \frac{\pi}{4} \right) \right) \quad (128)$$

$$Y = C_y + n \arctan \left(\frac{\tan \varphi}{\cos(\lambda - \lambda_0)} \right)$$

Pour les formules inverses, il est plus simple de conserver comme intermédiaire les pseudo-coordonnées :

PROJECTION de MERCATOR TRANSVERSE ou de GAUSS

La projection est symétrique : 1° par rapport à l'équateur, 2° par rapport au méridien $M = \pm 90^{\circ}$
 Le graphique n'en représente que le quart de la partie utile
 (extension indéfinie vers l'Est et vers l'Ouest)



Echelle le long du méridien central : 1 : 127.420.000

Figure 24. Canevas de la projection de Mercator transverse.

$$L = \frac{Y - C_Y}{n}$$

$$H = 2 \arctan \left(\exp \left(\frac{X - C_X}{n} \right) \right) - \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = \arcsin(\sin L \cos H)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arctan \left(\frac{\tan H}{\cos L} \right)$$

(129)

Le module linéaire se calcule à partir de (121), en y remplaçant φ par H en en faisant $e^2 = 0$:

$$\mu = \frac{n}{a \cos H} = \frac{n}{a(1 - \sin^2 H)^{1/2}} \quad (130)$$

soit, avec (125) :

$$\mu = \frac{n}{a(1 - \sin^2(\lambda - \lambda_0) \cos^2 \varphi)^{1/2}} \quad (131)$$

Les isomètres sont les pseudo-parallèles ($H = \text{constante}$), dont les images sont des droites $X = \text{constante}$. D'après (130), l'isomètre centrale correspond à $H=0$, c'est donc le méridien central.

Les formules de la représentation de Mercator transverse de la sphère sont utilisées dans certains algorithme de calcul de la représentation de Mercator transverse de l'ellipsoïde (voir ci-dessous)

7 Représentation UTM

7.1 Définition

La définition de la représentation de Mercator transverse de l'ellipsoïde sur un plan est moins claire que celle de la sphère sur un plan, parce qu'il n'est pas facile de définir un système de pseudo-coordonnées sur l'ellipsoïde. La représentation de Mercator transverse de l'ellipsoïde peut être définie de la manière suivante :

- la représentation est conforme
- un méridien particulier, dit méridien central, se transforme en l'axe OY
- le module linéaire le long du méridien central est une constante k_0

Pour la représentation de Mercator Transverse Universelle (Universal Transverse Mercator, UTM), employées par de nombreux pays, on prend de plus les conventions suivantes : la constante k_0 vaut 0,9996

- l'abscisse du méridien central est fixée à $X_c = 500000$ m
- dans l'hémisphère sud, les Y sont changés en $10000000 - Y$ m
- la Terre est divisée en 60 fuseaux numérotés de 1 à 60 dans le sens direct, de 6° d'amplitude
- la longitude du méridien central du fuseau n est :

$$\lambda_{0,n} = 6^\circ \times n - 183^\circ \quad (132)$$

Le méridien de Greenwich est donc la limite entre les fuseaux 30 et 31.

Des zones de recouvrements entre fuseaux sont prévues. La représentation UTM n'est en principe pas utilisée dans les régions polaires ($|\varphi| > 80^\circ$).

Ayant été adoptée par l'OTAN, la représentation UTM est d'un emploi très répandu. Les formules du paragraphe suivant doivent être employées avec l'ellipsoïde approprié, suivant les pays ou les réseaux géodésiques concernés. La représentation UTM est particulièrement bien adaptée aux pays étendus en latitude.

7.2 Formulaire

Il existe plusieurs algorithmes de passage des coordonnées géographiques aux coordonnées planes UTM. L'un des plus simples, présenté ci-dessous, utilise une sphère intermédiaire et un produit de trois transformations conformes :

- de l'ellipsoïde, on passe à la sphère de Gauss (qui a localement même courbure totale que l'ellipsoïde)
- on fait une représentation de Mercator transverse de la sphère sur le plan
- il faut terminer par une représentation du plan sur lui-même, car le produit des deux représentations précédentes ne satisfait pas à la condition d'invariance du module linéaire le long du méridien central.

e et e' sont les première et seconde excentricité de l'ellipsoïde (équations (5) et (6)), a son rayon équatorial. λ_0 est la longitude du méridien central du fuseau, k_0 est le module linéaire le long du méridien central (0,9996).

Pour établir les formules directes, on se sert d'une sphère de Gauss, tangente à l'ellipsoïde au point à transformer:

UTM formules directes : $\lambda, \varphi \mapsto X, Y$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$$

$$n = (1 + e'^2 \cos^4 \varphi)^{1/2}$$

$$V = (1 + e'^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}$$

$$X = X_c + \frac{k_0 a (1 + e'^2)^{1/2}}{2V^2} \ln \frac{1 + \frac{V}{n} \cos \varphi \sin(n \Delta\lambda)}{1 - \frac{V}{n} \cos \varphi \sin(n \Delta\lambda)}$$

calculer β , arc de méridien depuis l'équateur, par la formule (33)

$$Y = k_0 \beta + k_0 a \frac{(1 + e'^2)^{1/2}}{V^2} \left(\arctan \frac{\tan \varphi}{V \cos(n \Delta\lambda)} - \arctan \frac{\tan \varphi}{V} \right)$$

si $\varphi < 0$, changer Y en $10000000 - Y$

Les formules inverses sont démontrées en utilisant une sphère de Gauss tangente à l'ellipsoïde au point de latitude ϕ_1 , de longitude λ_0 . Ce point est sur le méridien central du fuseau et son ordonnée est celle du point à transformer.

UTM formules inverses : $X, Y \mapsto \lambda, \varphi$

si $\varphi < 0$, changer Y en $10000000 - Y$

$$\phi_1 = \frac{Y}{k_0 a} \quad n_1 = (1 + e'^2 \cos^4 \phi_1)^{1/2}$$

$$V_1 = (1 + e'^2 \cos^2 \phi_1)^{1/2} \quad \xi = \frac{(X - X_c) V_1^2}{k_0 a (1 + e'^2)^{1/2}}$$

calculer β , arc de méridien depuis l'équateur, par la formule (33) avec $\varphi = \phi_1$

$$\eta = (Y - k_0 \beta) \frac{V_1^2}{k_0 a (1 + e'^2)^{1/2}} + \arctan \frac{\tan \phi_1}{V_1}$$

$$\Delta \lambda = \frac{1}{n_1} \arctan \frac{\tan \left(2 \arctan(\exp \xi) - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \eta} \quad \lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$$

$$\Phi = \arctan(\cos(n_1 \Delta \lambda) \tan \eta) \quad \Phi_1 = \arctan \frac{\tan \phi_1}{V_1}$$

$$\mathcal{L}(\phi_1) = \ln \tan \left(\frac{\phi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{e}{2} \ln \frac{1 - e \sin \phi_1}{1 + e \sin \phi_1}$$

$$L_s(\Phi) = \ln \tan \left(\frac{\Phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \quad L_s(\Phi_1) = \ln \tan \left(\frac{\Phi_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_1) + \frac{1}{n_1} (L_s(\Phi) - L_s(\Phi_1))$$

Formule itérative pour le calcul de la latitude en radians :

$$\varphi_1 = 2 \arctan(\exp \mathcal{L}) - \pi / 2$$

$$\varphi_{i+1} = 2 \arctan \left(\left(\frac{1 + e \sin \varphi_i}{1 - e \sin \varphi_i} \right)^{e/2} \exp \mathcal{L} \right) - \pi / 2$$

4 itérations : $\varphi = \varphi_5$

8 Exercices

Exercice 1

(calculatrice programmable ou ordinateur recommandé pour les questions 2 et 3)

1. Démontrer les relations (5) à (9) du cours.
2. L'ellipsoïde de Clarke 1880 IGN utilisé en France conjointement avec le réseau géodésique NTF est défini par les deux constantes :

$$a = 6378249,2 \text{ m} \quad b = 6356515 \text{ m}$$

Calculer les constantes dérivées suivantes avec 10 chiffres significatifs :
 f , $1/f$, e^2 , e'^2

3. Calculer à 0,01 mètre près la distance sur l'ellipsoïde Clarke 1880 IGN de deux points géodésiques, l'un près de Noyon (longitude 0,736412037 grade est Paris, latitude 55,09259259 grades nord), l'autre à Narbonne (longitude 0,736412037 grade est Paris, latitude 47,98148148 nord).

Exercice 2

1. Donner le rayon de courbure de l'ellipse méridienne à l'équateur (ρ_e) et au pôle (ρ_p) en fonction du demi-grand axe et de l'excentricité de l'ellipsoïde.
2. Exprimer l'aplatissement de l'ellipsoïde en fonction de ρ_e et ρ_p .
3. On mesure la longueur d'un arc de méridien de 1° au pôle et à l'équateur. On trouve respectivement 111 695 m et 110 573 m. En déduire l'aplatissement et les dimensions de l'ellipsoïde: a (demi grand-axe) et b (demi petit-axe)

Exercice 3

On considère une représentation plane directe d'un sphère de rayon unité définie par :

$$X = n \lambda \text{ et } Y = f(\varphi)$$

où : X n'est fonction que de la longitude , n étant une constante

Y n'est fonction que de la latitude , Y prenant la valeur 0 pour $\varphi = 0$.

1. Calculer le module linéaire en un point quelconque et montrer qu'en ce point les directions principales sont le méridien et le parallèle.
2. Déterminer la fonction $f(\varphi)$ et la constante n dans les différents cas suivants :
 - a) la représentation est équivalente directe sécante sur les parallèles $\pm\varphi_0$
 - b) la représentation est équivalente directe tangente
 - c) la représentation est conforme directe sécante sur les parallèles $\pm\varphi_0$
 - d) la représentation est conforme directe tangente.
3. dans le cas 2 a), on veut que l'image de la sphère entière soit contenue dans un rectangle dont la longueur des côtés soit dans le rapport 2 (l'extension en longitude est le double de l'extension en latitude). Montrer que dans ce cas les parallèles automécoïques ($\pm\varphi_0$) sont définis par:

$$\cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Exercice 4

(calculatrice programmable ou ordinateur recommandé pour la question 2)

On rappelle que le Lambert II étendu a les mêmes constantes de définition φ_0, μ_0 que le Lambert II, la même constante en X , mais que la constante Y est 2 200 000 et que son domaine d'application est la France entière.

1. Décrire précisément l'algorithme permettant de passer des coordonnées $X_{A,I}, Y_{A,I}$ en zone I, aux coordonnées $X_{A,II}, Y_{A,II}$ en Lambert II étendu.
2. Mettre en œuvre l'algorithme dans le cas suivant:

$$X_{A,I} = 452725,34 \text{ m} \quad Y_{A,I} = 123678,87 \text{ m}$$

Les constantes de l'ellipsoïde Clarke 1880 IGN sont :

$$a = 6378249,2 \text{ m} \quad b = 6356515 \text{ m}$$

Les constantes de la représentation Lambert figurent dans le cours.

9 Aide à la résolution des exercices

Exercice 1

1. Appliquer les règles élémentaires de l'algèbre.
2. Attention, la précision de 10 chiffres significatifs n'équivaut pas à 10 chiffres après la virgule.

$$f = 0,003407549520 \quad 1/f = 293,4660213 \quad e^2 = 0.006803487646$$

$$e'^2 = 0.006850092164$$

3. Les points sont sur le même méridien. Utiliser deux fois la formule (33) pour calculer la distance de chaque point à l'équateur. Distance : 711411,66 mètres

Exercice 2

$$1. \rho_e = a(1-e^2) \quad \rho_p = a(1-e^2)^{-1/2}$$

$$2. f = 1 - \left(\frac{\rho_e}{\rho_p} \right)^{1/3}$$

3. Des données, on déduit les rayons de courbures de l'ellipse méridienne au pôle et à l'équateur. On calcule ensuite f puis e^2 puis a et b : $a = 6378151$ m, $b = 6356722$ m.

Exercice 3

1. On calcule les longueurs des éléments de méridien et de parallèle qu'on reporte dans la définition du module linéaire, d'où : $\mu^2 = \frac{n^2 d\lambda^2 + f'^2 d\varphi^2}{\cos^2 \varphi d\lambda^2 + d\varphi^2}$

Il faut ensuite étudier les variations du module linéaire ou de son carré avec l'azimut :

$$\tan Az = \frac{\cos \varphi d\lambda}{d\varphi} \quad \text{et on parvient à démontrer: } \mu^2 = \frac{n^2 \sin^2 Az + \cos^2 \varphi f'^2 \cos^2 Az}{\cos^2 \varphi}.$$

On dérive μ^2 par rapport à l'azimut et on annule la dérivée pour obtenir les directions principales.

2. a) La représentation est équivalente si $f(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{n}$. Il faut de plus $\mu = 1$ pour $\varphi = \pm \varphi_0$

ce qui donne : $f(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0}$. On en déduit X et Y .

b) Même chose qu'en a), avec $\varphi_0 = 0$

c) Les modules linéaires principaux doivent être égaux, $f'(\varphi) = \frac{n}{\cos \varphi}$ et $f(\varphi) = n \mathcal{L}(\varphi)$.

La condition $\mu = 1$ pour $\varphi = \pm \varphi_0$ entraîne $n = \cos \varphi_0$.

d) $\varphi_0 = 0$ et $n = 1$

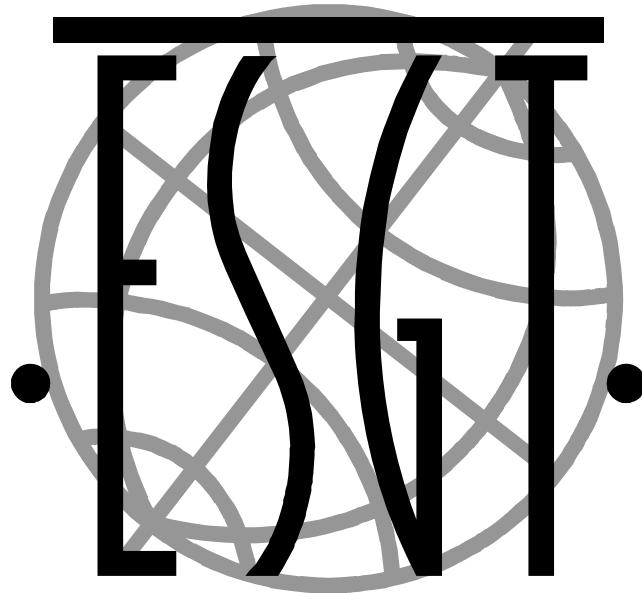
3. Pour obtenir l'image de la sphère entière, il faut faire varier λ de $-\pi$ à π radians et φ de $-\pi/2$ à $\pi/2$ radians. On en déduit les variations correspondantes de X et Y en appliquant le résultat du 2 a). D'où $\cos \varphi_0$.

Exercice 4

1. On passe des coordonnées Lambert I aux coordonnées géographiques, puis aux Lambert II étendu.
2. $X_{A,II} = 452644,679 \text{ m}$, $Y_{A,II} = 2423830,582 \text{ m}$

Table des matières

1	INTRODUCTION	1
2	GÉOMÉTRIE DE L'ELLIPSE ET DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION	1
2.1	DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSOÏDE	1
2.2	NORMALE À L'ELLIPSOÏDE , LATITUDES.....	3
2.3	ABSCISSE CURVILIGNE ET ARC D'ELLIPSE MÉRIDIENNE.....	5
2.4	COURBURES	6
2.5	ABSCISSE CURVILIGNE ET COORDONNÉES SYMÉTRIQUES SUR L'ELLIPSOÏDE	8
2.6	LIGNES GÉODÉSIQUES DE L'ELLIPSOÏDE	9
3	REPRÉSENTATIONS PLANES DE L'ELLIPSOÏDE	10
3.1	DÉFINITIONS.....	10
3.2	ALTÉRATIONS, INDICATRICE DE TISSOT	12
3.3	CLASSIFICATION DES REPRÉSENTATIONS.....	14
3.3.1	<i>Classification par les déformations.....</i>	14
3.3.2	<i>Classification par la forme du canevas</i>	14
3.3.3	<i>Classification par l'aspect.....</i>	15
3.3.4	<i>Représentation tangente, sécante.....</i>	17
3.4	REPRÉSENTATIONS CONFORMES	17
4	REPRÉSENTATION CONIQUE CONFORME DE LAMBERT.....	20
4.1	DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS.....	20
4.2	ALTÉRATIONS.....	22
4.3	LA REPRÉSENTATION CONFORME DE LAMBERT EN FRANCE	25
4.3.1	<i>La représentation Lambert associée à la Nouvelle Triangulation Française.....</i>	25
4.3.2	<i>La représentation Lambert 93</i>	26
5	REPRÉSENTATION DE MERCATOR.....	28
6	REPRÉSENTATION DE MERCATOR TRANSVERSE	29
6.1	COORDONNÉES DE CASSINI-SOLDNER SUR LA SPHÈRE	29
6.2	REPRÉSENTATION DE MERCATOR TRANSVERSE DE LA SPHÈRE	30
7	REPRÉSENTATION UTM.....	32
7.1	DÉFINITION	32
7.2	FORMULAIRE	33
8	EXERCICES.....	35
9	AIDE À LA RÉSOLUTION DES EXERCICES.....	37



9.1.1.1.1.1

ECOLE SUPERIEURE DES GEOMETRES ET TOPOGRAPHES

1, Boulevard Pythagore - 72000 LE MANS

Téléphone : 02.43.43.31.00 Télécopie : 02.43.43.31.02

<http://www.esgt.cnam.fr>



COURS DE GÉODÉSIE

Chapitre 4 Géodésie physique

ES1

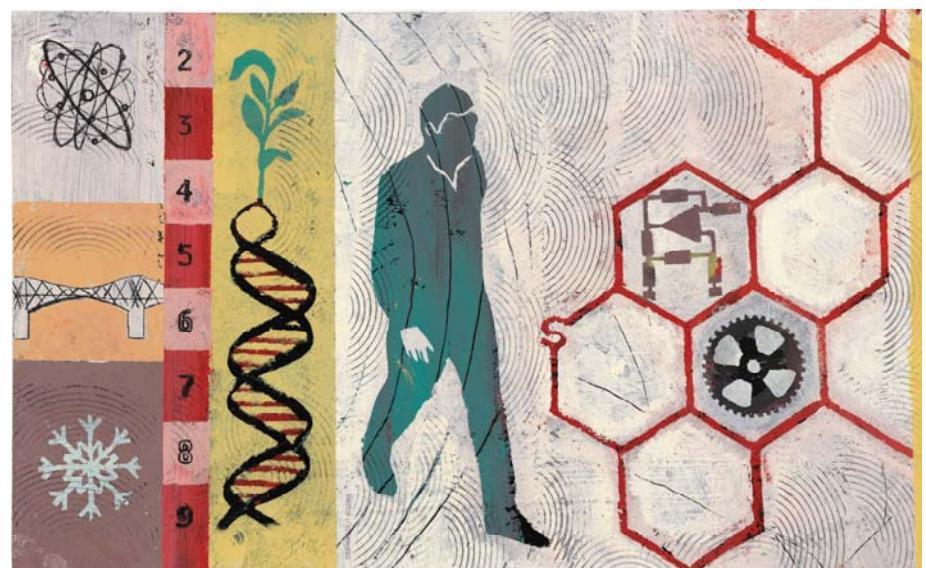


Table des matières

1	INTRODUCTION	3
2	CHAMP DE PESANTEUR, GEOÏDE	3
2.1	GRAVITATION.....	3
2.2	FORCE CENTRIFUGE.....	5
2.3	PESANTEUR	6
2.4	MESURE DE L'INTENSITE DE LA PESANTEUR.....	8
2.5	POTENTIEL DE PESANTEUR	11
3	CHAMP DE PESANTEUR NORMAL	13
3.1	POTENTIEL NORMAL	13
3.2	PESANTEUR NORMALE.....	14
3.3	SYSTEME DE REFERENCE GRS 80.....	15
3.4	THEOREME DE CLAIRAUT	15
4	CHAMP PERTURBATEUR	16
4.1	POTENTIEL PERTURBATEUR.....	16
4.2	FORMULES FONDAMENTALES	19
5	ALTITUDES.....	21
5.1	DEFINITION.....	21
5.2	TYPES D'ALTITUDES.....	21
5.3	SYSTEMES DE REFERENCES D'ALTITUDES	25
6	TECHNIQUES DE DETERMINATION DU CHAMP ET DU GEOÏDE	26
6.1	TECHNIQUES SPATIALES	26
6.2	TECHNIQUES TERRESTRES	27
6.3	TECHNIQUES MIXTES : NIVELLEMENT ET TECHNIQUES SPATIALES	28
6.4	MODELES DE CHAMP ET DE GEOÏDE	28
7	EXERCICES.....	32

1 Introduction

La géodésie physique étudie les champs de gravitation et de pesanteur terrestres. Cette partie de la géodésie trouve des applications dans de nombreux domaines : détermination de la forme de la Terre, mouvements des satellites artificiels, géoïde, altitudes et références altimétriques, gravimétrie, etc. Son étude nécessite des bases importantes :

en mathématiques :

- dérivées d'une fonction de plusieurs variables
- intégrales curvilignes
- intégrales multiples
- champs de vecteur, gradient, potentiel

en physique :

- attraction universelle
- force centrifuge
- interférométrie

2 Champ de pesanteur, géoïde

Un point matériel de l'environnement terrestre est soumis à l'attraction universelle exercée par la Terre, à la force de marée due au Soleil et à la Lune, et, si le point est lié à la Terre, à la force centrifuge créée par la rotation terrestre. La force de marée est faible. Elle comporte une partie constante vis à vis du temps mais dépendant de la latitude, et une partie périodique de valeur moyenne nulle. On la négligera donc dans l'exposé général suivant même si, localement, la marée peut induire des phénomènes significatifs du point de vue de la géodésie (marée terrestre, variation de la charge océanique). On étudie donc ci dessous la gravitation et la force centrifuge ainsi que leur résultante, la pesanteur.

2.1 Gravitation

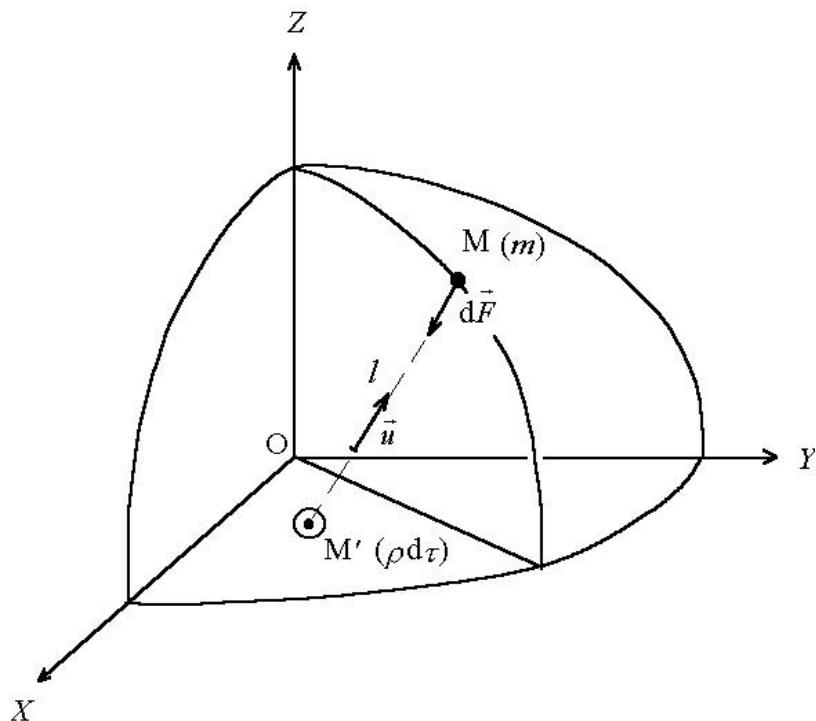


Figure 1: Loi de Newton.

Soit M un point de masse m (figure 1). D'après la loi de Newton, un point M' intérieur à la Terre crée en M la force d'attraction gravitationnelle:

$$d\vec{F} = -\frac{G m \rho d\tau}{l^2} \vec{u} \quad (1)$$

où G est la constante de gravitation universelle, ρ la masse volumique en M', $d\tau$ l'élément de volume, l la distance séparant M de M', \vec{u} le vecteur unitaire de la direction M'M. L'accélération de gravitation universelle exercée par la Terre entière sur M est donc:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \iiint_T \frac{\rho d\tau}{l^2} \vec{u} \quad (2)$$

Le domaine d'intégration T est la Terre entière.

Il existe une fonction V appelée potentiel de gravitation dont $\vec{\gamma}$ est le gradient:

$$\vec{\gamma} = \vec{\text{grad}} V \quad (3)$$

c'est à dire que les composantes de $\vec{\gamma}$ dans un repère cartésien orthonormé quelconque OXYZ sont les dérivées partielles de V par rapport aux coordonnées :

$$\vec{\gamma} = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial Z} \end{vmatrix} \quad \square(4)$$

On dit que $\vec{\gamma}$ dérive du potentiel V . Le signe du potentiel adopté en géodésie n'est pas celui généralement choisi en physique. Le potentiel de gravitation est conventionnellement nul à l'infini:

$$V(\infty) = 0 \quad (5)$$

Dans le vide ou, approximativement, dans l'atmosphère, le potentiel de gravitation est une fonction harmonique qui vérifie l'équation de Laplace:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0 \quad (6)$$

et peut être développé en harmoniques sphériques : dans un repère géocentrique, dont le sommet O coïncide avec le centre des masses de la Terre, le potentiel de gravitation peut être écrit:

$$V = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\cos \theta) (J_{n,m} \cos m\lambda + K_{n,m} \sin m\lambda) \right) \quad (7)$$

M est la masse de la Terre, a est une constante qu'on prend égale au rayon équatorial de l'ellipsoïde de référence, r est le rayon vecteur (figure 2), θ est le complément de la latitude sphérique, λ est la longitude géographique géodésique. Les $J_{n,m}$ et $K_{n,m}$ sont les coefficients du développement, ils sont caractéristiques de la répartition des masses à l'intérieur de la Terre. Dans l'hypothèse d'une Terre indéformable et le repère étant fixé, ce sont des constantes. Pour un repère non géocentrique, c'est à dire pour lequel le sommet O n'est pas le centre des masses de la Terre, les coefficients de degré 1 ($n = 1$) ne sont pas nuls. Les $P_{n,m}$

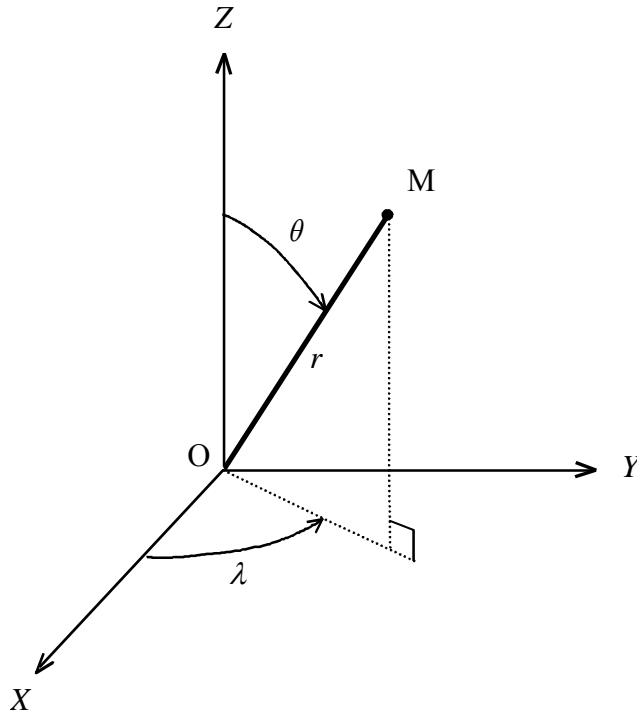


Figure 2: Repère terrestre et coordonnées sphériques.

sont les fonctions de Legendre de première espèce dont voici quelques exemples :

$$\begin{aligned}
 P_{0,0}(\cos \theta) &= 1 & = & 1 \\
 P_{1,0}(\cos \theta) &= \cos \theta & = & \cos \theta \\
 P_{2,0}(\cos \theta) &= \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} & = & \frac{3}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{4} \\
 P_{3,0}(\cos \theta) &= \frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta & = & \frac{5}{8} \cos 3\theta + \frac{3}{8} \cos \theta
 \end{aligned} \tag{8}$$

A l'intérieur de la Terre, la masse volumique n'est pas nulle, le potentiel vérifie l'équation de Poisson:

$$\Delta V = -4\pi G\rho \tag{9}$$

2.2 Force centrifuge

On suppose que la Terre tourne d'un mouvement uniforme autour de l'axe \overrightarrow{OZ} à la vitesse angulaire ω (figure 3). Un point matériel M, de masse m , lié à la Terre et tournant donc avec elle est soumis à la force centrifuge:

$$\vec{F}_r = m \omega^2 \overrightarrow{HM} \tag{10}$$

où H est la projection de M sur l'axe \overrightarrow{OZ} .

L'accélération centrifuge est:

$$\vec{\gamma}_r = \omega^2 \overrightarrow{HM} \tag{11}$$

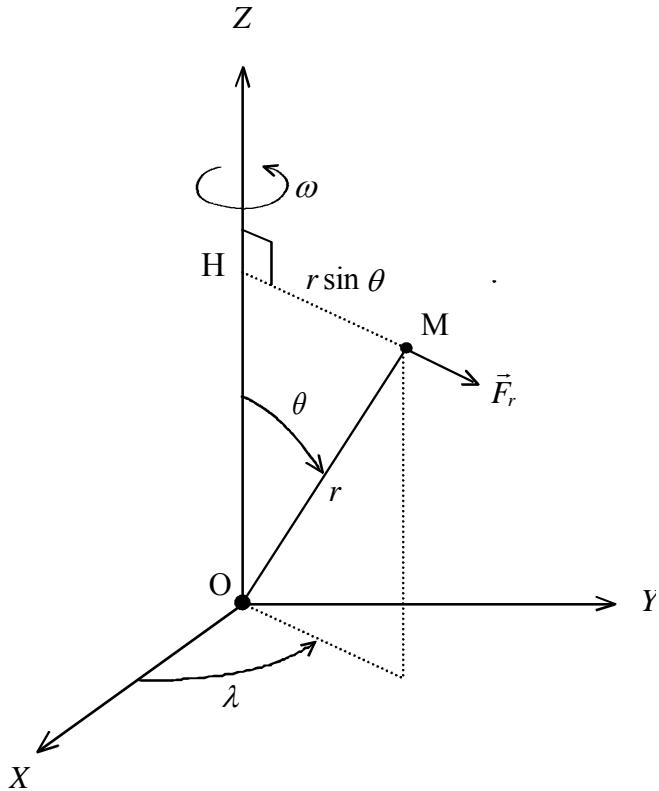


Figure 3: Force centrifuge.

et son module vaut:

$$\gamma_r = \omega^2 r \sin \theta \quad (12)$$

Cette accélération dérive du potentiel centrifuge:

$$V_r = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (13)$$

Au niveau de la mer et à l'équateur, l'accélération centrifuge vaut $0,033 \text{ ms}^{-2}$. Elle est nulle aux pôles. En un lieu donné, en raison du mouvement du pôle, des variations de la vitesse de rotation de la Terre et des déformations de la Terre, l'accélération centrifuge n'est pas rigoureusement constante. Ses variations ne sont accessibles qu'aux mesures de très haute précision.

2.3 Pesanteur

Si on néglige la marée, la force de pesanteur (ou poids) est la résultante de l'attraction universelle et de la force centrifuge. En désignant par \vec{g} l'accélération de la pesanteur, il s'ensuit:

$$\vec{g} = \vec{\gamma} + \vec{\gamma}_r \quad (14)$$

La direction de \vec{g} est la verticale. Elle est couramment réalisée par des dispositifs tels que fils à plomb, pendules, nivelles. Dans un repère géodésique, la direction de \vec{g} est caractérisée par les coordonnées géographiques astronomiques, la longitude λ_a et la latitude φ_a (figure 4). Des méthodes d'astronomie géodésique peuvent déterminer la verticale.

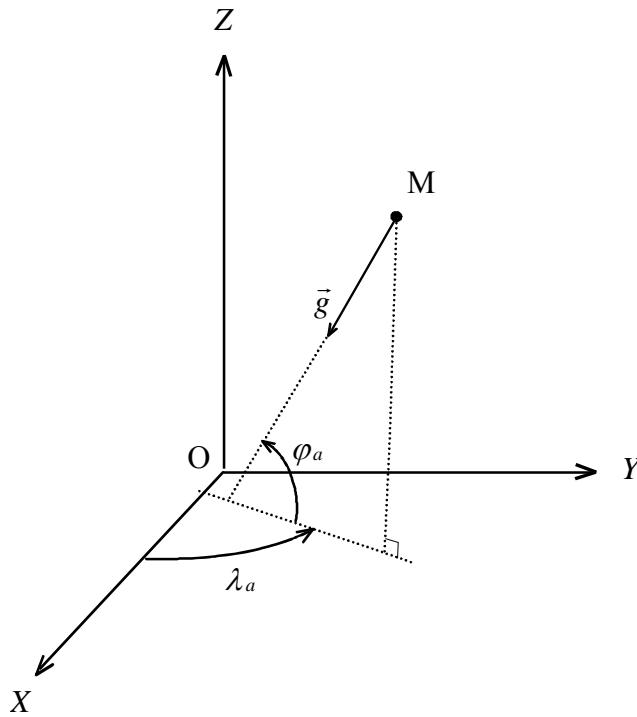


Figure 4: Coordonnées géographiques astronomiques.

Dans le Système International, l'unité d'accélération est le mètre par seconde carrées (ms^{-2}). En géodésie et en gravimétrie, on se sert encore du gal et du milligal (1 gal = 1 cm s^{-2}). Le module de \vec{g} , est noté g . Au niveau de la mer, la pesanteur varie de $9,78 \text{ ms}^{-2}$ à l'équateur à $9,83 \text{ ms}^{-2}$ aux pôles. Elle diminue avec l'altitude en suivant l'équation de Bruns :

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2 \quad (15)$$

J est la courbure moyenne de la surface équipotentielle. L'hétérogénéité de la terre et le relief sont des sources importantes de variation de la pesanteur. Par rapport à un modèle standard comme la pesanteur normale, définie ci-dessous, ils produisent des "anomalies" d'écart-type $0,424 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$, atteignant $3,5 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$. Les tableaux 1 et 2 indiquent les valeurs maximales des variations temporelles de la pesanteur induites par certains phénomènes.

Tableau 1: Variation de la pesanteur induites par des phénomènes à caractère périodique.

Phénomène	Variation maximale de la pesanteur induite
Marée (Lune+Soleil, Terre élastique)	$2,81 \mu\text{m s}^{-2}$
Charge océanique	$0,2 \mu\text{m s}^{-2}$
Mouvement du pôle (latitude 45°)	$0,082 \mu\text{m s}^{-2}$
Variations saisonnières de la vitesse de rotation de la Terre	$0,007 \mu\text{m s}^{-2}$

Tableau 2: Principales variations de la pesanteur induites par des phénomènes non périodiques.

Phénomène	Variation maximale de la pesanteur induite
Séismes	$10 \text{ } \mu\text{m s}^{-2}$
Volcanisme	$10 \text{ } \mu\text{m s}^{-2}$
Micro séismes	$1 \text{ } \mu\text{m s}^{-2}$
Extractions (pétrole, eau)	$1 \text{ } \mu\text{m s}^{-2}$ par décennie
Rebond postglaciaire	$0,5 \text{ } \mu\text{m s}^{-2}$ par siècle
Variation des nappes aquifères	$0,1 \text{ } \mu\text{m s}^{-2}$

2.4 Mesure de l'intensité de la pesanteur

On distingue les mesures absolues de l'intensité de la pesanteur, effectuées au moyen d'appareils réalisant les unités fondamentales de longueur et de temps, et les mesures relatives (ou différentielles), qui permettent de déterminer des différences de pesanteurs au moyen d'appareils étalonnés sur des points où l'intensité de la pesanteur est connue.

2.4.1 Mesures absolues

Autrefois réalisées à l'aide de pendules réversibles, ces mesures sont maintenant exécutées grâce à des gravimètres à chute libre et interféromètre, dont la figure 5 illustre le principe. Une source laser monochromatique de longueur d'onde bien connue reproduit l'étalon de longueur. Des miroirs et deux coins de cubes en verre constituent un interféromètre de Michelson. L'un des coins de cubes est fixe, l'autre est en chute libre dans le vide. Chaque coin de cube réfléchit le rayon lumineux qui l'atteint, et les rayons sont combinés, formant des franges d'interférence. En raison du mouvement du coin de cube mobile, les franges d'interférence défilent, produisant une variation de l'intensité lumineuse enregistrée par un photo-détecteur et convertie en signal électrique. Après soustraction de sa valeur moyenne, le signal déclenche un détecteur de zéro. Deux positions successives du coin de cube correspondant à deux zéros (avec même sens de variation du signal) sont séparées par une demi-longueur d'onde de la source laser (une fraction de micromètre). Une base de temps utilisant une horloge atomique permet de dater très précisément les passages du coin de cube à ces positions particulières. Les observations sont donc des couples (t_i, z_i) où i est un indice d'observation, t l'instant de mesure et z la coordonnée verticale du prisme mobile par rapport à une référence liée à l'appareil. L'équation différentielle du mouvement du prisme est, avec l'axe des z dirigé vers le bas:

$$\ddot{z} = g_0 + g_z(z - z_0) \quad (16)$$

g_0 et g_z sont respectivement les valeurs de la pesanteur et de son gradient vertical au niveau de référence $z = z_0$. La solution générale est:

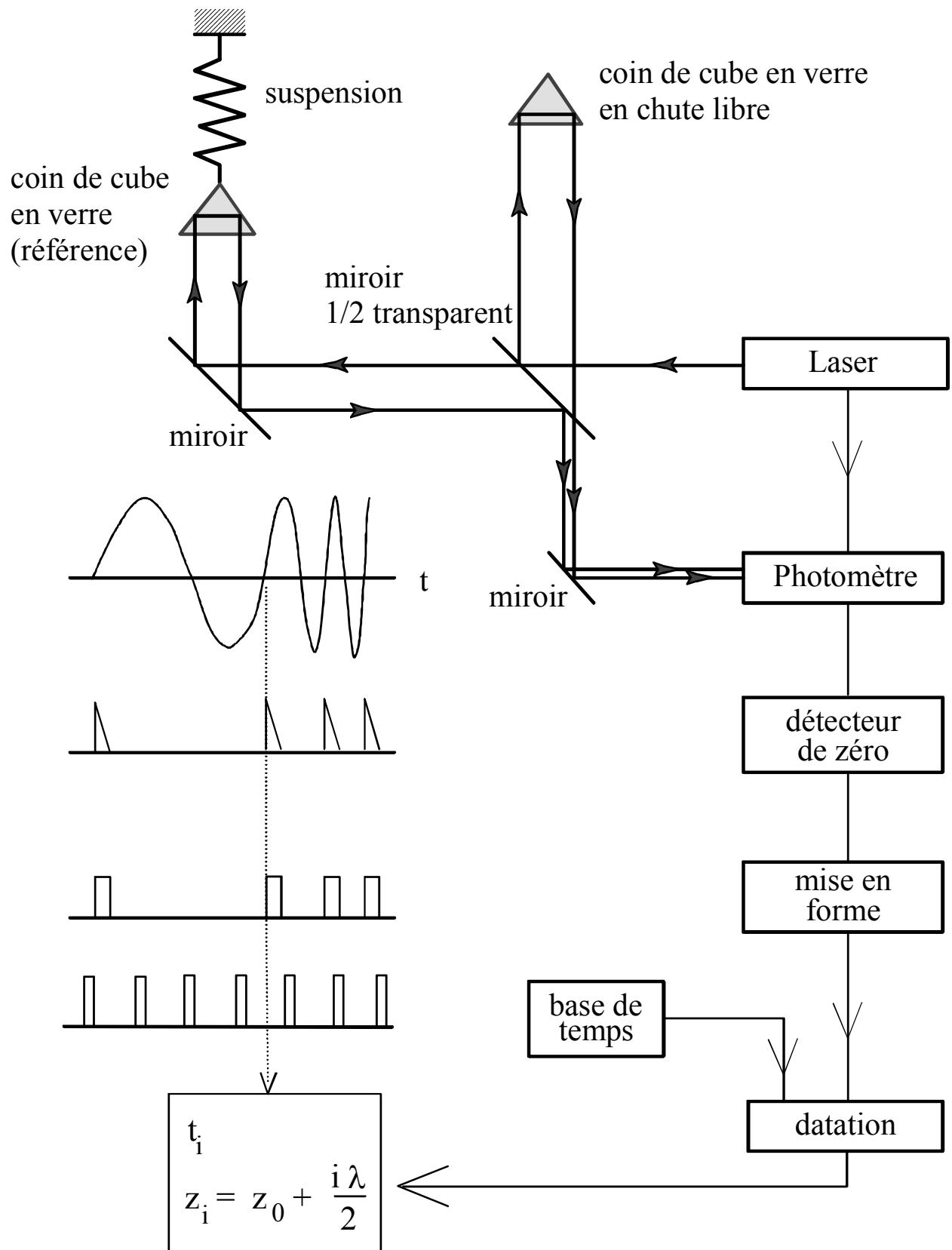


Figure 5: Principe d'un gravimètre absolu à chute libre et interféromètre.

$$z = z_0 + \frac{g_0}{g_z} \left(\cosh(t\sqrt{g_z}) - 1 \right) + \frac{v_0}{\sqrt{g_z}} \sinh(t\sqrt{g_z}) \quad (17)$$

où t est le temps et v_0 la vitesse initiale. Chaque lancer du prisme donne lieu à un ensemble d'équations d'observation, dans lesquelles les observables sont les couples (t_i, z_i) , les inconnues sont g_0, v_0, z_0 , le résidu est v_i :

$$z_0 + \frac{g_0}{g_z} \left(\cosh(t_i\sqrt{g_z}) - 1 \right) + \frac{v_0}{\sqrt{g_z}} \sinh(t_i\sqrt{g_z}) - z_i = v_i \quad (18)$$

Ces équations sont linéarisées puis ajustées par la méthode des moindres carrés. Le gradient vertical g_z est généralement déterminé séparément par des mesures relatives. Dans les appareils les plus récents (FG5, Joint Institute for Laboratory Astrophysics et Micro-g solutions Inc.), le prisme mobile parcourt 0,20 m en chute libre, et 130 à 200 couples de données peuvent être collectés par lancer. Après correction des erreurs systématiques, une exactitude de quelques dizaines de nms^{-2} (quelques μGal) et une précision de 10 nms^{-2} (1 μGal) peuvent être atteintes en cumulant un grand nombre de lancers.

2.4.2 Mesures relatives

Le principe des gravimètres relatifs à ressorts est présenté sur la figure 6. Un bras mobile autour d'un axe horizontal porte une masse d'épreuve m . Le bras est en équilibre sous l'influence des moments des forces de rappel exercées par des ressorts et du poids de la masse. Une vis de mesure graduée permet de régler la tension de l'un des ressorts, de telle sorte que l'équipage mobile retrouve toujours la même position d'équilibre. Il s'agit donc d'appareils de zéro. Les instruments peuvent être astatisés, c'est à dire conçus de telle manière que, lors de la mesure, l'équilibre du bras soit indifférent. De tels instruments sont très sensibles. Sur les appareils modernes, la position du bras de mesure est contrôlée par un dispositif comportant un condensateur double à air, dont la capacité varie en fonction de la position du bras.

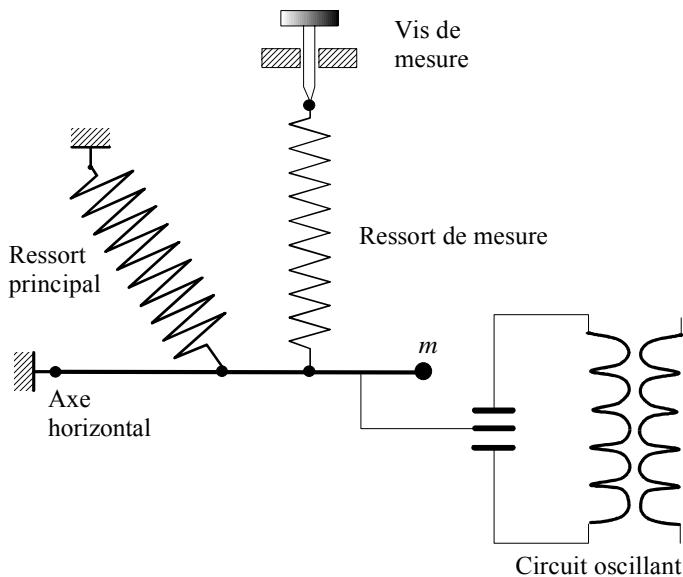


Figure 6: Principe des gravimètres à ressort.

Le condensateur est placé dans un circuit électronique oscillant, dont la phase est comparée à celle d'un oscillateur de référence. La mesure consiste à annuler la différence de phase, soit en agissant sur la vis de mesure, soit en créant une force électrostatique dans le condensateur. Les gravimètres à ressort sont des appareils fragiles, sujets à dérive. Ils doivent être fréquemment étalonnés sur des points où la pesanteur est connue. La précision atteint $0,1 \mu\text{ms}^{-2}$ ($10 \mu\text{Gal}$) et même $0,02 \mu\text{m s}^{-2}$.

Dans les gravimètres supraconducteurs (ou cryogéniques), une sphère en alliage supraconducteur est maintenue en équilibre (lévitation) sous l'action de son poids et d'un champ magnétique créé par des bobines à la température de liquéfaction de l'hélium ($4,2 \text{ K}$) (figure 7). La position de la sphère est repérée par les variations de capacité du condensateur double qu'elle forme avec des armatures intégrées dans les bobines. Ces variations commandent le courant qui parcourt les bobines, maintenant la sphère à l'équilibre et procurant le signal de mesure. Les gravimètres supraconducteurs sont sujets à une dérive importante et doivent être étalonnés périodiquement. Le bruit instrumental est de l'ordre de $1 \text{ à } 2 \text{ nms}^{-2}$ pour des périodes d'observations de quelques jours. Ces appareils sont peu transportables mais d'une grande précision, ce qui les destinent plus particulièrement à l'étude des variations temporelles de la pesanteur.

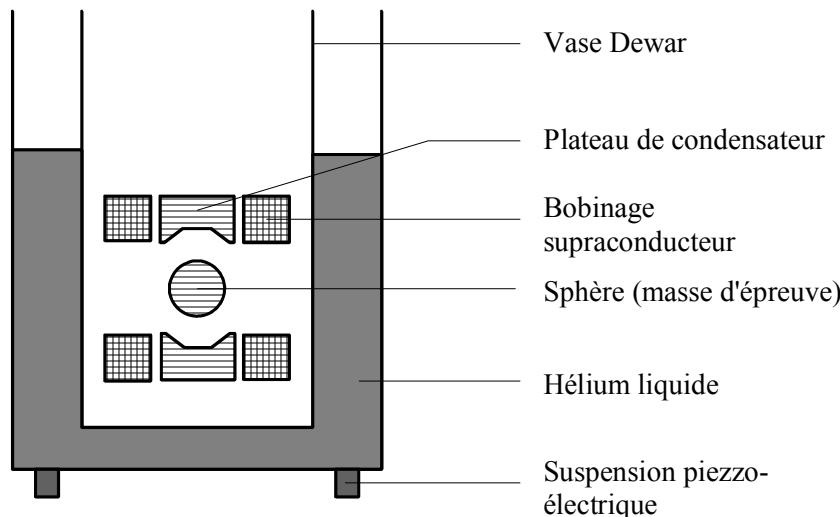


Figure 7: Schéma de principe d'un gravimètre supraconducteur. La partie électronique n'est pas représentée.

2.5 Potentiel de pesanteur

Le potentiel de pesanteur est la fonction $W(M)$, dont \vec{g} est le gradient:

$$\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}} W \quad (19)$$

ce qui s'écrit aussi:

$$\vec{g} = \begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial X} \\ \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \frac{\partial W}{\partial Z} \end{vmatrix} \quad \square(20) \quad (20)$$

On a:

$$W = V + V_r \quad (21)$$

La différence de potentiel entre deux points P_0 et P_N est égale au travail fourni pour déplacer une masse unité d'un point à l'autre en suivant un chemin continu:

$$W(P_N) - W(P_0) = \int_{P_0 P_N} \vec{g} \cdot d\vec{l} = - \int_{P_0 P_N} g \cdot dh' \quad (22)$$

équation dans laquelle $d\vec{l}$ est le vecteur déplacement et dh' la composante verticale de $d\vec{l}$. Les opérations de nivellation (figure 8), associées à la gravimétrie, permettent la détermination des différences de potentiel, tout au moins sur les continents, en discréétisant l'intégrale (23):

$$W(M) - W(A) = - \sum_{k=0}^{N-1} g \cdot \delta h'_k \quad (23)$$

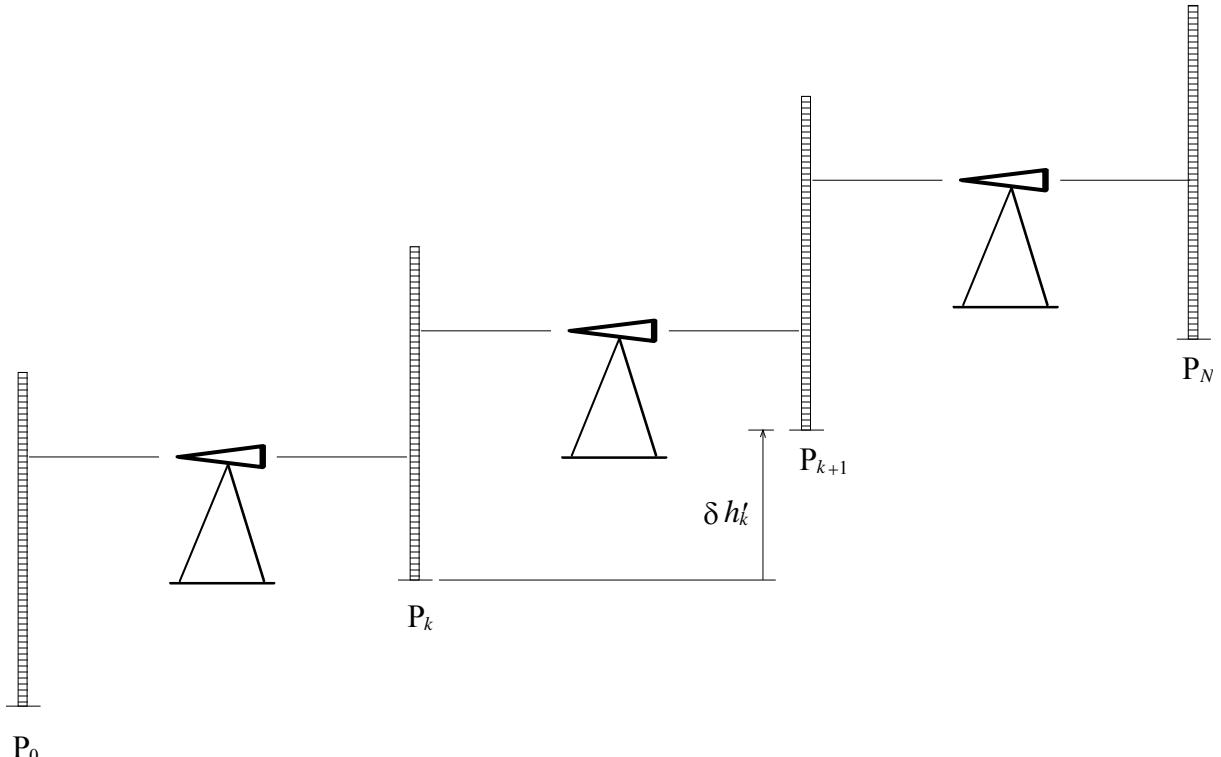


Figure 8: Nivellement.

Le potentiel de pesanteur peut aussi être développé en harmoniques sphériques. En combinant les équations (7), (13) et (21) on obtient:

$$W = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{n,m} (\cos \theta) (J_{n,m} \cos m\lambda + K_{n,m} \sin m\lambda) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (24)$$

2.5.1 Surface équipotentielle, ligne de force

L'ensemble des points tels que leur potentiel prenne une valeur donnée est une surface équipotentielle. Une portion d'équipotentielle peut être matérialisée par la surface d'un liquide en équilibre sous la seule action de son poids. Une courbe qui, en chacun de ses points, est

orthogonale aux surfaces équipotentielles est une ligne de force. Ses tangentes sont verticales (figure 9).

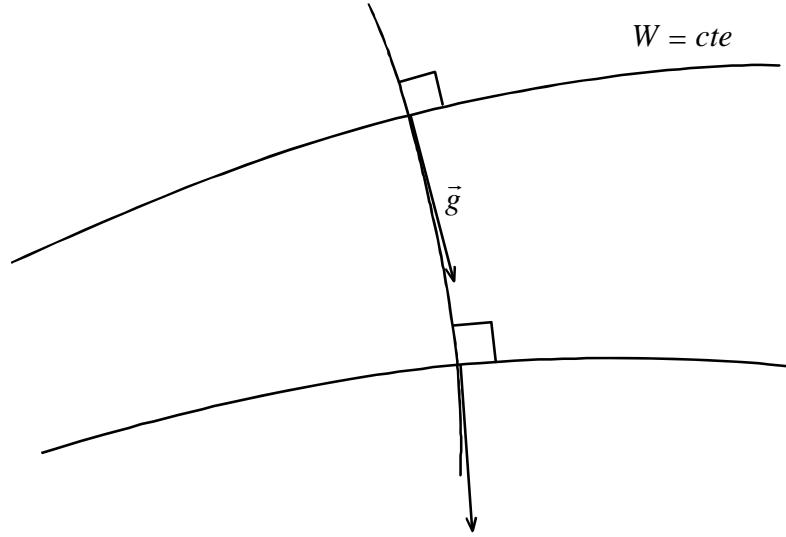


Figure 9: Pesanteur, surface équipotentielle et ligne de force.

2.5.2 Géoïde

Le géoïde est la surface équipotentielle du champ de pesanteur coïncidant au mieux avec le niveau moyen des océans. Un géoïde peut être conventionnellement défini:

- soit par la valeur de son potentiel W_0 . On a alors, pour tout point du géoïde:

$$W = W_0 \quad (25)$$

- soit par le fait qu'il contient un point A dont le potentiel $W(A)$ n'est pas nécessairement connu. Un tel point peut être le niveau moyen enregistré par un marégraphe.

3 Champ de pesanteur normal

Le champ de pesanteur normal est un modèle mathématique du champ de pesanteur réel, au même titre que l'ellipsoïde de révolution est un modèle géométrique de la Terre. D'ailleurs, comme on le verra, il existe une parenté évidente entre les deux modèles.

3.1 Potentiel normal

Le potentiel normal est une fonction $U(M)$, modèle du potentiel de pesanteur, telle que:

- l'une de ses surfaces équipotentielles est un ellipsoïde géodésique \mathcal{E} , généralement choisi géocentrique, tournant autour de son axe de révolution à la même vitesse angulaire que la Terre
- le potentiel normal sur l'ellipsoïde est égal au potentiel réel sur le géoïde:

$$M \in \mathcal{E} \Rightarrow U(M) = W_0 \quad (26)$$

- La masse de l'ellipsoïde est égale à la masse M de la Terre, y compris l'atmosphère. Cela revient à imposer qu'à l'infini, le potentiel normal se comporte comme le potentiel réel et sa partie gravitationnelle est équivalente à GM / r :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \left(U - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \right) = GM \quad (27)$$

Il existe une expression exacte du potentiel normal de pesanteur. En raison de sa complexité, elle ne sera pas développée ici. On peut aussi le développer en harmoniques sphériques:

$$U = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos \theta) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (28)$$

Les coefficients J_{2n} s'expriment en fonction de la constante géocentrique de gravitation, des caractéristiques de l'ellipsoïde et de la vitesse de la rotation diurne de la Terre :

$$J_2 = \frac{e^2}{3} \left(1 - \frac{2}{15} \frac{me'}{q_0} \right) \quad (29)$$

avec:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \square(30)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad \square(31)$$

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad \square(32)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{e'^2} \right) \arctan e' - \frac{3}{2e'} \quad \square(33)$$

formules dans lesquelles a est le rayon équatorial de l'ellipsoïde, b son demi axe polaire, e et e' les première et seconde excentricités.

3.2 Pesanteur normale:

La pesanteur normale est le vecteur $\vec{\gamma}$, modèle de \vec{g} , tel que

$$\vec{\gamma} = \vec{\text{grad}} U \quad (34)$$

Le module de la pesanteur normale sur l'ellipsoïde est donné en fonction de la latitude géographique géodésique φ par la formule de Somigliana:

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 \varphi + b\gamma_p \sin^2 \varphi}{(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (35)$$

γ_e et γ_p sont, respectivement, les pesanteurs normales sur l'ellipsoïde à l'équateur et au pôle, et peuvent être calculées par:

$$q'_0 = 3 \left(1 + \frac{1}{e'^2} \right) \left(1 - \frac{1}{e'} \arctan e' \right) - 1 \quad (36)$$

$$\gamma_e = \frac{GM}{ab} \left(1 - m - \frac{m}{6} \frac{e' q'_0}{q_0} \right) \quad \square(37)$$

$$\gamma_p = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{m}{3} \frac{e' q'_0}{q_0} \right) \quad \square(38)$$

A la hauteur h au dessus de l'ellipsoïde, le module γ de l'accélération normale se calcule à partir de γ_0 par le formulaire:

$$f = \frac{a - b}{a} \quad (39)$$

$$\gamma = \gamma_0 \left(1 - \frac{2}{a} (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) h + \frac{3}{a^2} h^2 \right) \quad \square(40) \quad \square$$

où f est l'aplatissement de l'ellipsoïde.

3.3 Système de référence GRS 80

On donne ci dessous les principales constantes du Système de Référence Géodésique 1980, actuellement en vigueur sur recommandation de l'Association Internationale de Géodésie.

Constantes de définition

rayon équatorial de la Terre:	$a = 6\ 378\ 137\ \text{m}$
constante géocentrique de gravitation: $GM = 3\ 986\ 005 \times 10^8\ \text{m}^3\ \text{s}^{-2}$	(incluant l'atmosphère)
facteur d'aplatissement dynamique: $J_2 = 108\ 263 \times 10^{-8}$	
vitesse angulaire: $\omega = 7\ 292\ 115 \times 10^{-11}\ \text{rad s}^{-1}$	

Constantes dérivées

demi axe polaire:	$b = 6\ 356\ 752,3141\ \text{m}$
carré de la 1° excentricité:	$e^2 = 0,006\ 694\ 380\ 022\ 90$
carré de la 2° excentricité:	$e'^2 = 0,006\ 739\ 496\ 775\ 48$
aplatissement:	$f = 0,003\ 352\ 810\ 68118$
m :	$m = 0,003\ 449\ 786\ 003\ 08$
pesanteur normale à l'équateur:	$\gamma_e = 9,780\ 326\ 7715\ \text{m s}^{-2}$
pesanteur normale au pôle:	$\gamma_p = 9,832\ 186\ 368\ 5\ \text{m s}^{-2}$

Effets de l'atmosphère

La masse de l'ellipsoïde GRS 80 incluant celle de l'atmosphère, il peut être nécessaire, lorsqu'on utilise la pesanteur normale, de lui retrancher l'effet de l'atmosphère par une correction dont la partie principale est:

$$\delta\gamma = -8,74 \times 10^{-6}\ \text{m s}^{-2} \quad (41)$$

Cette correction devrait être appliquée notamment lors du calcul d'anomalies de pesanteur (formule (52) ci-dessous).

3.4 Théorème de Clairaut

En partant des accélérations normales équatoriales et polaires (37) et (38) et de la valeur de m (32), on peut vérifier que :

$$\frac{a - b}{a} + \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_p} = \frac{\omega^2 b}{\gamma_e} \left(1 + \frac{e' q'_0}{2q_0} \right) \quad (42)$$

Cette formule est la version moderne et exacte de celle proposée par Clairaut dès 1738. Pour mieux interpréter ce résultat, on le simplifie en développant (33) et (36) jusqu'aux termes en e'^3 , ce qui donne :

$$\frac{e'q'_0}{q_0} \approx 3 \quad (43)$$

et finalement :

$$\frac{a-b}{a} + \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_p} \approx \frac{5}{2} m \quad (44)$$

Cette formule relie l'aplatissement de la Terre, la variation relative de la pesanteur entre pôle et équateur et, à travers m , la vitesse de rotation de la Terre.

4 Champ perturbateur

Le champ perturbateur est la différence entre le champ réel de la pesanteur et le champ normal. La méthode générale de la géodésie physique consiste à déterminer par des mesures des différences entre des quantités réelles (par exemple des valeurs de g) et les quantités normales correspondantes (par exemple γ), et d'en déduire d'autres grandeurs, par exemple la hauteur du géoïde. L'étude du champ perturbateur permet d'établir des formules de conversion entre ces différentes quantités.

4.1 Potentiel perturbateur

Le potentiel perturbateur est la différence entre le potentiel réel et le potentiel normal:

$$T = W - U \quad (45)$$

M_0 est l'intersection de la ligne de force du champ passant par M et du géoïde (figure 10).

Q_0 est l'intersection de cette ligne de force avec l'ellipsoïde. On définit le potentiel perturbateur sur la surface topographique:

$$T(M) = W(M) - U(M) \quad (46)$$

et le potentiel perturbateur sur le géoïde:

$$T(M_0) = W_0 - U(M_0) \quad (47)$$

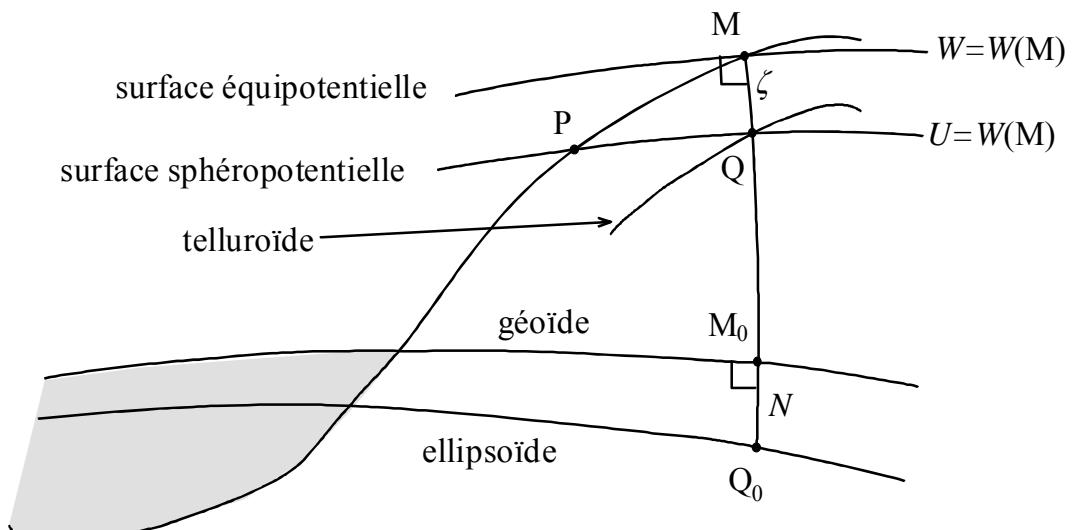


Figure 10: Hauteur du géoïde et anomalie d'altitude.

Par différence entre les formules (24) et (28), on obtient le développement en harmoniques sphériques de T , valable à l'extérieur de la Terre:

$$T = -\frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\cos \theta) (J'_{n,m} \cos m\lambda + K'_{n,m} \sin m\lambda) \quad (48)$$

4.1.1 Hauteur du géoïde

Sur la figure 10, on considère la ligne de force du champ de pesanteur passant par M. Elle coupe le géoïde en M_0 et l'ellipsoïde en Q_0 . La hauteur du géoïde est la hauteur de M_0 au dessus de Q_0 , comptée le long de la ligne de force. Elle est reliée au potentiel perturbateur sur le géoïde par la formule de Bruns:

$$N = \frac{T(M_0)}{\gamma_0} \quad (49)$$

4.1.2 Anomalie d'altitude

La surface sphéropotentielle de M est la surface équipotentielle du champ normal, de même potentiel que M (figure 10). Chaque point P de cette surface vérifie donc:

$$U(P) = W(M) \quad (50)$$

Elle coupe la ligne de force du champ en Q. M décrivant la surface topographique, Q engendre le telluroïde. L'anomalie d'altitude ζ est la portion de ligne de force comprise entre Q et M. On a:

$$\zeta = \frac{T(M)}{\gamma(Q)} \quad (51)$$

4.1.3 Anomalie de pesanteur

L'anomalie de pesanteur est la différence des modules de la pesanteur en M et de la pesanteur normale en Q:

$$\Delta g = g(M) - \gamma(Q) \quad (52)$$

Pratiquement, la pesanteur sur la surface topographique se mesure facilement, tandis que la pesanteur normale en Q peut être calculée par les formules (35) et (40) à condition de connaître l'altitude de M, égale à la hauteur ellipsoïdale de Q avec une approximation suffisante (voir équation (74) et figure 16 la définition de l'altitude normale).

4.1.4 Accélération perturbatrice

Elle est définie comme la différence entre la pesanteur et la pesanteur normale d'un point :

$$\delta g = g(M) - \gamma(M) \quad (53)$$

Historiquement, ce concept a été moins utilisé que l'anomalie de pesanteur. En effet, pour calculer δg il faut connaître la hauteur ellipsoïdale, ce que les techniques traditionnelles de la géodésie ne permettaient pas.

4.1.5 Déviation de la verticale

Pour simplifier, on se place au niveau du géoïde. M_0xyz est le repère local géodésique (figure 11). $\overrightarrow{M_0z}$ est la direction parallèle à la normale extérieure à l'ellipsoïde en M_0 , donc opposé à l'accélération normale en ce point. Le plan M_0yz est le plan méridien géodésique, il contient l'

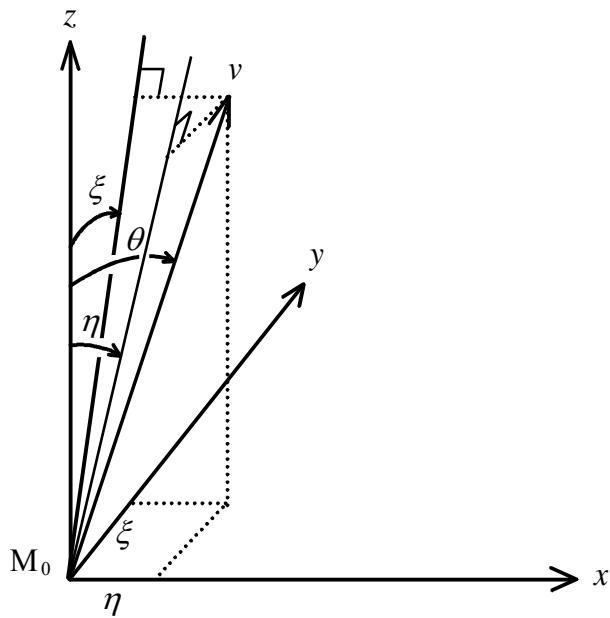


Figure 11: Déviation de la verticale dans le repère local géodésique.

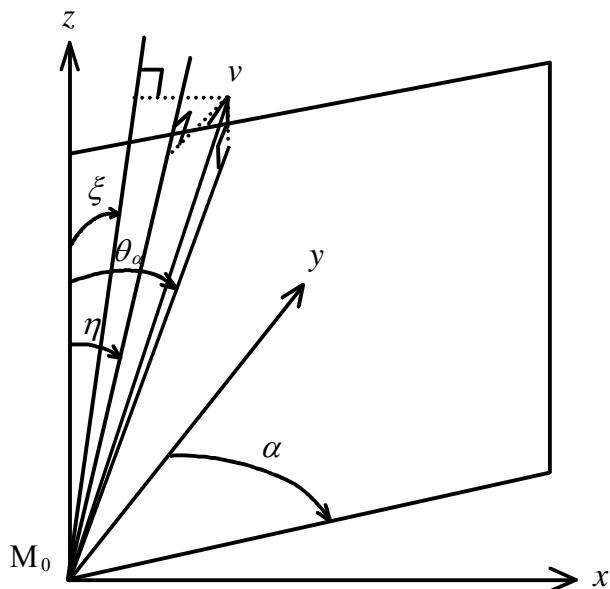


Figure 12: Déviation de la verticale dans une direction d'azimut α .

'axe de révolution de l'ellipsoïde. M_0xy est le plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde. $\overrightarrow{M_0v}$ est la verticale ascendante, donc opposé à \vec{g} . La déviation de la verticale est l'angle θ entre la direction de la normale à l'ellipsoïde et celle de la verticale. On décompose cet angle vers le nord dans le plan méridien géodésique et vers l'est dans le plan M_0xz : on obtient les deux composantes de la déviation de la verticale ξ et η . On démontre les relations:

$$\eta = (\lambda_a - \lambda_g) \cos \varphi \quad (54)$$

$$\xi = \varphi_a - \varphi_g \quad (55)$$

La déviation de la verticale dans une direction d'azimut α est (figure 12):

$$\theta_\alpha = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \quad (56)$$

4.2 Formules fondamentales

4.2.1 Formule du nivelllement astro-géodésique

La hauteur du géoïde et la composante de la verticale dans une direction donnée sont reliées par la formule différentielle:

$$dN = -\theta_\alpha ds \quad (57)$$

dans laquelle s désigne l'abscisse curviligne le long d'une courbe C tracée sur le géoïde (figure 13). Par intégration entre deux points A et B, il vient:

$$N_B - N_A = - \int_C \theta_\alpha ds \quad (58)$$

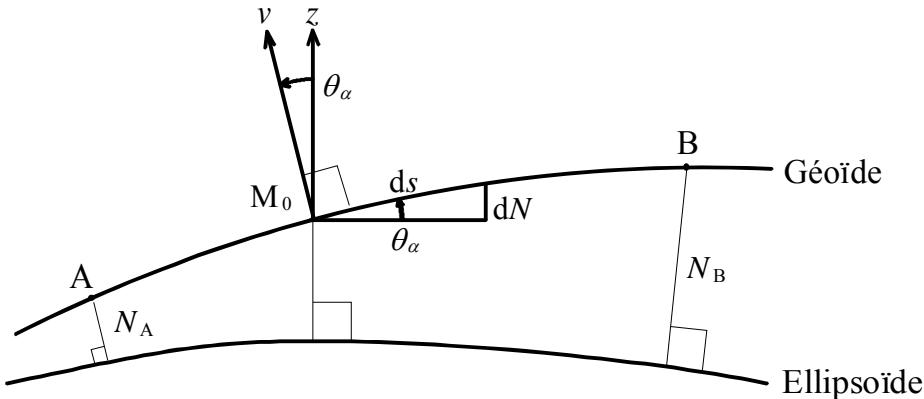


Figure 13: Nivellement astro-géodésique.

4.2.2 Formule fondamentale de la géodésie physique

De la définition du potentiel perturbateur (48), on déduit, en dérivant par rapport à la hauteur ellipsoïdale :

$$\frac{\partial T}{\partial h} = - \left(\frac{\partial W}{\partial h} - \frac{\partial U}{\partial h} \right) \approx -(g - \gamma) = -\delta g \quad (59)$$

L'anomalie de pesanteur (52) peut s'écrire :

$$\Delta g = \delta g + \gamma(M) - \gamma(Q) = \delta g + \zeta \frac{\partial \gamma}{\partial h} \quad (60)$$

En combinant ces deux équations et en utilisant la formule de Bruns (51), on aboutit à :

$$\Delta g = - \frac{\partial T}{\partial h} + \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} \quad (61)$$

Cette équation aux dérivées partielles relie la quantité mesurable Δg au potentiel perturbateur. Elle n'est pas utilisée directement puisqu'on ne connaît pas Δg dans tout l'espace, mais elle sert à démontrer l'importante formule suivante.

4.2.3 Formule de Stokes

La formule de Stokes permet d'exprimer la hauteur du géoïde en un point M_0 en fonction des anomalies de pesanteur sur le géoïde:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (62)$$

R est le rayon de la Terre, γ l'accélération normale de la pesanteur en Q_0 , ψ la distance angulaire entre le point de calcul M_0 et le point courant d'intégration P_0 (figure 14), σ est la sphère de rayon unité. S est la fonction de Stokes:

$$S(\psi) = \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (63)$$

ψ s'obtient par une formule classique de trigonométrie sphérique à partir des coordonnées géographiques λ, φ de M_0 et λ', φ' de P_0 :

$$\psi = \arccos(\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda)) \quad (64)$$

Les conditions d'applicabilité de la formule de Stokes sont malheureusement peu réalistes:

- les anomalies de pesanteur doivent être réduites au géoïde,
- il ne devrait pas y avoir de masse au dessus du géoïde,
- les anomalies devraient être connues sur la Terre entière.

Des techniques de réductions gravimétriques, de retrait-restauration et l'incorporation d'un modèle global de potentiel permettent de se placer dans ces conditions (voir ci-dessous "Méthodes gravimétriques").

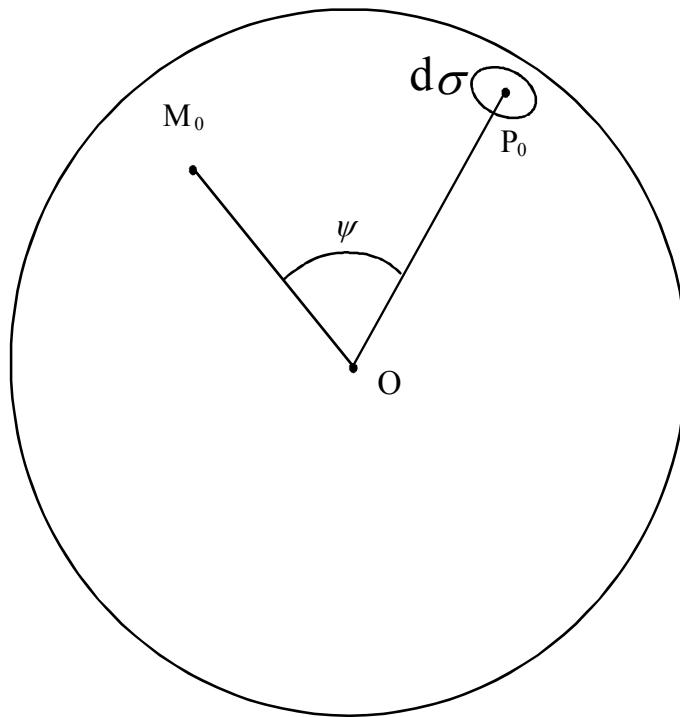


Figure 14: Intégrale de Stokes: point de calcul M_0 et point courant P_0 .

4.2.4 Théorie de Molodenski

En remplaçant les grandeurs au niveau du géoïde ($N, \Delta g \dots$) par leurs équivalents au niveau de la surface topographique, la théorie de Molodenski s'affranchit des inconvénients de celle de Stokes. En contrepartie, le formalisme est beaucoup plus complexe.

5 Altitudes

5.1 Définition

D'une manière générale, l'altitude d'un point M est son éloignement d'une surface de référence proche du géoïde. Elle est en pratique déterminée par des opérations de nivellation à partir d'un point fondamental A. Si on se contentait de cumuler les dénivelées mesurées au niveau (figure 8), le résultat dépendrait du chemin suivi, car les surfaces équipotentielles du champ de pesanteur ne sont pas parallèles. On est donc conduit à adopter la définition générale suivante:

$$H_{(M)}^{(*)} = \frac{W(A) - W(M)}{\gamma^{(*)}(M)} \quad (65)$$

Le symbole (*) distingue les différents types d'altitude. $\gamma^{(*)}(M)$ est une fonction du seul point M qui a la dimension d'une accélération. Comme la différence de potentiel ne dépend pas du chemin suivi, la formule (65) garantit une définition correcte du concept d'altitude. Le choix de la fonction $\gamma^{(*)}(M)$ détermine le type d'altitude. En particulier, si la valeur de $\gamma^{(*)}(M)$ est proche de la valeur de la pesanteur entre M et le géoïde, $H_{(M)}^{(*)}$ est proche de la hauteur de M au dessus du géoïde.

5.2 Types d'altitudes

5.2.1 Types d'altitudes scientifiques

La fonction $\gamma^{(*)}$ est une constante.

Cote géopotentielle

Symbole: C

$\gamma^{(G)}$ est conventionnellement égal à 1 et $C(M) = W(A) - W(M)$. Traditionnellement, g est exprimée en kilogals, h en mètres, C en unités géopotentielles ($1 \text{ GPU} = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$). Les cotes géopotentielles exprimées en GPU s'écartent des hauteurs au dessus du géoïde de 2 % environ. Dans la suite, on exprime les cotes géopotentielles dans le Système International, donc en $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$.

Altitude dynamique

Symbole: $H^{(D)}$

$\gamma^{(D)}$ est la pesanteur normale sur l'ellipsoïde, à la latitude de 45° , exprimée dans la même unité que g . Elle se calcule par la formule de Somigliana (35). h et $H^{(D)}$ sont en mètres. Les altitudes dynamiques peuvent s'écartez des hauteurs au dessus du géoïde de 0,25 %.

5.2.2 Types usuels d'altitudes

Ces types d'altitudes sont numériquement très proches de la hauteur au dessus du géoïde, dont elles ne s'écartent en principe que de quelques centimètres en plaine et quelques décimètres au maximum en haute montagne, quelle que soit la latitude.

Altitude orthométrique

Symbol: $H^{(O)}$

Idéalement, l'altitude orthométrique du point M est son abscisse curviligne au dessus du géoïde, comptée le long de la ligne de force du champ de pesanteur (figure 15).

La valeur moyenne de g sur l'arc de ligne de force M_0M est:

$$\tilde{g} = \frac{1}{H_{(M)}^{(O)} M_0 M} \int g \cdot ds \quad (66)$$

ds est la différentielle de l'abscisse curviligne le long de la ligne de force.

L'altitude orthométrique de M est donc:

$$H_{(M)}^{(O)} = \frac{C(M)}{\tilde{g}} \quad \square(67) \quad (67)$$

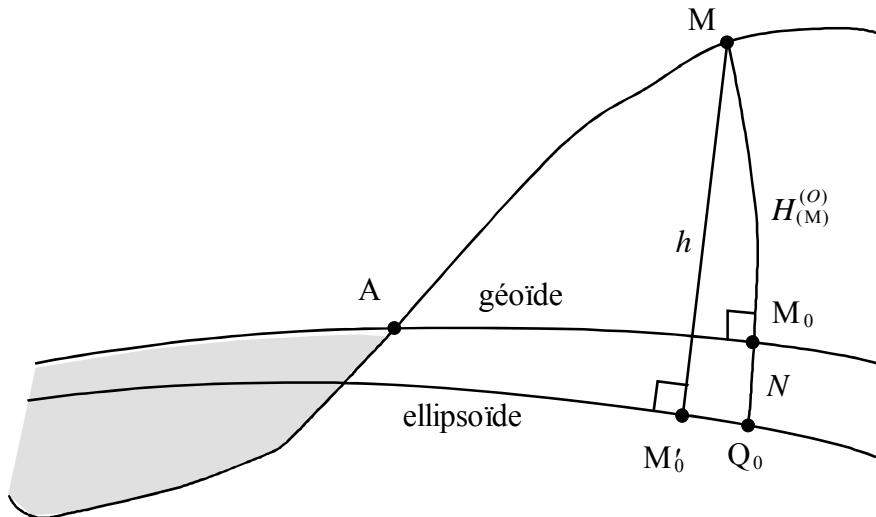


Figure 15: Altitude orthométrique.

Une formule pratique est obtenue en remplaçant \tilde{g} par la valeur de g au point milieu entre M_0 et M , à l'altitude $\frac{H}{2}$:

$$H_{(M)}^{(O)} = \frac{C(M)}{g(M) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_{moy} \cdot H_{(M)}^{(O)}} \quad \square(68)$$

$\left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_{moy}$ est le gradient moyen de la pesanteur (négatif) entre M et M_0 , $g(M)$ est la pesanteur réelle en M , sur la surface topographique. Le calcul de $H_{(M)}^{(O)}$ à partir de $C(M)$ est itératif mais peut être remplacé par:

$$H_{(M)}^{(O)} = \frac{C(M)}{g(M)} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_{moy} \frac{C(M)}{(g(M))^2} \right) \quad (69)$$

La modélisation de $\frac{\partial g}{\partial H}$ est délicate, il existe plusieurs choix possibles et donc plusieurs sous-types d'altitudes orthométriques. Pour les altitudes orthométriques de Helmert, qui sont la meilleure réalisation des altitudes orthométriques, on part d'une formule due à Bruns (Heiskanen et Moritz, 1969, p. 53):

$$\frac{\partial g}{\partial H} = -2gJ + 4\pi G\rho - 2\omega^2 \quad (70)$$

J est la courbure moyenne du géoïde au point M_0 , ρ est la masse volumique de la croûte terrestre. On approxime la courbure de géoïde par celle de l'ellipsoïde, g par l'accélération normale et on prend pour ρ la valeur moyenne 2670 kg m^{-3} . Cela donne le gradient de Poincaré-Prey:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_{moy} = -0,848 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} = -0,0848 \text{ mGal/m} \quad (71)$$

Pour les altitudes dites orthométriques normales, utilisées en France jusqu'en 1969, on a remplacé le gradient moyen $\left(\frac{\partial g}{\partial H} \right)_{moy}$ dans la formule (68) par le gradient moyen de la pesanteur normale.

Relation entre altitude orthométrique et hauteur ellipsoïdale

La ligne de force du champ de pesanteur (MM_0) et la normale à l'ellipsoïde (MM'_0) ne différant que par la courbure de la ligne de force et la déviation de la verticale (voir figure 15), on peut, à 1 mm près transformer une altitude orthométrique en hauteur ellipsoïdale par :

$$h \approx N + H^{(O)} \quad (72)$$

Altitude normale

L'altitude normale de M est la hauteur Q_0Q de la surface sphéropotentielle (ou du telluroïde) au dessus de l'ellipsoïde, prise le long de la ligne de force du champ normal (figure 16). $\tilde{\gamma}$ est l'accélération normale moyenne sur l'arc de ligne de force du champ normal Q_0Q :

$$\tilde{\gamma} = \frac{1}{H_{(M)}^{(N)} Q_0 Q} \int \gamma(h) \cdot ds = \frac{(U(Q) - U(Q_0))}{H_{(M)}^{(N)}} = \frac{C(M)}{H_{(M)}^{(N)}} \quad (73)$$

ds est la différentielle de l'abscisse curviligne de la ligne de force du champ normal. On a donc:

$$H_{(M)}^{(N)} = \frac{C(M)}{\tilde{\gamma}} \quad (74)$$

En pratique, on emploie la formule:

$$H_{(M)}^{(N)} = \frac{C(M)}{\gamma_0} \left(1 + (1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi) \frac{C(M)}{a\gamma_0} + \left(\frac{C(M)}{a\gamma_0} \right)^2 \right) \quad (75)$$

où γ_0 est donné par la formule de Somigliana (35) et m par (32).

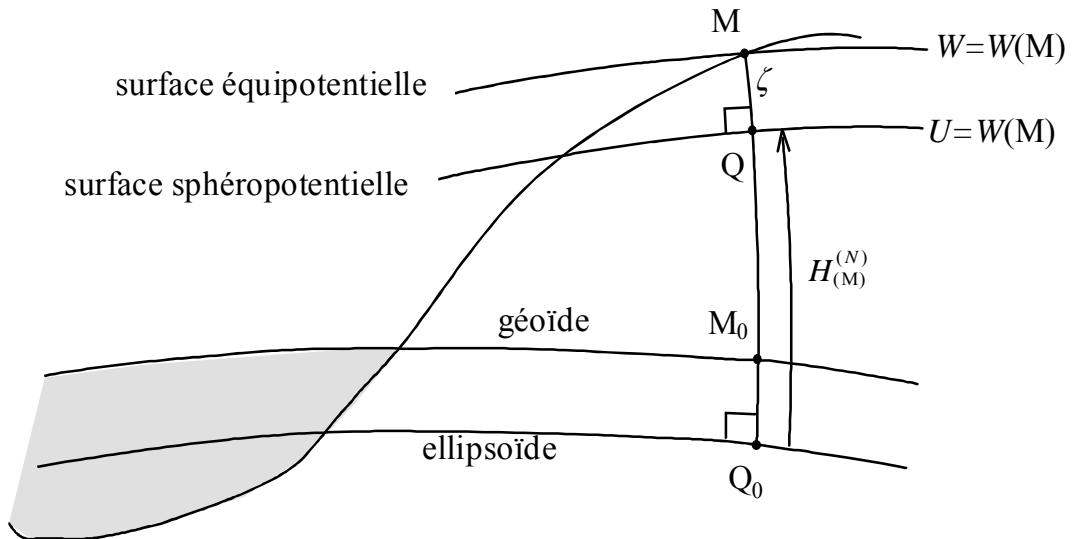


Figure 16: Altitude normale.

Quasigéoïde, relation entre altitude normale et hauteur ellipsoïdale

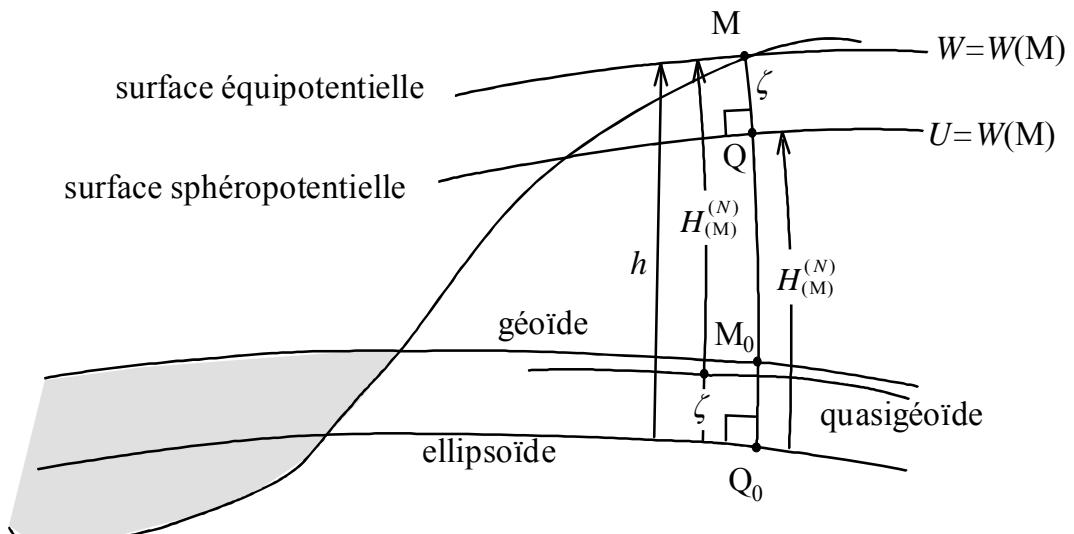


Figure 17: Quasigéoïde

Le quasigéoïde est la surface d'altitude normale nulle. C'est la surface obtenue en reportant depuis chaque point M de la surface topographique, vers le bas, son altitude normale (figure 17). Pour passer d'une altitude normale à une hauteur ellipsoïdale, on ne commet pas d'erreur supérieure à 1 mm en confondant la normale à l'ellipsoïde et la ligne de force du champ de pesanteur. On obtient donc une relation entre la hauteur ellipsoïdale, l'anomalie d'altitude et l'altitude normale:

$$h \approx \zeta + H^{(N)} \quad (76)$$

La différence entre l'anomalie d'altitude et de la hauteur du géoïde est:

$$N - \zeta = H^{(N)} - H^{(O)} = \frac{\tilde{g} - \tilde{\gamma}}{\tilde{\gamma}} H \quad (77)$$

où $H^{(O)}$ désigne ici l'altitude orthométrique de Helmert et H désigne indifféremment l'altitude normale ou l'altitude orthométrique. On emploie la formule (70) et son équivalente pour la pesanteur normale:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial H} = -2\gamma J_0 - 2\omega^2 \quad (78)$$

J_0 est la courbure moyenne de l'ellipsoïde. Ces deux formules permettent de calculer $\tilde{g} - \tilde{\gamma}$ à partir des valeurs en surface g et γ :

$$\tilde{g} - \tilde{\gamma} = g - \gamma - 2\pi G\rho H + \gamma(J - J_0)H \quad (79)$$

Les trois premiers termes du second membre représentent, à une petite correction près, l'anomalie de Bouguer Δg_B telle qu'elle est cartographiée, en France, par le Bureau de Recherches Géologiques et Minières¹. Le dernier terme, qui contient la courbure du géoïde, est plus difficile à évaluer mais est très petit. On a donc:

$$H^{(N)} - H^{(O)} \approx \frac{\Delta g_B}{\tilde{\gamma}} H \quad (80)$$

5.3 Systèmes de références d'altitudes

5.3.1 Référentiel altimétrique

Un référentiel altimétrique (ou système d'altitude idéal) est défini par:

- un type d'altitude
- les constantes relatives au type d'altitude ($\gamma^{(D)}$ pour l'altitude dynamique, constantes de l'ellipsoïde pour l'altitude normale, etc.)
- une surface de référence idéale
- une unité.

Pour les altitudes scientifiques et orthométriques, la surface de référence idéale est un géoïde défini par l'altitude d'un point fondamental ou par la valeur de son potentiel. Pour les altitudes normales, la surface de référence idéale est un quasigéoïde défini par l'altitude normale d'un point fondamental.

5.3.2 Réalisation des systèmes d'altitudes

Un système d'altitude est réalisé par un réseau formé d'un ensemble de repères matérialisés auxquels on a attribué une altitude. La surface de référence altimétrique réalisée diffère de la surface de référence idéale en raison des erreurs de mesure et, pour les altitudes orthométriques, en raison des défauts de modélisation du gradient de la pesanteur.

Une réalisation d'un système d'altitude comprend donc l'ensemble des constantes et algorithmes qui influent sur le système de référence, à savoir:

- un type d'altitude et les constantes associées
- un point fondamental et son altitude conventionnelle En pratique, le point fondamental est proche d'un marégraphe et son altitude est déduite des observations marégraphiques durant une période limitée.
- un réseau de repères de nivellation et un ensemble d'observations de nivellation de précision (dénivelées et gravimétrie)
- un processus de calcul des altitudes des repères.

¹ La formule de la pesanteur normale utilisée est celle de 1930.

La qualité d'une référence d'altitude est directement fonction de la qualité du réseau qui la réalise. Les facteurs de qualité sont:

- l'extension géographique
- l'exactitude des observations (systématismes éventuels),
- la précision des observations (erreurs accidentelles),
- la fiabilité du réseau (fautes d'observation et de calcul)
- la stabilité des repères ou la connaissance de leur vitesse verticale.

6 Techniques de détermination du champ et du géoïde

6.1 Techniques spatiales

6.1.1 Méthode générale

Le champ de gravitation terrestre peut être déterminé par le traitement de mesures de géodésie sur des satellites artificiels: photographie de satellites sur fond d'étoile, comptage Doppler, télémétrie laser, poursuite satellite-satellite. Le problème est assez difficile à résoudre puisque, outre le champ de gravitation, il faut modéliser plusieurs phénomènes complexes dans un traitement unique:

- le mouvement des satellites et les perturbations, gravitationnelles ou non
- la rotation de la Terre (vitesse, orientation de l'axe)
- les mesures géodésiques (propagation, erreurs instrumentales)
- les positions et déplacements des stations de poursuites.

En pratique, la méthode détermine une partie des coefficients du développement du potentiel de gravitation qui figurent dans la formule (7), en même temps que d'autres paramètres. Les résultats sont d'autant plus précis que les satellites utilisés occupent des orbites variées et proches de la Terre. Malheureusement, cette dernière condition soumet les satellites au freinage atmosphérique qui réduit leur durée de vie et qui est difficile à modéliser. On obtient des développements d'ordre peu élevé (voir plus loin, dans le tableau 3, les modèles d'origine purement spatiale), ce qui correspond à des géoïdes dont la résolution se chiffre en centaines de kilomètres. Par contre, les modèles de champ obtenus couvrent la Terre entière, et possèdent une bonne exactitude globale.

Deux techniques spatiales déterminent plus directement des grandeurs liées au champ: ce sont l'altimétrie par satellite et la gradiométrie. Seule la première de ces techniques fait actuellement l'objet d'applications importantes, son principe est décrit dans le paragraphe suivant.

6.1.2 Altimétrie par satellite

L'altimétrie par satellite consiste à déterminer au moyen d'un radar embarqué la distance verticale D entre un satellite et la surface de l'océan (figure 18). La position du satellite étant connue par des mesures de géodésie spatiale, on en déduit la hauteur instantanée $h - D$ de la surface océanique par rapport à un ellipsoïde de référence. Si on modélise de plus l'écart ζ_m entre la surface de l'eau et le géoïde (marée, houle, circulation océanique), on peut obtenir la hauteur du géoïde:

$$N = h - D - \zeta_m \quad (81)$$

Les résultats sont évidemment entachés des erreurs de mesure, des défauts de modélisation de la topographie marine et de la composante radiale des erreurs sur la position du satellite. Les géoïdes obtenus ne couvrent évidemment pas les terres émergées.

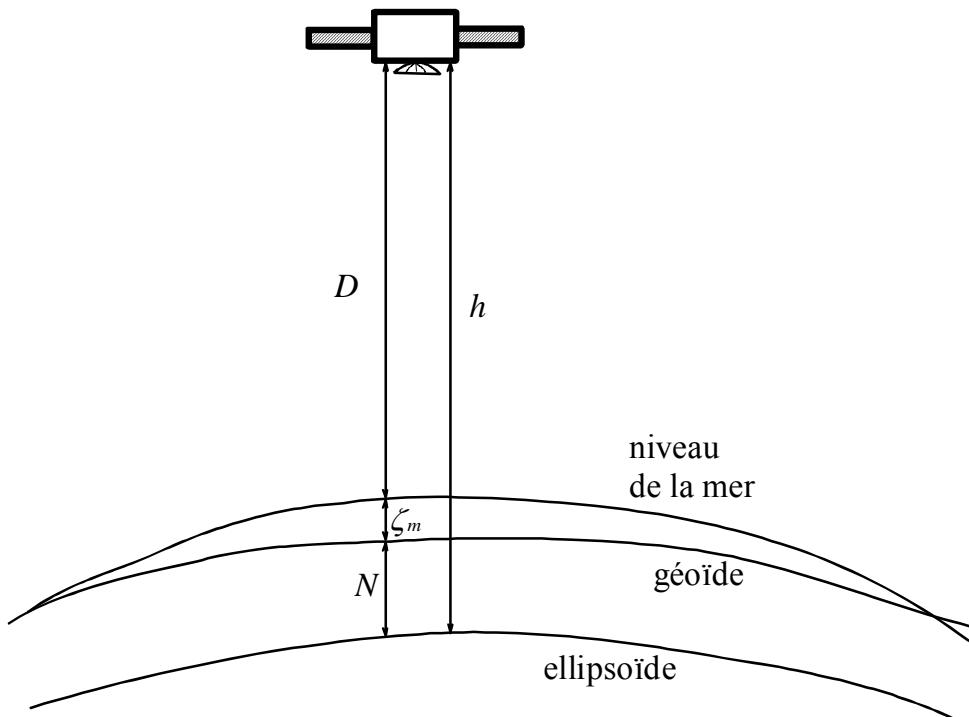


Figure 18: Altimétrie par satellite.

6.2 Techniques terrestres

6.2.1 Nivellement astro-géodésique

La détermination du géoïde par niveling astro-géodésique est une application de l'équation (58). Pour un ensemble de points géodésiques de coordonnées géographiques géodésiques connues, on détermine les coordonnées astronomiques. Par différence, on obtient pour chaque point les composantes de la déviation de la verticale. On procède à l'intégration de ces composantes le long de chemins joignant les points deux à deux. Il faut fixer arbitrairement la hauteur du géoïde en un point. La méthode est tributaire de la précision et de la densité des déterminations astronomiques. Elle ne se montre très précise que si on utilise des modèles numériques de terrain pour tenir compte de l'influence de la topographie dans l'interpolation de la déviation de la verticale entre les stations astronomiques.

6.2.2 Méthodes gravimétriques

A partir d'une couverture gravimétrique régionale ou globale, on peut calculer la hauteur du géoïde par la formule de Stokes (62) ou son équivalent dans la théorie de Molodenski. Sous réserve de raffinements mettant en jeu des techniques complexes et des données complémentaires (modèle global de potentiel, modèles numériques de terrain), cette méthode est susceptible de donner des géoïdes fins d'une précision centimétrique. La composante à grande longueur d'onde du champ est apportée par le modèle global, les données gravimétriques fournissent les moyennes longueurs d'onde suivant leur densité, les détails du champ viennent de l'information topographique. L'exactitude est tributaire de celle du modèle de potentiel utilisé. Il est important de noter que dans le cas d'un géoïde local, on peut obtenir une bonne précision si les données gravimétriques le permettent, en même temps qu'une mauvaise exactitude si le modèle de champ présente des erreurs importantes affectant les harmoniques dont la longueur d'onde dépasse le rayon d'intégration de Stokes.

6.3 Techniques mixtes : nivellation et techniques spatiales

Lorsqu'on dispose d'un ensemble de points géodésiques spatiaux nivélés, la comparaison de la hauteur ellipsoïdale et de l'altitude donne directement, pour chaque point, la hauteur ellipsoïdale de la surface de référence altimétrique. Cependant cette dernière ne coïncide pas exactement avec le géoïde. La précision de la méthode résulte directement de celle de la technique spatiale utilisée et de celle du réseau de nivellation. Entre points distants de quelques kilomètres, c'est le plus souvent la technique spatiale qui est le facteur limitant et on peut espérer déterminer les variations de la hauteur du géoïde à quelques centimètres près en combinant le Global Positioning System aux déterminations classiques d'altitudes. L'exactitude est limitée à quelques décimètres par la méconnaissance des écarts entre la référence du système d'altitude et le géoïde, qui sont dus au type d'altitude et aux erreurs systématiques du réseau de nivellation.

6.4 Modèles de champ et de géoïde

Un modèle de champ est une réalisation numérique du champ. Il est défini par un système de référence géodésique comprenant un ellipsoïde, et par une fonction des coordonnées. On peut représenter le potentiel gravitationnel, ou le potentiel perturbateur, ou tout autre paramètre comme la hauteur du géoïde. Par exemple, celle-ci est souvent représentée par une fonction des coordonnées géographiques (plus rarement des coordonnées planes):

$$N = N(\lambda, \varphi) \quad (82)$$

En pratique, plusieurs représentations sont employées:

- pour le potentiel de gravitation ou le potentiel perturbateur, développement en harmoniques sphériques analogue à (7) ou (48), après troncature à un degré maximal n_{max} . Le modèle de champ est alors entièrement défini par le référentiel géodésique, GM , ω , et par le jeu des coefficients.
- grille de valeurs d'un paramètre de champ (anomalie de pesanteur, hauteur du géoïde, etc.) et processus d'interpolation.
- carte d'isovaleurs.

Un modèle est dit global s'il couvre le Terre entière, et dans le cas contraire régional, national ou local suivant son étendue.

6.4.1 Exemples de modèles globaux

Le tableau 3 donne une liste de modèles globaux connus sous la forme d'un développement en harmoniques sphériques. Les modèles les plus anciens souffrent de défauts qui les rendent peu utilisables:

- mesures sur satellites anciennes, peu précises
- modélisation absente ou obsolète de certains phénomènes: mouvement de la Terre, attraction de la Lune et du Soleil sur les satellites, marées terrestres ou océaniques, tectonique des plaques.

Compte tenu des progrès assez rapides dans ce domaine, beaucoup de ces modèles n'ont plus qu'un intérêt historique. Certains modèles sont dédiés à un usage particulier ou à une zone géographique déterminée. Dans le premier cas, on a accordé un poids très important aux observations relatives à un satellite pour que le modèle permette de restituer l'orbite du satellite avec des résidus moindres. Dans le second cas, on a utilisé des données gravimétriques denses dans la zone utile. Il est rare que ces modèles conviennent pour d'autres utilisations que celles pour lesquelles ils ont été construits.

Le tableau 4 montre le résultats de comparaisons entre certains de ces modèles et des hauteurs de géoïdes dérivées de nivellation et de positionnement par géodésie spatiale. On peut juger de la précision atteinte: elle n'est que de quelques mètres pour les modèles les plus anciens,

mais peut s'avérer meilleure dans les régions pour lesquelles des données gravimétriques précises et denses ont pu être incorporées aux modèles de champ. Ces données doivent être considérées avec prudence: les points spatiaux nivélés utilisés sont très mal répartis à la surface du globe. Il s'agit souvent de points Doppler de précision métrique. Les systèmes de référence géodésiques et altimétriques ne sont pas unifiés.

Tableau 3: Modèles globaux de champ.

Modèle de champ	Organisme ⁽²⁾	Date	Degré max.	Résolution (km)	Données ⁽³⁾
GEM9	GSFC	1977	20	1000	S
GEM10B	GSFC	1978	36	550	S+A+G
PGS-S4 ⁽¹⁾	GSFC	1982	36	550	GEM10B+S+A
GEM-L2	GSFC	1983	20	1000	S
GRIM3	DGFI-GRGS	1983	36	550	S+A+G
GRIM3B ⁽¹⁾	DGFI-GRGS	1984	36	550	GRIM3+S
GRIM3-L1	DGFI-GRGS	1985	36	550	S+A+G
PGS-1331 ⁽¹⁾	GSFC	1985	36	550	GEM10B+S+A
GPM2	UH	1985	200	100	S+A+G
OSU86F	OSU	1986	360	55	S+A+G
GEM-T1	GSFC	1987	36	550	S
GEM-T2	GSFC	1989			
OSU89	OSU	1989	360	55	GEMT2+A+G
OSU91A	OSU	1991	360	55	GEMT2+G
GRIM4	GFZ-GRGS	1994	72	275	S+A+G
GEM-T3	GSFC	1994	50	400	S+A+G
EGM96	NIMA	1996	360	55	S+A+G
GRIM4-S4	GFZ-GRGS	1996	60	333	S
GRIM4-C4	GFZ-GRGS	1996	72	275	S+A+G

⁽¹⁾ Modèle de champ dédié à un usage particulier ou à une zone restreinte.

⁽²⁾ DGFI: Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut (Allemagne) - GFZ: Geoforschung Zentrum Potsdam (Allemagne) - GRGS: Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale (France) - GSFC: Goddard Space Flight Center - NIMA : National Imaging and Mapping Agency (USA) - OSU: Ohio State University (USA) - UH: Universität Hanover (Allemagne).

⁽³⁾ S: Mesures de géodésie spatiale, A: altimétrie par satellite; G: anomalies gravimétriques

Tableau 4: comparaison de modèles de champ et de points spatiaux nivélés.

Modèle	nombre de points spatiaux	écart-type (m)	écart max. (m)	écart min. (m)	Référence biblio.
GRIM3	481	4,28	12,4	-15,3	REIGBER, 1990
GRIM3B	481	4,53	12,6	-22,5	REIGBER, 1990
GRIM3-L1	481	3,25	11,1	-12,0	REIGBER, 1990
GEM9	481	3,51	12,6	-16,4	REIGBER, 1990
GEM10B	481	3,15	11,2	-14,6	REIGBER, 1990
GEM-L2	481	3,55	12,7	-16,9	REIGBER, 1990
OSU81	481	2,68	10,8	-12,8	REIGBER, 1990
GPM2	481	2,60	11,4	-12,3	REIGBER, 1990
OSU89	1782	1,60			RAPP, 1990
OSU91		1,58			RAPP, 1992

6.4.2 Les modèles de géoïde nationaux

Entre 1969 et 1978, J.-J. Levallois a présenté plusieurs modèles de géoïde couvrant la France ou l'Europe (figure 19). Un premier résultat a été calculé par la formule de Stokes. Deux lots de données gravimétriques ont été utilisés. Dans la zone limitée par les parallèles 35° et 55° et par les méridiens -15° et 15° , des anomalies moyennes sur des "rectangles" de 1° de côté ont été fournies par le Bureau Gravimétrique International. A l'extérieur de la zone, des anomalies moyennes par "rectangles" de 5° de côté étaient disponibles. L'ellipsoïde de référence avait un aplatissement de $1/297$, égal à celui de l'ellipsoïde International du système de référence géodésique ED50². Un second géoïde a été calculé par niveling astro-géodésique. De 1954 à 1969, 420 stations de déviation de la verticale ont été observées sur l'ensemble du territoire national. Des observations complémentaires entreprises à partir de 1971 ont permis d'augmenter la densité des données dans les Alpes. Les calculs ont été réalisés dans deux systèmes géodésiques, NTF d'une part et ED50 d'autre part. Les géoïdes gravimétriques et astro-géodésiques (ED50) ont été comparés. Après une adaptation destinée à éliminer les effets de la différence de référence géodésique, on a trouvé un écart moyen quadratique entre les deux géoïdes de $0,90\text{ m}$, et un écart maximum localisé sur la frontière italienne et inférieur à 3 m . Ces écarts donnent une idée de la précision de ces géoïdes, remarquable pour l'époque. A titre expérimental, le Bureau Gravimétrique International a calculé un géoïde gravimétrique en 1987. L'absence de correction de terrain dans ce traitement explique en grande partie qu'aucun progrès significatif n'ait été réalisé par rapport aux travaux précédents. Après de nouveaux essais en 1996, un modèle de quasi-géoïde, nommé QGF98 (figure 20) a été calculé par une méthode de retrait-restauration à partir du modèle de champ OSU91A, de 557 913 valeurs d'anomalies gravimétriques et d'un modèle numérique de terrain à pas fin. Par comparaison à 978 points nivélés du nouveau Réseau de Géodésique Français, on a pu estimer la précision à $0,10\text{ m}$. Pour les besoins du positionnement vertical par GPS, une grille de conversion de hauteurs ellipsoïdales en altitudes (RAF98) a été déduite du quasi-géoïde et du réseau géodésique.

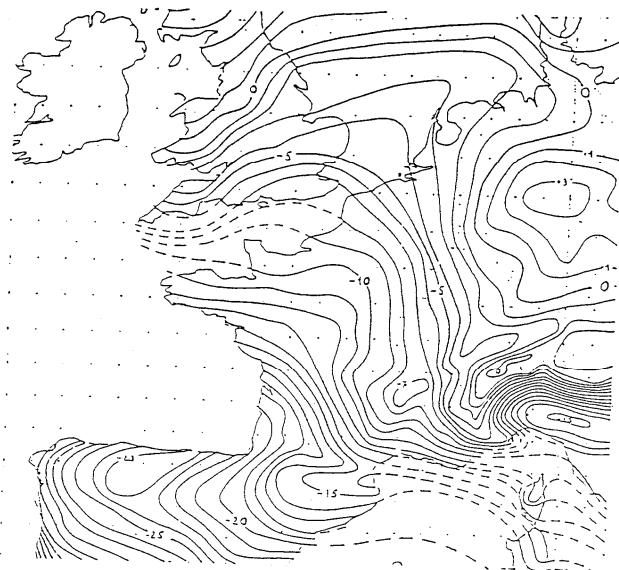


Figure 19 : carte du géoïde astrogéodésique en Europe occidentale (Levallois).
Système Europe 1950 - origine Postdam.

² Cela ne signifie pas que le système de référence géodésique sous-jacent à ce géoïde soit ED50.

Le modèle de géoïde Français QGF98

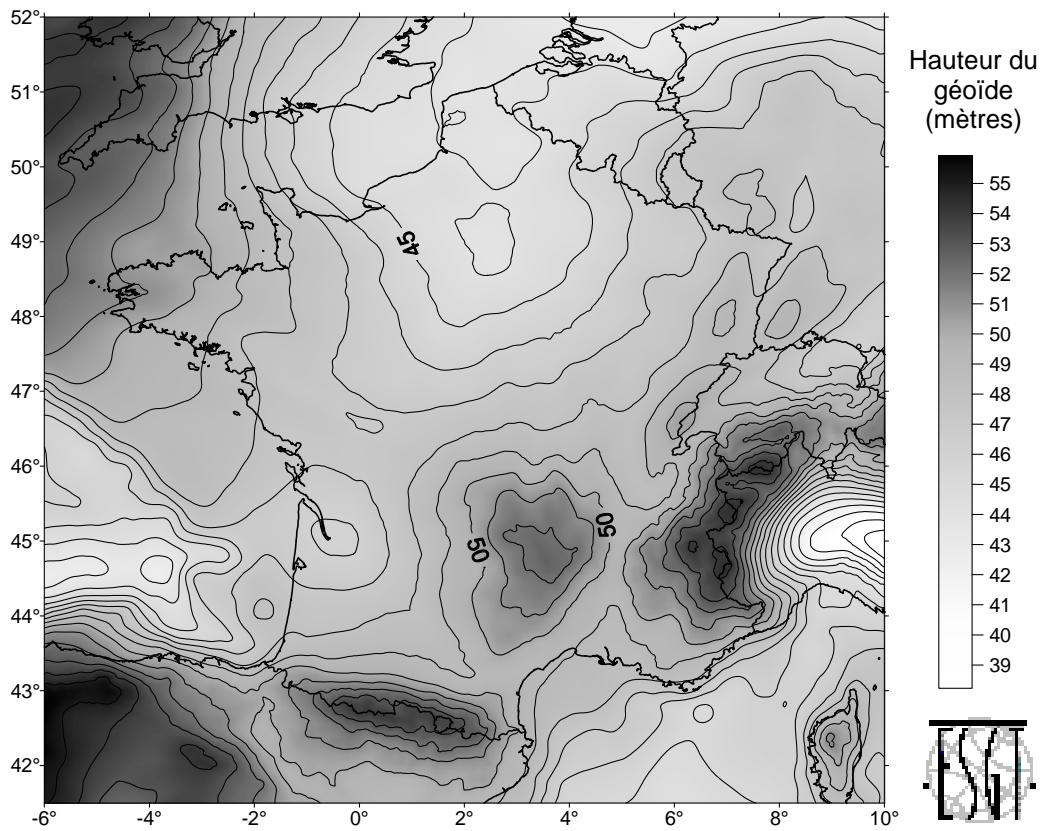


Figure 20: le quasi-géoïde QGF98. Ellipsoïde de référence GRS80. Equidistance des courbes 1 m.

7 Exercices

Exercice 1

Deux points A et B sont sur le géoïde, le premier au pôle nord, le second à l'équateur. En A, la pesanteur vaut $9,832186 \text{ m s}^{-2}$. En B, elle vaut $9,780327 \text{ m s}^{-2}$. A' et B' sont deux points d'une même équipotentielle, respectivement à la verticale de A et B. La distance AA' vaut 500 m, et on considère que la variation de la pesanteur est constante au voisinage du géoïde :

$$\frac{\partial g}{\partial h} = -3,086 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$$

1. Calculer les cotes géopotentielles de A' et B', dans le Système International d'unités puis en unité géopotentielle (GPU)
2. Calculer la distance BB'

Exercice 2

On mesure l'accélération de la pesanteur au pôle et à l'équateur et on trouve respectivement:

$$\gamma_p = 9,83217 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\gamma_E = 9,78032 \text{ m.s}^{-2}$$

En un lieu donné, une étoile culmine à 20h03mn19,465s (Temps Universel) le 13 janvier 1994 et à 19h59mn23,546s le lendemain.

On établit une triangulation entre deux points A et B dont les coordonnées géographiques astronomiques sont:

$$\begin{aligned}\lambda_A &= 5^\circ 18' 43,2'' & \varphi_A &= 0^\circ \\ \lambda_B &= 5^\circ 47' 26,6'' & \varphi_B &= 0^\circ\end{aligned}$$

On trouve que la distance entre les deux points, réduite au niveau 0, est:

$$AB = 53291,21 \text{ m}$$

Calculer une valeur approchée de l'aplatissement de la Terre.



ECOLE SUPERIEURE DES GEOMETRES ET TOPOGRAPHES

1 Boulevard Pythagore - 72000 LE MANS

Téléphone : 02.43.43.31.00 Télécopie : 02.43.43.31.02

<http://www.esgt.cnam.fr>



COURS DE GÉODÉSIE

Chapitre 5 Techniques terrestres de la géodésie

ES2



Table des matières

1	INTRODUCTION	3
2	SYSTÈMES DE RÉFÉRENCES.....	3
3	REPÈRES LOCAUX ET DÉVIATION DE LA VERTICALE.....	5
4	TYPES DE MESURES EN GEODESIE TERRESTRE.....	12
5	STRUCTURE DES RESEAUX GEODESIQUES TRADITIONNELS.....	16
6	TRAITEMENTS.....	19
7	REALISATION D'UN RESEAU GEODESIQUE TRADITIONNEL	20
8	EXERCICES.....	21
9	AIDE À LA RÉSOLUTION DES EXERCICES.....	22

1 INTRODUCTION

Ce fascicule est consacré aux réseaux géodésiques traditionnels, par opposition aux réseaux établis par techniques spatiales. Après avoir donné une définition des systèmes de références, on étudie la déviation de la verticale, phénomène qui, avec la réfraction, limite la précision géométrique des réseaux anciens. On inventorie les différents types d'observations, et on étudie l'influence de la déviation de la verticale sur les observations angulaires. Les différents types de réseaux sont ensuite passés en revue. La méthode générale de traitement des observations, basée sur la méthode des moindres carrés, est exposée. Pour finir, on décrit les principales étapes de l'établissement d'un réseau. Bien que les techniques spatiales et particulièrement le GPS concurrencent les méthodes traditionnelles de la géodésie, il est indispensable de continuer l'étude de ces dernières. D'une part, il faut savoir gérer au mieux le patrimoine géodésique existant et l'intégrer aux réseaux modernes, en tenant compte des défauts de modélisation de la géodésie traditionnelle. D'autre part, dans certaines circonstance, le GPS est inefficace ou moins efficace que la géodésie traditionnelle.

Ce module est conçu comme un cours de perfectionnement. Pour l'aborder avec le meilleur profit, le lecteur doit posséder les connaissances suivantes :

- repères cartésiens, changement de repères
- notions sur l'ellipsoïde de révolution et les représentations planes
- notions d'astronomie (détermination des coordonnées géographiques et d'azimut astronomiques)
- notions de géodésie physique (pesanteur, déviation de la verticale, altitude)
- vecteurs et matrices
- méthodes de mesure en topométrie et géodésie (angles, distances)
- méthode des moindres carrés

2 SYSTÈMES DE RÉFÉRENCES

2.1 Systèmes de références et réseaux géodésiques

En géodésie traditionnelle, un système de référence géodésique se compose (figure 1) :

- d'un repère terrestre géocentrique (RTG) de trièdre OXYZ
- d'un ellipsoïde géodésique

Le repère est orthonormé, son sommet O est proche du centre des masses de la Terre (le repère est quasi géocentrique), l'axe OZ est proche de l'axe de rotation moyen de la Terre, le plan OXZ coïncide en général avec le plan méridien international (méridien de Greenwich). L'ellipsoïde de référence est un ellipsoïde de révolution de centre 0 et d'axe OZ. Une représentation plane de l'ellipsoïde (ou projection) est associée au système de référence géodésique (figure 2).

Le système de référence est matérialisé par un réseau géodésique, ensemble de points auxquels on a associé des coordonnées géographiques ellipsoïdales (ou géodésiques : longitude I_g , latitude j_g) ou en projection. En général, les hauteurs ellipsoïdales des points géodésiques des réseaux traditionnels ne sont pas connues, les techniques d'observation et de traitement ne permettant pas de déterminer cette coordonnée. On dit que ces réseaux sont bidimensionnels, car la troisième dimension est donnée par l'altitude, une coordonnée qui n'a pas un caractère purement géométrique et qui ne se réfère pas à l'ellipsoïde.

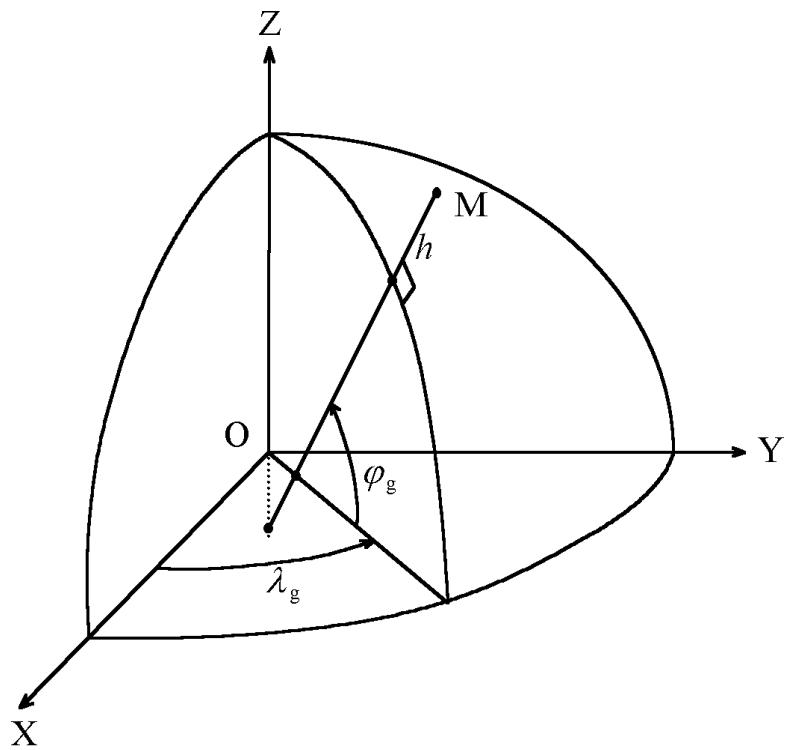


Figure 1. Repère terrestre géocentrique

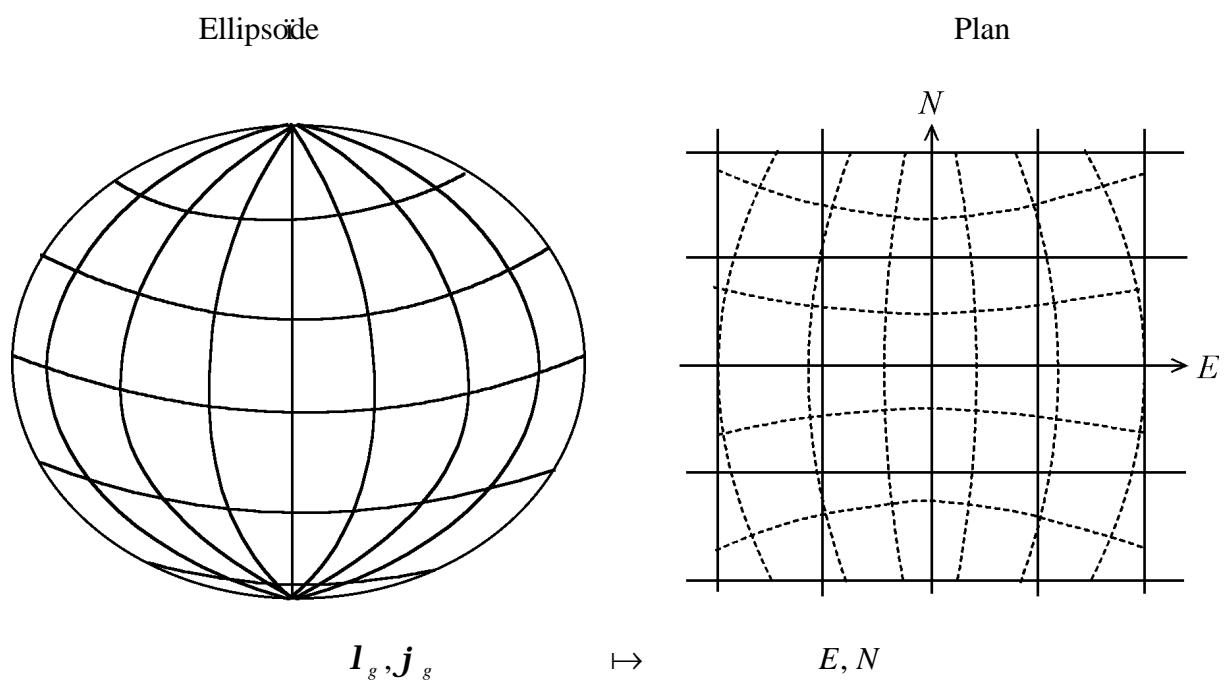


Figure 2. Ellipsoïde, coordonnées géographiques et projection.

2.2 Systèmes de références et réseaux altimétriques

Un système de référence altimétrique est défini par :

- un type d'altitude (orthométrique, normale, dynamique...)
- un point fondamental, le plus souvent rattaché à un marégraphe dont les observations durant une période de temps limitée servent à fixer l'altitude du point fondamental.

Le système de référence est matérialisé par un réseau de nivellation, ensemble de points auxquels on a attribué une altitude grâce à des observations et un processus de calcul. Idéalement, c'est à dire en l'absence d'erreurs systématiques dans le réseau de nivellation, la surface de référence altimétrique (surface d'altitude nulle) est un géoïde si les altitudes sont dynamiques, et un quasi-géoïde si les altitudes sont normales. En général, on ne sait pas exprimer la position du géoïde ou du quasi-géoïde dans un système de référence géodésique traditionnel. L'intégrale de Stokes donne en effet la hauteur du géoïde au-dessus d'un ellipsoïde différent de l'ellipsoïde associé au système de référence géodésique, et, dans le cadre de la géodésie traditionnelle, on ne connaît pas le décalage entre les centres des deux ellipsoïdes. Une conséquence importante est qu'on ne sait pas relier l'altitude et la hauteur ellipsoïdale, et que la géodésie traditionnelle ne permet pas une véritable représentation tridimensionnelle de l'espace.

3 REPÈRES LOCAUX ET DÉVIATION DE LA VERTICALE

3.1 Repère local géodésique

En tout point M, on définit le repère local géodésique RLg (figure 3) de la manière suivante :

- le repère est orthonormé
- le trièdre est $Mx_g y_g z_g$
- l'axe $\overrightarrow{Mz_g}$ est normal à l'ellipsoïde, dirigé vers l'extérieur
- le plan $My_g z_g$ est le plan méridien géodésique, il contient donc l'axe de révolution de l'ellipsoïde \overrightarrow{OZ} .
- l'axe $\overrightarrow{My_g}$ est dirigé vers le nord

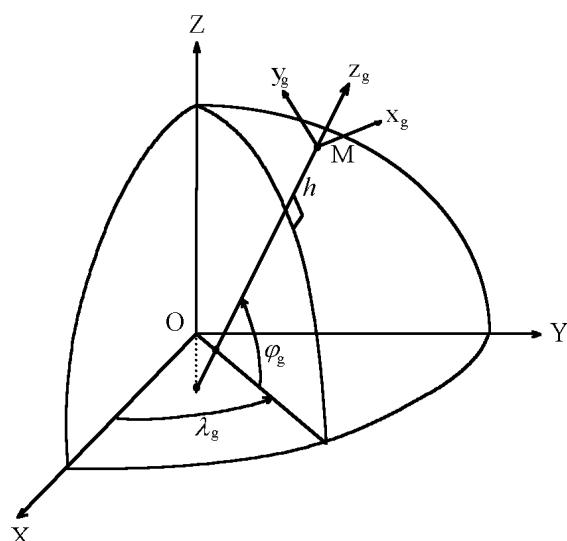


Figure 3. Repère local géodésique.

- l'axe $\vec{Mx_g}$ est dirigé vers l'est, de telle sorte que le trièdre soit direct.

Dans le cas particulier où M est sur l'ellipsoïde, $\vec{Mx_g}$ est tangent au cercle parallèle et $\vec{My_g}$ est tangent à l'ellipse méridienne, et le plan $Mx_g y_g$ est tangent à l'ellipsoïde.

On note que, en raison de la symétrie de révolution de l'ellipsoïde, $\vec{Mz_g}$ coupe l'axe \vec{OZ} .

3.2 Repère local astronomique

La définition du repère local astronomique (RLa) d'un point M est calquée sur celle du repère local géodésique, en remplaçant la normale à l'ellipsoïde par la verticale (figure 4) :

- le repère local astronomique est orthonormé
- l'axe $\vec{Mz_a}$ est vertical ascendant, donc opposé au vecteur pesant \vec{g}
- le plan $My_a z_a$ est le plan méridien astronomique : il contient le vecteur \vec{g} du point M, et il est parallèle à l'axe \vec{OZ}
- l'axe $\vec{My_a}$ est dirigé vers le nord
- l'axe $\vec{Mx_a}$ est dirigé vers l'est, de telle sorte que le trièdre soit direct.

Le plan $Mx_a y_a$ est le plan horizontal. La répartition des masses à l'intérieur de la Terre et le vecteur pesant ne présentent pas la symétrie de révolution, de sorte que $\vec{Mz_a}$ ne coupe pas \vec{OZ} .

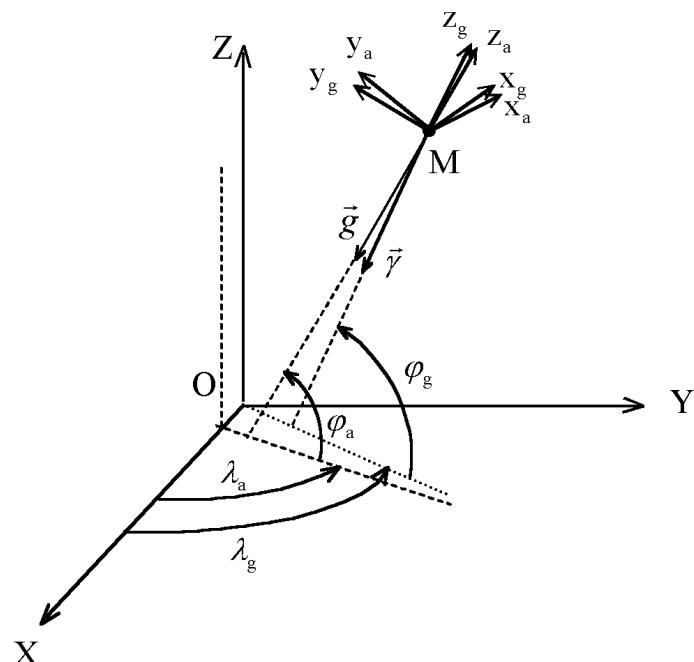


Figure 4. Repères locaux géodésiques et astronomiques.

3.3 Déviation de la verticale

Soit \vec{n} le vecteur unitaire de $\overrightarrow{Mz_g}$, et \vec{v} le vecteur unitaire vertical ascendant porté par $\overrightarrow{Mz_a}$ (figure 5). On appelle déviation de la verticale, et on note η , l'angle (\vec{n}, \vec{v}) . Cet angle dépend de M, mais aussi du système et de l'ellipsoïde choisis comme références. La déviation de la

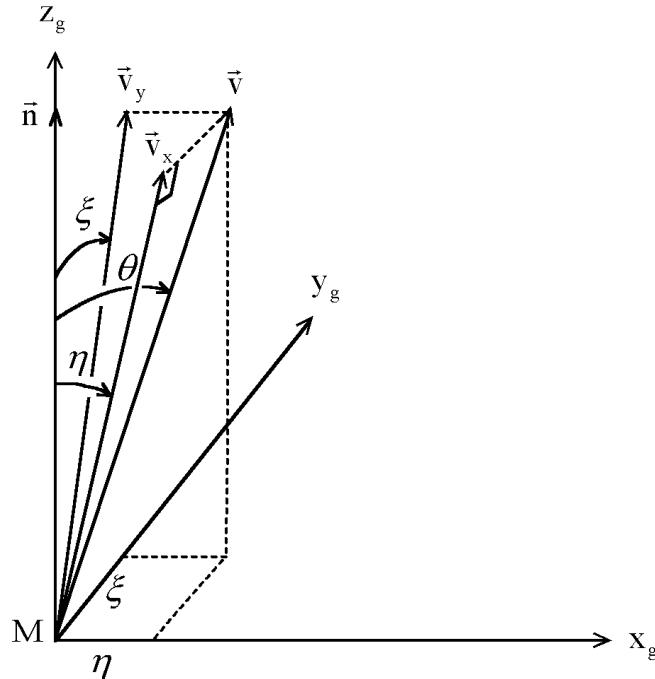


Figure 5. Composantes de la déviation de la verticale dans le repère RLg.

verticale est un angle petit. En France par exemple, dans le système de la Nouvelle Triangulation Française, la déviation de la verticale est conventionnellement nulle à Paris (Croix du Panthéon) et atteint 2 milligrades dans les Alpes. La déviation de la verticale peut atteindre 3 centigrades dans certaines îles volcaniques.

On appelle composantes de la déviation de la verticale les composantes (h, x, z) du vecteur \vec{v} dans le trièdre local géodésique $Mx_g y_g z_g$. h est la composante vers l'est, x est la composante vers le nord. Si on désigne par \vec{v}_x et \vec{v}_y , respectivement, les projections du vecteur \vec{v} sur les plans $Mx_g z_g$ et $My_g z_g$, les angles de \vec{v}_x et \vec{v}_y avec la normale à l'ellipsoïde, exprimés en radian, sont égaux aux composantes de la déviation de la verticale :

$$\begin{aligned} (\vec{n}, \vec{v}_x) &= h \\ (\vec{n}, \vec{v}_y) &= x \end{aligned} \tag{1}$$

En conséquence, et par abus de langage, on exprime souvent les composantes de la déviation de la verticale dans une unité angulaire (radian, seconde sexagésimale, grade ou ses sous-multiples).

3.4 Expressions des composantes de la déviation de la verticale

On considère à nouveau la figure 4. Les coordonnées géodésiques géodésiques de M sont I_g, J_g et ses coordonnées géographiques astronomiques sont I_a, J_a . Dans le repère terrestre géocentrique RTG, les composantes du vecteur unitaire vertical sont :

$$(\vec{v})_{\text{RTG}} = \begin{pmatrix} \cos j_a \cos I_a \\ \cos j_a \sin I_a \\ \sin j_a \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dans le repère local géodésique RLg, les composantes de \vec{v} sont, par définition :

$$(\vec{v})_{\text{RLg}} = \begin{pmatrix} h \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

On recherche les expressions des composantes de la déviation de la verticale en calculant la matrice de passage du repère terrestre géodésique au repère local géodésique. On passe du premier au second par (figure 6) :

- une rotation du trièdre OXYZ d'un angle $I_g + \frac{p}{2}$ autour de OZ, de matrice :

$$\mathbf{R}_{3,I_g + \frac{p}{2}} = \begin{pmatrix} -\sin I_g & \cos I_g & 0 \\ -\cos I_g & -\sin I_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Cette rotation transforme les axes $\vec{O}X$ et $\vec{O}Y$ en $\vec{O}X_1$ et $\vec{O}Y_1$, respectivement.

- une rotation du trièdre $OX_1Y_1Z_1$ autour de $\vec{O}X_1$, d'angle $\frac{\delta}{2} - j_g$, de matrice :

$$\mathbf{R}_{1,\frac{\delta}{2}-j_g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin j_g & \cos j_g \\ 0 & -\cos j_g & \sin j_g \end{pmatrix} \quad (5)$$

Après cette rotation, OY_1 est rendu parallèle à My_g et OZ est rendu parallèle à Mz_g .

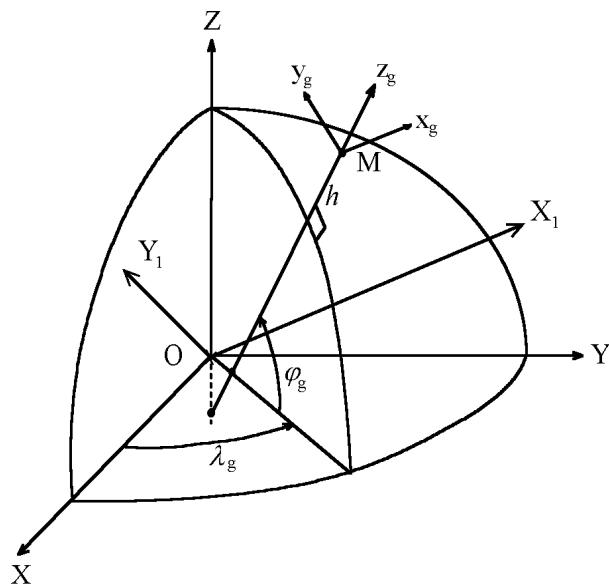


Figure 6. Passage du repère terrestre géocentrique au repère local géodésique.

La matrice de passage cherchée est donc :

$$\mathbf{R}_{\text{RTG} \rightarrow \text{RLg}} = \mathbf{R}_{1, \frac{p}{2} - J_g} \cdot \mathbf{R}_{3, I_g + \frac{p}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin j_g & \cos j_g \\ 0 & -\cos j_g & \sin j_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin I_g & \cos I_g & 0 \\ -\cos I_g & -\sin I_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\boxed{\mathbf{R}_{\text{RTG} \rightarrow \text{RLg}} = \begin{pmatrix} -\sin I_g & \cos I_g & 0 \\ -\sin j_g \cos I_g & -\sin j_g \sin I_g & \cos j_g \\ \cos j_g \cos I_g & \cos j_g \sin I_g & \sin j_g \end{pmatrix}} \quad (7)$$

On en déduit les composantes locales de \vec{v} à partir de ses composantes dans le repère géodésique terrestre :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin I_g & \cos I_g & 0 \\ -\sin j_g \cos I_g & -\sin j_g \sin I_g & \cos j_g \\ \cos j_g \cos I_g & \cos j_g \sin I_g & \sin j_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos j_a \cos I_a \\ \cos j_a \sin I_a \\ \sin j_a \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos j_a (\sin I_a \cos I_g - \sin I_g \cos I_a) \\ -\cos j_a \sin j_g (\cos I_g \cos I_a + \sin I_g \sin I_a) + \cos j_g \sin j_a \\ \cos j_a \cos j_g (\cos I_g \cos I_a + \sin I_g \sin I_a) + \sin j_g \sin j_a \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos j_a \sin(I_a - I_g) \\ -\cos j_a \sin j_g \cos(I_a - I_g) + \cos j_g \sin j_a \\ \cos j_a \cos j_g \cos(I_a - I_g) + \sin j_g \sin j_a \end{pmatrix} \quad (10)$$

Au second ordre près, on peut faire les approximations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos(I_a - I_g) &\approx 1 \\ \sin(I_a - I_g) &\approx I_a - I_g \\ \cos j_a \cdot (I_a - I_g) &\approx \cos j_g \cdot (I_a - I_g) \approx \cos j \cdot (I_a - I_g) \end{aligned} \quad (11)$$

On en déduit les formules cherchées, dans lesquelles j est indifféremment la latitude géodésique ou astronomique :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{h} &\approx (I_a - I_g) \cos j \\ \mathbf{x} &\approx j_a - j_g \\ \mathbf{z} &\approx 1 \end{aligned}} \quad (12)$$

En un point géodésique, on connaît les coordonnées géographiques I_g, j_g . Si de plus on détermine les coordonnées I_a, j_a au moyen d'observations astronomiques, on peut en déduire les composantes de la déviation de la verticale, par les formules (12).

3.5 Changement de repère local

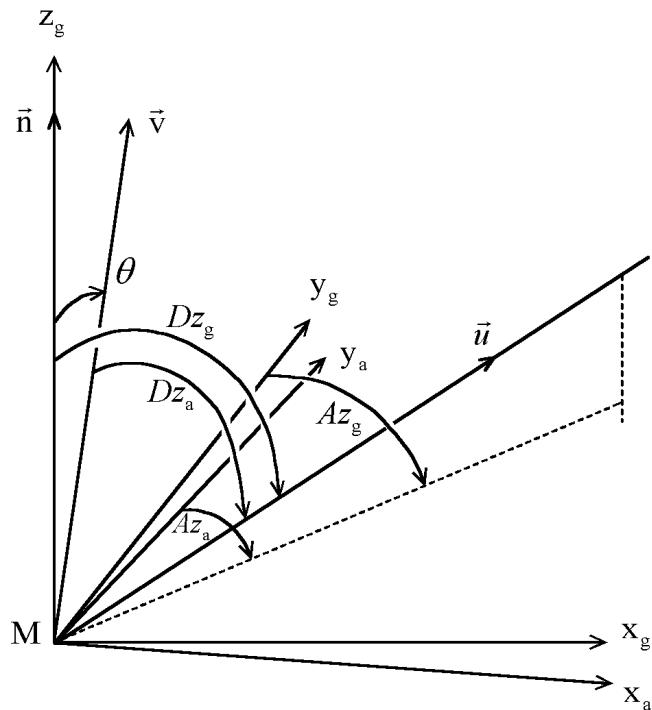


Figure 7. Vecteur unitaire dans les repères locaux.

\vec{u} est un vecteur unitaire d'azimut astronomique Az_a et de distance zénithale Dz_a (figure 7). La matrice de ses composantes dans le repère local astronomique est donc :

$$(\vec{u})_{\text{RLA}} = \begin{pmatrix} \sin Dz_a \sin Az_a \\ \sin Dz_a \cos Az_a \\ \cos Dz_a \end{pmatrix} \quad (13)$$

L'azimut géodésique de \vec{u} est Az_g . Par analogie, notons Dz_g l'angle entre la normale à l'ellipsoïde et le vecteur \vec{u} . Les composantes de \vec{u} dans le repère local géodésique sont :

$$(\vec{u})_{\text{RLG}} = \begin{pmatrix} \sin Dz_g \sin Az_g \\ \sin Dz_g \cos Az_g \\ \cos Dz_g \end{pmatrix} \quad (14)$$

On cherche à exprimer les composantes de \vec{u} dans le repère local géodésique, à partir de ses composantes dans le repère local astronomique. Pour cela, on passe du repère local astronomique RLA au repère terrestre géodésique RTG, puis de ce dernier au repère local géodésique RLG. La matrice de passage de la seconde transformation est déjà calculée (équation (7) ci-dessus) :

$$(\vec{u})_{\text{RLg}} = \mathbf{R}_{\text{RTG} \rightarrow \text{RLg}} (\vec{u})_{\text{RTG}} \quad (15)$$

Pour obtenir la matrice du premier passage, il suffit d'inverser la matrice $\mathbf{R}_{\text{RTG} \rightarrow \text{RLg}}$ tout en remplaçant les coordonnées géodésiques par les coordonnées astronomiques. La matrice de changement de repère étant orthogonale, son inverse est égale à sa symétrique, de qui donne :

$$\mathbf{R}_{\text{RLa} \rightarrow \text{RTG}} = \begin{pmatrix} -\sin I_a & -\sin j_a \cos I_a & \cos j_a \cos I_a \\ \cos I_a & -\sin j_a \sin I_a & \cos j_a \sin I_a \\ 0 & \cos j_a & \sin j_a \end{pmatrix} \quad (16)$$

La matrice de passage du repère local astronomique au repère local géodésique est donc :

$$\mathbf{R}_{\text{RLa} \rightarrow \text{RLG}} = \mathbf{R}_{\text{RTG} \rightarrow \text{RLg}} \cdot \mathbf{R}_{\text{RLa} \rightarrow \text{RTG}} \quad (17)$$

$$\mathbf{R}_{\text{RLa} \rightarrow \text{RLG}} = \begin{pmatrix} -\sin I_g & \cos I_g & 0 \\ -\sin j_g \cos I_g & -\sin j_g \sin I_g & \cos j_g \\ \cos j_g \cos I_g & \cos j_g \sin I_g & \sin j_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin I_a & -\sin j_a \cos I_a & \cos j_a \cos I_a \\ \cos I_a & -\sin j_a \sin I_a & \cos j_a \sin I_a \\ 0 & \cos j_a & \sin j_a \end{pmatrix} \quad (18)$$

En effectuant, on trouve :

$$\mathbf{R}_{\text{RLa} \rightarrow \text{RLg}} = \begin{pmatrix} \cos(I_a - I_g) & -\sin j_a \sin(I_a - I_g) & \cos j_a \sin(I_a - I_g) \\ \sin j_g \sin(I_a - I_g) & \sin j_a \sin j_g \cos(I_a - I_g) + \cos j_a \cos j_g & \cos j_a \sin j_g \cos(I_a - I_g) + \sin j_a \cos j_g \\ -\cos j_g \sin(I_a - I_g) & -\sin j_a \cos j_g \cos(I_a - I_g) + \cos j_a \sin j_g & \cos j_a \cos j_g \cos(I_a - I_g) + \sin j_a \sin j_g \end{pmatrix} \quad (19)$$

En utilisant les approximations telles que :

$$\begin{aligned} \cos(I_a - I_g) &\approx 1 \\ \sin j_g \sin(I_a - I_g) &\approx \sin j_a \sin(I_a - I_g) \approx (I_a - I_g) \sin j \\ \sin j_a \sin j_g \cos(I_a - I_g) &\approx \sin j_a \sin j_g \end{aligned} \quad (20)$$

on trouve :

$$\mathbf{R}_{\text{RLa} \rightarrow \text{RLg}} = \begin{pmatrix} 1 & -(I_a - I_g) \sin j & (I_a - I_g) \cos j \\ (I_a - I_g) \sin j & 1 & \sin(j_a - j_g) \\ -(I_a - I_g) \cos j & -\sin(j_a - j_g) & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

ce qui s'écrit, en tenant compte de (12),

$$\boxed{\mathbf{R}_{\text{RLa} \rightarrow \text{RLg}} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{h} \tan j & \mathbf{h} \\ \mathbf{h} \tan j & 1 & \mathbf{x} \\ -\mathbf{h} & -\mathbf{x} & 1 \end{pmatrix}} \quad (22)$$

Les équations (13), (14), (15) et (22) donnent :

$$\begin{pmatrix} \sin Dz_g \sin Az_g \\ \sin Dz_g \cos Az_g \\ \cos Dz_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{h} \tan j & \mathbf{h} \\ \mathbf{h} \tan j & 1 & \mathbf{x} \\ -\mathbf{h} & -\mathbf{x} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin Dz_a \sin Az_a \\ \sin Dz_a \cos Az_a \\ \cos Dz_a \end{pmatrix} \quad (23)$$

Dans cette formule, j est indifféremment la latitude géographique astronomique ou géodésique. Ces relations seront utilisées au paragraphes 4.3

4 TYPES DE MESURES EN GEODESIE TERRESTRE

4.1 Angles horizontaux

Dans les réseaux géodésiques traditionnels, les mesures d'angles horizontaux participent à la détermination des coordonnées géographiques géodésiques (ou en projection) des points. Elles sont effectuées à l'aide de théodolites. Suivant la longueur des visées et la présence éventuelle de masques (relief, végétation, etc.), les points sont équipés de mires, projecteurs, signaux élevés. En utilisant un mode opératoire tendant à éliminer les erreurs systématiques, et en répétant les mesures pour diminuer les erreurs accidentelles, on atteint facilement une précision de l'ordre de 0,1 milligrades. Lors des déterminations d'azimuts astronomiques, on vise des étoiles mobiles en plus des mires terrestres, et les observations doivent être datées au moyen d'une horloge.

Les observations devraient être réduites de l'influence de la déviation de la verticale car, lors de la mise en station d'un théodolite, l'axe principal de l'instrument est rendu vertical, et non normal à l'ellipsoïde. Cependant, la déviation de la verticale est faible, le plus souvent inconnue, et elle n'influence les angles horizontaux qu'au deuxième ordre. Seuls les azimuts astronomiques doivent effectivement subir cette correction (voir ci-dessous).

Si les calculs sont effectués en projection, les réductions de gisement du méridien et de courbure d'image de géodésique (dite "de dV") doivent être appliquées.

4.2 Angles verticaux

Les mesures d'angles verticaux (distances zénithales) viennent en complément du nivelingement de précision pour déterminer les altitudes. Elles sont également utilisées pour réduire les mesures de distances. Enfin, les mesures datées de distances zénithales d'étoiles permettent les déterminations de coordonnées géographiques astronomiques. Les angles verticaux sont mesurés au théodolite avec une précision instrumentale de l'ordre de 0,1 milligrades. Cependant, ces mesures sont très sensibles à la réfraction atmosphérique et, pour les visées longues, seules les mesures réciproques et simultanées s'avèrent précises. Si on corrige les distances zénithales de la déviation de la verticale, on peut théoriquement déterminer des différences de hauteurs ellipsoïdales. La précision est là aussi tributaire de la réfraction atmosphérique, et le procédé n'a pas été généralisé.

4.3 Influence de la déviation de la verticale sur les mesures d'angles

Pour toutes les mesures d'angles réalisées en géodésie, la verticale sert de référence instrumentale. Lorsqu'on mesure un angle ou un azimut astronomique, l'axe principal du théodolite est vertical. Lorsqu'on mesure une distance zénithale, le plan du limbe est vertical, ainsi que la direction du zéro du limbe. Avant d'introduire ces différents types de mesures dans les calculs sur l'ellipsoïde ou en projection, elles devraient être corrigées des effets de la déviation de la verticale. Les formules de corrections sont établies en utilisant les formules (23) qu'on développe :

$$\sin Dz_g \sin Az_g = \sin Dz_a \sin Az_a - \mathbf{h} \tan j \sin Dz_a \cos Az_a + \mathbf{h} \cos Dz_a \quad (24)$$

$$\sin Dz_g \cos Az_g = \sin Dz_a \cos Az_a + \mathbf{h} \tan j \sin Dz_a \sin Az_a + \mathbf{x} \cos Dz_a \quad (25)$$

$$\cos Dz_g = \cos Dz_a - \mathbf{h} \sin Dz_a \sin Az_a - \mathbf{x} \sin Dz_a \cos Az_a \quad (26)$$

En multipliant l'équation (24) par $\cos Az_a$, l'équation (25) par $-\sin Az_a$ et en ajoutant, on obtient :

$$\sin Dz_g \sin(Az_g - Az_a) = -\mathbf{h} \tan \mathbf{j} \sin Dz_a + (\mathbf{h} \cos Az_a - \mathbf{x} \sin Az_a) \cos Dz_a \quad (27)$$

On fait l'approximation du second ordre :

$$\sin Dz_g \sin(Az_g - Az_a) \approx (Az_g - Az_a) \sin Dz_a \quad (28)$$

(27) s'écrit alors, après simplification :

$$Az_g - Az_a = -\mathbf{h} \tan \mathbf{j} + (\mathbf{h} \cos Az - \mathbf{x} \sin Az) \cot Dz \quad (29)$$

Dans le second membre, Az peut être remplacé au second ordre près par Az_a ou Az_g , Dz par Dz_a ou Dz_g , et \mathbf{j} par \mathbf{j}_a ou \mathbf{j}_g . Cette équation est connue sous le nom d'équation de Laplace. Elle montre que, pour transformer un azimut astronomique en azimut géodésique, il faut appliquer deux corrections. La première, $-\mathbf{h} \tan \mathbf{j}$, dépend de la composante vers l'est de la déviation de la verticale, et augmente lorsqu'on s'éloigne de l'équateur. Elle provient de la non-coïncidence des plans méridiens astronomiques et géodésiques. Elle ne dépend pas de la direction de la visée. Elle ne peut pas être négligée dans les réseaux géodésiques de premier ordre. Cela explique pourquoi on détermine la déviation de la verticale et donc les coordonnées géographiques astronomiques des stations où on mesure un azimut astronomique (points de Laplace, voir ci-dessous). La seconde correction, $(\mathbf{h} \cos Az - \mathbf{x} \sin Az) \cot Dz$, dépend des composantes de la déviation de la verticale mais aussi de la distance zénithale et de l'azimut de la visée. Cependant, elle est souvent négligeable car en géodésie de premier ordre, les visées sont presque horizontales et $\cot Dz$ est très petit. On peut être amené à en tenir compte en région montagneuse.

L'influence de la déviation de la verticale sur une mesure d'angle horizontal peut se déduire de la formule (29), puisqu'un angle horizontal peut être considéré comme une différence d'azimut. Soit donc M_0 une station géodésique, M_1 et M_2 deux mires. On mesure l'angle horizontal \mathbf{a}_a des directions $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}$, c'est à dire l'angle dièdre des plans verticaux $M_0M_1\vec{v}$ et $M_0M_2\vec{v}$. L'angle à entrer dans les calculs sur l'ellipsoïde est \mathbf{a}_g , angle dièdre des plans normaux $M_0M_1\vec{n}$ et $M_0M_2\vec{n}$. On a, avec des notations évidentes pour les azimuts :

$$\mathbf{a}_a = Az_{2,a} - Az_{1,a} \quad (30)$$

$$\mathbf{a}_g = Az_{2,g} - Az_{1,g} \quad (31)$$

soit, en retranchant membre à membre et en utilisant (29) :

$$\mathbf{a}_g - \mathbf{a}_a = (\mathbf{h} \cos Az_2 - \mathbf{x} \sin Az_2) \cot Dz_2 - (\mathbf{h} \cos Az_1 - \mathbf{x} \sin Az_1) \cot Dz_1 \quad (32)$$

On remarque que, par différence, le terme $-\mathbf{h} \tan \mathbf{j}$ a disparu. La correction de déviation de la verticale à apporter aux angles horizontaux est généralement faible puisque les visées sont presque horizontales, sauf en montagne. D'autre part, pour la calculer, il faut déterminer les composantes de la déviation de la verticale, donc les coordonnées astronomiques. C'est la raison pour laquelle elle a rarement été appliquée dans les réseaux géodésiques anciens.

On peut théoriquement calculer des différences de hauteur ellipsoïdales en combinant des mesures de distances zénithales et de distances. Dans ce cas, il faut corriger les distances zénithales de l'effet de la réfraction atmosphérique en plus de celui de la déviation de la verticale. Celle-ci est déduite de l'équation (26) qu'on transforme en utilisant l'approximation :

$$\cos Dz_g - \cos Dz_a \approx -(Dz_g - Dz_a) \sin Dz \quad (33)$$

Pour $\sin Dz$ au second membre, on peut prendre $\sin Dz_a$ ou $\sin Dz_g$. Il vient, en développant la différence des cosinus par la formule de Taylor :

$$Dz_g - Dz_a = h \sin Az + x \cos Az \quad (34)$$

Cette formule n'a en pratique jamais été utilisée dans les réseaux traditionnels, la notion d'altitude étant préférée à celle de hauteur ellipsoïdale. Elle a par contre joué un rôle important pour la détermination du géoïde (voir dans le chapitre "Géodésie physique" la formule du nivellation astro-géodésique).

4.4 Distances

Les distances étaient autrefois mesurées au moyen de fil en invar. On mesurait des bases d'une dizaine de kilomètres de long au moyen de fils de 24 mètres. Chaque base était mesurée plusieurs fois afin d'éliminer les fautes et d'améliorer la précision. La base devait être amplifiée par triangulation pour obtenir la longueur d'un côté de premier ordre. La mesure complète d'une base pouvait durer plusieurs mois. Cela explique que, dans les réseaux géodésiques anciens, les mesures de longueurs de côtés géodésiques étaient rares. Cette technique est remplacée depuis 1956 par les distancemètres électroniques. D'une portée de quelques kilomètres à quelques dizaines de kilomètres, ils permettent d'atteindre une précision relative de 10^{-6} (soit 1 mm/km) à 10^{-5} . La distance mesurée doit être corrigée des effets de l'atmosphère sur la vitesse des ondes électromagnétiques, effets qu'on déduit de mesures météorologiques (température, pression). Il faut de plus réduire les distances à l'ellipsoïde et, le cas échéant, à la projection.

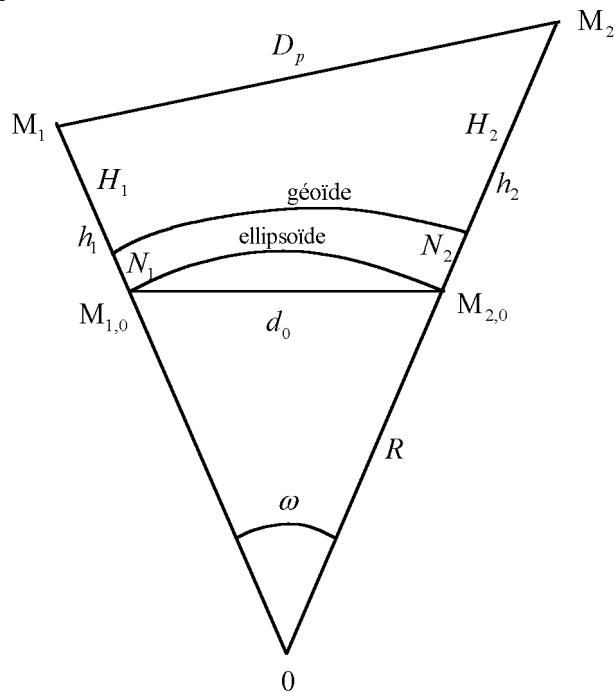


Figure 8. Réduction d'une distance à l'ellipsoïde.

Sur la figure 8, O est le centre de l'ellipsoïde assimilé à une sphère de rayon R . M_1 et M_2 sont deux stations géodésiques entre lesquelles on a mesuré la distance D_p . Les projections des stations sur l'ellipsoïde sont $M_{1,0}$ et $M_{2,0}$. Les altitudes des stations sont respectivement H_1 et H_2 , leurs hauteurs ellipsoïdales sont h_1 et h_2 . La hauteur du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde vaut N_1 en M_1 , et N_2 en M_2 . w désigne l'angle au centre $M_1\hat{O}M_2$. On a :

$$h_1 = H_1 + N_1 \quad (35)$$

$$h_2 = H_2 + N_2 \quad (36)$$

$$D_p^2 = (R + h_1)^2 + (R + h_2)^2 - 2(R + h_1)(R + h_2)\cos w \quad (37)$$

On appelle d_0 la longueur de la corde $M_{1,0}M_{2,0}$. Dans le triangle $OM_{1,0}M_{2,0}$, on peut écrire :

$$d_0^2 = 2R^2 - 2R\cos w \quad (38)$$

En éliminant $\cos w$ des deux dernières équations, on trouve la longueur de la corde :

$$d_0 = D_p \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{h_2 - h_1}{D_p}\right)^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)}} \quad (39)$$

La longueur de l'arc $M_{1,0}M_{2,0}$, qui approche très bien la distance réduite à l'ellipsoïde, vaut :

$$d = d_0 \left(1 + \frac{d_0^2}{24R^2}\right) \quad (40)$$

Si la pente est faible, la formule (39) peut être remplacée par la réduction traditionnelle en deux étapes (réduction à l'horizontale puis au niveau 0). La correction qu'implique la formule (40) est totalement négligeable pour les distances inférieures à 20 km.

La réduction à l'ellipsoïde pose problème puisque, en général, on ne connaît pas la hauteur ellipsoïdale des points mais seulement leur altitude. On confond donc ces deux quantités, et on commet une erreur relative lors de la réduction à l'ellipsoïde, égale à :

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{N}{R} \quad (41)$$

formule dans laquelle D est la distance à réduire, N la hauteur du géoïde au-dessus de l'ellipsoïde et R le rayon de la Terre. En France par exemple, dans le système de référence de la Nouvelle Triangulation Française, la hauteur du géoïde, supposée nulle à Paris, peut atteindre 20 mètres dans les Alpes, et l'erreur relative vaut alors 3×10^{-6} . Avec le système de référence RGF93 et l'ellipsoïde GRS80, l'erreur peut atteindre $8,5 \times 10^{-6}$, mais peut être évitée puisqu'il existe un modèle de géoïde référencé à RGF93.

4.5 Différences d'altitudes

Les différences d'altitudes sont déterminées précisément par niveling géométrique, appelé aussi niveling de précision. Les réseaux de niveling de précision sont hiérarchisés en ordres observés et calculés successivement. L'instrumentation se compose de niveaux et de mires. On procède par cheminements formés de courtes portées (100 m par niveling), suivant

en général les voies de communication. Pour le réseau de premier ordre et pour les ordres suivant en montagne, les dénivellées observées sont transformées en différences d'altitudes en utilisant des valeurs de pesanteur. La précision des réseaux nationaux varie entre 1 et 2 mm/ $\sqrt{\text{km}}$. Le réseau de nivellation est distinct du réseau géodésique.

Les altitudes des points du réseau géodésique sont souvent, pour des raisons économiques, déterminées par mesures d'angles verticaux. Les distances nécessaires au calcul des dénivellées sont déduites des coordonnées planimétriques, ou mesurées au distancemètre. La précision des altitudes ainsi obtenues est de l'ordre de 5 à 10 cm.

5 STRUCTURE DES RESEAUX GEODESIQUES TRADITIONNELS

5.1 Point fondamental, orientation

Les techniques de la géodésie traditionnelle basées sur les mesures d'angles et de distances entre points géodésiques ne permettent pas de déterminer des positions absolues, mais seulement des différences de coordonnées. Lors de l'élaboration d'un réseau géodésique, il est donc nécessaire de fixer les coordonnées d'un point de départ et l'azimut d'une direction issue de ce point. On procède de manière que le repère géodésique associé au réseau réponde aussi précisément que possible à la définition d'un repère terrestre géodésique, tel qu'il a été défini ci-dessus (paragraphe 2.1). On procède généralement par la technique du point fondamental. Au point fondamental F d'un réseau, on détermine par les méthodes de l'astronomie géodésique les coordonnées géographiques astronomiques ($I_a(F), j_a(F)$) et l'azimut astronomique $Az_a(FA)$ de la direction FA (figure 9). On convient que les coordonnées géographiques géodésiques de F sont égales à ses coordonnées astronomiques. Cela revient à dire que la verticale et la normale à l'ellipsoïde du point fondamental sont confondues et que, en ce point, l'ellipsoïde est parallèle au géoïde. De même, l'azimut géodésique de FA est pris égal à l'azimut astronomique. Les plans méridiens astronomique et géodésique de F sont donc identiques.

5.2 Point de Laplace

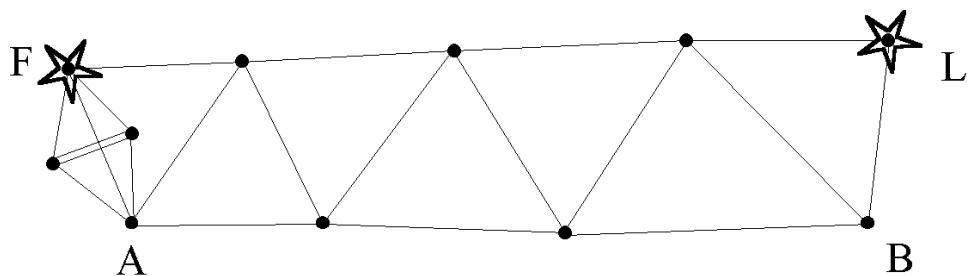


Figure 9. Point de Laplace dans un réseau géodésique.

Soit (figure 9) un réseau dont le point fondamental est F. L'azimut du côté FA a été déterminé par des mesures astronomiques et constitue l'azimut de départ. En utilisant les mesures d'angle et de distance, on calcule les coordonnées géographiques géodésiques de chaque point. On déduit également des observations les azimuts géodésiques de chaque côté. L'azimut géodésique de LB est affecté par l'accumulation des erreurs d'observation depuis F. On peut contrôler cet azimut en mesurant l'azimut astronomique de LB et en le corrigeant de l'effet de la déviation de la verticale en L. Il est donc nécessaire de déterminer les coordonnées

astronomiques de L (au moins la longitude) pour appliquer l'équation de Laplace, et transformer l'azimut astronomique en azimut géodésique. Un point tel que L, où on contrôle l'orientation d'un côté du réseau, est appelé point de Laplace.

5.3 Triangulation

Un réseau de triangulation est constitué de triangles accolés, dont on observe tous les angles. Le réseau est hiérarchisé et peut comporter jusqu'à 4 ou 5 ordres. En plus du point fondamental, le réseau de premier ordre comprend des mesures de bases et des points de Laplace tous les 300 km environ. En raison de l'indispensable intervisibilité entre les points, la technique de triangulation nécessite des travaux importants de construction de signaux, particulièrement en pays plat ou en région boisée. De plus, les points, situés sur des sommets, sont souvent peu accessibles et difficiles à exploiter, leur intérêt économique est incertain.

5.4 Cheminement, polygonation

Un cheminement géodésique (ou traverse) est une ligne brisée joignant les points du réseau. La longueur de chaque côté est mesurée, ainsi que l'angle à chaque sommet. Les coordonnées d'une extrémité au moins d'un cheminement doivent être connues. Lorsque le cheminement est fermé, il prend le nom de polygone. Les techniques de cheminement et polygonation sont plus rapides et moins onéreuses que la triangulation. Cependant, les observations sont peu redondantes et les réseaux moins fiables. Etant donnée leur structure linéaire, les cheminement et polygones ne sont pas aptes à couvrir de grandes surfaces.

5.5 Multilatération

La multilatération consiste à mesurer presque exclusivement des distances entre les points géodésiques. Des mesures d'angles sont cependant nécessaires : distances zénithales pour réduire les distances, mesures astronomiques au point fondamental et aux points de Laplace. Par rapport à la triangulation, la multilatération présente l'avantage de fournir, comme sous-produit, un niveling assez bonne qualité.

5.6 Réseaux mixtes

Dans les réseaux mixtes, on réalise les mesures d'angles horizontaux comme en triangulation, mais on ajoute un nombre significatif de mesures de distances. Cela confère au réseau une fiabilité, une homogénéité et une précision qui étaient inégalées avant le développement du GPS.

5.7 Propagation des erreurs

Les figures suivantes représentent des simulations de réseaux géodésiques de différentes structures. Dans chaque cas, les précisions des observations sont constantes : 0,1 milligrade pour les angles, $1,5 \times 10^{-6} D$ pour les distances. La longueur des côtés est environ 10 km. Les ellipses d'erreurs des points ont été dessinées à grande échelle, mettant en évidence la propagation des erreurs suivant la structure des réseaux. La supériorité des techniques associant angles et distances apparaît nettement. Ces exemples font d'autre part ressortir l'intérêt des programmes de simulation, qui permettent d'optimiser les réseaux en fonction d'objectifs de précision avant d'entreprendre les observations.

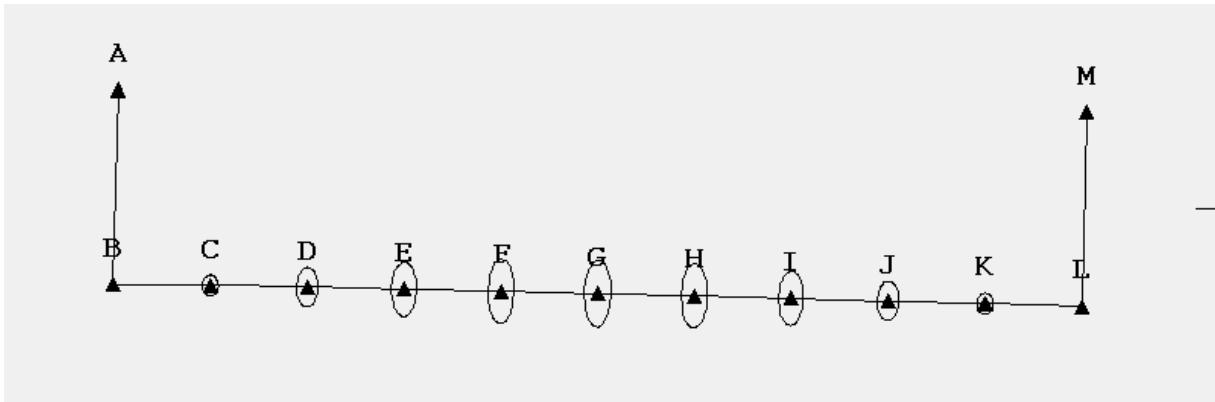


Figure 10. Cheminement orienté à ses extrémités.

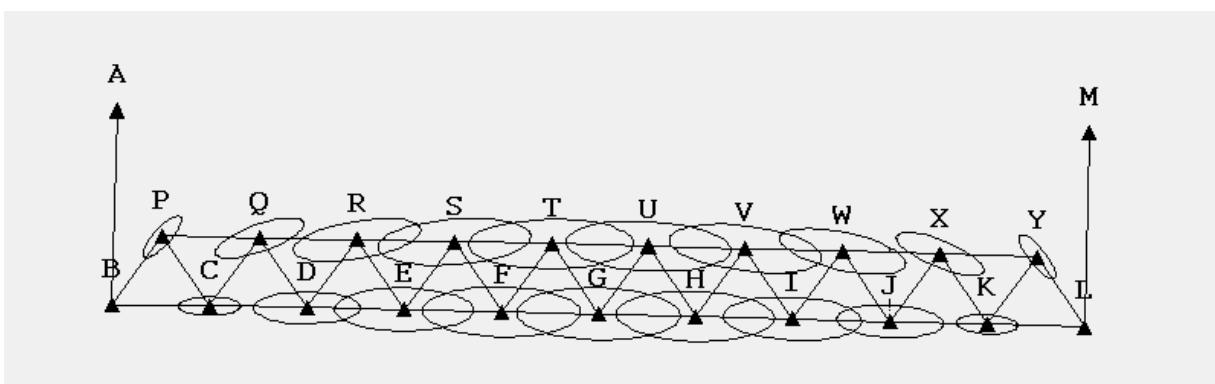


Figure 11. Chaîne de triangles fixée et orientée à ses deux extrémités.

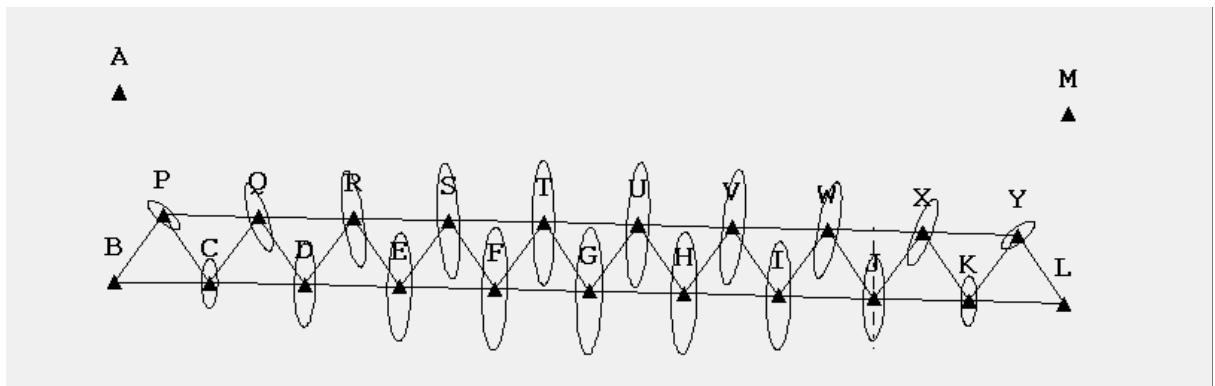


Figure 12. Chaîne de trilateration fixée à ses deux extrémités (aucun angle mesuré).

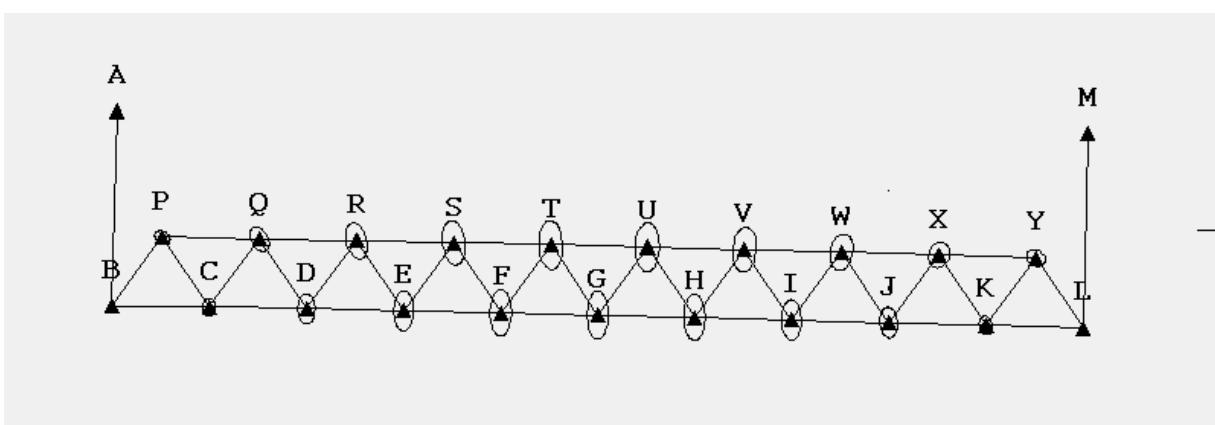


Figure 13. Réseau mixte : tous les angles et 50% des distances mesurées.

6 TRAITEMENTS

Dans le cas des réseaux traditionnels, les traitements géodésiques consistent à calculer les coordonnées des points géodésiques à partir de certaines constantes et des observations. Pour un réseau de premier ordre, on calcule généralement sur l'ellipsoïde, en coordonnées géographiques. Les quantités fixées sont : les constantes de l'ellipsoïde géodésique, les coordonnées du point fondamental et l'azimut de départ. Les observations sont réduites à l'ellipsoïde. Les réseaux d'ordres 2 ou supérieurs peuvent être calculés en projection. Les quantités fixées sont dans ce cas les coordonnées des points des réseaux d'ordre antérieur. Les observations doivent être réduites à la projection. Les points sont d'abord calculés de proche en proche de manière approximative. On ajuste ensuite le réseau par la méthode des moindres carrés. On suppose que les observations sont affectées d'erreurs aléatoires approximativement normales, mais sans systématismes. Pour chaque observation, on écrit une équation d'observation qui relie l'observation, les coordonnées de points géodésiques, certains paramètres auxiliaires et le résidu estimant l'erreur d'observation. Pour une distance mesurée entre les points A et B, et avec des coordonnées en projection, on a :

$$D + v = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \quad (42)$$

où D est la distance mesurée, réduite à la projection, X_A, Y_A, X_B, Y_B sont les coordonnées de la station et du point visé et v est le résidu de l'observation de distance. Suivant que la station ou le point visé sont connus ou doivent être ajustés, les valeurs de coordonnées sont fixées ou inconnues. Pour une lecture de tour d'horizon au théodolite, l'équation d'observation s'écrit :

$$l + v = \arctan \frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A} - V_{0,A} \quad (43)$$

$V_{0,A}$ étant le gisement du 0 du cercle horizontal en A. Ces relations doivent être linéarisées au voisinage de la solution approchée et deviennent :

$$\boxed{D - \overset{0}{D} + v = -\frac{X_B - X_A}{\overset{0}{D}} \left(X_A - \overset{0}{X}_A \right) - \frac{Y_B - Y_A}{\overset{0}{D}} \left(Y_A - \overset{0}{Y}_A \right) + \frac{X_B - X_A}{\overset{0}{D}} \left(X_B - \overset{0}{X}_B \right) + \frac{Y_B - Y_A}{\overset{0}{D}} \left(Y_B - \overset{0}{Y}_B \right)} \quad (44)$$

$$\boxed{l - \overset{0}{l} + v = -\frac{Y_B - Y_A}{\overset{0}{D}^2} \left(X_A - \overset{0}{X}_A \right) + \frac{X_B - X_A}{\overset{0}{D}^2} \left(Y_A - \overset{0}{Y}_A \right) + \frac{Y_B - Y_A}{\overset{0}{D}^2} \left(X_B - \overset{0}{X}_B \right) - \frac{X_B - X_A}{\overset{0}{D}^2} \left(Y_B - \overset{0}{Y}_B \right) - \left(V_{0,A} - \overset{0}{V}_{0,A} \right)} \quad (45)$$

Les symboles surmontés d'un 0 désignent les valeurs approchées. On a supposé que station et point visé doivent être ajustés. Si tel n'est pas le cas, les termes correspondants disparaissent des équations (44) et (45). Le système linéaire des équations d'observation s'écrit, sous forme matricielle :

$$\boxed{\mathbf{B} + \mathbf{V} = \mathbf{AX}} \quad (46)$$

B est la matrice colonne des termes constants tels que $D - \overset{0}{D}$, $l - \overset{0}{l}$, **V** est la matrice colonne des résidus, **X** est la matrice colonne des inconnues telles que $\left(X_A - \overset{0}{X}_A \right)$, **A** est la matrice de leurs coefficients. **A** compte autant de lignes que le réseau comporte d'observations, et autant de colonnes qu'il y a d'inconnues. On procède ensuite à la pondération et à la normalisation du système. **P** est la matrice des poids. C'est en général une matrice diagonale dont les termes sont les inverses des carrés des écarts-types a priori des observations. On pose :

$$\boxed{\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}} \quad (47)$$

\mathbf{A}^T est la matrice transposée de **A**, **N** est la matrice normale. Le système normal s'écrit :

$$\boxed{\mathbf{N} \mathbf{X} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B}} \quad (48)$$

On obtient la solution de préférence en inversant la matrice **N**, de façon à établir des statistiques sur les inconnues. La solution est donc :

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B}} \quad (49)$$

On peut calculer les résidus en reportant la solution dans l'équation (46) et valider les observations. On peut également, à partir des résidus et de la matrice \mathbf{N}^{-1} , calculer des intervalles de confiance pour les inconnues et des ellipses d'erreurs pour les points géodésiques.

7 REALISATION D'UN RESEAU GEODESIQUE TRADITIONNEL

L'élaboration d'un réseau géodésique comprend les opérations suivantes :

- Spécification : définition des caractéristiques essentielles (structure, précision, densité des points) et des processus (observations, traitements, construction des repères, documentation), en fonction d'objectifs techniques, économique et de durabilité.
- Choix d'un système de référence : ellipsoïde, point fondamental
- Observations, incluant des phases d'études préalables de documents existant, de reconnaissance, d'établissement d'un schéma et d'un plan de travail, des mesures proprement dites et de recueil des informations descriptives (repérage des points, accès, etc.)
- Traitement : calcul des points approchés, réduction des observations, ajustement, validation, évaluation de la précision
- Documentation : rédaction des fiches signalétiques des points, archivage des observations, intégration en base de données, diffusion aux usagers.

8 Exercices

Exercice 1

Dans un pays dépourvu de réseau géodésique, on réalise un cheminement géodésique ABC...HI (figure 14).

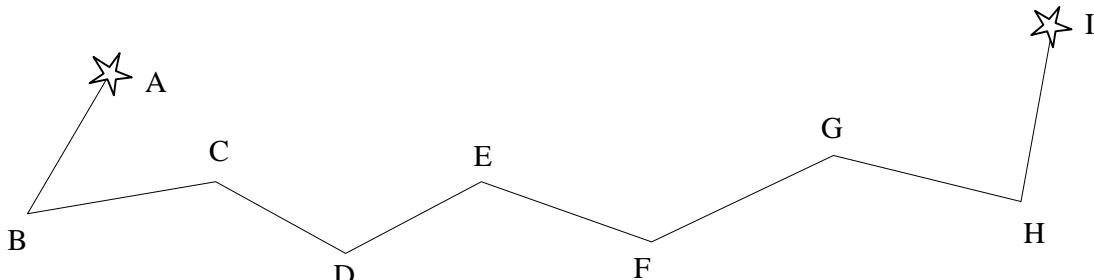


Figure 14

A est considéré comme point fondamental. Ses coordonnées géographiques et l'azimut du côté AB sont déterminés par des mesures astronomiques, et prises comme valeurs de départ pour le calcul du cheminement :

$$I_a(A) = 4^\circ 17' 39,76''$$

$$j_a(A) = 31^\circ 46' 14,63''$$

$$Az_a(AB) = 115^\circ 56' 34,17''$$

Des angles et des distances observés, on déduit les coordonnées géographiques géodésiques de I et l'azimut du côté IH et on trouve :

$$I_g(I) = 5^\circ 57' 18,45''$$

$$j_g(I) = 32^\circ 06' 54,37''$$

$$Az_g(IH) = 97^\circ 23' 44,28''$$

Pour vérifier, on détermine les coordonnées astronomiques de I et l'azimut astronomique IH :

$$I_a(I) = 5^\circ 57' 19,52''$$

$$j_a(I) = 32^\circ 06' 53,21''$$

$$Az_a(IH) = 97^\circ 23' 47,89''$$

1. Peut-on considérer les écarts entre coordonnées géographiques astronomiques et géodésiques de I comme des écarts de fermeture, représentant la somme des erreurs de mesure ? Pourquoi ?
2. Estimer la somme des erreurs de mesure sur les angles et les azimuts de ce cheminement.

Exercice 2

Sur la figure 10, on voit clairement que les ellipses d'erreur des points situés vers le milieu d'un cheminement tendu sont étirées perpendiculairement à la direction générale du cheminement. Quelles solutions peut-on proposer pour éviter ce phénomène ?

9 Aide à la résolution des exercices

Exercice 1

1. On ne peut pas considérer les écarts entre coordonnées géographiques astronomiques et géodésiques de I comme des écarts de fermeture à cause de la variation de déviation de la verticale entre A et I.
2. En I, il faut transformer l'azimut astronomique observé en azimut géodésique, grâce à l'équation de Laplace. On compare ensuite ce dernier à l'azimut géodésique transmis par la polygonale.

Exercice 2

La solution classique consiste à réorienter la polygonale en son milieu E, par visée sur un point géodésique ou par un azimut astronomique. Dans ce dernier cas, il faut déterminer les coordonnées astronomique de E pour appliquer l'équation de Laplace. Une solution moderne serait de faire un point GPS en E. Les observations GPS devraient être réalisées entre A, E et I.



ECOLE SUPERIEURE DES GEOMETRES ET TOPOGRAPHES

1, Boulevard Pythagore - 72000 LE MANS

Téléphone : 02.43.43.31.00 Télécopie : 02.43.43.31.02

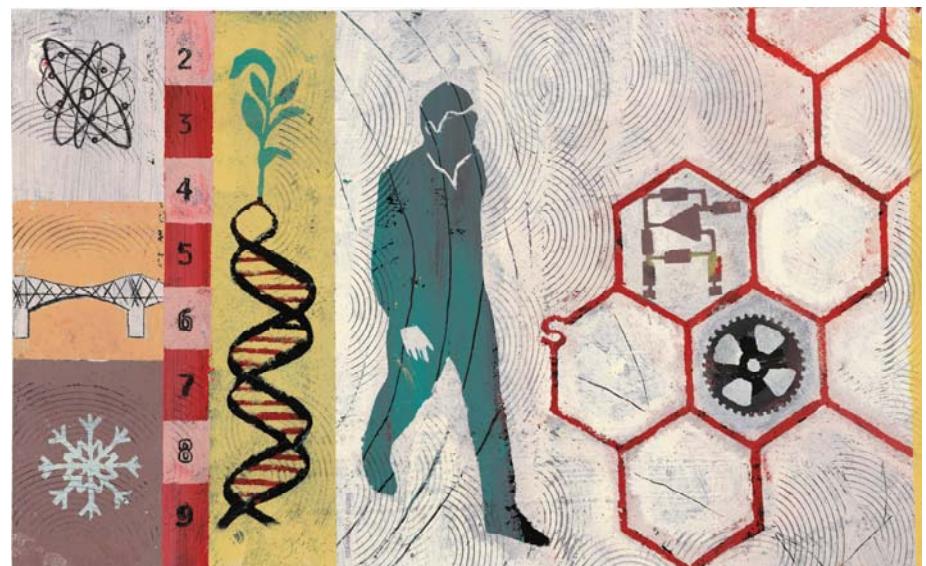
<http://www.esgt.cnam.fr>



COURS DE GÉODÉSIE

Chapitre 6 Techniques spatiales de la géodésie

ES2



Cham

CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET MÉTIERS

Françoise et Henri DUQUENNE
1^{ère} édition 1998
dernière révision : Janvier 2002

1. INTRODUCTION

Les techniques terrestres de la géodésie montrent certaines limites:

- l'intervisibilité entre stations impose de placer les stations en hauteur, voir même de monter des signaux pour que les visées passent
- les observations sont fortement tributaires des conditions météorologiques
- les observations ne pouvant se faire en traversant les océans, les réseaux géodésiques sont établis au niveau national ou continental.
- les réseaux sont bidimensionnels (planimétrie) et unidimensionnels (altimétrie), mais ne donnent pas une position tridimensionnelle.

La géodésie spatiale est une réponse à ces limites. Elle regroupe des techniques utilisant des objets n'appartenant pas au voisinage immédiat de la Terre. Ces objets peuvent être des étoiles, des objets du système solaire (Lune), des radiosources extragalactiques, des satellites artificiels. On peut dire que l'astronomie est la plus ancienne technique de la géodésie spatiale. La technique de photographie sur fond d'étoiles, qui consiste à prendre des photos simultanées en des lieux différents d'un pot lumineux (puis de satellites) en repérant les positions sur le cliché par rapport aux étoiles est une transition entre les techniques astronomiques et les techniques spatiales qui elles sont basées sur des mesures sur des ondes électromagnétiques se propageant entre l'objet de l'espace et des points de la Terre.

L'objet le plus souvent utilisé étant le satellite artificiel, un paragraphe de ce cours sera particulièrement dédié à son mouvement autour de la Terre. Les principaux systèmes de positionnement seront décrits, tout particulièrement le système GPS. On évoquera aussi des techniques très scientifiques comme le Laser et le VLBI (Very Long Base Interferometry) car elles interviennent dans la réalisation du système de référence géodésique mondial.

2. MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL

2.1 Objectifs:

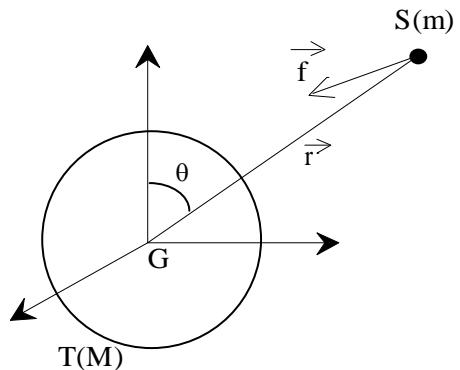
Le but de ce paragraphe est de décrire comment on peut exprimer la position et la vitesse d'un satellite artificiel, à tout instant, dans un repère lié à la Terre. En effet pour exprimer les relations d'observations en géodésie spatiale (souvent des distances) il faudra exprimer les coordonnées instantanées du satellite dans le même repère que la position de la station d'observation sur la Terre.

En sens inverse on verra comment à partir de la position et la vitesse du satellite dans un repère Terrestre, on peut déduire les caractéristiques de la trajectoire du satellite. C'est sur ces bases que s'appuie la trajectographie.

2.2 Principes du mouvement du satellite

Le mouvement du satellite est principalement régit par l'attraction de la Terre. Cependant d'autres forces interviennent et l'on peut écrire que la résultante des forces appliquées au satellite s'écrit en appliquant la loi fondamentale de la dynamique:

$$\vec{f} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{\text{grad}} V + \sum \vec{f_e}$$



$$\vec{r} = \vec{GS}$$

M: masse de la Terre

m : masse du satellite

V: potentiel résultant de l'attraction de la Terre, de la Lune et du Soleil sur le satellite

Le potentiel résultant de l'attraction de la Terre se développe en harmoniques sphériques:

$$V = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{n,m} (\cos \theta) (J_{n,m} \cos m\lambda + K_{n,m} \sin m\lambda) \right)$$

Le premier terme $\frac{GM}{r}$ correspond à une Terre sphérique composée de couches homogènes.

Si on donne une valeur 1 à ce terme, le deuxième terme non nul du développement (terme en J_2 du à l'aplatissement de la Terre) a une valeur de 10^{-3} , et la somme de tous les autres termes une valeur de 10^{-6} . De même le potentiel du à l'attraction de la lune et du soleil a une valeur de 10^{-8} .

$\sum \vec{f_e}$: somme des forces extérieures :

- force électromagnétique (si le satellite est chargé électriquement)
- force de frottement atmosphérique qui est d'autant plus grande que le satellite est bas
- pression de radiation due aux vents solaires
- effet secondaire de marées terrestres et océaniques qui est du aux déplacements de masses
- force de Coriolis et d'entrainement si le repère n'est pas inertiel
- correction relativiste

L'effet de ces forces est très petit par rapport à la force qui dérive du potentiel de la Terre sphérique et homogène ($< 10^{-6}$).

Le principe de l'étude du mouvement sera donc d'étudier le mouvement principal du à une Terre sphérique homogène, ce sera le mouvement Képlérien, et on considérera l'action de chacune des autres forces comme étant des perturbations de ce mouvement; on parlera de force perturbatrice.

2.3 Le mouvement Képlérien:

2.3.1 Le principe

Rappel des hypothèses:

- le système Terre satellite est un système isolé
- la Terre est un solide indéformable, constitué de couches sphériques homogènes
- le centre de gravité de la Terre est en translation par rapport aux étoiles , et peut être considéré comme le sommet d'un repère inertiel (ou galiléen)
- la masse du satellite est négligeable par rapport à celle de la Terre ($M=5,9 \cdot 10^{24}$ kg)

$$\vec{f} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{\text{grad}} V = -mGM \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}$$

G: constante de gravitation universelle

1^{ère} loi de Képler: la trajectoire d'un satellite est une ellipse dont le centre de gravité de la Terre occupe un des foyers

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}$$

r: distance satellite, centre de gravité
 a: demi-grand-axe de l'ellipse
 e: excentricité de l'ellipse
 v : anomalie vraie

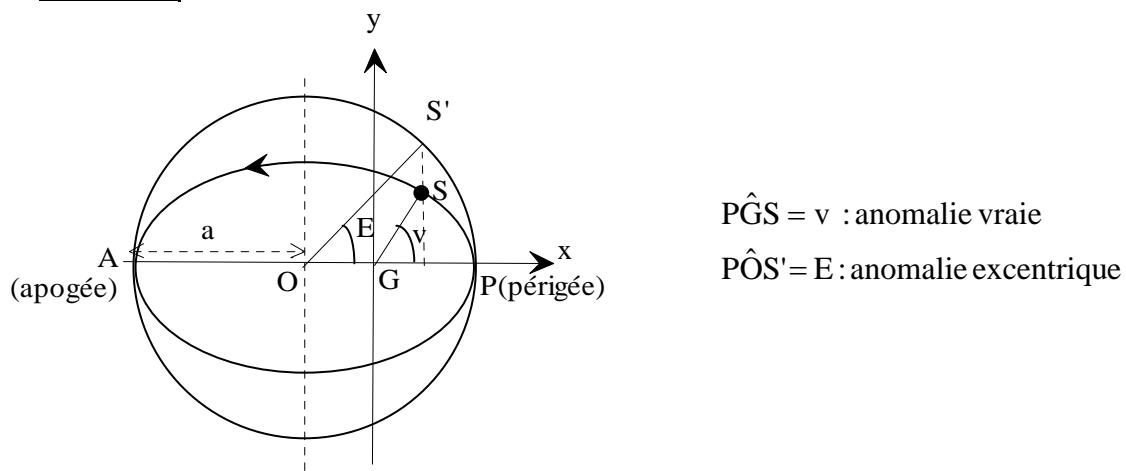
2^{ème} loi de Képler: Le rayon vecteur balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux

$$d\mathcal{A} = \frac{r^2}{2} dv = \frac{C}{2} dt \quad \text{avec } C \text{ constante des aires}$$

3^{ème} loi de Képler: Les carrés des périodes de révolutions des satellites de la Terre sont proportionnels aux cubes des demi-grands-axes des orbites.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

avec la constante géocentrique de gravitation: $\mu = GM = 3,986005 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$



De la loi des aires (2^{ème} loi de Képler) on déduit l'équation de Képler qui permet de positionner le satellite sur son orbite:

$$E - e \sin E = n(t - t_p) = M$$

avec:

- $n = \frac{2\pi}{T}$: le moyen mouvement
- T : la période du mouvement
- t_p : le temps de passage au périgée
- M : l'anomalie moyenne

En dérivant par rapport au temps l'équation de Képler on obtient:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{(1 - e \cos E)}$$

2.3.2 Les coordonnées orbitales:

Le repère orbital est défini par:

- origine : G centre de gravité de la Terre
- Gx: dirigé vers le périgée
- Gy \perp Gx, dans le plan de la trajectoire, orienté dans le sens de parcours de la trajectoire
- Gz : complète le trièdre.

On suppose connus: a, e, t_p (ou M_o à t_o), $\mu = GM$. On cherche les coordonnées orbitales (x,y,z), les coordonnées polaires (r,v) et les composantes de la vitesse à l'instant t

On calcule:

- la période du mouvement et le moyen mouvement à l'aide de la 3^{ème} loi:

$$T = 2\pi \left(\frac{a^3}{\mu} \right)^{1/2}$$

$$n = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{\mu}{a^3} \right)^{1/2}$$

- l'anomalie moyenne

$$M = n(t - t_p)$$

ou $M = M_o + n(t - t_o)$

- l'anomalie excentrique par la résolution de l'équation de Képler

$$E = M + e \sin E$$

calcul itératif avec $E_0 = M$

- les coordonnées orbitales:

$$\boxed{x = r \cos v = a \cos E - ae}$$

$$\boxed{y = r \sin v = b \sin E = a(1-e^2)^{1/2} \sin E}$$

$$\boxed{r = (x^2 + y^2)^{1/2} = a(1 - e \cos E)}$$

$$\boxed{\cos v = \frac{x}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}}$$

$$\boxed{\sin v = \frac{y}{r} = \frac{(1 - e^2)^{1/2} \sin E}{1 - e \cos E}}$$

$$\boxed{\tan \frac{v}{2} = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \tan \frac{E}{2}}$$

- les composantes orbitales de la vitesse:

On dérive les coordonnées orbitales par rapport au temps et on simplifie avec:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{n}{(1 - e \cos E)}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = -\frac{na \sin E}{(1 - e \cos E)}}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{na(1 - e^2)^{1/2}}{(1 - e \cos E)} \cos E}$$

On calcule les composantes radiale et tangentielle de la vitesse:

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{nae \sin E}{(1 - e \cos E)}}$$

En dérivant $\cos v$ par rapport au temps, on obtient la vitesse angulaire:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{n(1 - e^2)^{1/2}}{(1 - e \cos E)^2}}$$

D'où la vitesse tangentielle:

$$\boxed{r \frac{dv}{dt} = \frac{na(1 - e^2)^{1/2}}{(1 - e \cos E)}}$$

2.3.3 Coordonnées dans le repère céleste équatorial:

Le repère équatorial est défini par:

- origine: O centre de gravité de la Terre
- OZ axe instantané de rotation terrestre
- plan XOY : plan de l'équateur
- OX direction du point vernal (γ)

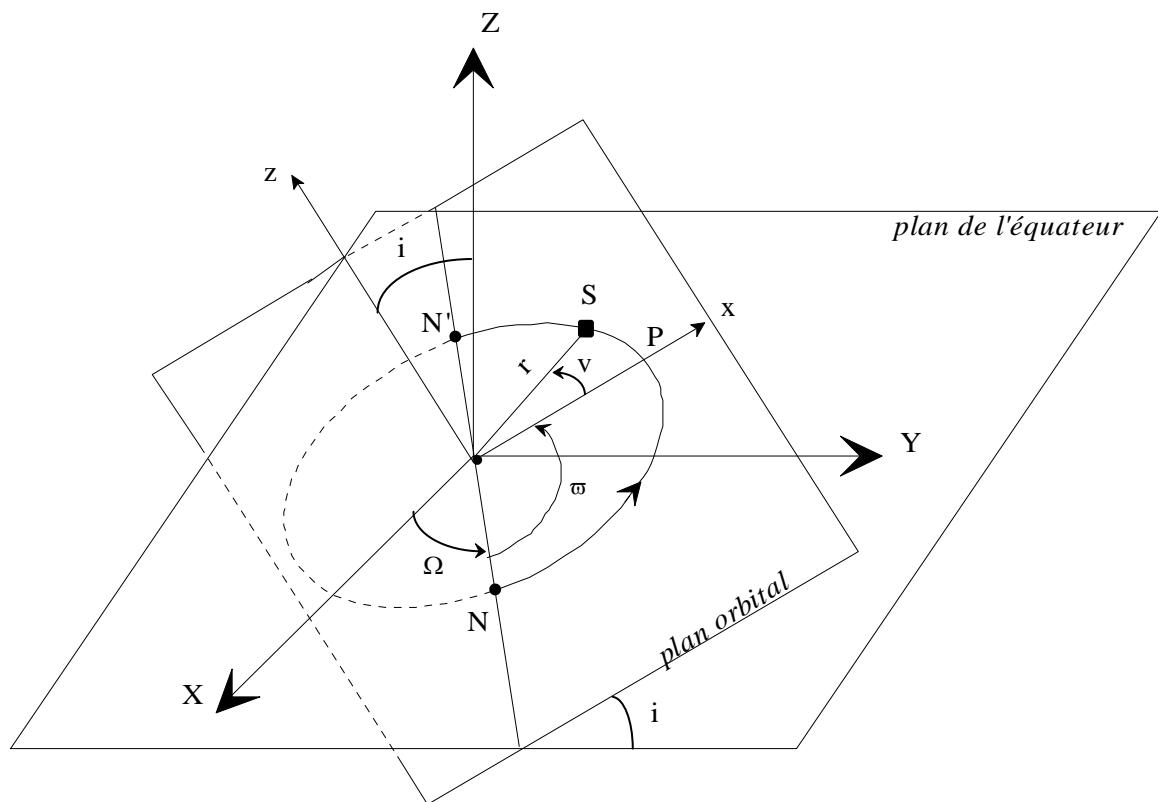
L'orbite du satellite est positionné dans ce repère à l'aide des **angles d'Euler**:

On appelle ligne des nœuds la droite NN' intersection du plan de l'orbite avec l'équateur. Le nœud ascendant (N) correspond au passage du satellite de dessous l'équateur à au dessus de l'équateur.

L'ascension droite (Ω) du nœud ascendant est l'angle, compté dans le sens direct, entre la direction Oy et la direction ON.

L'inclinaison (i) est l'angle entre le plan de l'équateur et le plan orbital.

L'argument de latitude au périgée (ω) est l'angle entre la direction ON et la direction OP avec P le Périgée.



2.3.4 Passage des coordonnées orbitales aux coordonnées équatoriales:

On fait le changement de repère qui permet d'amener le repère orbital en coïncidence avec le repère équatorial par une suite de rotation autour des axes de coordonnées: on amène l'axe Ox

sur l'axe ON par une rotation d'un angle $-\varpi$ autour de Oz, puis on bascule le plan orbital sur le plan équatorial par une rotation d'angle $-i$ autour de Ox (ON), enfin on amène Ox selon OX par une rotation d'un angle $-\Omega$ autour de Oz(OZ).

on note : $\begin{bmatrix} \vec{r} \\ r \end{bmatrix}_{Eq} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ le vecteur position exprimé dans le repère équatorial

$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ r \end{bmatrix}_{Orb} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le vecteur position exprimé dans le repère orbital

$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ r \end{bmatrix}_{Eq} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \vec{r} \\ r \end{bmatrix}_{Orb}$$

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{R}_3(-\Omega) \times \mathbf{R}_1(-i) \times \mathbf{R}_3(-\varpi)}$$

$$\mathbf{R}_3(-\Omega) = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1(-i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_3(-\varpi) = \begin{bmatrix} \cos \varpi & -\sin \varpi & 0 \\ \sin \varpi & \cos \varpi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.5 Calcul du vecteur vitesse dans le repère équatorial:

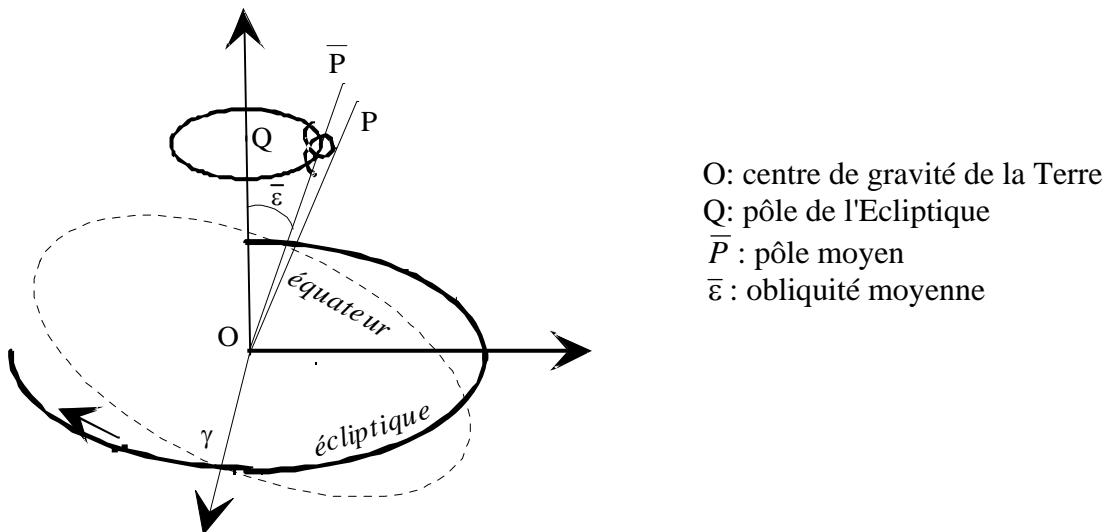
$$\begin{bmatrix} \vec{dr} \\ \frac{d}{dt} \end{bmatrix}_{Eq} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \vec{dr} \\ \frac{d}{dt} \end{bmatrix}_{Orb} + \frac{d\mathbf{R}}{dt} \begin{bmatrix} \vec{r} \\ r \end{bmatrix}_{Orb}$$

Dans le mouvement képlérien les angles Ω, i, ϖ sont constants. Donc $\frac{d\mathbf{R}}{dt} = 0$ et

$$\boxed{\begin{bmatrix} \vec{dr} \\ \frac{d}{dt} \end{bmatrix}_{Eq} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \vec{dr} \\ \frac{d}{dt} \end{bmatrix}_{Orb}}$$

Mouvements du repère équatorial : précession, nutation (rappels)

Sous l'effet de la précession lunisolaire l'axe $O\bar{P}$ décrit en 26000ans un cône autour de OQ et d'un angle $\bar{\epsilon} \approx 23^{\circ}26'$. Sous cet effet le point γ rétrograde d'environ $50''$ par an. Sous l'effet de la nutation l'axe des pôles oscille autour de la position moyenne, d'environ $18''$ en 18,6 ans, ce qui a pour effet de faire varier l'obliquité et de provoquer un mouvement oscillant du point γ .



On note \mathbf{EqMto} l'équateur moyen (corrigé de la précession) à l'instant t_0 et \mathbf{EqMt} l'équateur moyen à l'instant t . Soit \mathbf{P} la matrice de précession

$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{bmatrix}_{EqMt} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{bmatrix}_{EqMto}$$

On note \mathbf{EqVt} l'équateur vrai (corrigé de la précession et de la nutation) à l'instant t . Soit \mathbf{N} la matrice de nutation.

$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{bmatrix}_{EqVt} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{r} \end{bmatrix}_{EqMt}$$

Après ces corrections l'axe OZ du repère est l'axe instantané de rotation à l'instant t .

2.3.6 Passage du repère équatorial au repère terrestre général instantané:

Le repère terrestre général instantané est défini par:

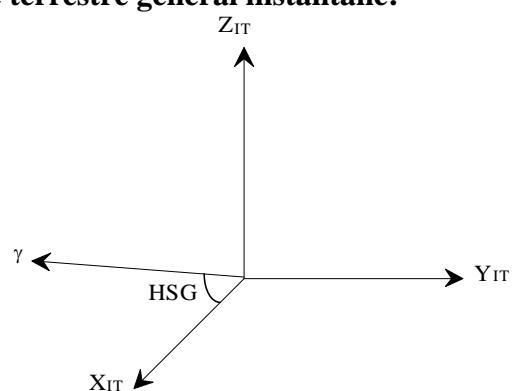
O: centre de gravité de la Terre

OZ_{IT} : axe de rotation instantané de la Terre

(vrai à l'instant t)

$OX_{IT}Y_{IT}$: plan de l'équateur

$OX_{IT}Z_{IT}$: plan méridien origine



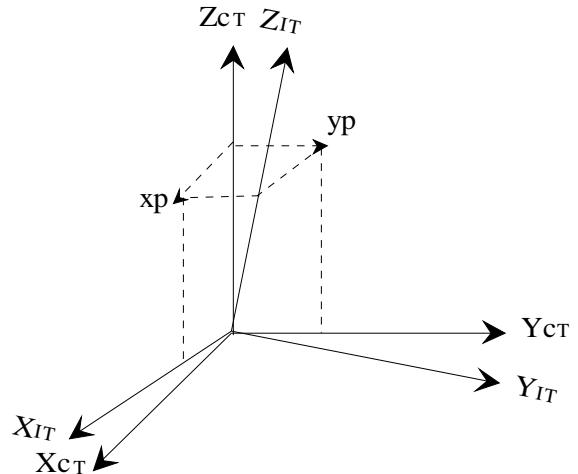
Pour passer du repère équatorial vrai à l'instant t au repère terrestre instantané il faut faire une rotation autour de OZ et d'un angle HSG (heure sidérale de Greenwich)

$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ \end{bmatrix}_{IT} = \mathbf{R}_3(HSG) \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \end{bmatrix}_{EqVt}$$

2.3.6 Passage au repère terrestre conventionnel (ITRF):

Il s'agit ici de tenir compte du mouvement du pôle par rapport à la Terre. On note $OX_{CT}, OY_{CT}, OZ_{CT}$ le repère conventionnel (ITRF) et x_p, y_p les coordonnées du pôle instantané dans ce repère.

$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ \end{bmatrix}_{CT} = \mathbf{R}_2(-x_p) \mathbf{R}_1(-y_p) \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \end{bmatrix}_{IT}$$



2.4 Le problème inverse de Képler

En partant des composantes du rayon vecteur et de la vitesse d'un satellite à un instant t dans le repère équatorial, il s'agit ici de trouver les paramètres de la trajectoire et du satellite: a, e, Ω , i, ϖ et M (à l'instant t).

2.4.1 Calcul de l'inclinaison:

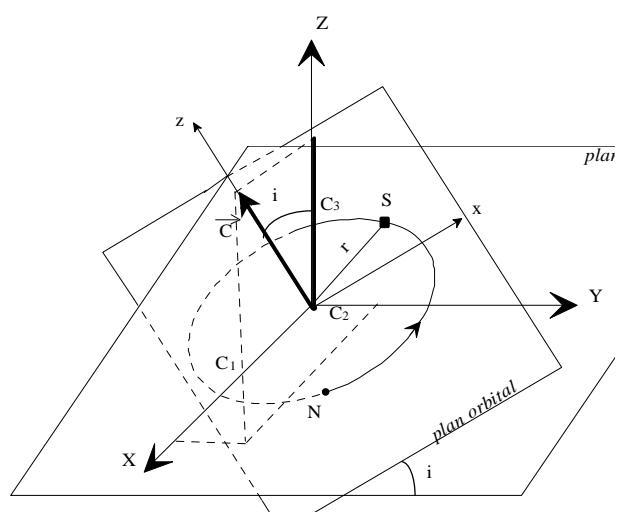
On écrit le vecteur moment cinétique dans le repère équatorial:

$$\begin{bmatrix} \vec{C} \\ \end{bmatrix}_{Eq} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r} \\ \end{bmatrix}_{Eq} \wedge \left[\frac{d \vec{r}}{dt} \right]_{Eq} \text{ soit } C = \|\vec{C}\|$$

Ce vecteur est perpendiculaire au rayon vecteur et au vecteur vitesse, il est donc perpendiculaire au plan de la trajectoire et donc porté par l'axe Oz.

$$\cos i = \frac{C_3}{C}$$

$$i \in [0, \pi]$$

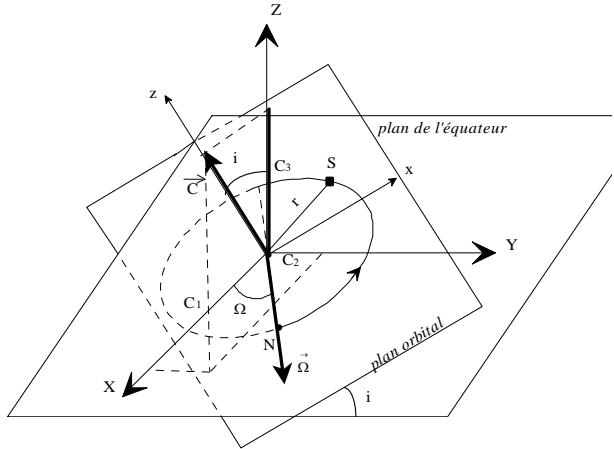


2.4.2 Calcul de l'ascension droite du nœud ascendant:

Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires du repère équatorial et $\vec{\Omega}$ le vecteur unitaire de la ligne des nœuds \vec{ON} . La ligne des nœuds est perpendiculaire à la fois à Oz, et OZ donc:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{C}}{C \sin i} = \frac{1}{C \sin i} \begin{pmatrix} -C_2 \\ C_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cos \Omega &= \vec{\Omega} \bullet \vec{i} = -\frac{C_2}{C \sin i} \\ \sin \Omega &= \vec{\Omega} \bullet \vec{j} = \frac{C_1}{C \sin i} \\ \Omega &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$



2.4.3 Calcul de la somme $\varpi + v$

On définit un repère auxiliaire de la manière suivante:

OX_{AUX} est selon la ligne des nœuds

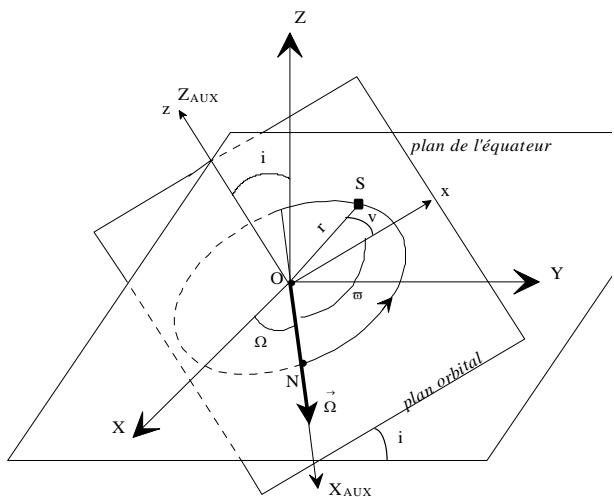
OZ_{AUX} est confondu avec l'axe Oz du repère orbital

OY_{AUX} est dans le plan orbital, perpendiculaire à OX_{AUX}

$$[\vec{r}]_{AUX} = \mathbf{R}_1(i) \times \mathbf{R}_3(\Omega) \times [\vec{r}]_{Eq} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$\varpi + v = (\vec{\Omega}, \vec{r})$$

$$\begin{cases} \cos(\varpi + v) = \frac{r_1}{r} \\ \sin(\varpi + v) = \frac{r_2}{r} \end{cases} \quad \varpi + v \in [0, 2\pi]$$



2.4.4 Calcul du demi grand-axe a

On écrit que l'énergie totale (\mathcal{E}) du système Terre satellite est la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu}{r} + \frac{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^2}{2}$$

\mathcal{E} est calculable dans n'importe quel repère et est constante. On voit que l'on peut la calculer avec les vecteurs position et vitesse connus dans le repère équatorial.

On calcule $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^2$ dans le repère orbital à partir des équations du paragraphe 2.3.2:

$$\text{On trouve: } \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = n^2 a^2 \frac{1+e \cos E}{1-e \cos E}$$

$$\text{et } n^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\mu}{a^3} \text{ (3ème loi de Képler)}$$

L'énergie étant constante on peut la calculer au moment du passage au périhélie:

$$\begin{aligned} E &= 0 \\ r &= a(1-e) \\ \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|^2 &= \frac{\mu}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right) \\ \mathcal{E} &= -\frac{\mu}{2a} \end{aligned}$$

$$a = -\frac{\mu}{2\mathcal{E}}$$

2.4.5 Calcul de l'excentricité e et de la latitude au périhélie ω :

Soit le vecteur de Laplace:

$$\vec{e} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{C}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}$$

Ce vecteur est calculable en connaissant le vecteur position et le vecteur vitesse dans le repère équatorial. On peut aussi le calculer dans le repère orbital:

$$\left[\vec{C} \right]_{orb} = \left[\vec{r} \right]_{orb} \wedge \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]_{orb} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ 0 \end{pmatrix}$$

En prenant les relations qui donnent les vecteurs position et vitesse dans le paragraphe 2.3.2 on trouve:

$$[\vec{C}]_{orb} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (a\mu(1-e^2))^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{C} \right]_{orb} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (a\mu(1-e^2))^{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dt}(a\mu(1-e^2))^{1/2} \\ \frac{dx}{dt}(a\mu(1-e^2))^{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

finalement

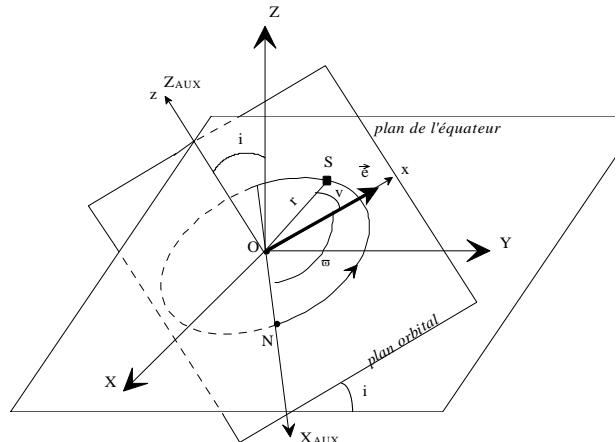
$$[\vec{e}]_{orb} = \left[\frac{1}{\mu} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{C} \right) - \frac{\vec{r}}{r} \right]_{orb} = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de Laplace est donc un vecteur porté par l'axe Ox du repère orbital et de module e.

Dans le repère auxiliaire les coordonnées du vecteur de Laplace sont:

$$[\vec{e}]_{AUX} = \begin{pmatrix} e \cos \varpi \\ e \sin \varpi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ayant calculé le vecteur de Laplace dans le repère équatorial on en déduit ses coordonnées dans le repère auxiliaire par :



$$[\vec{e}]_{AUX} = \mathbf{R}_1(i) \times \mathbf{R}_3(\Omega) x [\vec{e}]_{Eq}$$

Connaissant $e \cos \varpi$ et $e \sin \varpi$ on en déduit e et $\varpi \in [0, 2\pi]$.

On pouvait aussi calculer e et E directement à partir des modules C et r:

$$e = \left(1 - \frac{C^2}{\pi a} \right)^{1/2}$$

$$\cos E = \frac{a - r}{ae}$$

Cependant on remarque que pour des orbites quasi circulaires ($e \approx 0$), ces relations ne sont pas bonnes.

2.4.6 Calcul des anomalies à l'instant t:

Anomalie vraie:

$$v = (\varpi + v) - \varpi$$

Anomalie excentrique:

$$\tan \frac{E}{2} = \left(\frac{1-e}{1+e} \right)^{1/2} \tan \frac{v}{2}$$

Anomalie moyenne:

$$M = E - e \sin E$$

2.5 Le mouvement perturbé

2.5.1 Le principe :

On décrit le mouvement d'un satellite comme un mouvement Képlérien du à une Terre composée de couches sphériques homogènes et perturbé par la non sphéricité, la non homogénéité et l'effet des autres forces.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{f}$$

\vec{F} est la partie sphérique du champ de gravitation terrestre

\vec{f} est la résultante de toutes les autres forces:

- autres termes du champ de gravitation terrestre
- force gravitationnelle luni-solaire
- somme des forces extérieures

En faisant $\vec{f} = 0$ on obtient le mouvement képlérien

$\vec{f} \neq 0$ on obtient le mouvement perturbé

\vec{f} dépend de la position du satellite (\vec{r}), de sa vitesse $\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)$ et du temps (t). Les composantes

de \vec{f} ne sont pas toujours bien connues.

2.5.2 Ordre de grandeur des accélérations perturbatrices (par rapport à $\frac{\mu}{r^2}$)

- gravitation terrestre , développement en harmoniques sphériques:

$n=2$	10^{-3}
$n>2$	10^{-6}
- freinage atmosphérique (vers 230km d'altitude)	10^{-6}
- attraction luni-solaire	10^{-7}
- effet secondaire de marée	10^{-7} à 10^{-8}
- pression de radiation solaire	10^{-7} à 10^{-8}
- accélération d'entraînement , effet Coriolis	10^{-8}
- effets relativistes	10^{-9}

- attraction des planètes

10^{-11}

- vents solaires

$10^{-10} \text{ à } 10^{-11}$

On cherche à intégrer le système différentiel:

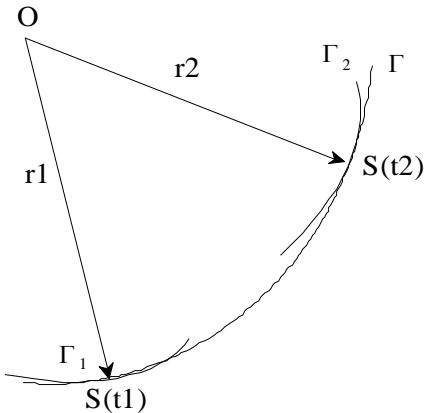
$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \vec{f} \left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right)$$

sachant que:

- la solution $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ est connue (mouvement képlérian)
- que $|\vec{f}|$ est petit
- que la plus grande partie de \vec{f} peut être exprimée analytiquement

2.5.3 Orbite osculatrice :

À un instant quelconque t si on a la position et la vitesse du satellite on peut calculer une orbite képlérienne (cf § 2.4) qui est l'orbite osculatrice à cet instant.



Γ : orbite réelle

Γ_1 : orbite osculatrice à l'instant t_1 calculée à partir de $\vec{r}_1, \frac{d\vec{r}}{dt}$ soit $(a_1, e_1, i_1, \Omega_1, \varpi_1, M_1)$

Γ_2 : orbite osculatrice à l'instant t_2 calculée à partir de $\vec{r}_2, \frac{d\vec{r}}{dt}$ soit $(a_2, e_2, i_2, \Omega_2, \varpi_2, M_2)$

On peut si on connaît les éléments de l'orbite Képlérienne à un instant t_0 calculer les éléments képlériens à un instant t proche de t_0 par un développement limité au premier ordre:

$$a(t) = a(t_0) + \frac{da}{dt}(t - t_0)$$

$$e(t) = e(t_0) + \frac{de}{dt}(t - t_0)$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{di}{dt}(t - t_0)$$

$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \frac{d\Omega}{dt}(t - t_0)$$

$$\varpi(t) = \varpi(t_0) + \frac{d\varpi}{dt}(t - t_0)$$

$$M(t) = M(t_0) + \frac{dM}{dt}(t - t_0)$$

où les $\frac{da}{dt}, \frac{de}{dt}, \frac{di}{dt}, \frac{d\Omega}{dt}, \frac{d\varpi}{dt}, \frac{dM}{dt}$ sont fonction des éléments de l'orbite et de la force perturbatrice.

Par exemple, si la force perturbatrice dérive d'un potentiel P les équations de **Lagrange** nous donnent les variations des éléments d'orbite:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial P}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial P}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial P}{\partial \varpi} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2 \sin i (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial \varpi} - \frac{1}{na^2 \sin i (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sin i (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial i} \\ \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{(1-e^2)^{1/2}}{na^2 e} \frac{\partial P}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sin i (1-e^2)^{1/2}} \frac{\partial P}{\partial i} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial P}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial P}{\partial e}\end{aligned}}$$

Prenons par exemple comme force perturbatrice, le terme en J_2 , de la gravitation terrestre. On rappelle que le potentiel terrestre se développe en harmoniques sphériques:

$$\boxed{V = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n P_{n,m} (\cos \theta) (J_{n,m} \cos m\lambda + K_{n,m} \sin m\lambda) \right)}$$

V est fonction de r, λ, θ . On a vu dans le paragraphe 2.3 qu'en connaissant les éléments képlériens $a, e, i, \Omega, \varpi, M$ on pouvait exprimer la position du satellite à l'instant t dans le repère terrestre. On peut donc dire que V peut s'exprimer en fonction des paramètres célestes et que l'on peut calculer les dérivées partielles de V par rapport à chacun de ces paramètres. Si l'on prend le premier terme non nul du développement (terme en J_2 du à l'appattement de la Terre, et qui est le terme perturbateur le plus important) on obtient comme variation des éléments d'orbite:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= 0 \\
 \frac{de}{dt} &= 0 \\
 \frac{di}{dt} &= 0 \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= -\frac{3}{2} n \frac{R^2}{a^2} J_2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \cos i \\
 \frac{d\varpi}{dt} &= \frac{3}{4} n \frac{R^2}{a^2} J_2 \frac{1}{(1-e^2)^2} (5 \cos^2 i - 1) \\
 \frac{dM}{dt} &= n + \frac{3}{4} n \frac{R^2}{a^2} J_2 \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} (3 \cos^2 i - 1)
 \end{aligned}$$

avec R : rayon équatorial terrestre

La perturbation J_2 n'a pas d'effet sur les grandeurs de la trajectoire (a, e), ni sur l'inclinaison de l'orbite. Par contre on voit que sous l'effet de J_2 la ligne des nœuds rétrograde et que la ligne apogée-périgée bouge dans un sens ou dans l'autre selon la valeur de l'inclinaison. On voit aussi que le moyen mouvement est modifié.

2.5.4 Les orbites radiodiffusées:

Dans le cas des systèmes satellitaires où le satellite est actif, c'est à dire qu'il envoie des ondes vers la Terre, chaque satellite envoie un message, décodable par le récepteur au sol et dans lequel on trouve les éphémérides (ou orbite opérationnelle) du satellite qui correspondent aux éléments képlériens et à leurs variations à un instant t_0 . Ceci permet à l'utilisateur de calculer en temps réel la position du satellite à l'instant de l'observation.

Toutes les perturbations ne sont pas aussi facile à modéliser que la perturbation en J_2 . Aussi ces perturbations sont modélisées numériquement par observation en continu des satellites par des stations au sols appelées stations de contrôle. Les paramètres et leur variations sont calculés pour l'instant t_0 et envoyés dès que possible au satellite par des stations de réinjection.

2.5.4 Etude d'orbites particulières dans le cadre de la perturbation en J_2 :

Orbites des satellites géostationnaires:

Le but est de voir où recevoir le satellite en permanence à partir d'une zone terrestre définie comme par exemple pour les télécommunications ou la météorologie. Pour cela il faut que le satellite suive la Terre dans sa rotation et on voit qu'il faut donc respecter les conditions suivantes:

- la période de révolution doit être égale à la rotation de la Terre
- la rotation du satellite doit se faire autour de l'axe de rotation Terrestre et donc le satellite doit être équatorial ($i=0$)
- la rotation doit être uniforme et donc l'orbite doit être circulaire ($e=0$)

Dans le cadre de la perturbation en J2 on doit tenir compte de la rétrogradation de la ligne des nœud et du mouvement du périgée. Donc il faut:

$$\boxed{\frac{d\varpi}{dt} + \frac{d\Omega}{dt} + \frac{dM}{dt} = \omega_T}$$

avec $\mu = 3,986005 \cdot 10^5 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
 $R = 6378,15 \text{ km}$
 $J_2 = 1082,7 \cdot 10^{-6}$
 $\omega_T = 0,7291 \cdot 10^{-4} \text{ rd.s}^{-1}$ (vitesse de rotation terrestre)

On trouve la solution unique:

$$a = 42166 \text{ km}$$

Orbites des satellites héliosynchrones:

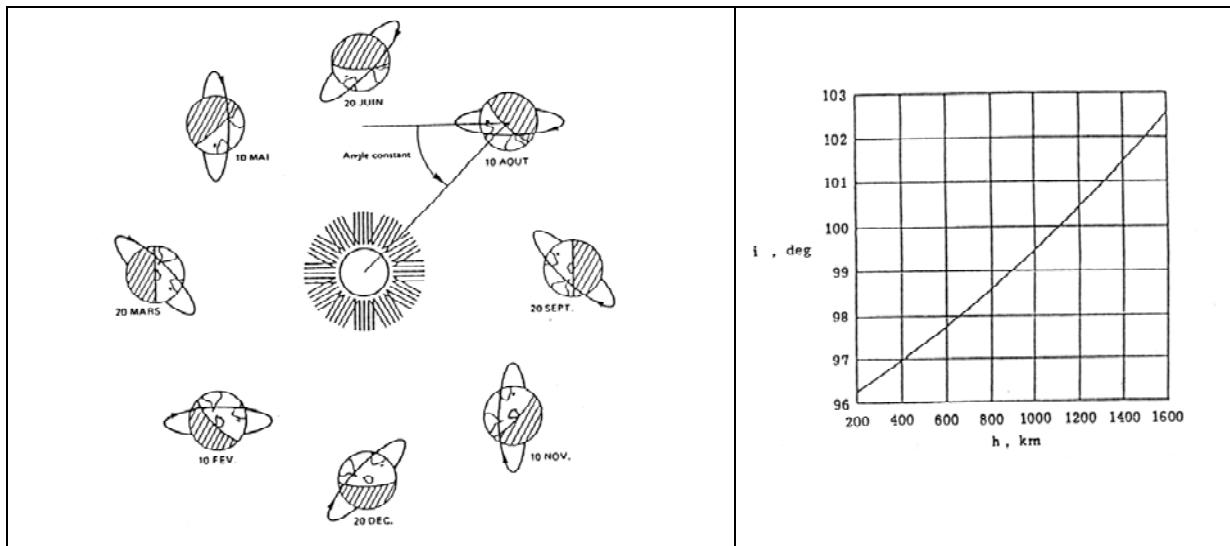
Le but est de voir à partir du satellite de manière répétitive certaines régions sous des conditions d'éclairement constant. Pour cela on utilise la rétrogradation des nœuds en faisant en sorte que la ligne des nœuds suive le mouvement apparent du soleil:

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2}n \frac{R^2}{a^2} J_2 \frac{1}{(1-e^2)^2} \cos i = \omega s}$$

ωs : vitesse apparente du soleil moyen $\cong 0,98561228^\circ/\text{jour}$

Pour une orbite circulaire, on obtient comme conditions:

- $i > 90^\circ$
- $i = f(a)$: l'inclinaison dépend de l'altitude du satellite



On utilise les satellite héliosynchrones pour l'observation de la Terre, particulièrement en télédétection. Certains satellites de télédétection sont aussi géodésiques.

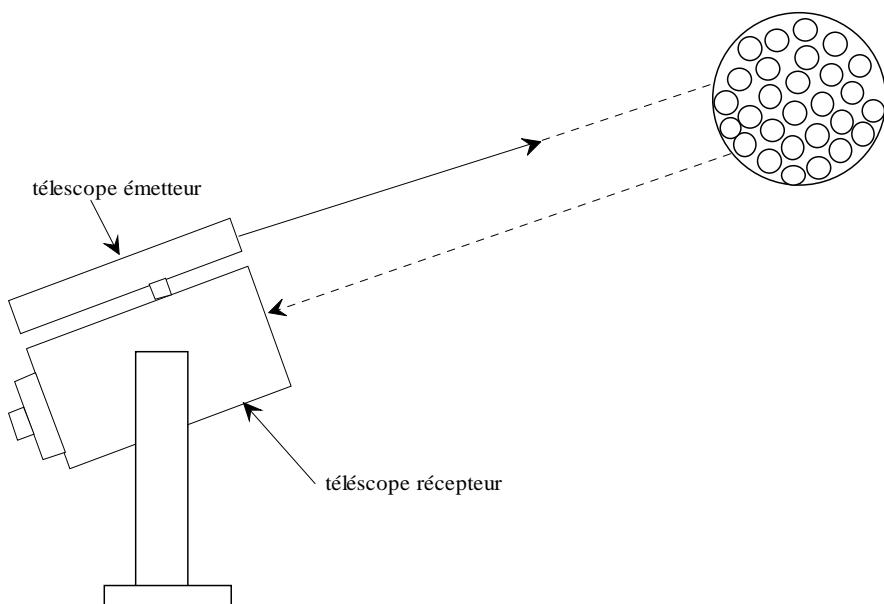
3.LES MESURES ET LES TRAITEMENTS

3.1 Les types de mesures

Dans les types de mesures on peut citer pour mémoire les mesures de direction en astronomie tout d'abord par détermination d'angles et de temps, puis en photogrammétrie sur fond d'étoiles par détermination sur des clichés de coordonnées par rapport au étoiles à un instant donné. Les mesures actuelles consistent à déterminer des distances ou des différences de distances, en utilisant une onde électromagnétique qui est émise soit par le satellite ou l'objet céleste (satellite actif) soit par un émetteur au sol. Selon le cas on aura un récepteur au sol ou embarqué dans un satellite on utilisera aussi les termes de systèmes descendants ou ascendants. Les mesures sur les ondes électromagnétiques sont soit des temps ou des différences de temps de propagation, du Doppler ou des différences de phases.

3.1.1 Mesure d'un temps de propagation aller et retour:

L'exemple pour ce type de mesure est le tir au laser sur satellites ou sur la Lune. Du sol on envoie une impulsion laser qui déclenche un chronomètre et va se réfléchir sur un réflecteur dans l'espace. A son retour elle est reçue, amplifiée et provoque l'arrêt du chronomètre.



La mesure est donc l'écart de temps entre l'émission et la réception et on obtient la distance à l'instant t par:

$$\rho_i^j = \frac{C}{2}(t_r - t_e)$$

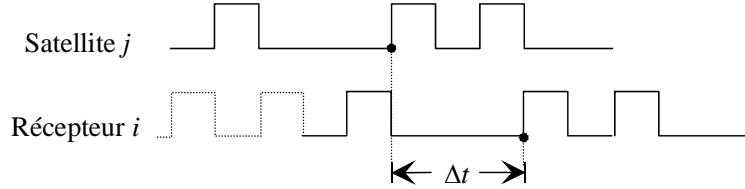
C : vitesse de la lumière dans l'atmosphère

$\rho_i^j = \sqrt{(X_i - X^j)^2 + (Y_i - Y^j)^2 + (Z_i - Z^j)^2}$ est la distance géométrique entre la station i et le satellite j

t_e et t_r sont respectivement les instants d'émission et de réception.

3.1.2 Mesure d'un temps de propagation aller seul:

C'est le type de mesure qui est utilisé en GPS et appelée pseudo-distance sur le code. Le satellite émet une onde qui est modulée par un code pseudo-aléatoire. Le récepteur connaît le code et génère une réplique de ce code avec sa propre horloge. Le code qui provient du satellite est en retard par rapport au code du récepteur à cause du temps qu'il met à parvenir au récepteur.



Le récepteur mesure le décalage Δt_i^j . On en déduit la distance :

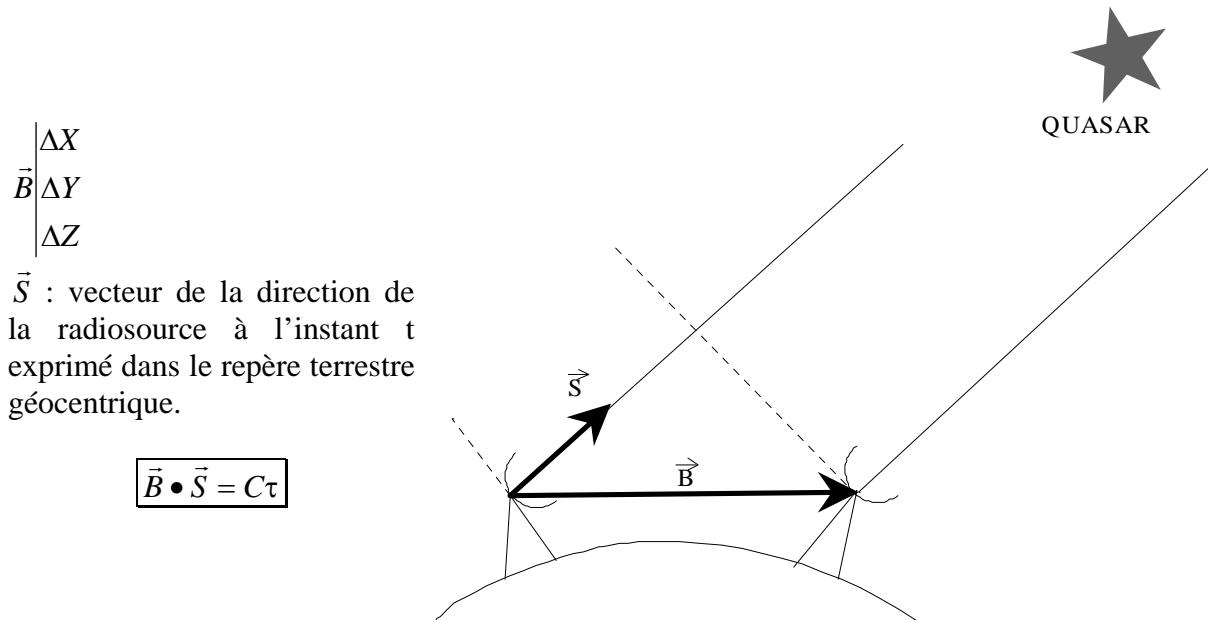
$$p_i^j = C\Delta t_i^j$$

$$\Delta t_i^j = t_{ri} - t_e^j$$

On remarque ici que Δt_i^j est la différence entre l'instant d'émission et l'instant de réception, mais mesurés l'un avec l'horloge satellite et l'autre l'horloge récepteur. Ces deux horloges ne sont pas exactement synchronisées et on doit donc appliquer une correction d'horloges.

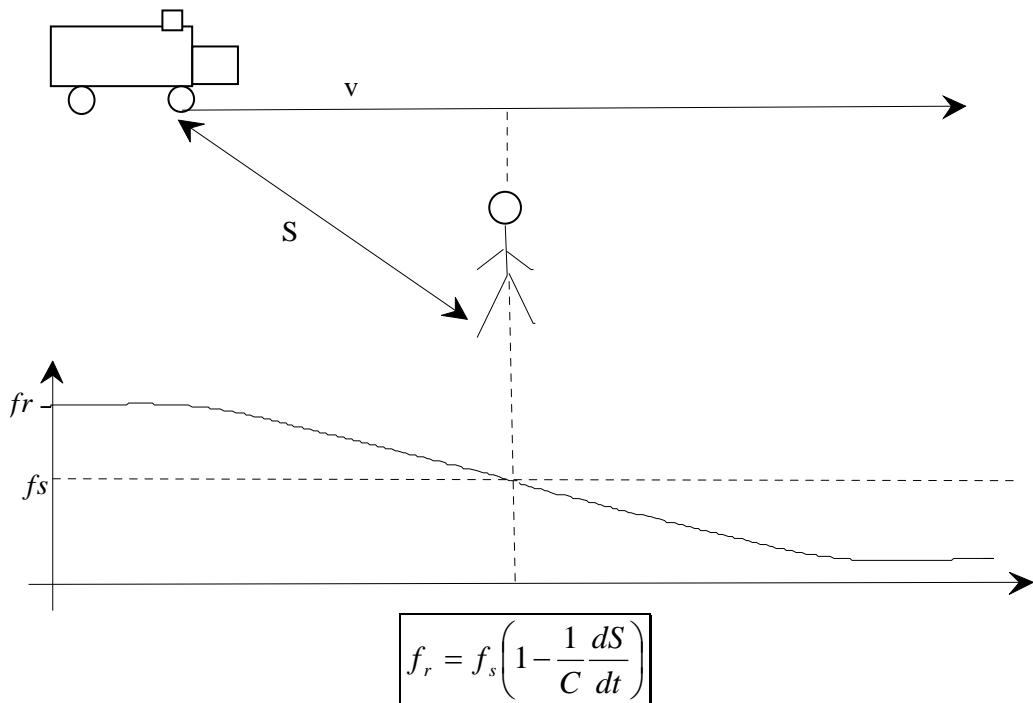
3.1.3 Mesure d'une différence de temps de propagation:

C'est le type de mesure que l'on rencontre en VLBI (Very Long Base Interferometry). Deux radiotéléscopes très éloignés l'un de l'autre (jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres) observent simultanément une même radiosource extragalactique. Le signal reçu à chacune des stations est daté précisément avec une horloge atomique et enregistré sur support informatique. La corrélation des deux enregistrements permet de mesurer τ le décalage de temps d'arrivée de l'onde entre les deux stations. On en déduit la ligne de base \vec{B} entre les deux stations.

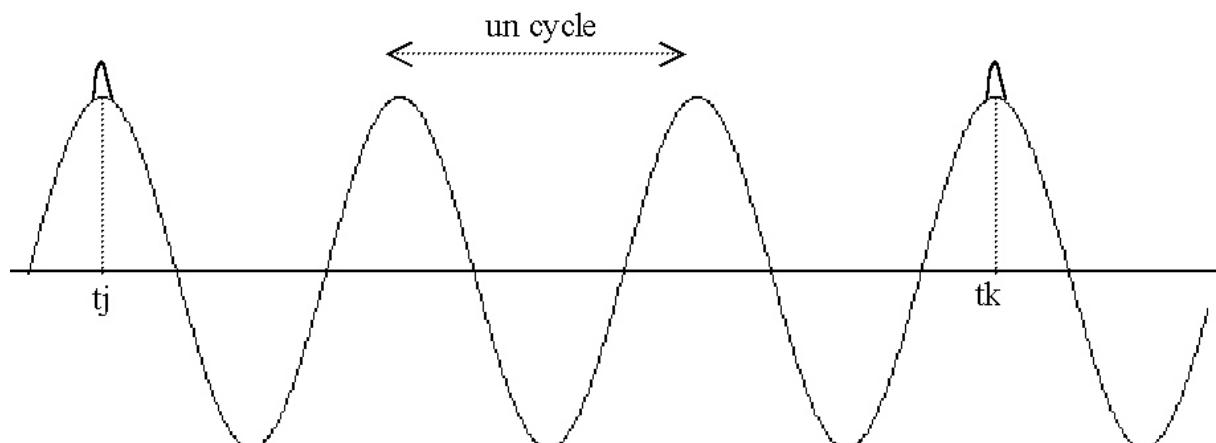


3.1.4 Mesure Doppler:

On rappelle ici l'effet Doppler-Fiseau : un objet en mouvement émet une onde à une fréquence stable f_s . Cette onde est reçue par un observateur à une fréquence variable f_r . Un exemple de la vie courante est le bruit que fait une ambulance qui paraît aigu si l'ambulance se rapproche et devient de plus en plus grave au fur et à mesure qu'elle s'éloigne.

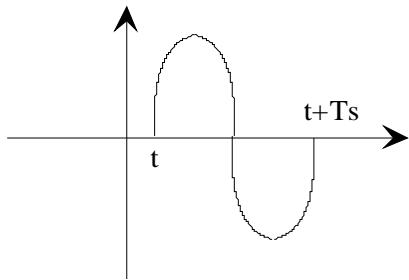


En géodésie spatiale le satellite émet un signal de fréquence stable et des marques de temps à intervalles constants.



Soit N_{jk} le nombre de cycles émis entre t_j et t_k :

$$N_{jk} = f_s(t_k - t_j)$$



Soit un cycle qui est à l'instant t . Il se termine à l'instant $t+Ts$, Ts est la période du signal émis : $Ts = \frac{1}{fs}$

Ce cycle arrive sur Terre au récepteur à l'instant : $t + \frac{\rho(t)}{C}$

La fin du cycle est reçue à l'instant : $t + Ts + \frac{\rho(t+Ts)}{C}$

La période apparente pour le récepteur est :

$$Tr = Ts + \frac{\rho(t+Ts) - \rho(t)}{C}$$

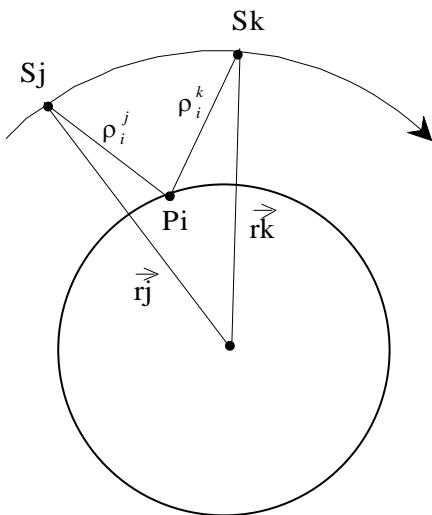
On développe au premier ordre :

$$Tr = Ts + \frac{Ts}{C} \frac{d\rho}{dt} = Ts \left(1 + \frac{1}{C} \frac{d\rho}{dt} \right)$$

On en déduit la fréquence de réception apparente à l'instant t :

$$fr = \frac{1}{Tr} = \frac{1}{Ts} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{C} \frac{d\rho}{dt} \right)} = fs \left(1 - \frac{1}{C} \frac{d\rho}{dt} \right)$$

$\frac{d\rho}{dt}$: est la vitesse radiale du satellite par rapport au récepteur.



S_j et S_k sont les positions du satellite aux instants t_j et t_k
 P_i : station sur Terre

Dans le récepteur le signal reçu ,de fréquence variable fr est mélangé avec un signal de référence généré par le récepteur et de fréquence constante fg . Cela donne une fréquence de battement : $fb = fg - fr$

Les marques de temps, émises aux instants t_j et t_k arrivent au récepteur aux instants τ_j et τ_k

$$\tau_j = t_j + \frac{\rho_i^j}{C}$$

$$\tau_k = t_k + \frac{\rho_i^k}{C}$$

Le récepteur compte le nombre de cycles, à la fréquence fb , entre les instants τ_j et τ_k :

$$N_{jk} = \int_{\tau_j}^{\tau_k} fb d\tau = \int_{\tau_j}^{\tau_k} fg d\tau - \int_{\tau_j}^{\tau_k} fr d\tau$$

Si l'oscillateur du récepteur est assez stable, fg est constant durant un passage de satellite :

$$\int_{\tau_j}^{\tau_k} fg d\tau = fg(\tau_k - \tau_j) = fg\left(t_k + \frac{\rho_i^k}{C} - t_j - \frac{\rho_i^j}{C}\right)$$

$\int_{\tau_j}^{\tau_k} fr d\tau$: est le nombre de cycles reçus entre τ_j et τ_k , c'est égal au nombre de cycles émis entre t_j et t_k :

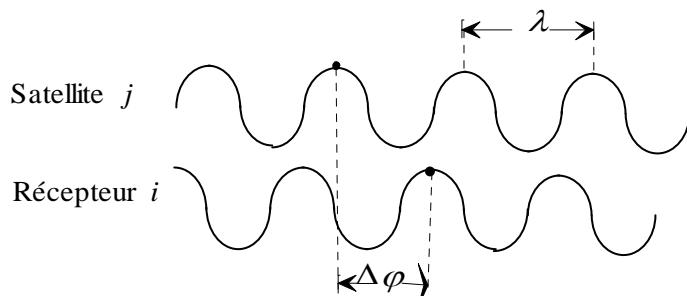
$$\int_{\tau_j}^{\tau_k} fr d\tau = \int_{t_j}^{t_k} fs dt = fs(t_k - t_j)$$

Finalement on a la relation d'observation :

$$N_{jk} = (fg - fs)(t_k - t_j) + \frac{fg}{C}(\rho_i^k - \rho_i^j)$$

3.1.5 Mesure de phase:

La mesure de phase se fait sur les ondes porteuses. Le principe de la mesure est la comparaison de la phase du signal émis par le satellite, reçu par le récepteur avec la phase du signal généré par le récepteur et qui est une réplique du signal du satellite. Le récepteur reçoit à l'instant t_R la phase du signal émis par le satellite à l'instant t_E .



Rappel:

Un signal sinusoïdal $x(t)$ d'amplitude A et de fréquence f s'écrit :

$$x = A \cos(\omega \times (t - t_o) + \phi_o)$$

avec :

$\omega = 2\pi f$ en radians par seconde

ϕ_o : la phase à l'instant origine t_o

La phase ϕ à l'instant t , exprimée en radians est : $\phi_{radians} = 2\pi f \times (t - t_o) + \phi_o$

On exprime souvent ϕ en cycle : $\phi_{cycles} = f \times (t - t_o) + \frac{\phi_o}{2\pi}$

Un cycle correspond à une période, et à une distance parcourue égale à la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{C}{f}$$

La distance ρ_i^j entre le récepteur et le satellite est donnée en comparant la phase du signal à l'instant de réception (t_R) à la phase à l'instant d'émission (t_E). En effet on a:

$$\phi(t_R) - \phi(t_E) = f \times (t_R - t_E) \quad (\text{en cycles})$$

$$\text{et } (t_R - t_E) = \frac{\rho_i^j}{C}$$

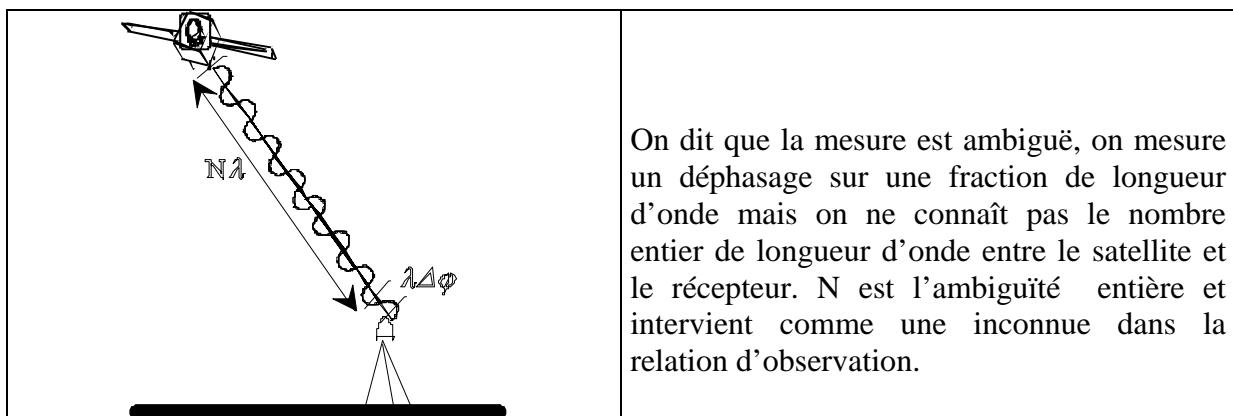
$$\Rightarrow \phi(t_R) - \phi(t_E) = \frac{f\rho_i^j}{C}$$

Lorsque le récepteur compare, la phase $\phi_i(t_R)$ de son signal à la phase $\phi^j(t_E)$ du signal qu'il reçoit à t_R , on obtient un déphasage $\Delta\phi$ compris entre 0 et 1 cycle, c'est à dire la partie décimale de la différence $\phi_i(t_R) - \phi^j(t_E)$. La différence de phase totale est :

$$\phi_i(t_R) - \phi^j(t_E) = \Delta\phi(t_R) + N_i^j(t_R)$$

où $N_i^j(t_R)$ est un nombre entier inconnu de cycles que le récepteur ne peut pas mesurer.

$$\boxed{\lambda\Delta\phi(t_R) = \rho_i^j - \lambda N_i^j(t_R)}$$



3.2 La propagation des ondes

3.2.1 Vitesse de propagation de la phase et de groupe

Considérons une onde électromagnétique de fréquence f et de longueur d'onde λ , la vitesse de sa phase est :

$$v_{ph} = \lambda f$$

Pour un groupe d'ondes de fréquences sensiblement différentes, on définit une vitesse de propagation de groupe par :

$$v_{gr} = -\frac{df}{d\lambda} \lambda^2$$

C'est cette vitesse de groupe que l'on doit prendre en considération pour les mesures de pseudodistances sur les codes.

On peut établir une relation entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe :

En différenciant l'expression donnant v_{ph} on obtient:

$$d v_{ph} = f d\lambda + \lambda df$$

d'où: $\frac{df}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{d v_{ph}}{d\lambda} - \frac{f}{\lambda}$

En reportant dans l'expression de vitesse de groupe, on obtient:

$$v_{gr} = -\lambda \frac{d v_{ph}}{d\lambda} + f\lambda = v_{ph} - \lambda \frac{d v_{ph}}{d\lambda}$$

La vitesse de propagation d'une onde dans un milieu dépend de l'indice de réfraction n du milieu :

$$v = \frac{C}{n}$$

où C est la vitesse de la lumière dans le vide.

En appliquant aux vitesses de phases et de groupe on obtient :

$$v_{ph} = \frac{c}{n_{ph}} \quad \text{et} \quad v_{gr} = \frac{c}{n_{gr}}$$

avec n_{ph} , n_{gr} les indices de réfraction correspondants

On montre en différenciant v_{ph} par rapport à λ , que:

$$n_{gr} = n_{ph} + f \frac{dn_{ph}}{df}$$

Pour un milieu **non dispersif**, l'indice est indépendant de la fréquence et donc $n_{gr} = n_{ph}$.

3.2.2 L'ionosphère

L'ionosphère est la couche de l'atmosphère qui s'étend de 50 à 1000 km. C'est un milieu dispersif, ionisé par l'action des radiations solaires.

L'agitation ionosphérique dépend de la latitude (plus agitée à l'équateur et aux pôles), de l'activité solaire dont le cycle est 11 ans, de la période de l'année, du jour ou de la nuit. L'effet sur la mesure de la distance peut varier de 0 à 50 m.

L'indice de réfraction ionosphérique n_{ph} peut être modélisé par le développement :

$$n_{ph} = 1 + \frac{c_2}{f^2} + \frac{c_3}{f^3} + \frac{c_4}{f^4} + \dots$$

où c_2, c_3, c_4 sont des coefficients qui ne dépendent que de N_e , le nombre d'électrons par m^3 le long du trajet .

Une approximation est obtenue en tronquant le développement à l'ordre 2:

$$n_{ph} = 1 + \frac{c_2}{f^2}$$

En différenciant par rapport à f on obtient:

$$dn_{ph} = -\frac{2c_2}{f^3} df$$

D'où

$$n_{gr} = 1 + \frac{c_2}{f^2} - f \frac{2c_2}{f^3} = 1 - \frac{c_2}{f^2}$$

On remarque que l'indice de phase et l'indice de groupe diffèrent de l'unité de la même quantité mais dans le sens inverse.

Avec comme estimation $c_2 = -40.3 \text{ Ne [Hz}^2]$ on constate que $n_{gr} > n_{ph}$ et donc que $v_{gr} < v_{ph}$.

La conséquence est donc que l'on a un retard sur les mesures de pseudodistances et une avance sur les mesures de phases, autrement dit les distances sont trop longues en mesures de pseudodistances et trop courtes en mesures de phase par rapport à la distance géométrique.

Soient s la distance mesurée et so la distance géométrique. D'après le principe de Fermat on a:

$$s = \int nds$$

où ds est l'abscisse curviligne le long du trajet.

$$\Delta\rho^{iono} = s - so = \int nds - \int ds = \int (n - 1)ds$$

On en déduit :

$$\Delta\rho_{ph}^{iono} = \int \frac{c_2}{f^2} ds = -\frac{40.3}{f^2} \int Ne ds$$

$$\Delta\rho_{gr}^{iono} = -\int \frac{c_2}{f^2} ds = \frac{40.3}{f^2} \int Ne ds$$

avec $\int Ne ds$ le nombre total d'électrons sur le trajet.

Elimination de l'effet par mesures sur deux fréquences :

Soit ρ_1 et ρ_2 les distances mesurées sur f_1 et f_2 , et ρ_t la distance théorique. On a :

$$\rho_1 = \rho_t + \Delta\rho_1^{iono}$$

$$\rho_2 = \rho_t + \Delta\rho_2^{iono}$$

Les deux ondes suivant le même trajet au même instant la densité électronique est la même et

$$\Delta\rho_1^{iono} = \frac{A}{f_1^2} \text{ et } \Delta\rho_2^{iono} = \frac{A}{f_2^2} \Rightarrow \Delta\rho_2^{iono} = \frac{f_1^2}{f_2^2} \Delta\rho_1^{iono}$$

$$\rho_1 - \rho_2 = \Delta\rho_1^{iono} - \Delta\rho_2^{iono} = \Delta\rho_1^{iono} \left(1 - \frac{f_1^2}{f_2^2} \right)$$

on peut écrire :

et donc

$$\Delta\rho_1^{\text{iono}} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\left(1 - \frac{f_1^2}{f_2^2}\right)}$$

En mesurant la même distance sur deux fréquences différentes on en déduit la valeur de la correction ionosphérique.

3.2.3 La troposphère

La troposphère est la couche basse de l'atmosphère qui est en contact avec le sol et dont l'épaisseur varie de 7 à 14 km selon le lieu. C'est un milieu non dispersif pour des ondes de fréquence inférieure à 30 GHz, la réfraction est alors indépendante de la fréquence. Le retard troposphérique dépend de la température, de la pression, de l'humidité, ainsi que de l'élévation du satellite. La correction sur la distance est donnée par:

$$\Delta\rho^{\text{tropo}} = \int (n-1)ds = 10^{-6} \int N^{\text{tropo}} ds$$

avec n indice de réfraction troposphérique et N le co-indice.

En pratique on utilise des modèles troposphériques, dont les paramètres sont la température, la pression, l'humidité, l'élévation du satellite (Saastamoinen 1972, Hopfield 1969, Chao 1972, Marini et Murray 1973, Goad and Goodman 1974, Black 1978, Lanyi 1984, Elgred et al 1985, Davis et al. 1985, Robinson 1986, Rahnemoon 1988 ,etc.). L'existence de ces nombreux modèles est due à la difficulté de modéliser la composante humide (10% de la correction totale). A titre d'exemple on donne dans la suite le modèle Goad and Goodman.

$$\Delta\rho = 10^{-6} N_1 \sum_{j=1}^9 A_{j1} \frac{R_1^j}{j} + 10^{-6} N_2 \sum_{j=1}^9 A_{j2} \frac{R_2^j}{j}$$

$$N_1 = 77.624 \frac{p}{T} \quad N_2 = -12.92 \frac{e}{T} + 3.719 \cdot 10^5 \frac{e}{T^2}$$

$$R_i = \sqrt{(a_e + h_i)^2 - a_e^2 \cos^2(Elv)} - a_e \sin(Elv), i = 1, 2$$

$$h_1 = 5 \frac{0.002277 p}{N_1 \cdot 10^{-6}} \quad h_2 = 5 \frac{0.002277}{N_2 \cdot 10^{-6}} \left(\frac{1255}{T} + 0.5 \right) e$$

$$A_{1i} = 1 \quad A_{2i} = 4a_i \quad A_{3i} = 6a_i^2 + 4b_i \quad A_{4i} = 4a_i(a_i^2 + 3b_i)$$

$$A_{5i} = a_i^4 + 12a_i^2 b_i + 6b_i^2 \quad A_{6i} = 4a_i b_i (a_i^2 + 3b_i)$$

$$A_{7i} = b_i^2 (6a_i^2 + 4b_i) \quad A_{8i} = 4a_i b_i^3 \quad A_{9i} = b_i^4$$

$$a_i = -\sin(Elv)/h_i \quad b_i = -\cos^2(Elv)/2a_e h_i \quad e = 6.108 R H \exp\left(\frac{17.15 T - 4684}{T - 38.45}\right)$$

Δp : correction sur la distance en mètre, à retrancher de la pseudodistance ou de la phase

$$i = \begin{cases} 1 : \text{composante sèche} \\ 2 : \text{composante humide} \end{cases}; T : \text{température au sol en } ^\circ\text{K} (= ^\circ\text{C} + 273.16)$$

p : pression atmosphérique(mmbar); e : pression partielle de vapeur d'eau (mbar);

Elv : angle d'élévation; a_e : demi grand - axe de l'ellipsoïde terrestre

RH : Humidité relative

Il y a plusieurs solutions pour l'introduction des paramètres météorologiques:

- données météorologiques brutes prises sur le terrain (température sèche (T_s), température humide (T_h), pression (P)).
- modèle météorologique standard (T_s , T_h , P données à une altitude de référence pour tous les points).
- modèle météorologique local (T_s , T_h , P données à une altitude de référence pour tous les points , et tenant compte des conditions locales).
- mesure de la composante humide par un radiomètre à vapeur d'eau.
- paramètres stochastiques estimés pour chaque station.

3.3 Les traitements

Les premières méthodes de calculs étaient purement **géométriques** : le satellite était considéré comme une mire dans l'espace et les calculs étaient proches des méthodes terrestres comme la généralisation de la triangulation dans l'espace par des polyèdres. Cela suppose qu'un ensemble de stations au sol observent simultanément des arcs de trajectoires de satellites.

Les méthodes de calculs dites **orbitales** considèrent le satellite en mouvement dans le champ de gravité et soumis à différentes forces (voir §2). Le problème devient alors nettement plus complexe puisque de nombreux paramètres interviennent.

Les différents paramètres que l'on cherche à évaluer en géodésie spatiale sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Paramètres	produits
Coordonnées de stations (X, Y, Z) ou ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$)	Positionnement (absolu ou relatif)
Coordonnées du pôle (x_p, y_p), UT1, précession, nutation	Rotation terrestre
Coordonnées satellites $X_s, Y_s, Z_s, \frac{dX_s}{dt}, \frac{dY_s}{dt}, \frac{dZ_s}{dt}$	Orbitographie
Coefficients du potentiel terrestre ($J_{n,m}, K_{n,m}$)	Champ de gravitation
Paramètres troposphériques, ionosphériques	Météorologie
Position de quasars (α, δ)	Catalogue de radiosources

Dans les méthodes orbitales on distingue :

- les méthodes **dynamiques** qui permettent de calculer en plus du positionnement les autres autres paramètres en particulier les coefficient du champs et l'orbite des satellites
- les méthodes **semi-dynamiques** utilise une orbite préliminaire avec deux variantes :

* l'orbite est considérée comme définitive : par exemple c'est ce qui permet de faire du temps réel avec les orbites diffusées par les satellites ou de faire du positionnement très précis avec des éphémérides précises et les logiciels diffusés par les constructeurs avec leur matériel (GPS)

* on améliore l'orbite pour une durée limitée, en même temps que l'on calcule les positions des stations : méthode par arcs courts.

4.LES SYSTEMES DE POSITIONNEMENT

4.1 Le système TRANSIT

C'est le premier système satellitaire qui est conçu à des fins de positionnement (navigation). Sa conception remonte dans les années 60. Depuis déjà quelques années le Doppler est utilisé pour suivre la position des satellites envoyés autour de la Terre. Ce système est développé par l'armée américaine (DoD), le prototype est lancé en 1961 et le système est mis à disposition des utilisateurs en 1967.

4.1.1 le secteur spatial :

Le système a contenu entre 4 et 7 satellites. Les orbites sont polaires ($i=90^\circ$), quasi-circulaires ($e\approx 0$), de demi-grand axe $a=7500\text{km}$ (altitude = 1100 km) et de période $T=107\text{mn}$.

Le satellite émet deux ondes stables de fréquences : $f_1 = 400 \text{ MHz}$ et $f_2 = 150 \text{ MHz}$. Les ondes portent des signaux horaires toute les minutes paires. Elles sont aussi modulé par un message, qui contient les éléments d'orbites (éphémérides opérationnelles) qui permettent de faire du positionnement en temps réel.

Dessin satellite et orbite

4.1.2 le secteur de contrôle :

La NAG (Navy Astronautics Group) a mis en place quatre stations de poursuite à Hawaï, en Californie, dans le Minésota et dans le Maine (USA). Ces stations observent en continu les satellites en visibilité. Les observations sont envoyées au centre de Californie qui calcule les orbites sur 12h. Les éphémérides sont réinjectées pour chaque satellite par les stations de Californie et du Minésota.

D'autres réseaux de poursuite se sont mis en place pour calculer des éphémérides précises, on peut citer en particulier le réseau TRANET de 15 stations mis en place par la DMA qui a fourni des positions de satellites à 1 mètre près et le réseau MEDOC de 12 stations mis en place par le GRGS (Groupe de Recherches en Géodésie Spatiale) qui a fourni des positions de satellites à 2 mètres près.

4.1.3 Le secteur utilisateur :

Il regroupe tous les utilisateurs possédant au moins un récepteur.

Un récepteur reçoit les deux fréquences émises par le satellite, génère à partir de sa propre horloge un signal qu'il mélange à celui reçu, et fait les mesures Doppler. Celles-ci sont enregistrées ainsi que le message transmis par le satellite. Chaque satellite est observé pendant

tout son passage entre 16 et 20 minutes selon son élévation maximale. Comme il y a peu de satellite les observations sont planifiées à l'aide de prédition de passage et il faut donc attendre les satellites.

L'utilisateur peut calculer sa position en temps réel avec les éphémérides opérationnelles s'il est équipé d'un processeur couplé au récepteur, ou bien faire des calculs plus précis en temps différé en utilisant les éphémérides précises ou en faisant des calculs par la méthode par arcs courts.

4.1.4 les applications et leur précision

La première application est la navigation en temps réel pour les bateaux mais aussi des véhicules terrestres avec une précision de positionnement d'environ 100m en observant un seul satellite.

Très vite le système permet de faire du positionnement de qualité géodésique moyennant des observations plus nombreuses et des traitements plus sophistiqués. Ceci permet enfin de rattacher des réseaux géodésiques continentaux séparés par la mer. On crée aussi de nouveau géodésique dans des pays qui n'en n'ont pas. Le positionnement relatif est utilisé pour obtenir la meilleure précision (0,50 m avec éphémérides précises ou par arcs courts).

En photogrammétrie on utilise le système TRANSIT pour équiper les photos par des points isolés dans des zones où les réseaux géodésiques sont inexistantes. Le positionnement absolu, avec des observations de plusieurs passages de satellites permet d'avoir un positionnement à 2 mètres près avec les éphémérides opérationnelles et 0,80 mètres près avec les éphémérides précises.

Les observations sur les réseaux de poursuites ont aussi permis de participer à la détermination du mouvement du pôle et du champ de pesanteur.

4.2 Le système DORIS

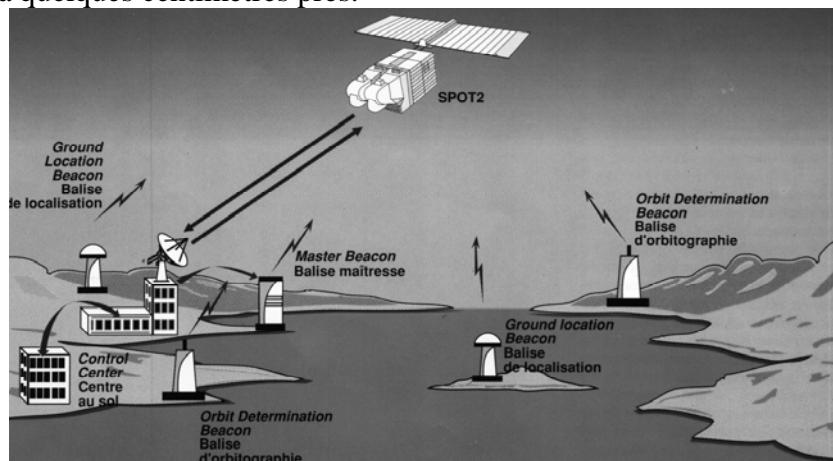
4.2.1 Description du système

Le sigle DORIS signifie en français Détermination d'Orbite et Radio-positionnement Intégrés sur Satellite et peut aussi se lire en Anglais Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated on Satellite.

Ce système est conçu dès 1982 par les organismes Français suivant : le CNES, l'IGN, le GRGS.

Il s'agit d'un système Doppler ascendant, c'est à dire qu'il y a au sol des balises émettrice et qu'un récepteur est embarqué à bord de certains satellites.

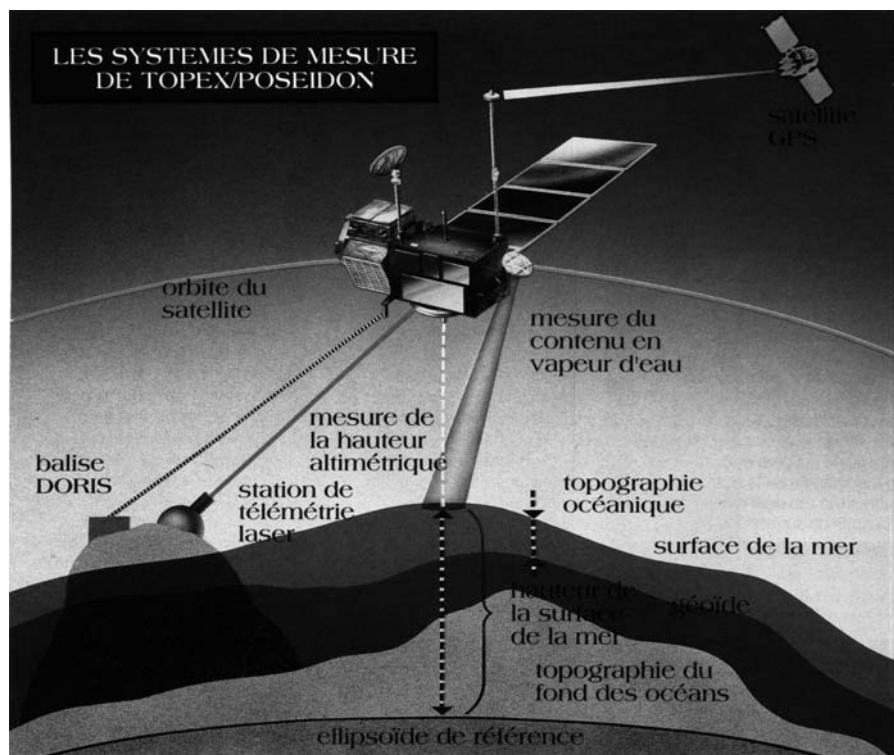
Le but est de déterminer des orbites avec des précisions centimétriques et de localiser des balises au sol à quelques centimètres près.



4.2.2 Le secteur spatial

Les satellites sont porteurs d'un récepteur. Il s'agit tout d'abord de la série de satellites Spot : SPOT2 (1990), SPOT3(1993) hors service depuis 1998, SPOT4 (1998) et SPOT5 (?). Ces satellites d'observations de la Terre ont des caractéristiques communes : orbite héliosynchrone, quasi-polaire ($i=98^\circ$), circulaire ($e=0$), période 101 minutes, cycle (temps mis à repasser au même endroit) 26 jours.

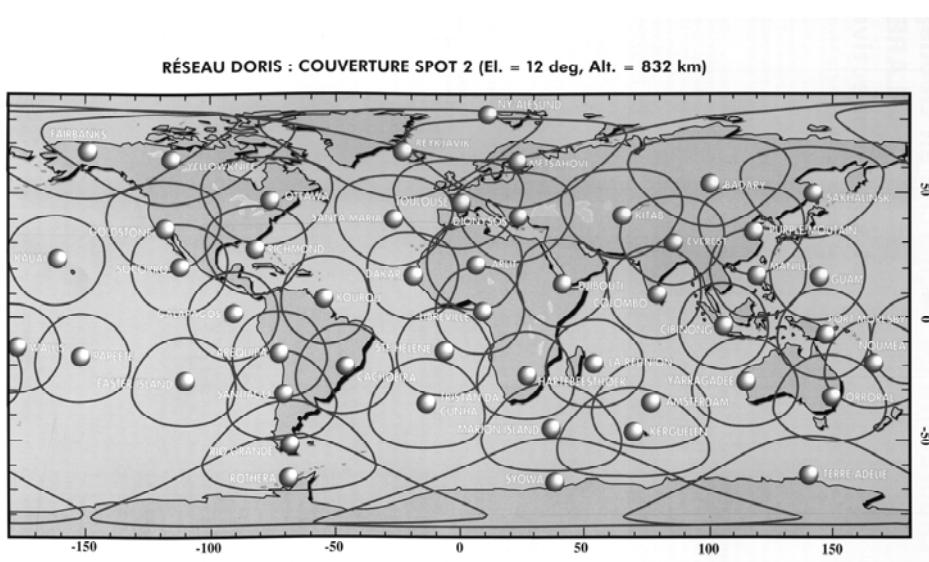
Un récepteur DORIS est aussi embarqué dans les satellites TOPEX POSEÏDON (1992), JASON (2001), ENVISAT (2002) qui sont des satellites d'observation des océans. Ces satellites munis d'un altimètre ont pour mission d'estimer la hauteur des océans avec une exactitude de 2 cm pour en déterminer les variations. La mesure altimétrique donne la distance entre le satellite et l'océan et si on veut connaître précisément la hauteur de l'océan dans un système de référence terrestre il faut déterminer avec précision la position du satellite dans ce repère. Pour cela les satellites ont trois systèmes pour l'orbitographie : un récepteur DORIS, un réflecteur LASER, et un récepteur GPS. La cohérence de ces trois systèmes est de quelque centimètres sur l'orbite.



4.2.3 le secteur de contrôle :

Il est composé d'un réseau d'une cinquantaine de balises émettrices qui sont réparties uniformément sur le Globe. Ces balises d'orbitographie émettent deux signaux de fréquences $f_1 \approx 2\text{ GHz}$ et $f_2 \approx 400\text{ MHz}$. Des capteurs permettent d'acquérir les données météorologiques qui sont envoyées en même temps que le signal. Le récepteur embarqué dans un satellite ne peut pas recevoir plusieurs balises à la fois et procède par séquencement, c'est à dire que le temps de réception est partagé entre les balises. Le centre de contrôle vérifie le bon fonctionnement de toutes les balises et envoie aux satellites par la balise maîtresse leur programme de travail. CLS filiale du CNES calcule les orbites qui sont disponibles au bout de quelques jours.

RÉSEAU DORIS : COUVERTURE SPOT 2 (El. = 12 deg, Alt. = 832 km)



Balise d'orbitographie de Terre-Adélie (Antarctique) (DORIS Newsletter)

4.2.4 Le secteur utilisateur

Les balises de positionnement ont un fonctionnement similaire aux balises d'orbitographie mais elles sont plus petites pour pouvoir être transportées facilement. Elles sont en général autonomes électriquement (panneau solaire) pour pouvoir être installées et rester sans surveillance à n'importe quel endroit pendant des durées très variables.



4.2.5 Les applications

L'intérêt du système est de pouvoir surveiller à distance des positions mouvantes. Il est donc utilisé en géophysique pour la dérive des continents, la déformation des volcans avant éruption, des mouvements de terrain locaux (glissement de terrain).

Le système participe à l'élaboration d'un modèle global du champ de pesanteur, à la détermination du mouvement du pôle, à la réalisation du système de référence mondial (voir carte ITRF paragraphe 4.4). La précision est de quelques centimètres aussi bien en orbitographie qu'en positionnement.

4.3 Le système GPS

4.3.1 Description du système

Le système **NAVSTAR (NAvigation System by Timing And Ranging) GPS (Global Positioning System)** est un système de positionnement par satellite conçu et mis en service par le U.S.DoD (département de la défense des USA).

Il a été développé en vue du remplacement du système de positionnement TRANSIT qui présentait deux défauts importants: le premier étant une couverture satellitaire insuffisante, le deuxième étant une faible précision en navigation.

Le système GPS répond donc aux questions: "Quelle est l'heure, quelle est la position, quelle est la vitesse ?" et ce rapidement, avec précision, à peu de frais, n'importe où et n'importe quand sur ou au voisinage de la Terre.

Les spécifications initiales sont d'avoir accès à une position absolue dans un système de référence mondial avec une précision de 20m et au temps avec la précision de la microseconde.

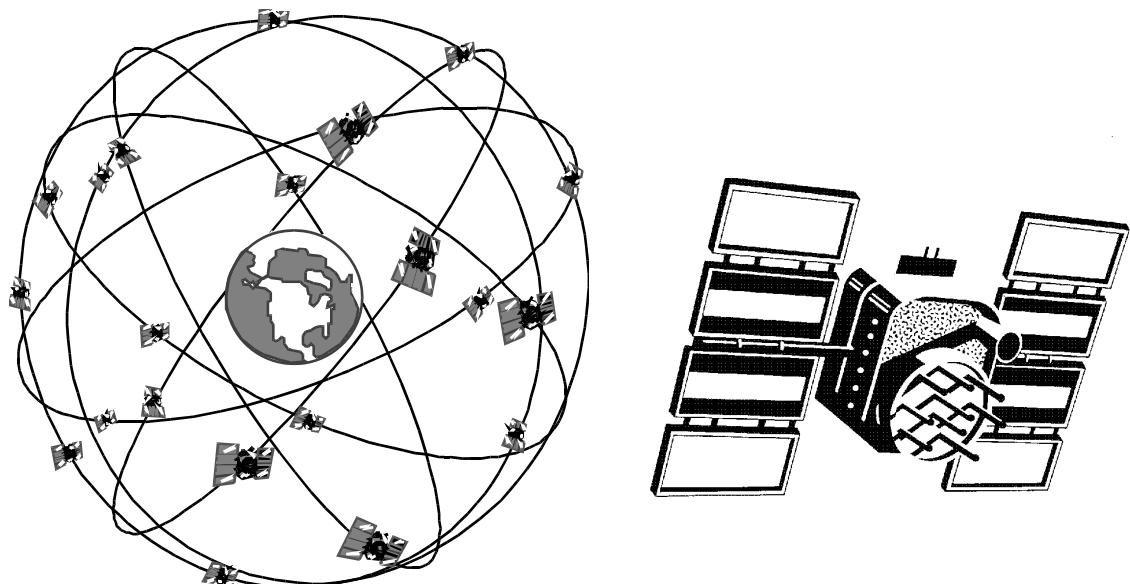
Le développement du système GPS a commencé dans les années 70, la mise en place démarrant en 1978 par le lancement du premier satellite. Le système a été déclaré pleinement opérationnel par le DoD fin 1993.

Le système GPS a été conçu au départ pour des applications militaires, mais sous les directives du Congrès américain le DoD a promu son utilisation pour des applications civiles en particulier pour la géodésie.

Le secteur spatial

Le système complet comporte 24 satellites répartis de façon à assurer en tout lieu une visibilité simultanée de 4 à 8 satellites avec une élévation d'au moins 15°.

Les satellites sont répartis sur 6 plans orbitaux, ayant tous une inclinaison d'environ 55° sur l'équateur. L'orbite des satellites est quasi-circulaire, leur altitude est environ 20200km et leur période d'environ 12h



constellation et satellite GPS

Chaque satellite est muni d'un émetteur-récepteur, d'horloges atomiques, d'ordinateurs et d'équipements auxiliaires destinés au fonctionnement du système.

L'énergie utile à l'équipement est fournie par 7 m² de capteurs solaires tandis qu'un système de fusées d'appoint permet de réajuster la position du satellite sur son orbite et de contrôler sa stabilité.

Les différents types de satellites :

On distingue trois classes de satellites qui correspondent chacune à une étape dans la constitution du système. Ce sont :

- le Bloc I : 11 satellites lancés entre 1978 et 1985. Ce bloc a constitué la phase initiale de test du système. Seuls 3 satellites de ce bloc peuvent encore être utilisés.

- le Bloc II : 28 satellites ont été construits pour ce bloc; lancés à partir de 1989, ils constituent à partir de fin 1993 la phase opérationnelle du système (21 satellites, plus 3 satellites de secours en orbite, 4 en réserve pour remplacement). La durée nominale d'activité des satellites est de 7,5 ans, mais la durée individuelle pourrait atteindre 10 ans. Contrairement au bloc I, le bloc II possède un système lui permettant d'activer des dégradations volontaires, restreignant ainsi les possibilités d'utilisation civile .

- le Bloc IIR : ces satellites sont actuellement en développement; la livraison des premiers exemplaires est prévue en 1995 et ils sont destinés à remplacer les satellites du bloc II. La durée de vie nominale des satellites est de 10 ans. Des horloges atomiques de type maser à hydrogène seront embarquées ce qui représente une amélioration de la précision d'un facteur 10 par rapport aux horloges au césum et rubidium du bloc II. D'autre part ces satellites posséderont un système de communication inter satellite, ce qui permettra d'intervenir sur un satellite qui n'est pas en visibilité d'une station de contrôle, via un autre satellite. Ces satellites seront lancés par la navette spatiale qui pourra en transporter 3 à la fois.

Identification des satellites :

Plusieurs systèmes de numérotation des satellites coexistent : numérotation séquentielle dans l'ordre de lancement(SV), numéro lié à l'orbite et à la position sur l'orbite, numérotation PRN(Pseudo Random Noise) donnée pour les codes, numéro dans le catalogue de la NASA et numérotation internationale. Le numéro PRN est celui qui est généralement utilisé, il est fourni aux utilisateurs dans le message de navigation .

Le signal satellite :

Chaque satellite génère un signal dont la stabilité en fréquence est assurée avec une très grande fiabilité grâce aux horloges atomiques embarquées (10^{-13} à 10^{-14} sur un jour pour les 2 horloges césum et 2 horloges rubidium des satellites du bloc II)

A partir de la fréquence fondamentale à 10,23 MHz l'émetteur génère deux ondes (**L1** et **L2**) de fréquence respective 1575,42 MHz et 1227,60 MHz qui sont modulées par des codes pseudo-aléatoires avant d'être envoyées en direction de la Terre .

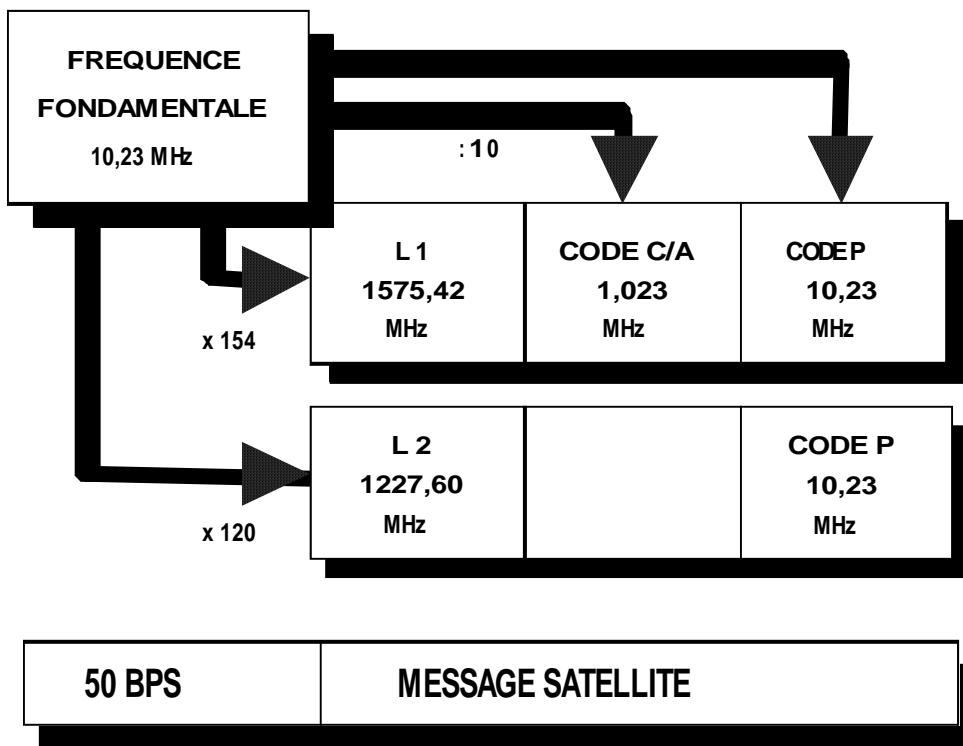
Les ondes porteuses L1 et L2 sont modulées par la phase (cf. figure 3), ce qui permet au satellite d'envoyer :

- un message qui comporte en particulier les éphémérides du satellite (les éléments célestes de l'orbite et leurs variations en fonction du temps), des coefficients de modèle ionosphérique, l'état de santé du satellite, les paramètres d'horloges, l'écart entre le temps GPS et le UTC USNO (temps universel coordonné de l'US Naval Observatory)

- des codes pseudo-aléatoires (Pseudo Random Noise (PRN)): **C/A code**-Coarse/Acquisition code (sur L1), **P code**-Precision code (sur L1 et L2) qui permettent de faire les mesures et protéger l'utilisation du système d'un point de vue militaire.

Le code C/A est accessible à tout utilisateur, qui a ainsi accès au SPS (Standard Positioning Service).

Le code P est réservé à l'armée américaine et à des utilisateurs autorisés. Le code P de longueur d'onde d'environ 30 m module les deux ondes porteuses L1 et L2. L'accès au code P et aux clés des protections SA et AS correspond au PPS (Precise Positioning Service).



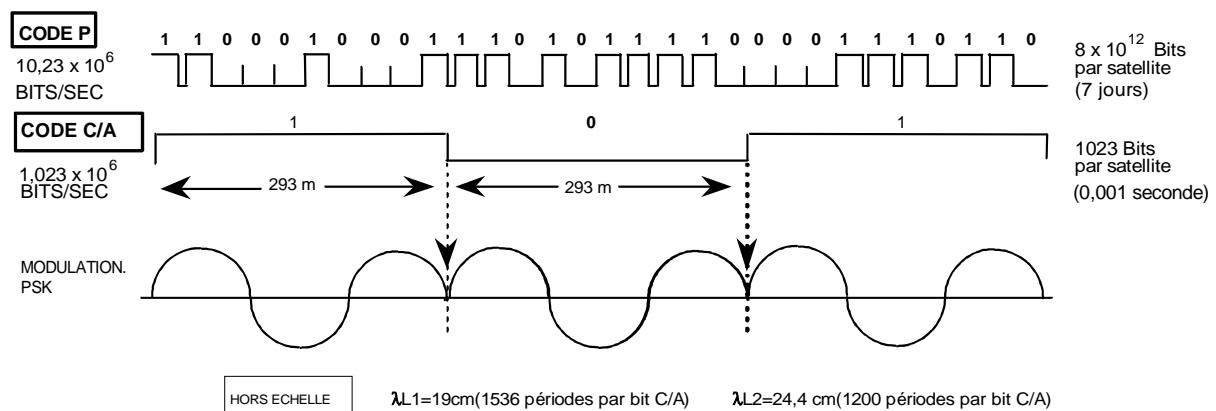
structure du signal GPS

Moduler L1 ou L2 par la phase consiste lorsque le code (C/A ou P) ou le message change de parité (0, 1) à augmenter la phase de 180° . On remarque que cela revient à changer le signe du signal et l'on peut écrire:

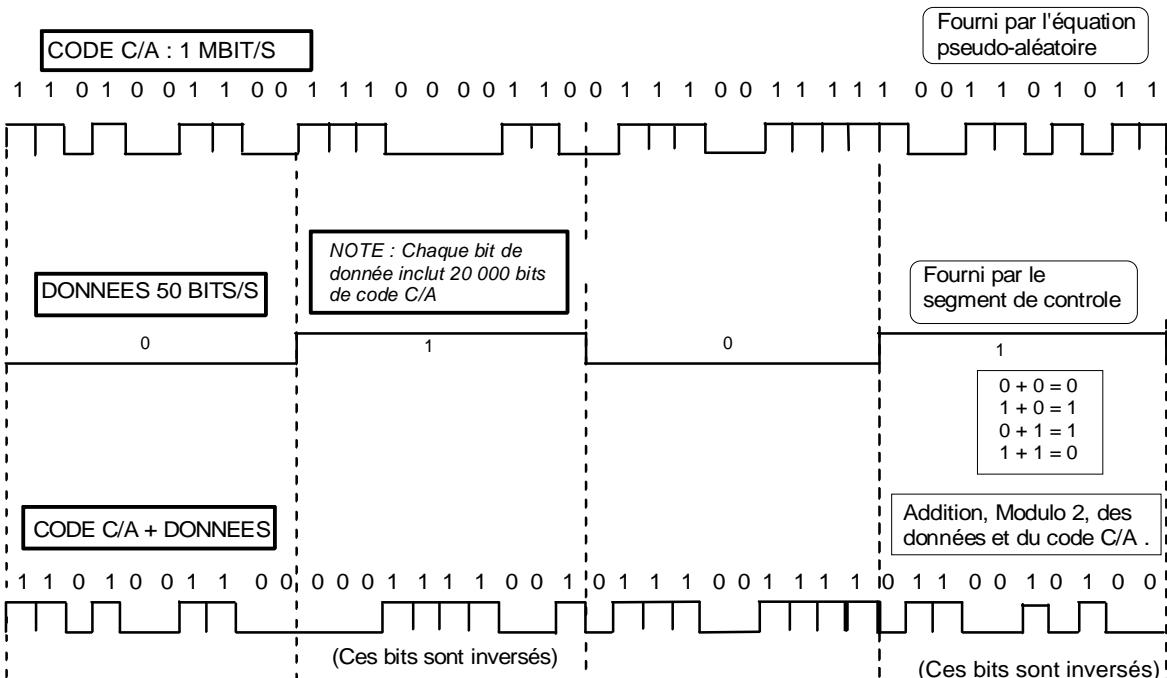
$$L_1(t) = a_1 P(t) D(t) \cos 2\pi f_1 t + a_1 C / A(t) D(t) \sin 2\pi f_1 t$$

$$L_2(t) = a_2 P(t) D(t) \cos 2\pi f_2 t$$

où a_1, a_2 sont les amplitudes de L1 et L2 et P(t), C/A(t), D(t) des fonctions du temps qui ne contiennent que des +1 et -1 et représentent respectivement les codes P et C/A et les données du message.



modulation par la phase



NOTE : Les données se superposent à la fois au code C/A (1 million de bits par seconde) et au code P (10 millions de bits par seconde)

superposition des codes

Les dégradations volontaires du système:

Le système GPS est pourvu de deux processus qui permettent de limiter son utilisation civile et de le protéger:

- **l'accès sélectif:** (**SA: Selective Availability**) comporte au moins deux types de dégradations:
 - dégradation de la fréquence de l'horloge des satellites (par ajout d'un déphasage).
 - dégradation des éléments du message radiodiffusé (éphémérides des satellites, paramètres d'horloge satellite).

Ces dégradations sont connues et diffusées uniquement à des utilisateurs habilités. Elles affectent principalement les applications de navigation en temps réel. La SA a été désactivée le 2 mai 2000.

- **l'antibrouillage (AS : anti-spoofing)** est une protection destinée à éviter le brouillage volontaire du système GPS par un utilisateur qui enverrait un signal proche du GPS, créant ainsi la confusion et des erreurs de positionnement pour les autres utilisateurs. L'AS consiste à ajouter au code P, sur les deux fréquences L1 et L2, un code W qui est militairement classifié formant ainsi le code Y. En cas d'AS l'utilisateur non autorisé ne peut plus faire de mesure sur le code P, il ne peut utiliser que le code C/A. L'activation de l'AS est continue depuis le 1er février 1994. L'AS et la SA ne sont pas actifs sur les satellites du Bloc I.

Le secteur de contrôle

Le secteur de contrôle est composé de 5 stations au sol (Hawaï, Colorado Springs, Ascencion, Diego Garcia, Kwajalein) qui enregistrent en continu les signaux GPS sur les deux fréquences, effectuent des mesures météorologiques et envoient les données à la station principale Colorado Springs (Master Control Station).

A Colorado Springs les éphémérides des satellites ainsi que les paramètres d'horloge sont calculés, prédits et envoyés aux stations de transmission (Ascension, Diego Garcia et Kwajalein) qui retransmettent les informations du message GPS aux satellites.

Les éphémérides radiodiffusées sont calculées une fois par jour pour chaque satellite. Des éphémérides précises sont calculées à posteriori par la DMA (Defense Mapping Agency) en ajoutant les observations de 5 autres sites.

Des réseaux de poursuite civils se sont mis en place pour calculer les éphémérides et surveiller le fonctionnement du système en particulier : CIGNET (Cooperative International GPS network), IGS (International GPS Geodynamics Service) (cf annexes).

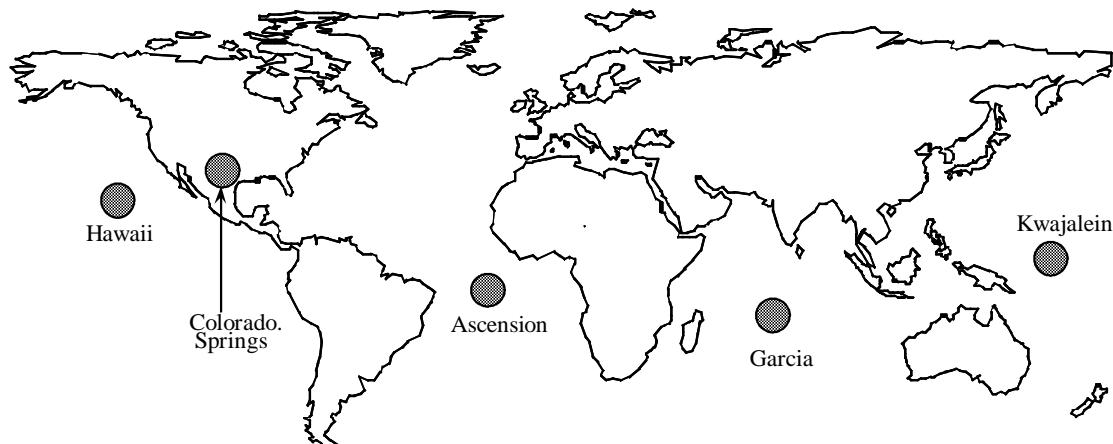


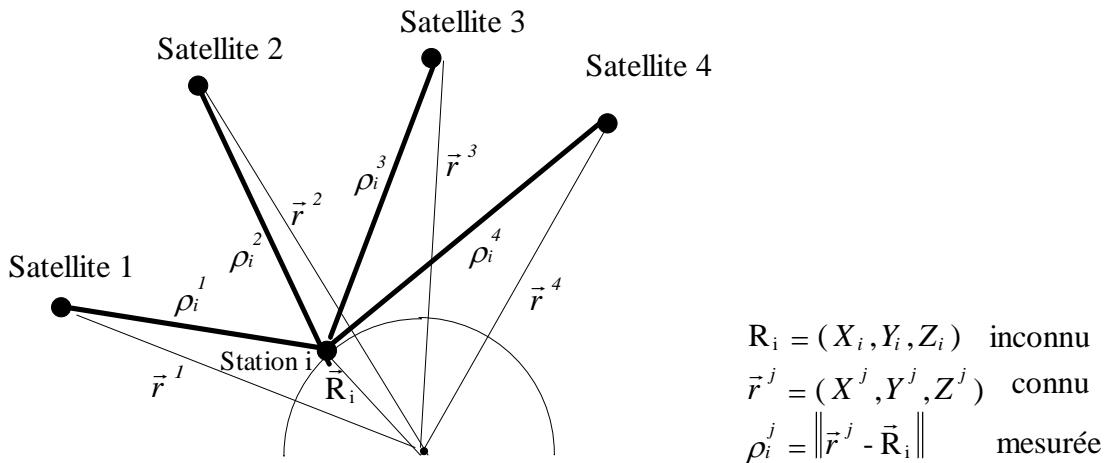
fig. 2.5: stations de contrôle du système GPS

Le secteur utilisateur

Le secteur utilisateur représente l'ensemble des utilisateurs civils et militaires du système GPS.

Le premier mode d'utilisation du système GPS est le positionnement absolu:

L'utilisateur muni d'un récepteur mesure la distance entre sa station et plusieurs satellites à l'aide des codes C/A ou P. Les éphémérides du satellite transmises par le message permettent de calculer la position du satellite dans un repère terrestre à l'instant de l'observation. Chaque mesure de distance sur un satellite définit une sphère dont le centre est le satellite et sur laquelle se trouve la station. Trois satellites sont donc nécessaires pour obtenir un point intersection des trois sphères. En réalité quatre satellites sont nécessaires pour tenir compte de la non synchronisation du récepteur et des horloges satellites (cf. § 4.1.1). Ce type de positionnement est peu précis: de quelques mètres à 100 mètres suivant la qualité des éphémérides et les dégradations volontaires. L'intérêt de cette méthode est le temps réel, et l'obtention d'une position instantanée, son utilisation principale est la navigation sur terre ou sur mer.



$$\mathbf{R}_i = (X_i, Y_i, Z_i) \text{ inconnu}$$

$$\vec{r}^j = (X^j, Y^j, Z^j) \text{ connu}$$

$$\rho_i^j = \|\vec{r}^j - \vec{R}_i\| \text{ mesurée}$$

positionnement absolu

Le deuxième mode d'utilisation du GPS: positionnement relatif (ou différentiel) :

La distance est calculée soit à partir des codes P ou C/A (pseudodistance), soit à partir de mesures de phase sur les ondes porteuses L₁ et L₂, simultanément en deux stations sur les mêmes satellites et le résultat est le vecteur entre les deux stations (positionnement relatif). Ce positionnement permet de diminuer l'influence des éphémérides, des corrections de propagation, des décalages des horloges satellites et récepteurs, des dégradations volontaires et est plus précis. La gamme de précision varie selon le type de mesure: quelques mètres en pseudodistance (DGPS: GPS différentiel) , 2 mm ± 10⁻⁶D à 10⁻⁸ D en mesure de phase (mode géodésique statique).

Le positionnement peut être statique ou dynamique (en général un poste fixe, un mobile), souvent en temps différé. Le temps réel (ou pseudo réel) peut être réalisé par ajout d'un équipement de transmission radio qui permet à un poste d'envoyer ses observations à l'autre qui peut ainsi calculer la position ainsi que la vitesse du mobile.

Le champ d'utilisation est vaste allant de la navigation à l'établissement de réseaux de précision (géodésie, topographie, géophysique, etc..).

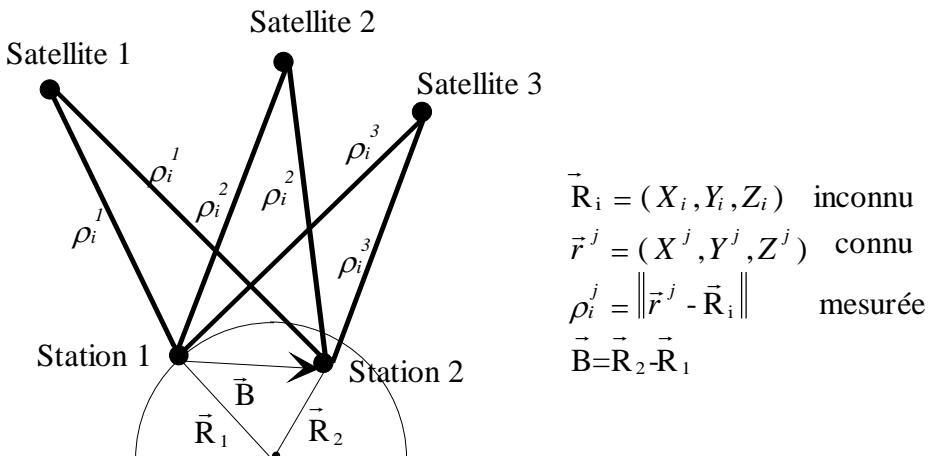


fig 2.7: positionnement relatif

La précision du positionnement (absolu ou relatif) dépend : de la précision de la position des satellites, de la précision de la mesure de distance satellite récepteur (précision instrumentales, type de mesure, durée d'observation, correction de propagation), de la géométrie des satellites, des dégradations volontaires, des traitements.

Les récepteurs peuvent enregistrer sur une ou deux fréquences (L1 :monofréquence ou L1 + L2: bifréquence) deux types de mesures :

- pseudodistance sur les codes C/A et(ou) P (ou Y)
- phase sur les porteuses L1 et L2

Le récepteur reçoit et enregistre le message GPS et calcule une position en temps réel à partir de mesures de pseudodistance et des éphémérides diffusées dans le message.

Les récepteurs ne faisant que des mesures de **pseudodistances** sont appelés récepteurs de navigation, sont utilisés pour des applications peu précises, et sont les moins chers (à partir de 1000 F pour un récepteur C/A en 1999). Ils ont de 1 à n canaux qui leur permettent de capter au minimum 4 satellites simultanément. Les utilisateurs sont les militaires et les civils qui veulent se positionner à pied, dans un véhicule terrestre, dans un avion, ou sur un bateau avec une précision de quelques dizaines de mètres. L'équipement DGPS temps réel est beaucoup plus cher du fait de l'équipement de transmission des données .

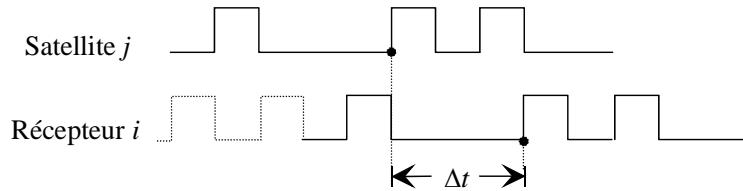
Les récepteurs effectuant des mesures de **pseudodistances et de phases** sont plus précis et servent à des applications de géodésie, topographie Ils ont en général de 8 à 12 canaux. Les récepteurs dits de géodésie sont bifréquences (L₁ et L₂), en général avec code P. Ils sont aussi les plus chers (de 150 à 200 KF en 1993). Les récepteurs monofréquence (L₁) sont plutôt réservés à des applications de topographie pour des distances inférieures à 15 km. Leur prix est inférieur à 70 KF (en 1999).

4.3.2 Les mesures GPS

La pseudodistance sur les codes

Si on mesure la durée de propagation d'un signal émis par le satellite jusqu'à son arrivée à un récepteur sur la Terre, on peut estimer la distance du satellite au récepteur.

La mesure de pseudodistance nécessite la connaissance des codes pseudo-aléatoires (C/A et (ou) P (ou Y)). Le code généré par le satellite arrive au récepteur avec un retard Δt correspondant au temps mis par l'onde pour parcourir le chemin satellite récepteur. Un algorithme connu génère le code pseudo aléatoire et lie le code et le temps GPS. Le récepteur génère donc une réplique du code satellite, qui est synchronisée avec le code satellite. La comparaison au récepteur entre le signal venant du satellite et le signal du récepteur permet de mesurer le décalage en temps Δt . La mesure se fait en retardant le code du récepteur jusqu'à ce qu'il soit aligné sur le code satellite.



comparaison entre le signal reçu et le signal propre du récepteur sur les codes

Les horloges du satellite et du récepteur ne sont pas parfaitement synchronisées, et on mesure:

$$\Delta t_i^j = t_{Ri} - t_E^j$$

où t_{Ri} est le temps de réception en temps récepteur i et t_E^j le temps d'émission en temps satellite

$$\begin{aligned} t_{Ri} + dt_i &= t_R \\ t_E^j + dt^j &= t_E \end{aligned}$$

avec t_E et t_R respectivement les temps d'émission et de réception du signal en temps GPS et dt_i et dt^j le décalage des horloges du récepteur et du satellite par rapport au temps GPS.

$$\Delta t_i^j = t_R - dt_i - t_E + dt^j = t_R - t_E + (dt^j - dt_i)$$

Soit R_i^j la pseudodistance exprimée en mètres:

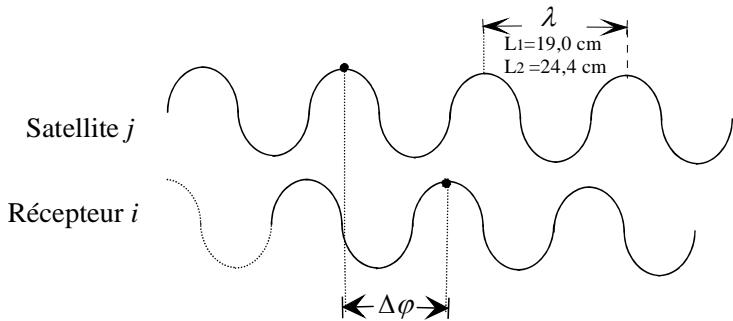
$$R_i^j = c\Delta t = c(t_R - t_E) + c(dt^j - dt_i) = \rho_i^j + c(dt^j - dt_i)$$

avec c la vitesse de la lumière et ρ_i^j la distance géométrique entre le satellite j à l'instant t_E et le récepteur i à l'instant t_R

La mesure de phase

La mesure de phase se fait sur les ondes porteuses L₁ et L₂ de longueurs d'ondes 19,0 cm et 24,4 cm.

Le principe de la mesure est la comparaison de la phase du signal reçu par le récepteur avec la phase du signal généré par le récepteur et qui est une réplique du signal du satellite. Le récepteur reçoit à l'instant t_R la phase du signal émis par le satellite à l'instant t_E .



comparaison entre signal reçu et signal du récepteur sur la porteuse

La distance ρ_i^j entre le récepteur et le satellite est donnée en comparant la phase du signal à l'instant de réception (t_R) à la phase à l'instant d'émission (t_E). En effet on a:

$$\begin{aligned}\phi(t_R) - \phi(t_E) &= f \times (t_R - t_E) \quad (\text{en cycles}) \\ \text{et } (t_R - t_E) &= \frac{\rho_i^j}{C} \\ \Rightarrow \phi(t_R) - \phi(t_E) &= \frac{f\rho_i^j}{C}\end{aligned}$$

Lorsque le récepteur compare, la phase $\phi_i(t_R)$ de son signal à la phase $\phi^j(t_E)$ du signal qu'il reçoit à t_R , on obtient un déphasage $\Delta\varphi$ compris entre 0 et 1 cycle, c'est à dire la partie décimale de la différence $\phi_i(t_R) - \phi^j(t_E)$. La différence de phase totale est :

$$\boxed{\phi_i(t_R) - \phi^j(t_E) = \Delta\varphi(t_R) + N_i^j(t_R)}$$

où $N_i^j(t_R)$ est un nombre entier inconnu de cycles que le récepteur ne peut pas mesurer.

En plus du déphasage $\Delta\varphi$, le récepteur mesure à l'aide d'un compteur le nombre entier de cycles du déphasage reçus depuis la première mesure. Ainsi si t_1 est l'instant de la première mesure, pour toutes les autres mesures on aura, tant que la réception du signal n'est pas interrompue:

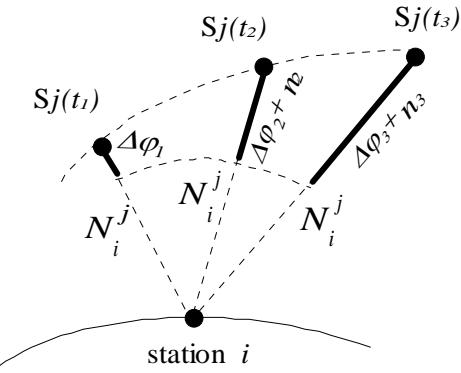
$$N_i^j(t_R) = N_i^j(t_1) + n(t_R)$$

$n(t_R)$: nombre de cycles comptés par le compteur à l'instant t_R

$$\Delta\varphi(t_R) = \phi_i(t_R) - \phi^j(t_E) - (N_i^j(t_1) + n(t_R))$$

On voit donc que pour un satellite donné et un récepteur donné, la quantité inconnue $N_i^j(t_1)$ est la même pour toutes les mesures tant qu'il n'y a pas d'interruption du signal. Cette quantité est appelée **ambiguïté entière** elle sera notée N_i^j dans la suite. Une interruption du

signal provoque **un saut de cycle**, c'est à dire une autre valeur pour l'ambiguïté qui se traduit par des mesures aberrantes à partir d'une époque donnée.



interprétation géométrique de la mesure de phase

La mesure de phase s'écrit donc:

$$\Delta\phi(t_R) + n(t_R) = \phi_i(t_R) - \phi^j(t_E) - N_i^j$$

on a: donc

$$\begin{aligned} \phi^j(t_E) &= \phi^j(t_R) - \frac{f\rho_i^j}{c} \\ \Rightarrow \Delta\phi(t_R) + n(t_R) &= \phi_i(t_R) - \phi^j(t_R) + \frac{f\rho_i^j}{c} - N_i^j \end{aligned}$$

Si les deux horloges étaient parfaitement synchronisées on aurait $\phi_i(t_R) = \phi^j(t_R)$

en réalité on a $t_{Ri} = t_R - d t_i$

$$t_R^j = t_R - d t^j$$

où $d t_i$ et $d t^j$ sont les décalages des horloges par rapport au temps GPS (t_R).

$$\phi_i(t_{Ri}) - \phi^j(t_R^j) = f_i \times (t_R - d t_i) - f^j \times (t_R - d t^j)$$

les fréquences des horloges étant proches on peut ici faire l'approximation : $f_i \approx f^j \approx f$

$$\phi_i(t_{Ri}) - \phi^j(t_R^j) = f \times (d t^j - d t_i)$$

On peut exprimer la mesure de phase en distance en multipliant par la longueur d'onde λ :

$$\boxed{\lambda \Phi = c(d t^j - d t_i) + \rho_i^j - \lambda N_i^j}$$

avec $\Phi = (\Delta\phi(t_R) + n(t_R))$

Bruit des mesures

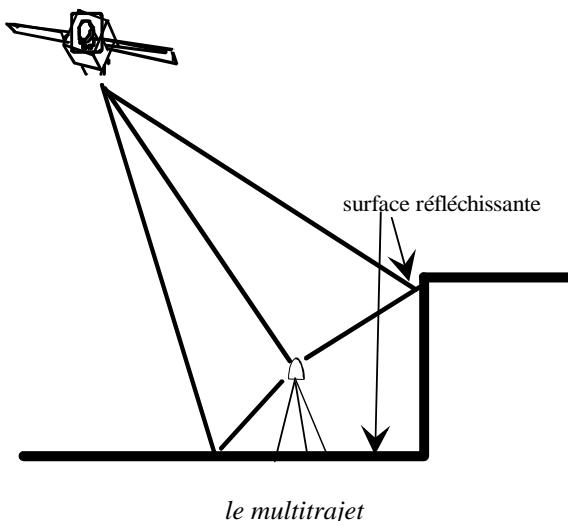
Les mesures de phases ou de pseudodistances sont réalisées par comparaison entre le signal venant du satellite et le signal généré par le récepteur. Le bruit de la mesure est estimé à mieux que 1% de la longueur d'onde du signal sur lequel se fait la mesure, ce qui donne:

Signal GPS	longueur d'onde	bruit <1% de λ
Code C/A	300 m	1 à 3 m
Code P	30 m	10 à 30 cm
Phase (L1 ou L2)	20 cm	1 à 2 mm

bruit des mesures selon leur type

Le multitrajet

Ce phénomène est constaté lorsque le signal issu du satellite arrive au récepteur après avoir suivi un autre chemin que le chemin direct en particulier après réflexion sur un obstacle proche.



Il n'y a pas de modélisation de l'effet multitrajet car il dépend de la géométrie des obstacles, et la seule solution est de s'en affranchir :

- par le choix de la station en évitant les surfaces réfléchissantes proches.
- par le choix d'antennes munies d'un plan absorbant, à large bande et équipées de filtres numériques ou qui traite la polarisation du signal; en effet l'onde directe est polarisée à droite et la réflexion inverse cette polarité.
- par le choix des satellites, les plus bas étant les plus sensibles au multitrajet.

Les mesures sur les codes sont plus sensibles et on peut avoir de 10 à 20 mètres de différence en comparant des pseudodistances à deux époques consécutives.

Pour les mesures de phases, en relatif, avec des distances courtes et une durée d'observation assez longue, l'erreur de multitrajet est de l'ordre du centimètre. L'effet augmente si l'on diminue le temps d'observation et certaines méthodes rapides d'observations (statique rapide ou cinématique) sont plus sensibles au multitrajet.

Excentrement d'antenne

La mesure sur le signal radioélectrique se fait au centre de phase, or celui-ci n'est pas forcément confondu avec le centre physique de l'antenne. L'excentrement dépend de

l'élévation et de l'azimut du satellite, de l'intensité du signal et est différent pour L₁ et pour L₂. On peut distinguer deux effets: un excentrement constant et la variation du centre de phase. La qualité de l'antenne dépend de la valeur de la variation du centre de phase (de l'ordre de 1 à 2 cm), car la partie constante peut être facilement déterminée.

Si pour une campagne d'observations les antennes sont de même type, on peut considérer que l'excentrement est le même, et s'élimine en relatif si on oriente les antennes. Par contre avec des antennes de types différents il est important d'effectuer une calibration des antennes.

Le format RINEX

Le format RINEX (Receiver Independant EXchange) est un format standard qui permet d'enregistrer les observations et des données du message satellite sous la forme d'un fichier au format ASCII. Ce format permet en particulier de combiner des observations faites avec des récepteurs de marques différentes ce qui est impossible en format constructeur qui dépend du matériel. De plus si on utilise le format RINEX, un seul logiciel est nécessaire tandis qu'en format constructeur il faut autant de logiciels que de format, ou bien des programmes d'interfaçage entre les formats. Ce format d'échange est structuré en trois fichiers:

- un fichier qui contient les observations
- un fichier qui contient les données météorologiques
- un fichier qui contient le message de navigation

Fichier des observations	Fichier des données Météo	Fichier message de navigation
Entête: Site Observateurs Matériel Excentremens Types d'obs. Commentaires	Entête Site Type d'obs. Commentaires	Entête Commentaires
Données: L'époque Les satellites Les mesures	Données: L'époque Les mesures	Données: L'époque Les paramètres de l'horloge du satellite n Les paramètres d'orbite du satellite n Les corrections ionosphériques

Le nom des fichiers est codifié de la manière suivante: "ssssdddf.yyt"

avec : ssss : l'identifiant du site

ddd : le numéro du jour dans l'année

f : le numéro de la session

yy: les deux derniers chiffres de l'année

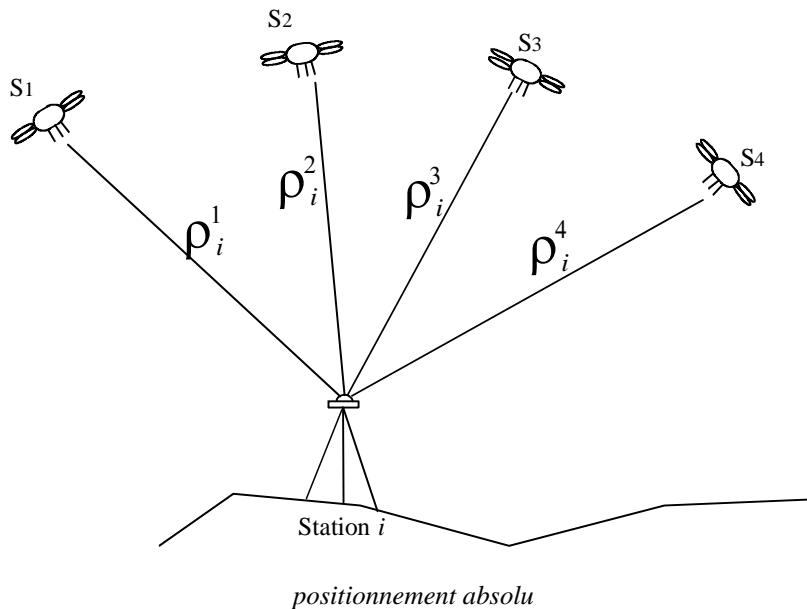
t: le type du fichier (O , M, N)

4.3.3 Les principales utilisations du système GPS pour la localisation

Le principe est de mesurer des distances d'une (ou plusieurs) station(s) au sol à plusieurs satellites simultanément et d'en déduire, à partir des coordonnées satellites soit la position des stations , soit la différence de coordonnées entre les stations.

Positionnement absolu par mesure de pseudodistances

On mesure 4 pseudodistances simultanément sur 4 satellites, on obtient un positionnement absolu instantané .



on a

$$\begin{aligned} R_i^j &= \rho_i^j + c(dt^j - dt_i) + \Delta\rho^{iono,j} + \Delta\rho^{trop,j} \\ \rho_i^j &= \sqrt{(X^j - X_i)^2 + (Y^j - Y_i)^2 + (Z^j - Z_i)^2} \end{aligned}$$

(X_i, Y_i, Z_i) : coordonnées inconnues de la station i dans le repère géocentrique

(X^j, Y^j, Z^j) : coordonnées connues du satellite j dans le repère géocentrique

pour $j = 1, 2, 3, 4$

$\Delta\rho^{iono,j}$ et $\Delta\rho^{trop,j}$ sont calculés à partir de modèles

$\Delta\rho^{iono,j}$ peut aussi être éliminé par mesure bifréquence

dt^j : le décalage de l'horloge du satellite j est calculé à partir des paramètres du message GPS

dt_i : le décalage de l'horloge du récepteur i est inconnu

On a donc 4 inconnues : (X_i, Y_i, Z_i, dt_i) , pour résoudre il faut au moins 4 équations donc 4 pseudodistances sur 4 satellites

Les facteurs de dilution de la précision : kDOP

La précision du positionnement va dépendre de la géométrie de distribution des satellites et les facteurs de dilution de la précision sont des paramètres issus de la matrice de variance covariance des coordonnées et du temps, qui permettent de quantifier cette distribution.

Soit Q_X la matrice de variance covariance:

$$Q_X = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & \sigma_{xt} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} & \sigma_{yt} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 & \sigma_{zt} \\ \sigma_{tx} & \sigma_{ty} & \sigma_{tz} & \sigma_t^2 \end{pmatrix}$$

En appliquant la loi de propagation de la variance, on peut transformer la matrice dans le repère géodésique local (nord, est, hauteur) :

$$Q_L = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 & \sigma_{ne} & \sigma_{nh} & \sigma_{nt} \\ \sigma_{en} & \sigma_e^2 & \sigma_{eh} & \sigma_{et} \\ \sigma_{hn} & \sigma_{he} & \sigma_h^2 & \sigma_{ht} \\ \sigma_{tn} & \sigma_{te} & \sigma_{th} & \sigma_t^2 \end{pmatrix}$$

Les facteurs DOP sont des sommes d'éléments diagonaux particuliers, divisés par une estimation de la précision de la mesure:

$$\text{VDOP} = \frac{\sigma_h}{\sigma_o}: \quad \text{facteur de dilution de précision pour la hauteur}$$

$$\text{HDOP} = \frac{1}{\sigma_o} \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_e^2}: \quad " \quad " \quad \text{pour la position horizontale}$$

$$\text{PDOP} = \frac{1}{\sigma_o} \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_e^2 + \sigma_h^2}: \quad " \quad " \quad \text{pour la position}$$

$$\text{TDOP} = \frac{\sigma_t}{\sigma_o}: \quad " \quad " \quad \text{pour le temps}$$

$$\text{GDOP} = \frac{1}{\sigma_o} \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_e^2 + \sigma_h^2 + c^2 \times \sigma_t^2}: \quad \text{facteur de dilution de précision géométrique}$$

σ_o : écart type sur la pseudodistance mesurée

Plus le kDOP est grand, moins bon est le résultat. La valeur moyenne de HDOP est 2 pour la meilleure constellation à 4 satellites. Le kDOP permet de choisir le meilleur moment pour l'observation et est donné par les logiciels de planification de mission.

Positionnement relatif par mesure de phases

Le but est de déterminer les coordonnées d'un point inconnu (k), à partir des coordonnées d'un point connu (i) et pour cela déterminer la base à partir de mesures de phases aux deux points i et k, simultanément sur les mêmes satellites :

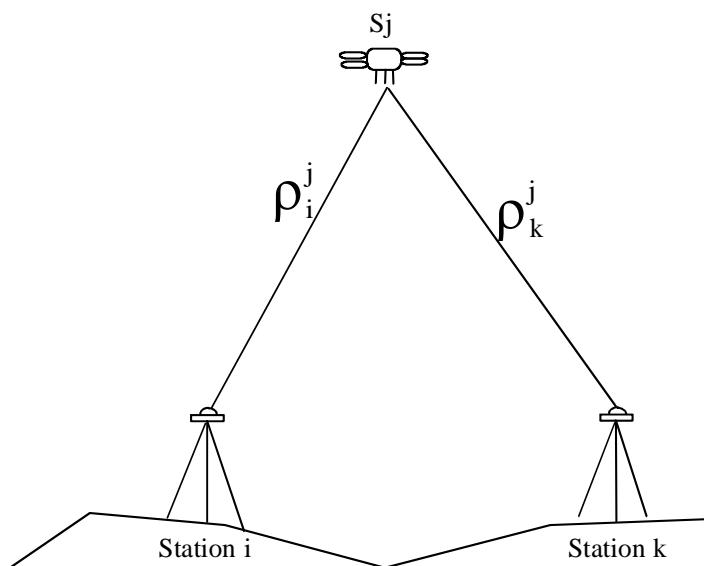
$$\vec{B}_{i \rightarrow k} = \begin{bmatrix} X_k - X_i \\ Y_k - Y_i \\ Z_k - Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_{ik} \\ \Delta Y_{ik} \\ \Delta Z_{ik} \end{bmatrix}$$

On a vu précédemment que l'expression de la mesure de phase à la station i sur le satellite j est:

$$\Phi_i^j = f(dt^j - dt_i) + \frac{f}{c} \rho_i^j - N_i^j$$

Cette expression n'est pas directement utilisée dans les programmes de calcul, on forme en effet les différences suivantes:

simple différence :



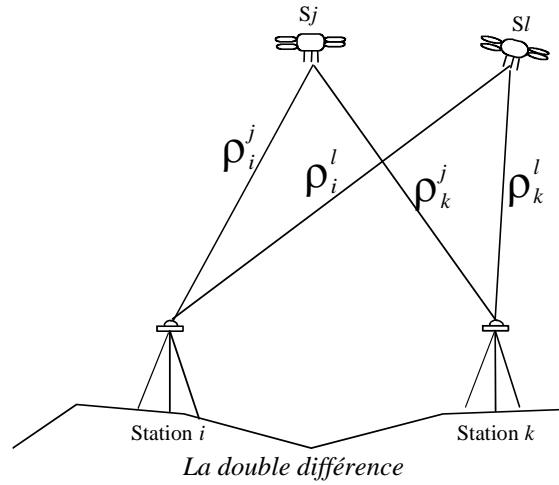
la simple différence

Les stations i et k observent le même satellite j au même instant, et on forme la simple différence:

$$\begin{aligned} \Phi_{ik}^j &= \Phi_k^j - \Phi_i^j \\ \Phi_{ik}^j &= f(dt_i - dt_k) + \frac{f}{c} (\rho_k^j - \rho_i^j) - (N_k^j - N_i^j) \end{aligned}$$

On remarque que le décalage d'horloge satellite est éliminé par cette différence.

Double différence:



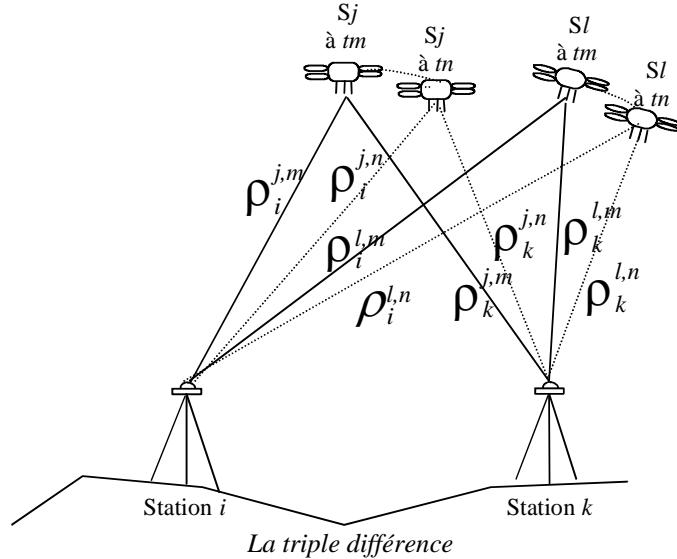
Les deux stations i et k observent les deux satellites j et l simultanément, et on forme la double différence:

$$\Phi_{ik}^{jl} = \Phi_{ik}^l - \Phi_{ik}^j$$

$$\Phi_{ik}^{jl} = \frac{f}{c} (\rho_k^l - \rho_k^j + \rho_i^j - \rho_i^l) - (N_k^l - N_k^j + N_i^j - N_i^l)$$

On remarque que le décalage des horloges récepteurs en i et k est éliminé par cette différence.

Triple différence:



Les stations i et k observent toujours simultanément les satellites j et l , et on considère ici les mesures à deux époques tm et tn . On forme la triple différence:

$$\Phi_{ik}^{jl,mn} = \Phi_{ik}^{jl,n} - \Phi_{ik}^{jl,m}$$

$$\Phi_{ik}^{jl,mn} = \frac{f}{c} (\rho_k^{l,n} - \rho_k^{j,n} + \rho_i^{j,n} - \rho_i^{l,n} - \rho_k^{l,m} + \rho_k^{j,m} - \rho_i^{j,m} + \rho_i^{l,m})$$

On remarque que les ambiguïtés entières sont toutes éliminées; en effet l'ambiguïté entière pour une station et un satellite est constante dans le temps tant qu'il n'y a pas d'interruption du signal. La triple différence est d'ailleurs un des moyens de détection des sauts de cycles.

Positionnement relatif par mesure de pseudodistances

Le principe de positionnement est le même que pour la mesure de phase: deux stations observent simultanément les mêmes satellites. La mesure de pseudodistance à la station i sur le satellite j est :

$$R_i^j = \rho_i^j + c(dt^j - dt_i)$$

Comme précédemment on peut former la simple différence et la double différence:

simple différence:

$$\begin{aligned} R_{ik}^j &= R_k^j - R_i^j \\ R_{ik}^j &= \rho_k^j - \rho_i^j + c(dt_i - dt_k) \end{aligned}$$

La simple différence élimine le décalage de l'horloge satellite.

double différence:

$$\begin{aligned} R_{ik}^{jl} &= R_{ik}^l - R_{ki}^j \\ R_{ik}^{jl} &= \rho_k^l - \rho_k^j + \rho_i^l - \rho_i^j \end{aligned}$$

On remarque ici que les décalages d'horloges récepteurs sont éliminés.

Ces différences sont utilisées dans les traitements en temps différé. En temps réel le principe est le suivant: une station de coordonnées connues est prise comme référence, l'autre (les autres) est(sont) supposée(s) inconnue(s). La station de référence observe les satellites en vue et calcule en temps réel le décalage de son horloge par rapport au temps GPS:

$$R_{ref}^i = \rho_{ref}^i + c(dt^i - dt_{ref})$$

R_{ref}^i : pseudodistance mesurée entre la référence et le satellite i

ρ_{ref}^i : distance géométrique entre la référence et le satellite i à partir des coordonnées satellites calculées avec les éphémérides radiodiffusées et des coordonnées connues de la référence.

dt^i : l'écart entre le temps GPS et l'horloge du satellite i , obtenu à partir du message de navigation

dt_{ref} : est estimé à partir du système à n équations (n satellites) et 1 inconnue:

$$\forall i, i = 1 \text{ à } n R_{ref}^i = \rho_{ref}^i + c(dt^i - dt_{ref})$$

Soit Δt_{ref} la meilleure estimation de dt_{ref} au sens des moindres carrés (ici la moyenne); on peut réécrire les équations de la manière suivante:

$$\forall i R_{ref}^i (\text{mesuré}) = R_{ref}^i (\text{vrai}) + \varepsilon_i = \tilde{R}_{ref}^i + \tilde{\varepsilon}_i = \rho_{ref}^i + c(dt^i - \Delta t_{ref}) + \tilde{\varepsilon}_i$$

ε_i : erreur vraie et inconnue sur la mesure

$\tilde{\varepsilon}_i$: la meilleure estimation de l'erreur de mesure

\tilde{R}_{ref}^i : la meilleure estimation de \tilde{R}_{ref}^i , déduite des termes calculés (ρ_{ref}^i, dt^i) et de la meilleure estimation de dt_{ref} .

On appelle correction la quantité:

$$Cor_i = \tilde{R}_{ref}^i - R_{ref}^i = -\tilde{\varepsilon}_i$$

La station de référence élabore en permanence les termes de corrections pour tous les satellites en vue et les transmet aux stations de coordonnées inconnues. Celles-ci ajoutent à leurs mesures directes de pseudodistances les corrections reçues et calculent ensuite leur position en utilisant exclusivement des pseudodistances corrigées.

On peut remarquer que la qualité de l'estimation de dt_{ref} n'a pas d'influence sur la précision de la position calculée par les mobiles. En effet, si $dt_{ref,1}$ $dt_{ref,2}$ sont deux estimations différentes et $\{cor_{i,1}\}_{i=1...n}$ et $\{cor_{i,2}\}_{i=1...n}$ les jeux de corrections correspondants, ceux-ci diffèrent d'une valeur constante:

$$\forall i = 1 \dots n \quad Cor_{i,1} - Cor_{i,2} = c[\Delta t_{ref,1} - \Delta t_{ref,2}] = cte$$

Les pseudodistances corrigées au(X) mobile(s) seront de même égales à une constante près et l'algorithme de calcul de position interprétera cette différence comme un décalage de l'horloge du mobile par rapport au temps GPS. Les solutions calculées seront $(X_1, Y_1, Z_1, \Delta t_1)^T$ et $(X_2, Y_2, Z_2, \Delta t_2)^T$ avec $X_1 = X_2$ $Y_1 = Y_2$ $Z_1 = Z_2$ et $\Delta t_1 \neq \Delta t_2$.

On voit que le choix de dt_{ref} peut être totalement arbitraire. Certains systèmes essayent d'évaluer correctement ce terme et calculent ainsi des corrections de distances aux satellites. D'autres utilisent un dt_{ref} arbitraire ou estimé à l'aide d'un seul satellite "pivot" et les corrections sont alors simplement des corrections de pseudodistances.

Cette méthode constitue le DGPS (GPS différentiel) et n'est valide que si la meilleure estimation des erreurs effectuée à la station de référence est aussi une bonne estimation des erreurs de mesures aux stations inconnues. Ceci suppose que les causes "locales" d'erreurs (ex: multiples trajets) sont négligeables et n'est vrai que dans un rayon déterminé (décorrélation spatiale) et que pendant un temps déterminé (décorrélation temporelle des erreurs)

Remarque: dans ce paragraphe comme dans le précédent les corrections troposphériques et ionosphériques ne figurent pas dans les expressions des observables de phase et de pseudodistance simplement pour alléger l'expression. On peut cependant remarquer que la simple différence fait apparaître la différence de ces deux corrections entre la station i et la station k .

$$\Delta\rho_k^{ionoi,j} - \Delta\rho_i^{ionoi,j} + \Delta\rho_k^{trop,j} - \Delta\rho_i^{trop,j}$$

La simple différence minimise donc l'effet de ces deux corrections puisque seule leurs variations entre i et k interviennent (effet différentiel).

4.3.4 Les différents modes d'utilisation de GPS pour la localisation

Navigation absolue

La navigation est le but initial du système GPS. Elle consiste à localiser des véhicules sur terre, sur mer ou dans l'air.

La première technique consiste à mesurer au moins 4 pseudodistances sur 4 satellites à partir d'un seul récepteur. La durée d'observation est de quelques secondes. Le résultat est une position absolue, instantanée, en temps réel, avec une précision de 10 à 100 mètres selon que les dégradations sont actives ou non.

La même technique peut être utilisée pour un positionnement statique. On améliore la précision en augmentant la durée d'observation et en calculant une position moyennée sur plusieurs heures.

	Navigation temps réel	position moyennée
C/A code	SA on : 100 m	5 -10 m
	SA off : 40 m	
P-code	SA on : 15 m	3 - 5 m
	SA off : 8 m	

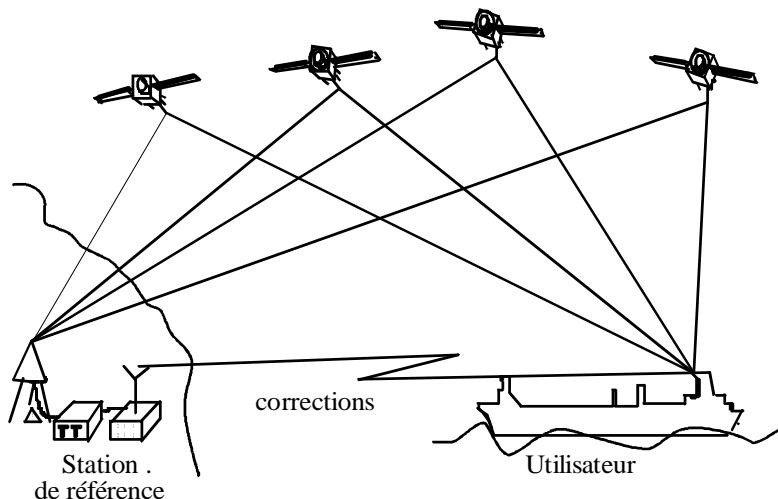
précision du positionnement absolu en pseudodistance

La navigation différentielle (DGPS)

La navigation différentielle ou le GPS différentiel (DGPS) consiste à faire des observations de pseudodistances en plusieurs stations simultanément. Ceci permet de s'affranchir de la SA et de diminuer les effets atmosphériques. La précision est bien meilleure que le positionnement absolu.

	Précision positionnement relatif
C/A code	1-15 m
P code	1-2 m

précision du positionnement différentiel en pseudodistance



navigation différentielle

Le premier type d'application du DGPS est dynamique, c'est à dire qu'une station est fixe (station de référence) et l'autre est mobile. La station fixe est connue en coordonnées, et

envoie, à l'aide d'un équipement radio (UHF, VHF, HF), en temps quasi réel des corrections à la station mobile qui calcule alors sa position. Ce type de positionnement est très utilisée en navigation maritime à l'approche des côtes ainsi que pour l'hydrographie. Des réseaux de stations fixes fonctionnant en continu se mettent en place, certains utilisent des transmissions via un satellite.

Un deuxième type d'application est statique et profite de la bonne précision du DGPS pour l'établissement de réseaux de points dont la précision n'a pas besoin d'être meilleure qu'un mètre.

Le mode statique géodésique

Le statique est le mode traditionnel de techniques GPS pour l'établissement de canevas ou réseaux en géodésie, topométrie, photogrammétrie ou géophysique. Il s'agit d'observer sur chaque station les phases sur au moins 4 satellites, le résultat est un positionnement relatif (base). Le temps d'observation doit être suffisant pour résoudre les ambiguïtés et dépend de la longueur de la base, de la géométrie de la constellation de satellite et des conditions atmosphériques. Par expérience la durée d'observation est d'au moins une heure pour des bases courtes (< 15 km) et est de plusieurs heures pour les bases longues. La configuration de réseaux observés en statique ressemble aux configurations de réseaux géodésiques traditionnels. Exemple de réseau:

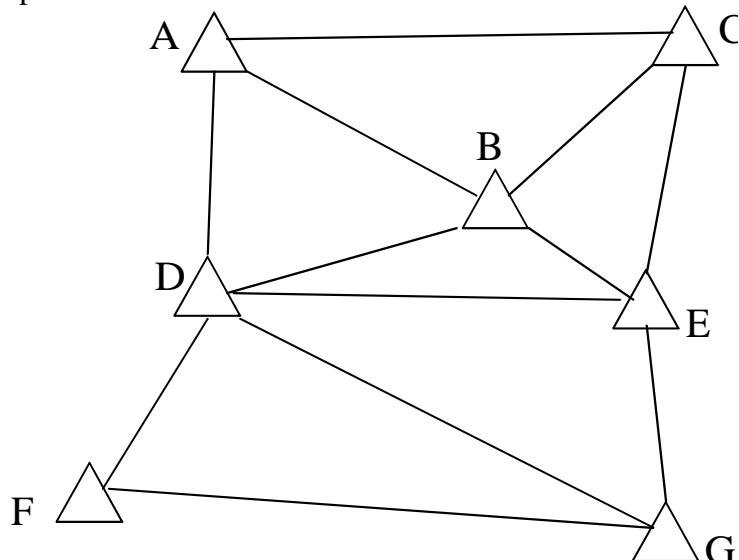


schéma d'observation en mode statique géodésique

Observations: 3 récepteurs, durée de déplacement d'environ 30 minutes, une planification des observations pourrait être:

heure de la session	récepteur 1	récepteur 2	récepteur 3
12h00 à 13h00	A	B	C
13h30 à 14h30	A	D	B
15h00 à 16h00	C	F	E
16h30 à 17h30	D	E	G
18h 00 à 19h00	D	F	G

exemple de planning d'observation en statique géodésique

La précision dépend du type de récepteurs (mono ou bifréquence), du nombre de récepteurs (pour les réseaux étendus) et du type d'orbites utilisées:

GPS statique monofréquence :

Les mesures de phases se font sur L1, la durée d'observation est d'environ une heure. La longueur des bases mesurées est entre 15 km (en zone équatoriale ou polaire) et 20 km (en zone tempérée). Les calculs sont exécutés avec les orbites radiodiffusées. On obtient une précision de $2\text{mm}+2.10^{-6}\text{ D}$ si les ambiguïtés sont bien fixées.

GPS Statique bifréquence :

Les mesures de phases se font sur L1 et L2, la durée d'observation est entre 1 à 4 heures. La longueur des bases peut atteindre 300 km. Les calculs avec les orbites radiodiffusées donnent une précision de 10^{-6} D

GPS statique ultra précis:

Les mesures de phases se font sur L1 et L2, la durée d'observation est de 1 à plusieurs jours. La longueur des bases est de l'ordre de 5000km. Les calculs se font soit par traitement dynamique, soit en utilisant des orbites précises. La précision est de l'ordre de $10^{-8}\text{ D}, 10^{-9}\text{ D}$.

La méthode statique est particulièrement bien adaptée pour des grandes distances mais aussi pour les petites distances dans des zones où de nombreux obstacles empêchent d'employer les autres techniques (cinématique).

Le statique rapide:

C'est une variante du statique, rendue possible par la mise au point d'algorithme de résolution rapide des ambiguïtés. On a trouvé que lorsque quatre satellites ou plus (5 sont souhaitables) étaient observés avec une bonne géométrie, les ambiguïtés pouvaient être résolues sur quelques minutes pour des bases inférieures à 15 km. La plupart des logiciels utilisent des données bifréquence pour ce traitement, bien que certains soient compatibles avec des données monofréquences.

Un réseau observé en statique rapide est sensiblement différent d'un réseau statique. En général on choisit une station de référence sur laquelle un récepteur mesure en continu, tandis que des récepteurs mobiles se déplacent sur les autres stations en observant quelques minutes sur chacune d'elles.

Exemple d'observation en statique rapide:

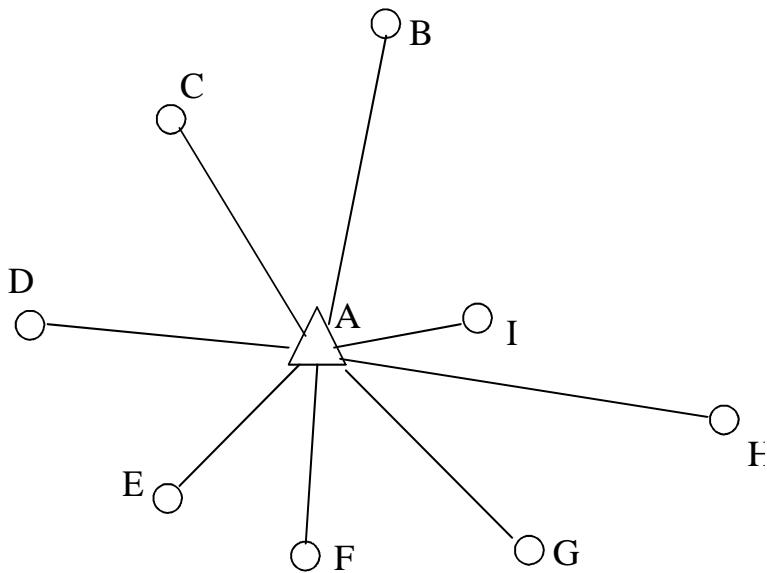


schéma d'observation en statique rapide

Observations: 3 récepteurs, 5 à 10 minutes d'observation, 5 minutes de déplacements entre les stations:

heure sessions	récepteur 1	récepteur 2	récepteur 3
12h00 à 12h10	A	B	F
12h15 à 12h25	A	C	G
12h30 à 12h40	A	D	H
12h45 à 12h55	A	E	I

exemple de planning d'observation en statique rapide

Cette technique très productive convient particulièrement aux petits réseaux en cadastre, topométrie, densification de géodésie, équipement photogrammétrique.

La précision est $2\text{mm}+2.10^{-6}\cdot D$.

La réoccupation (ou pseudo-cinématique):

La réoccupation est une autre variante du statique. Le principe des calculs est de grouper toutes les observations faites sur un site, lorsque le site est stationné plusieurs fois. Ceci permet d'observer avec des constellations de trois satellites. En effet si on observe trois satellites à la première occupation, et trois satellite à la deuxième occupation le logiciel fera comme si 6 satellites avaient été observés.

Le réseau observé ressemble au statique rapide, en général on choisit une station de référence, et les autres récepteurs sont mobiles d'une station à l'autre

Exemple d'observation en réoccupation:

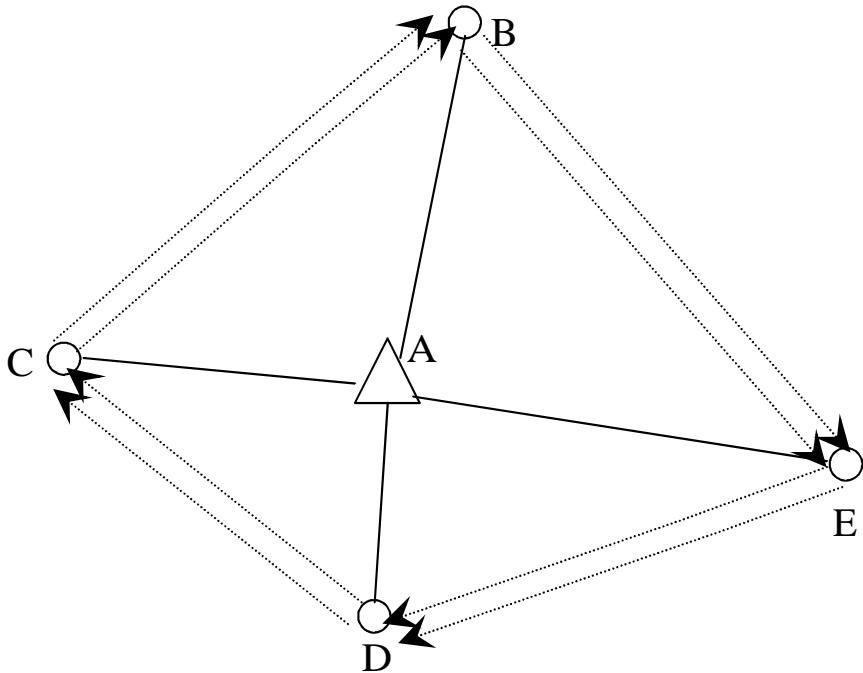


schéma d'observation en mode réoccupation

Observations: 2 récepteurs, durée d'observations de 5 à 10 minutes sur chaque point, durée du trajet entre points 15 minutes.

heures sessions	récepteur 1	récepteur 2
12h00 à 12h10	A	B
12h25 à 12h35	A	C
12h50 à 13h00	A	D
13h15 à 13h25	A	E
13h40 à 13h50	A	B
14h05 à 14h15	A	C
14h30 à 14h40	A	D
14h55 à 15h05	A	E

exemple de planning d'observation en réoccupation

La précision est $2\text{mm}+2.10^{-6}\cdot D$

Le cinématique

Le mode cinématique est basé sur la mesure de phase d'au moins quatre satellites et c'est une méthode différentielle. Le principe consiste à commencer par résoudre les ambiguïtés par une initialisation, puis ensuite stationner des points quelques secondes en conservant le signal sur les satellites durant les trajets, et donc les mêmes ambiguïtés. Cette méthode est très bien adaptée aux levés topométriques, ou à des trajectoires précises de véhicule. L'inconvénient est que tout obstacle interrompant le signal oblige à réinitialiser.

Dans le mode opératoire une station est fixe, l'autre mobile avec deux variantes : mode cinématique continu où les calculs de coordonnées de points sont faits à intervalles de temps

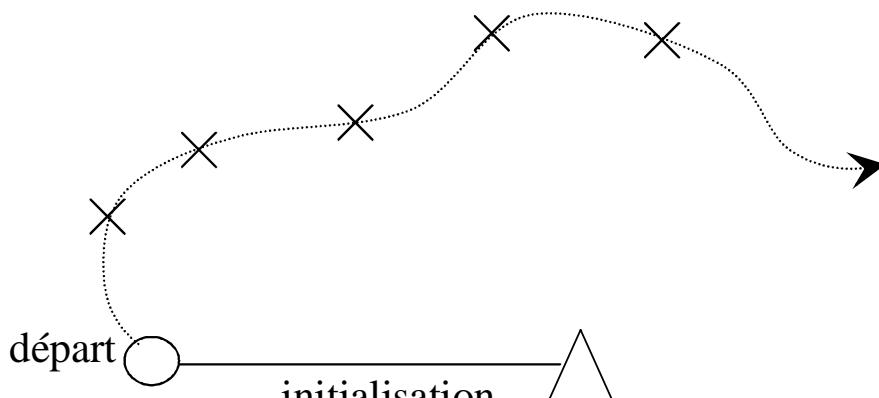
définis (trajectoire), ou STOP and GO où les observations sont enregistrées sur des points précis, et le signal gardé en cheminant entre les points. La précision est de $2\text{mm}+2.10^{-6}\text{ D}$

L'initialisation peut se faire de plusieurs manières :

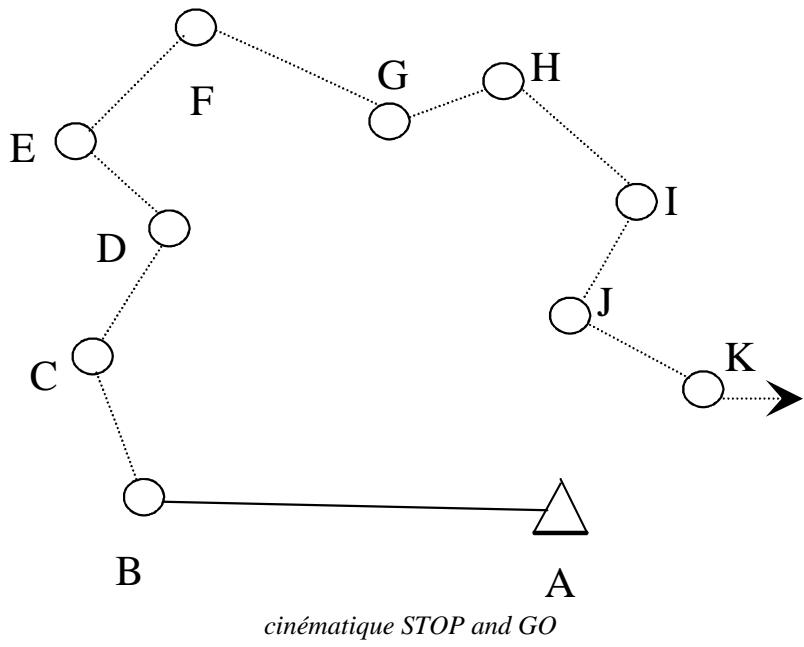
- en mode statique: on observe pendant une heure, les deux récepteurs étant fixes puis on part en cinématique avec l'un des deux.
- on observe quelques minutes sur une base connue, puis on part en cinématique.
- on fait un échange d'antennes: on observe quelques minutes une petite base, puis on échange les antennes tout en gardant le signal sur les satellites et on enregistre les mesures à nouveau quelques minutes, puis on part en cinématique
- en mode statique rapide: on observe entre 5 et 10 mn puis on part en cinématique

Lorsqu'en cours d'observation cinématique on perd le signal, on réinitialise selon une des méthodes ci-dessus, soit en revenant sur la base de départ, soit en restationnant le dernier point levé (qui sera ensuite considéré comme point connu une fois calculé) soit en réobservant en statique rapide ou par échange d'antennes au lieu de l'interruption.

Ces méthodes envisageables pour la méthode STOP and GO sont difficiles à envisager pour le cinématique continu, et les récents développements des constructeurs portent sur la résolution d'ambiguités en vol (AROF), qui ne nécessite aucun arrêt des observations. Ces méthodes basées sur la redondance des observations imposent une configuration de 5 satellites minimum, et il faut compter environ 200 s pour résoudre les ambiguïtés sans s'arrêter. Ces méthodes très prometteuses ouvrent la porte au cinématique en temps réel (RTK) très utile pour les guidages d'engins ou l'implantation en topométrie. Dans le mode temps réel le poste fixe envoie ses observations au poste mobile qui fait les calculs en temps quasi-réel.



cinématique continu



Les observations: deux récepteurs, initialisation en statique rapide, 1 minute entre les stations, 15 secondes d'enregistrement sur chaque point. w

Heures sessions	Récepteur 1	récepteur 2
12h00mn00s à 12h05mn00s	A	B
12h06mn00s à 12h06mn15s	A	C
12h07mn15s à 12h07mn30s	A	D
12h08mn30s à 12h08mn45s	A	E
12h09mn45s à 12h10mn00s	A	F
etc.....		

planning d'observation en cinématique STOP and GO

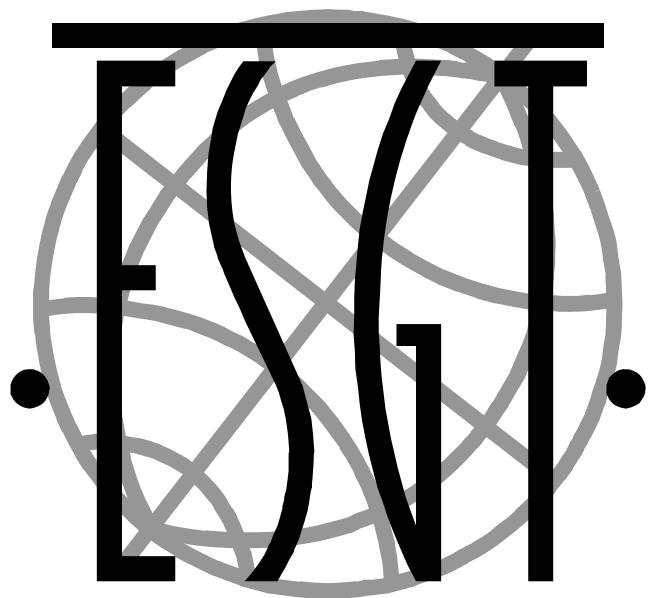
La trajectographie

Dans le mode trajectographie, on utilise des observations de phases et de pseudodistances. Le calcul se fait avec les pseudodistances lissées par la phase et on obtient un positionnement relatif. Le temps d'observations par point est de quelques secondes et aucune initialisation n'est nécessaire car les pseudodistances ne sont pas ambiguës. La précision est de quelques dizaines de cm, sur une distance pouvant aller jusqu'à 500 km.

Cette méthode est utilisée en photogrammétrie pour positionner les clichés. Un récepteur est au sol, un autre est embarqué dans l'avion, le déclenchement d'une prise de vue entraîne la mesure GPS du point de prise de vue.

C'est aussi cette méthode qui est utilisée pour le GPS dit submétrique dont l'utilisation principale est le positionnement d'objet dans les SIG

1.INTRODUCTION.....	1
2.MOUVEMENT D'UN SATELLITE ARTIFICIEL.....	1
2.1 OBJECTIFS:	1
2.2 PRINCIPES DU MOUVEMENT DU SATELLITE.....	1
2.3 LE MOUVEMENT KEPLERIEN:	2
2.3.1 <i>Le principe</i>	2
2.3.2 <i>Les coordonnées orbitales</i> :.....	4
2.3.3 <i>Coordonnées dans le repère céleste équatorial:</i>	6
2.3.4 <i>Passage des coordonnées orbitales aux coordonnées équatoriales</i> :.....	6
2.3.5 <i>Calcul du vecteur vitesse dans le repère équatorial</i> :.....	7
2.4 LE PROBLEME INVERSE DE KEPLER	9
2.4.1 <i>Calcul de l'inclinaison</i> :.....	9
2.4.2 <i>Calcul de l'ascension droite du nœud ascendant</i> :.....	10
2.4.3 <i>Calcul de la somme $\omega + \nu$</i>	10
2.4.4 <i>Calcul du demi grand-axe a</i>	10
2.4.5 <i>Calcul de l'excentricité e et de la latitude au périgée ϖ</i> :.....	11
2.4.6 <i>Calcul des anomalies à l'instant t</i> :.....	13
2.5 LE MOUVEMENT PERTURBE	13
2.5.1 <i>Le principe</i> :	13
2.5.2 <i>Ordre de grandeur des accélérations perturbatrices (par rapport à $\frac{\mu}{r^2}$)</i>	13
2.5.3 <i>Orbite osculatrice</i> :.....	14
2.5.4 <i>Les orbites radiodiffusées</i> :.....	16
2.5.4 <i>Etude d'orbites particulières dans le cadre de la perturbation en J2</i> :.....	16
3.LES MESURES ET LES TRAITEMENTS.....	18
3.1 LES TYPES DE MESURES	18
3.1.1 <i>Mesure d'un temps de propagation aller et retour</i> :.....	18
3.1.2 <i>Mesure d'un temps de propagation aller seul</i> :	19
3.1.3 <i>Mesure d'une différence de temps de propagation</i> :	19
3.1.4 <i>Mesure Doppler</i> :.....	20
3.1.5 <i>Mesure de phase</i> :.....	22
3.2 LA PROPAGATION DES ONDES	23
3.2.1 <i>Vitesse de propagation de la phase et de groupe</i>	23
3.2.2 <i>L'ionosphère</i>	24
3.2.3 <i>La troposphère</i>	26
3.3 LES TRAITEMENTS	27
4.LES SYSTEMES DE POSITIONNEMENT	28
4.1 LE SYSTEME TRANSIT	28
4.1.1 <i>le secteur spatial</i> :	28
4.1.2 <i>le secteur de contrôle</i> :	28
4.1.3 <i>Le secteur utilisateur</i> :	28
4.1.4 <i>les applications et leur précision</i>	29
4.2 LE SYSTEME DORIS.....	29
4.2.1 <i>Description du système</i>	29
4.2.2 <i>Le secteur spatial</i>	30
4.2.3 <i>Le secteur de contrôle</i>	30
4.2.4 <i>Le secteur utilisateur</i>	31
4.2.5 <i>Les applications</i>	32
4.3 LE SYSTEME GPS	32
4.3.1 <i>Description du système</i>	32
4.3.2 <i>Les mesures GPS</i>	39
4.3.3 <i>Les principales utilisations du système GPS pour la localisation</i>	45
4.3.4 <i>Les différents modes d'utilisation de GPS pour la localisation</i>	50



ECOLE SUPERIEURE DES GEOMETRES ET TOPOGRAPHES

1, Boulevard Pythagore - 72000 LE MANS

Téléphone : 02.43.43.31.00 Télécopie : 02.43.43.31.02

<http://www.esgt.cnam.fr>

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

ÉCOLE SUPÉRIEURE
DES GÉOMÈTRES ET
TOPOGRAPHES



COURS DE GÉODÉSIE

Chapitre 7 Systèmes de référence et de coordonnées

ES2



Cham

CONSERVATOIRE NATIONAL
DES ARTS ET MÉTIERS

Françoise et Henri DUQUENNE
1^{ère} édition 1998
dernière révision : Janvier 2002

1 INTRODUCTION

Avant le développement des techniques spatiales de positionnement, les géomètres n'utilisaient généralement qu'un seul système de référence géodésique (la NTF en France), une projection associée (Lambert conforme en France), un système de référence altimétrique (NGF-IGN69 en France). L'essor rapide du système GPS a profondément modifié la situation. Le GPS s'appuie sur un réseau de poursuite dont les coordonnées sont exprimées en WGS84. Les orbites radiodiffusées utilisent implicitement ce système. Cependant le système de référence dans lequel on obtient les coordonnées finales des points d'un réseau ou d'un chantier dépend :

- du type de positionnement (absolu, différentiel)
- du type d'orbites utilisées
- du rattachement éventuel à une référence géodésique existante, mondiale ou nationale.

Du choix de la référence dans laquelle on veut exprimer les coordonnées finales et du niveau d'exactitude du rattachement à cette référence découlent, dans une large mesure, les spécifications d'observations et de traitement. On rappelle dans ce chapitre les notions fondamentales sur les systèmes de référence et de coordonnées, avant d'aborder quelques cas classiques liés à GPS. Il est fait appel à l'ensemble des notions de géodésie exposées dans les chapitres précédents. On suppose en outre connues les applications géométriques du calcul matriciel (changements de repères 3D).

2 DÉFINITION DES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCES ET DE COORDONNÉES

2.1 Système de référence géodésique (définition)

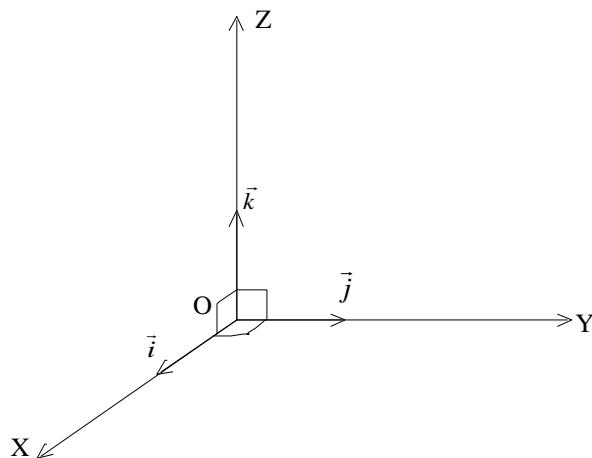


Figure 1 : Système de référence géodésique.

Un système de référence géodésique est un repère orthogonal affine $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que :

- O est proche du centre des masses de la Terre (à quelques centaines de mètres pour les systèmes réalisés par géodésie terrestre, à moins de 10 m pour ceux réalisés par géodésie spatiale)
- OZ est proche de l'axe de rotation terrestre
- OXZ est proche du plan méridien origine
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| \approx 1$

Dans un système de référence géodésique un point de la croûte terrestre est quasiment fixe bien qu'il soit soumis à de faibles mouvements dus aux marées terrestres (amplitude inférieure à 30 cm), à la surcharge océanique et aux mouvements tectoniques globaux ou locaux (vitesse inférieure à 10 cm/an).

2.2 Coordonnées associées au système de référence géodésique

2.2.1 Coordonnées tridimensionnelles cartésiennes géocentriques

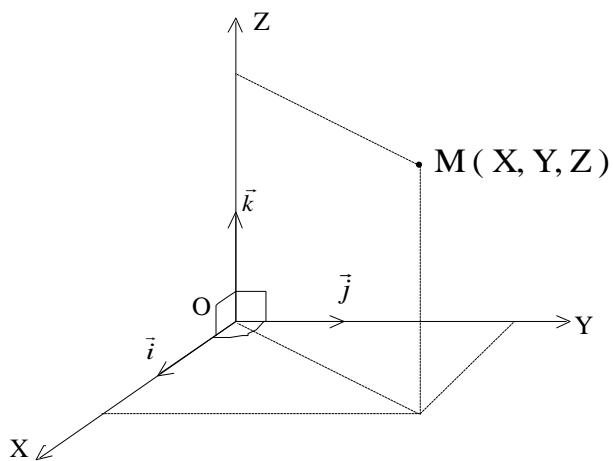


Figure 2 : Coordonnées tridimensionnelles cartésiennes (géocentriques).

Ces coordonnées sont les coordonnées orthonormées traditionnelles (figure 2). On les appelle souvent "géocentriques", puisque le point O est voisin du centre des masses de la Terre. Pour tenir compte des mouvements des points de la croûte terrestre on complète les coordonnées (X, Y, Z) par leurs variations temporelles (composantes de la vitesse) $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$.

2.2.2 Coordonnées tridimensionnelles géographiques

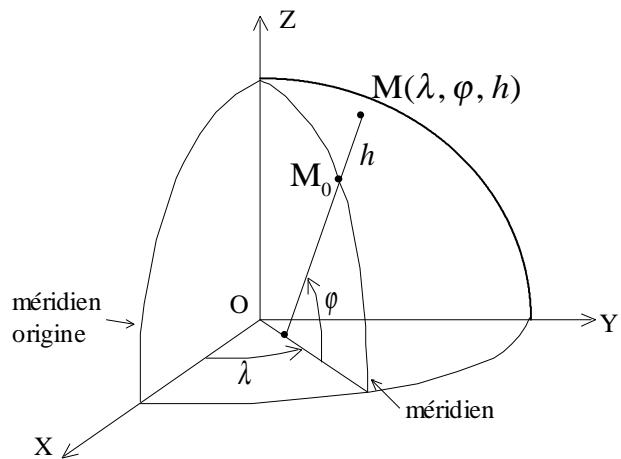


Figure 3 : Coordonnées tridimensionnelles géographiques.

On associe au repère un ellipsoïde, centré en O, et dont deux constantes (a, e ou a, b ou a, f ou a, J_2) sont fixées conventionnellement. Le plan méridien de M contient l'axe OZ et la normale à l'ellipsoïde passant par M. La longitude λ est l'angle entre le plan méridien origine et le méridien de M (figure 3). La latitude φ est l'angle entre la normale à l'ellipsoïde passant

par M et le plan équatorial. La hauteur h au dessus de l'ellipsoïde est la distance comptée le long de la normale entre l'ellipsoïde et M, positivement vers l'extérieur de l'ellipsoïde.

2.2.3 Coordonnées planes

Une représentation plane (on dit aussi projection) transforme l'ellipsoïde en un plan (figure 4). A tout point de l'ellipsoïde de coordonnées (λ, φ) correspond un point sur le plan de coordonnées cartésiennes (E, N ou x, y). On remarque que dans cette transformation la connaissance de h n'est pas nécessaire (ou est perdue). Une représentation plane est définie par des fonctions, des paramètres de définition (méridien ou parallèle central, échelle sur l'isomètre centrale,...)

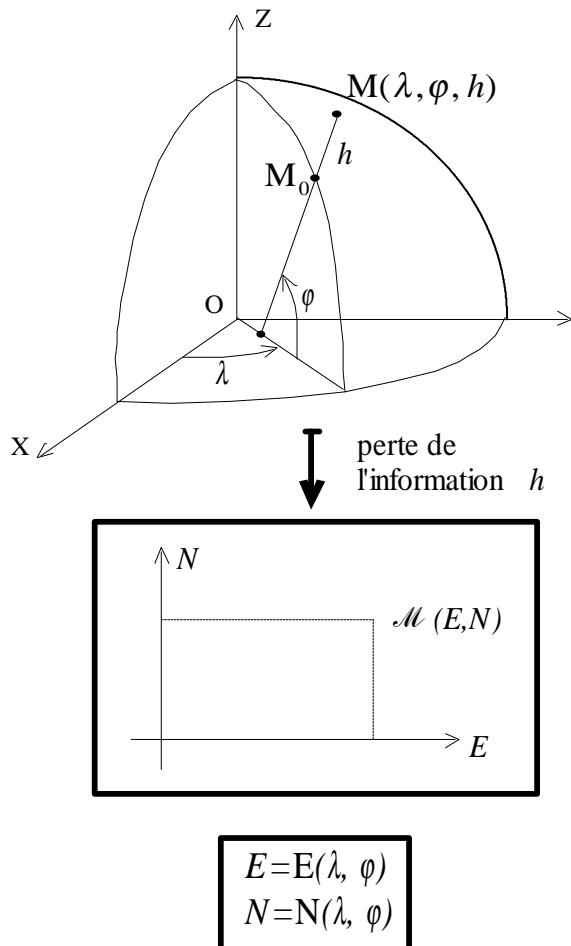


Figure 4 : Coordonnées géographiques et planes cartésiennes.

2.2.4 Eléments de définitions de chaque type de coordonnées

Tableau 1 : Éléments de définition des types de coordonnées.

	X, Y, Z	λ, φ, h	E, N, h
système géodésique			
ellipsoïde			
méridien origine			
projection			
unité linéaire			
unité angulaire			

Chaque type de coordonnées est défini à partir d'éléments nécessaires et suffisants qui figurent dans le tableau 1. Par exemple pour définir des coordonnées planes il faut préciser la projection, l'ellipsoïde, le méridien origine, le système géodésique ainsi que l'unité linéaire utilisée. On notera que dans ce tableau et dans la suite du chapitre, les coordonnées en projection sont notées E et N , pour éviter la confusion avec les coordonnées géocentriques X , Y , Z .

Système de référence altimétrique et altitude (définition)

L'altitude d'un point de la surface topographique est de manière très approchée la distance entre le point et une surface de référence appelée géoïde (figure 5). Le géoïde est une équipotentielle du champ de pesanteur ($W=W_0$) qui correspond approximativement au niveau moyen des mers.

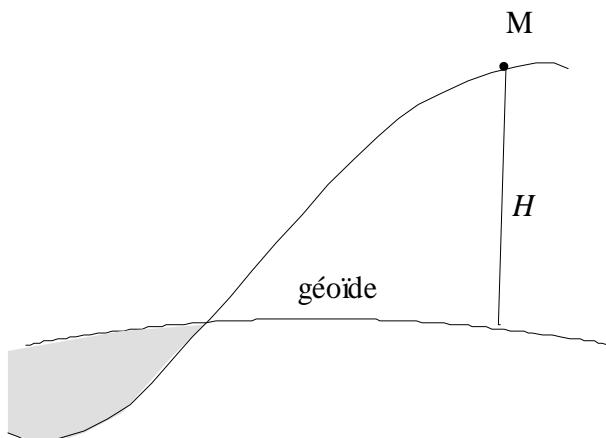


Figure 5 : Altitude.

Plus rigoureusement l'altitude est définie par:

$$H_M = \frac{1}{\gamma} \oint dW \quad (1)$$

avec

- $dW = \vec{g} \cdot d\vec{h}$ quantité de travail à fournir dans le champ de pesanteur pour déplacer une masse unité du géoïde au point M.
- γ une valeur moyenne conventionnelle de la pesanteur. L'expression conventionnelle prise pour γ (pesanteur normale sur l'ellipsoïde pour une latitude de 45° , valeur moyenne de la pesanteur réelle, valeur moyenne de la pesanteur normale) définit le type d'altitude (dynamique, orthométrique, normale)

Un système de référence altimétrique est défini par :

- un point fondamental: point pour lequel on fixe arbitrairement l'altitude. Ce point est généralement proche d'un marégraphe et rattaché au "niveau moyen des mers"
- un type d'altitude : dynamique, orthométrique, normal.

2.3 Réalisation d'un système de référence

Un système de référence n'est pas directement accessible à l'expérience. La réalisation se fait implicitement en exprimant la position de points dans le système de référence par des coordonnées (et éventuellement des vitesses). Le système de référence est donc rendu accessible à l'utilisateur par un réseau qui est un ensemble de points matérialisés physiquement, avec leurs coordonnées estimées et éventuellement leurs variations temporelles. Les

coordonnées estimées dépendent des observations utilisées ainsi que des processus d'estimations (ensemble des algorithmes et constantes).

On distingue deux types de réalisations:

- les réalisations cinématiques dans lesquelles on donne les coordonnées et vitesses des points (réseau géodésique, ensemble des stations de poursuite de satellites, réseau de nivellation).
- les réalisations dynamiques dans lesquelles on donne les trajectoires ou éphémérides des satellites appartenant à un système de positionnement (exemple : la constellation des satellites GPS qui réalise le système de référence WGS84, dans le cas d'un positionnement en point isolé basé sur les éphémérides radiodiffusées).

Pourquoi de nombreux systèmes ?

Un système dépend de la technique d'observation utilisée pour le réaliser et l'exploiter: géodésie terrestre, géodésie spatiale. L'amélioration des techniques d'observations rend d'autre part la réalisation de plus en plus précise et augmente les exigences des utilisateurs en matière de précision. L'étendue des systèmes géodésiques s'est élargie progressivement: limitée à un pays ou à un continent en géodésie terrestre (à cause des océans), elle est devenue mondiale avec la géodésie spatiale. Une unification en est la conséquence.

En général, dans un pays, plusieurs systèmes coexistent pour des raisons pratiques et historiques (on ne peut pas refaire instantanément toute une cartographie) mais aussi pour des raisons légales ou réglementaires.

Les méthodes de réalisations

En géodésie terrestre on réalise deux réseaux distincts:

- un réseau planimétrique qui est défini par:
 - un point fondamental (point pour lequel on prend comme coordonnées géographiques des coordonnées issues d'observations astronomiques: en ce point la normale à l'ellipsoïde et la normale au géoïde (verticale) sont confondues (figure 6)).
 - les observations sont des mesures d'angles et de distances entre points proches de la surface terrestre, des mesures d'angles et de temps sur les étoiles en astronomie.
- un réseau altimétrique qui est défini par:
 - un point fondamental proche d'un marégraphe
 - les observations qui sont des mesures de nivellation géométrique et de gravimétrie

Les coordonnées obtenues sont bidimensionnelles + unidimensionnelles (2D+1) : λ, φ, H ou E, N, H .

Les systèmes géodésiques issus de la géodésie terrestre sont donc locaux (nationaux, continentaux), le sommet du repère O peut être à quelques centaines de mètres du centre des masses de la Terre.

En géodésie spatiale :

Les observations sont des mesures radioélectriques (Doppler, phase, temps de propagation) sur des satellites ou des objets extragalactiques: Transit, GPS, Doris, VLBI, Laser. Les coordonnées obtenues sont tridimensionnelles (3D) : X, Y, Z ou λ, φ, h .

Les systèmes géodésiques issus de la géodésie spatiale sont globaux, le sommet O est à quelques mètres du centre des masses de la Terre, et même quelques centimètres pour les meilleures réalisations.

Les ellipsoïdes associés ont des dimensions qui peuvent différer de quelques centaines de mètres d'un système à l'autre. Il n'y a en effet pas de solution unique au problème de la modélisation.

sation de la Terre par un ellipsoïde. Les paramètres ont été déterminés de différentes manières

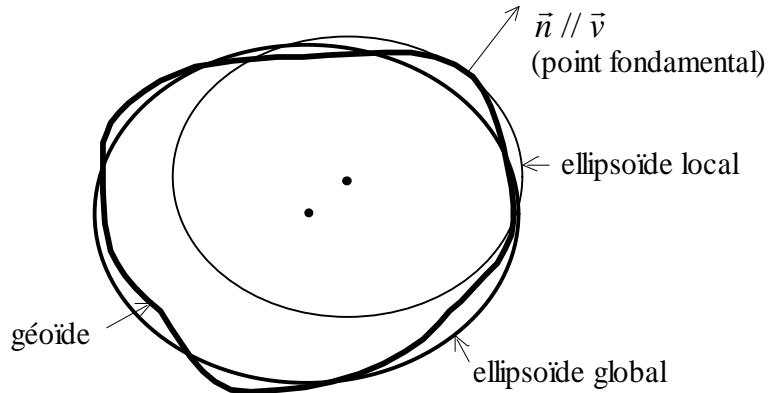


Figure 6 : Ellipsoïde global, ellipsoïde local.

(mesure d'arc de méridien, mesures de pesanteur reparties sur toute la Terre, exploitation de mesures géodésiques sur satellites) et les mesures se sont accumulées et affinées progressivement.

3 Transformations de coordonnées

3.1 Changement de système de référence

3.1.1 En coordonnées cartésiennes:

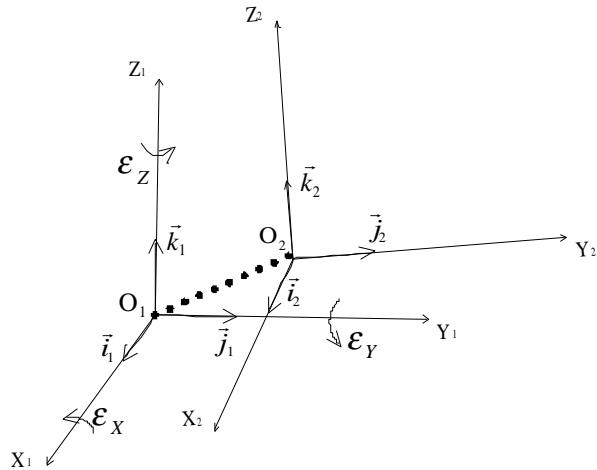


Figure 7 : Changement de système de référence.

Pour passer du système géodésique $SG_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ au système géodésique $SG_2(O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$ on effectue une similitude spatiale (figure 7) qui est le produit de trois transformations :

- translation de composantes T_x, T_y, T_z (en raison de la non-coïncidence de O_1 et O_2)
- rotation dans l'espace **R** (à cause du non-parallélisme des axes)
- homothétie K (changement d'échelle : $\|\vec{i}_1\| \neq \|\vec{i}_2\|$)

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{SG_2} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + K\mathbf{R} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{SG_1} \quad (2)$$

T_X, T_Y, T_Z sont les coordonnées de O_1 dans SG_2

K est le rapport d'homothétie. On pose : $K = (1+D)$, D est de l'ordre de 10^{-6}

\mathbf{R} est la rotation qui rend les axes de SG_1 parallèles à ceux de SG_2 . \mathbf{R} peut être décomposée en trois rotations autour des axes : $\mathbf{R}_1(\varepsilon_x)$, rotation d'angle ε_x autour de OX , $\mathbf{R}_2(\varepsilon_y)$, rotation d'angle ε_y autour de OY , $\mathbf{R}_3(\varepsilon_z)$, rotation d'angle ε_z autour de OZ . Les angles $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sont petits, de l'ordre de 10^{-5} radians. Dans le produit des rotations, on néglige donc les termes du second ordre et les trois rotations sont commutatives. On démontre facilement :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

L'expression (2) peut être développée en négligeant les termes du 2° ordre et s'écrire:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{SG_2} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{SG_1} + \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix}_{SG_1} + \begin{pmatrix} D & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & D & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{SG_1} \quad (4)$$

Attention, il arrive couramment que l'on utilise comme paramètres des rotations les angles $r_1 = -\varepsilon_x, r_2 = -\varepsilon_y, r_3 = -\varepsilon_z$

3.1.2 Estimation des 7 paramètres ($T_X, T_Y, T_Z, D, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$):

Si on connaît les coordonnées de plusieurs points à la fois dans le système SG_1 et dans le système SG_2 on peut déterminer les 7 paramètres de la transformation: on connaît les coordonnées de n points dans les deux systèmes:

$$\mathbf{M}_k \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix}_{SG_1} \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \\ Z_k \end{pmatrix}_{SG_2} \quad k = 1, \dots, n$$

Les paramètres $T_X, T_Y, T_Z, D, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ sont inconnus. En écrivant une équation matricielle telle que (4) pour chaque point \mathbf{M}_k , on a:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ X_k \\ Y_k \\ Z_k \\ \vdots \end{pmatrix}_{SG_2} - \begin{pmatrix} \vdots \\ X_k \\ Y_k \\ Z_k \\ \vdots \end{pmatrix}_{SG_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_k & 0 & -Z_k & Y_k \\ 0 & 1 & 0 & Y_k & Z_k & 0 & -X_k \\ 0 & 0 & 1 & Z_k & -Y_k & X_k & 0 \\ & & & & \vdots & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ D \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (5)$$

On résout le système $3n \times 7$ par la méthode des moindres carrés. Un point connu dans deux systèmes donne 3 équations, il faut donc au moins 3 points connus dans les deux systèmes pour obtenir les 7 paramètres. Il arrive souvent que l'on ne détermine pas tous les paramètres, par exemple une translation peut suffire; le nombre minimum de points communs peut être alors inférieur à 3.

3.1.3 En coordonnées géographiques: Formules de Molodenski simplifiées.

Pour changer de système de référence en coordonnées géographiques, il est en principe nécessaire de passer des géographiques aux cartésiennes, d'effectuer le changement de système avec les formules (4), puis de repasser aux coordonnées géographiques dans le nouveau système. Du fait que les systèmes d'axes sont proches l'un de l'autre, on a pu mettre au point des formules évitant l'intermédiaire des cartésiennes. On suppose pour simplifier que $D = 0, \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$. $\Delta a, \Delta f$ représentent les différences entre les paramètres des deux ellipsoïdes ($\Delta a = a_2 - a_1$, etc.). $\Delta\lambda''$ et $\Delta\varphi''$ représentent les écarts entre les coordonnées géographiques du même point entre les deux systèmes, en secondes sexagésimales ($\Delta\lambda'' = \lambda_2 - \lambda_1$, etc.). Δh est l'écart entre les hauteurs ellipsoïdales.

$$\Delta\lambda'' = \frac{206265}{v \cos\varphi} (-T_x \sin\lambda + T_y \cos\lambda) \quad (6)$$

$$\Delta\varphi'' = \frac{206265}{\rho} (-T_x \sin\varphi \cos\lambda - T_y \sin\varphi \sin\lambda + T_z \cos\varphi + (a\Delta f + f\Delta a) \sin 2\varphi) \quad (7)$$

$$\Delta h = T_x \cos\varphi \cos\lambda + T_y \cos\varphi \sin\lambda + T_z \sin\varphi + (a\Delta f + f\Delta a) \sin^2 \varphi - \Delta a \quad (8)$$

On rappelle les expressions du rayon de courbure de l'ellipse méridienne et de la grande normale :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad v = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

On peut indifféremment calculer ρ et v avec l'un ou l'autre des ellipsoïdes. Il existe des formules plus complètes, tenant compte des rotations et du facteur d'échelle.

3.2 Transformation de coordonnées tridimensionnelles cartésiennes en géographiques

Les formules de passage des coordonnées géographiques (λ, φ, h) aux coordonnées cartésiennes, sans changement de système de référence, découlent des propriétés de l'ellipsoïde

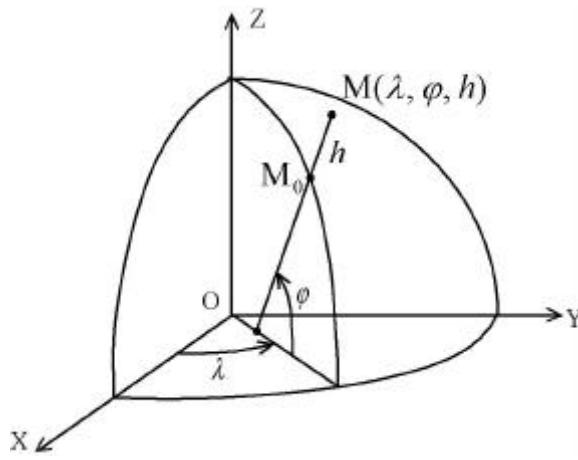


Figure 8 : Transformation de coordonnées géographiques en cartésiennes.

de révolution. Les coordonnées géographiques du point M_0 , projection de M sur l'ellipsoïde (figure 8), sont $(\lambda, \varphi, 0)$. Ses coordonnées cartésiennes sont :

$$\begin{aligned} X &= a \frac{\cos \lambda \cos \varphi}{w} = v \cos \lambda \cos \varphi \\ Y &= a \frac{\sin \lambda \cos \varphi}{w} = v \sin \lambda \cos \varphi \\ Z &= a(1 - e^2) \frac{\sin \varphi}{w} = v(1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned} \quad (10)$$

On en déduit facilement celles de M , qui sont données ci-dessous (partie gauche du tableau). Le passage inverse fait appel à un algorithme itératif (partie droite).

Tableau 2 : Conversion de géographiques en cartésiennes géocentriques, et réciproquement.

$\lambda, \varphi, h \Rightarrow X, Y, Z$	$X, Y, Z \Rightarrow \lambda, \varphi, h$
$X = (v + h) \cos \varphi \cos \lambda$ $Y = (v + h) \cos \varphi \sin \lambda$ $Z = (v(1 - e^2) + h) \sin \varphi$ $v = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}$	$p = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ $\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) = 2 \arctan\left(\frac{Y}{X + p}\right)$ $\varphi_0 = \arctan\left(\frac{Z}{p}\right)$ $w = (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^{1/2} \quad (1)$ $v = \frac{a}{w}$ $h = p \cos \varphi_0 + Z \sin \varphi_0 - aw$ $\varphi = \arctan\left(\frac{Z}{p} \left(1 - \frac{ve^2}{v+h}\right)^{-1}\right)$ <p>Si $\varphi - \varphi_0 > \varepsilon$ alors $\varphi_0 = \varphi$ puis aller à (1), sinon fin de calcul.</p>

3.3 Transformation des coordonnées géographiques en coordonnées planes

Les représentations planes d'un ellipsoïde sont étudiées dans le chapitre consacré à la géodésie géométrique. En géodésie et en topographie, on utilise exclusivement des représentations conformes. Les représentations coniques conformes directes (Lambert) et cylindrique conforme transverse (Mercator transverse) sont parmi les plus utilisées, les formules correspondantes se trouvent dans le chapitre cité. En France, on peut être amené à se servir de :

- La représentation conique conforme directe de Lambert en quatre zones, associée au système de référence géodésique de la Nouvelle Triangulation Française (NTF). Ce sont le système et la représentation légaux.
- La représentation Lambert 93 avec le système géodésique du Réseau Géodésique Français (RGF), destiné à remplacer la NTF.
- La représentation Universal Transverse Mercator (UTM), avec le système de référence Europe 50 (ED50) ou WGS84, pour les usages militaires.

Il est important de remarquer qu'un changement de projection s'accompagne généralement d'un changement de référence géodésique. Par exemple, pour passer de Lambert zone I (NTF) en UTM fuseau 31 (ED50), on transforme les coordonnées planes en géographiques NTF (ellipsoïde Clarke 1880, méridien origine Paris), puis en géographiques ED50 (ellipsoïde International, dit aussi Hayford 1924, méridien origine Greenwich), enfin en UTM fuseau 31.

3.4 Transformation de hauteur au dessus de l'ellipsoïde en altitude

Suivant que le type d'altitude est orthométrique ou normal, la relation entre la hauteur ellipsoïdale h et l'altitude H est théoriquement (figure 9) :

$$h = N + H^{(O)} \quad (11)$$

$$h = \zeta + H^{(N)} \quad (12)$$

N est la hauteur du géoïde, ζ l'anomalie d'altitude. L'origine théorique des altitudes orthométriques est le géoïde. Pour les altitudes normales, c'est le quasi-géoïde.

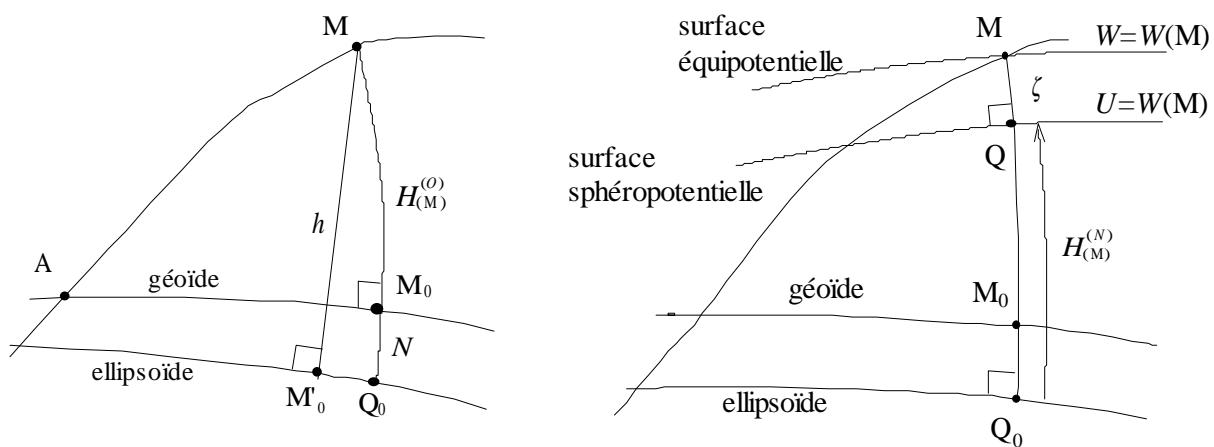


Figure 9 : Relation entre altitude orthométrique (à gauche) ou normale (à droite) et hauteur ellipsoïdale.

Cependant, la surface d'altitude nulle ($H = 0$) réalisée par le réseau de nivellation n'est pas confondue avec le géoïde ou le quasi-géoïde idéal, et encore moins avec un modèle imparfait de géoïde ou quasi-géoïde. L'écart dépend de la définition du système altimétrique (choix du point fondamental) et de sa réalisation (erreurs systématiques du réseau), de la définition du géoïde (constante W_0) et de sa réalisation (erreurs dans les données). Enfin, les équations (11) et (12) supposent implicitement que la hauteur du géoïde (ou du quasi-géoïde) soient exprimée dans le même système de référence géodésique que la hauteur ellipsoïdale h . En pratique, la hauteur du géoïde ou l'anomalie d'altitude sont obtenues par rapport à un ellipsoïde et dans un système géodésique particulier, qui n'est pas nécessairement celui dans lequel on connaît h . On résout ce problème en adaptant le modèle de géoïde ou de quasi-géoïde au référentiel géodésique, au moyen de points géodésiques nivelés.

3.5 Organigramme des transformations

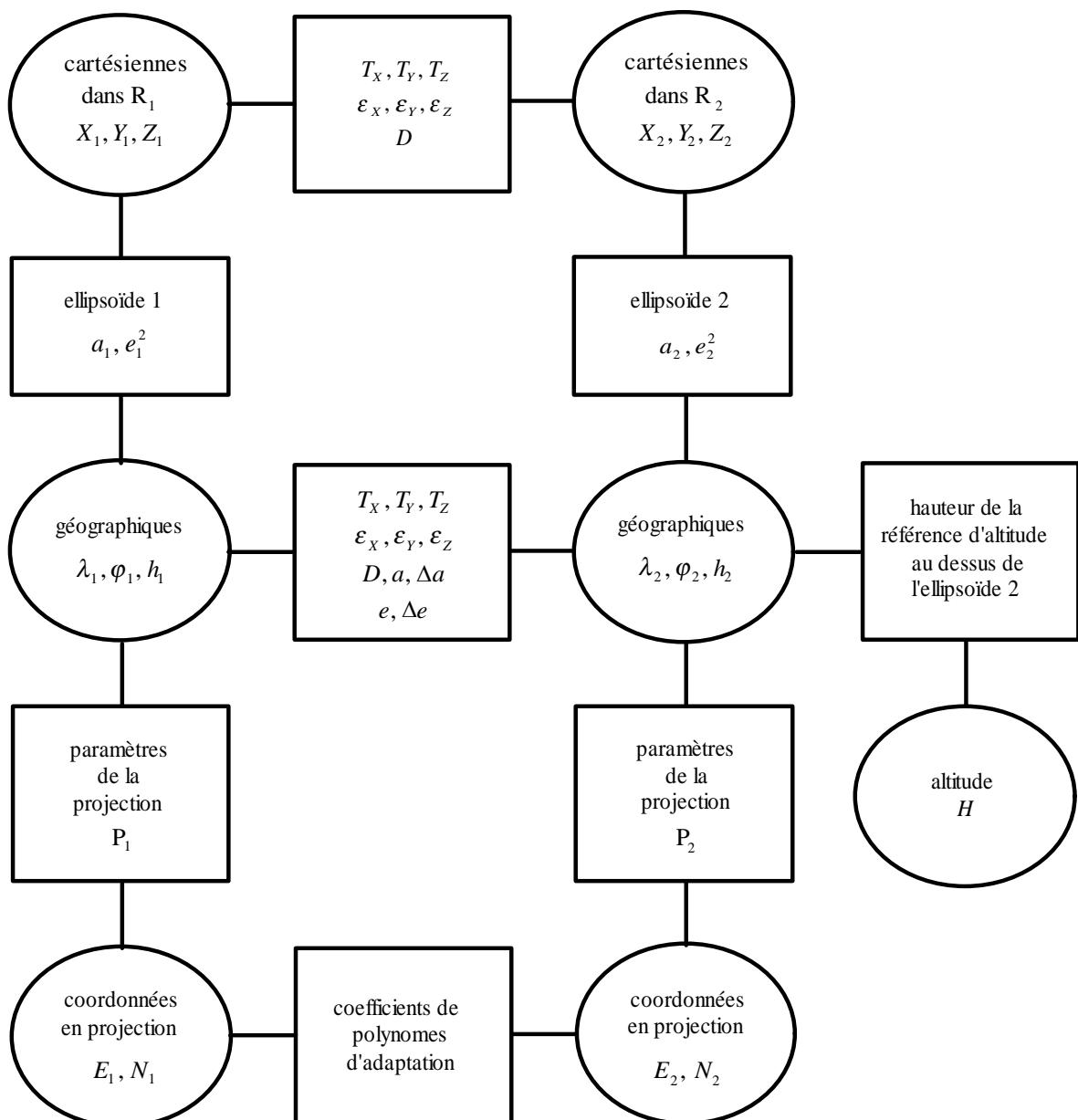


Figure 10 : Organigramme des changements de systèmes et de coordonnées

La figure 10 représente un organigramme des transformations possibles entre coordonnées de différents types, entre deux systèmes géodésiques R_1 et R_2 . Plusieurs remarques s'imposent :

1. On a supposé que les deux systèmes de références sont tridimensionnels, c'est à dire élaborés par techniques spatiales. Si ce n'est pas le cas, si par exemple R_1 est un référentiel de type ancien (2D+1), les hauteurs ellipsoïdales h_1 ne sont pas déterminées par la géodésie. Ont a pu les obtenir à partir des altitudes et d'un modèle de géoïde dont on a supposé que le système de référence était R_1 (voir ci dessous l'exemple de la NTF).
2. Par le passé, on a pu calculer empiriquement des coefficients de polynômes d'adaptation entre coordonnées en projection, comme il est indiqué en bas de la figure. On le fait encore dans des cas où les systèmes de coordonnée sont mal connus. Cette méthode est très locale.

4 Exemples de systèmes de références

4.1 Le système géodésique français : la NTF

La Nouvelle Triangulation Française (NTF) est le système légal français réalisé par géodésie classique (triangulation) de 1898 à 1991. Le point fondamental est la croix du Panthéon à Paris. Les observations sont principalement des angles horizontaux, avec un point Laplace (astronomique) et une mesure de base tous les 300 km.

L'ellipsoïde associé est Clarke 1880 IGN, la représentation plane est celle de Lambert avec quatre zones : I, II, III, IV.

Le réseau est hiérarchisé (cf. tableau 3), les calculs ont été menés par blocs, le second ordre s'appuyant sur le premier ordre, le détail sur les 2ème et 1er ordres.

Tableau 3 : Structure du réseau NTF.

STRUCTURE		ESPACEMENT	NOMBRE	PRECISION
Réseau Principal	1er ordre	30 km	800	10^{-5}
	2ème ordre	10 km	5 000	10^{-5}
	3ème et 4ème ordres	3 km	60 000	10^{-5}
réseau complémentaire	5ème ordre		20 000	diverse

La comparaison du système NTF avec un système spatial met en évidence des défauts de la NTF d'amplitude atteignant plusieurs mètres (figure 11). Ces défauts sont principalement dus au mode de traitement par blocs du 1er ordre, ainsi qu'à la pauvreté en mesures d'orientation et de distance. Ce système devient insuffisant pour des utilisateurs de techniques spatiales, particulièrement GPS, et la réalisation d'un système de qualité spatiale a été recommandée par le Conseil National de l'Information Géographique (CNIG).

Le géoïde astrogéodésique de Levallois (1970) et le nivellement IGN69 ont permis d'attribuer une hauteur ellipsoïdale aux points de la NTF. La précision sur cette hauteur est limitée par celle du géoïde : quelques décimètres en plaine, jusqu'à 3 mètres en montagne.

4.2 Le Réseau Géodésique Français (le RGF)

4.2.1 Description générale

Le but est d'obtenir un réseau, dont on connaît les coordonnées tridimensionnelles dans un système de référence mondial avec une exactitude de qualité compatible avec les techniques modernes de positionnement. Le système de référence géodésique est RGF93, l'ellipsoïde associé GRS80.

Le RGF est composé de trois réseaux:

le RRF: le Réseau de Référence Français (figure 12): 23 points déterminés par géodésie spatiale de grande précision (VLBI, LASER, GPS ultra précis). Tous les points du RRF sont intégrés dans le réseau européen ETRF89.

Le RBF : le Réseau de Base Français est constitué d'environ 1000 points observés en GPS. Presque tous les points du RBF sont rattachés à des points proches de la NTF et, en nivellation, au réseau NGF-IGN69.

Le RDF : le Réseau de Détail Français: environ 80000 points de la NTF dont les coordonnées RGF sont obtenues par des transformations estimées à partir de points RBF connus à la fois dans le RGF et la NTF.

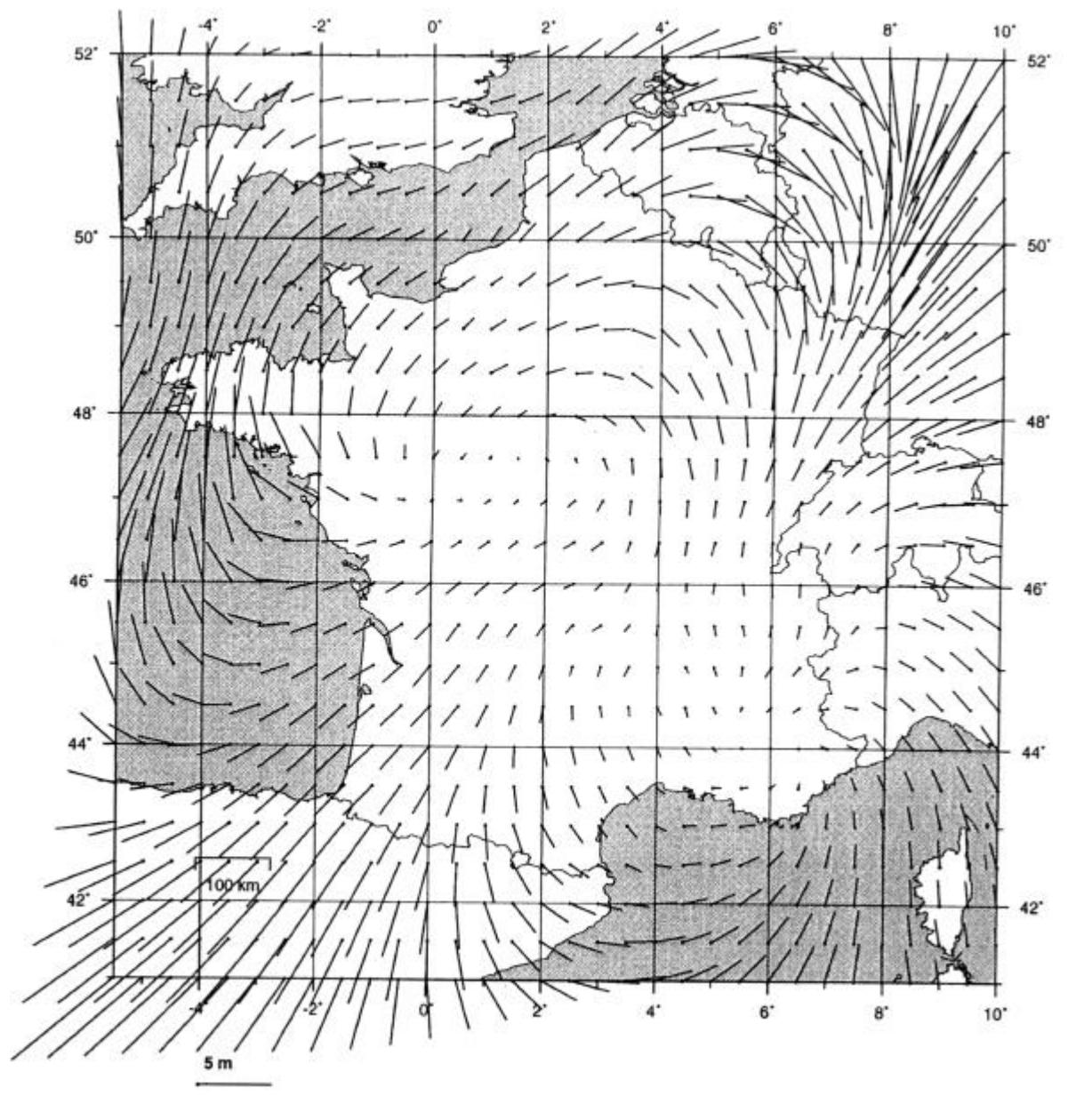


Figure 11 : Les déformations de la NTF par rapport à un système spatial (document IGN).

Les étapes de la réalisation:

Le RRF a été observé entre 1989 et 1993:

mai 1989 : observations GPS pour le réseau européen: 93 points en Europe, 8 en France

juin 1989: observations VLBI pour le réseau européen: 6 points dont deux en France

1992: observations VLBI: un point en France

1993: observations GPS des 23 points du RRF



Figure 12 : Le Réseau de Référence Français (document IGN).

Le RBF est réalisé initialement par:

- l'observation de 1100 points (RBF) en GPS en 1994, 1995, 1996

Tableau 4 : Le réseau RGF.

Structure	Espacement	Nombre	Exactitude
RRF: Réseau de Référence	Spatial	200 km	10^{-7}
RBF: Réseau de Base	RBF: GPS	25 km	10^{-6}
RDF: Réseau de Détail	adaptation des coordonnées des points de la NTF	3 km	quelques 10^{-6}

4.3 Le réseau européen ED50 (European Datum 1950)

Ce système géodésique est établi par techniques géodésiques terrestres à partir des observations de 1er ordre des réseaux nationaux propres à chaque pays d'Europe occidentale. Le point fondamental est Potsdam (Allemagne) pour lequel une valeur de la déviation de la verticale a été fixée conventionnellement.

Ellipsoïde associé : ellipsoïde international HAYFORD 1924

La représentation plane associée est UTM (Universal Transverse Mercator).

D'autres systèmes européens ont été réalisés en variant les méthodes de calculs et les observations prises en compte. A partir de 1987, les observations spatiales ont été ajoutées.

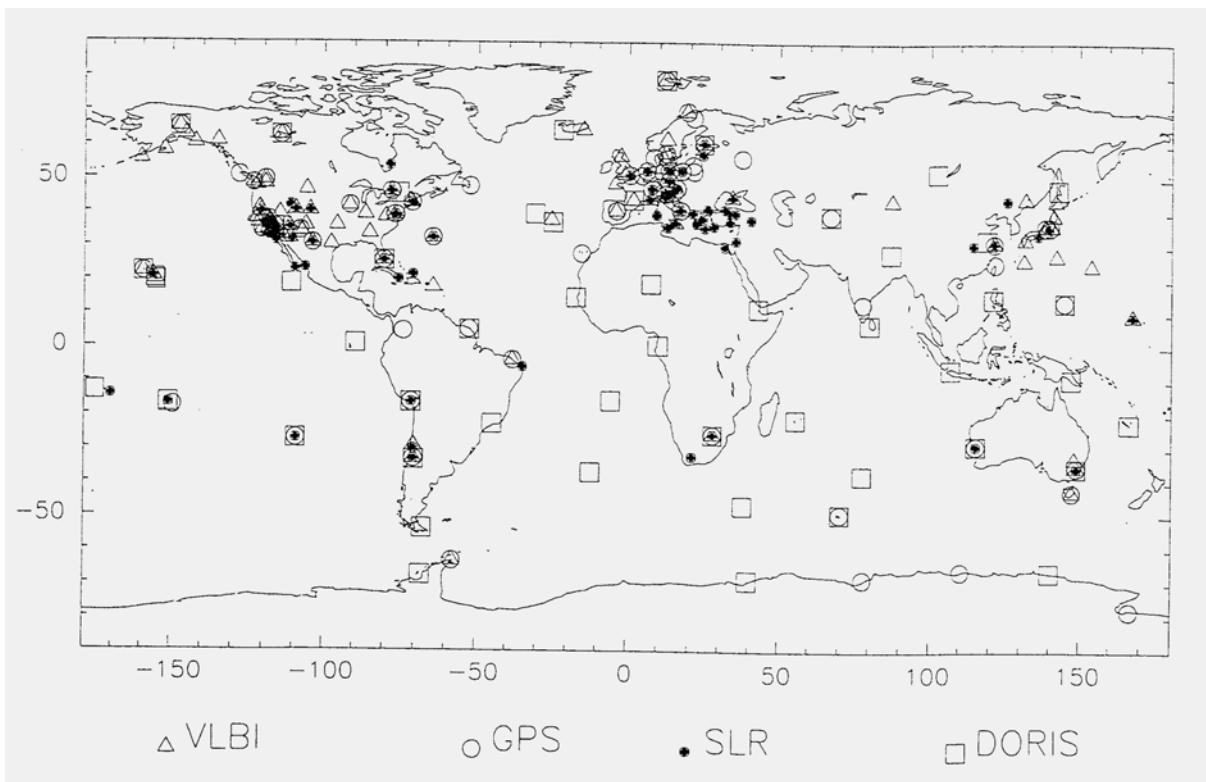


Figure 13 : Répartition des sites de l'ITRF94 (document IGN).

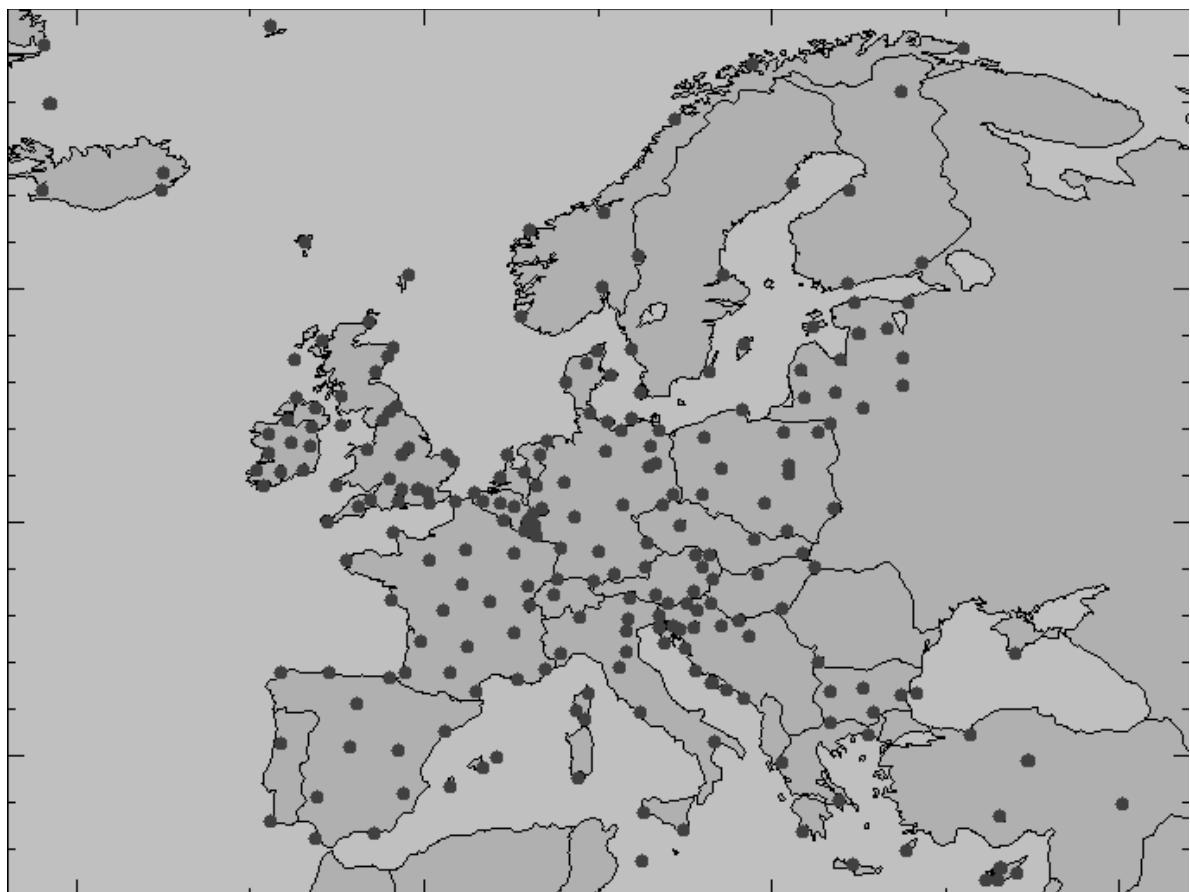


Figure 14 : Réseau de Référence Européen.

4.4 ITRFnm (IERS Terrestrial Reference Frame de l'année 19nm)

C'est la réalisation annuelle de l'ITRS, système de référence terrestre de l'IERS (International Earth Rotation Service), matérialisé par un réseau mondial d'environ 200 points avec leurs coordonnées en fonction du temps obtenues par combinaison de jeux de coordonnées issues de différentes campagnes d'observations par techniques spatiales très précises (VLBI, LASER, GPS). Ce système mondial est le plus précis, son exactitude est de quelques centimètres. Sa réalisation annuelle permet de connaître les mouvements des plaques lithospériques.

4.5 ETRS89 (European Terrestrial Reference System 1989)

Le système ETRS89 est défini à partir du système ITRS : les deux systèmes coïncident à l'époque 1989, mais ETRS89 est rattaché à la partie stable de la plaque eurasienne, et donc pour une époque quelconque on applique une vitesse théorique de la plaque Eurasie sur les coordonnées. De ce fait, les variations des coordonnées ETRS de points géodésiques européens en fonction du temps sont plus faibles que les coordonnées de ces mêmes points en ITRS.

Les réalisations ETRFnn utilisent les points du réseau ITRFnn européen et des points de densifications par GPS. Le réseau établi en premier lieu sur l'Europe occidentale s'étend à présent sur l'Europe de l'est (figure 14).

4.6 WGS84 (Word Geodetic System 1984)

Système de référence établit par les Américains à partir de coordonnées de points par observations Doppler sur satellites et d'un ensemble de données de définitions: constantes fondamentales, développement du champ en harmoniques sphériques, etc... WGS84 a été déduit de la réalisation antérieure WGS72 par une transformation à 7 paramètres. L'exactitude de ce système était initialement de l'ordre du mètre. Une réalisation récente (WGS4-G730) est équivalente à ITRF92 au niveau décimétrique. C'est le système utilisé pour les éphémérides radiodiffusées du système GPS. L'ellipsoïde associé WGS84 est pratiquement identique à GRS80.

4.7 Exemples de paramètres de transformations entre systèmes géodésiques

Tableau 5 : Exemples de paramètres de changement de systèmes.

SG_1	SG_2	$T_x(m)$	$T_y(m)$	$T_z(m)$	$D(10^{-6})$	$\varepsilon_x(^")$	$\varepsilon_y(^")$	$\varepsilon_z(^")$
WGS84	NTF	+168	+60	-320	0	0	0	0
ITRF92	WGS84	+0.072	-0.507	-0.245	-0.00891	-0.0183	+0.0003	-0.0070
ITRF91	ITRF92	-0,011	-0,014	+0,006	-0,0014	0	0	0
NTF	ED50	-84	+37	+437	0	0	0	0

Les notations sont celles du paragraphe 3.1. Les valeurs ne sont données qu'à titre d'exemple, on se référera aux publications annuelles de l'IERS pour les valeurs standards.

5 Quelques cas liés à GPS

5.1 Rattachement d'un chantier à un système de référence mondial

5.1.1 Positionnement absolu

La première solution consiste à utiliser des observations de pseudo distances moyennées sur plusieurs heures (typiquement au moins 6 heures). En utilisant les éphémérides radiodiffusées on obtient un rattachement dans WGS84 avec une exactitude variant de 3 à 10 m. On peut améliorer cette position en utilisant des éphémérides précises par exemple avec les éphémérides IGS, on obtient une exactitude de l'ordre de quelques mètres dans ITRF.

5.1.2 Points d'appuis connus dans un système de référence mondial

On intègre dans le chantier des points qui ont été déterminés antérieurement par exemple points RGF, points IERS, points Doppler. L'exactitude dépend alors de l'exactitude des points connus, le système dans lequel les coordonnées sont données doit être parfaitement identifié (WGS72, WGS84 dans ses versions successives, ITRFnn,...).

5.1.3 Rattachement du chantier à des points connus dans un système de référence mondial

L'exactitude dépendra de l'exactitude des coordonnées connues, mais aussi de la technique de rattachement : mesure différentielle de pseudo distance, mesure de phase. Les observations de rattachements peuvent être faites en même temps que le chantier mais on peut aussi utiliser les observations faites sur les stations IGS les plus proches, qui sont simultanées avec les observations du chantier. Pour un rattachement précis (quelques centimètres) il faut observer des phases en bifréquence, les calculs doivent être faits avec des éphémérides précises ou des méthodes semi-dynamiques.

En France le RGF offre la possibilité pour tout utilisateur de se positionner dans un système de référence mondial avec une exactitude de quelques centimètres puis d'exprimer ses positions en NTF si nécessaire.

5.2 Rattachement d'un chantier dans un système de référence national

Pour les travaux effectués pour le compte des collectivités, la réglementation impose de donner les coordonnées des points dans le système NTF (en général en Lambert). Par contre la publication dans un système de référence mondial n'est pas obligatoire. Plusieurs solutions peuvent être adoptées:

5.2.1 Colocation avec un point du réseau national

Un point du chantier appartient au réseau national. On calcule des coordonnées WGS84 de ce point par une transformation générale (cf. tableau 5). Cette transformation n'est pas très précise à cause des déformations du réseau national (plusieurs mètres). Le chantier GPS est calculé à partir des coordonnées du point en colocation, puis on applique la transformation générale inverse. Cette méthode est tout à fait suffisante pour des petits chantiers (1km sur 1km). En effet, les erreurs sur les transformations directes et inverses se compensent.

5.2.2 Colocation sur plusieurs points du réseau national

Plusieurs points du chantier sont des points du réseau national. Le chantier GPS est calculé à partir de coordonnées issues de la transformation générale (NTF - WGS84) sur un point, ou issues d'une solution de navigation par pseudo distances. A partir de la comparaison des coordonnées dans le système national et des coordonnées issues du GPS on calcule les paramètres de transformations entre les deux systèmes (souvent trois translations, un facteur

d'échelle, une rotation autour de OZ). Ces paramètres servent ensuite à transformer les coordonnées GPS dans le système national (NTF) et ne sont valables que localement. Pour un chantier de plusieurs dizaines de kilomètres de côté on obtient une précision de l'ordre du décimètre sur les coordonnées transformées. Ici deux options sont possibles: transformer tous les points du chantier avec la transformation ce qui a pour avantage de garder la cohérence des mesures GPS et pour inconvénient de faire bouger les coordonnées des points du réseau ancien, ou bien ne transformer que les points nouveaux ce qui inverse les avantages et inconvénients vus précédemment.

5.2.3 Utilisation du réseau RGF et de grilles de transformation

L'institut Géographique National a mis au point un système de conversion précis entre la NTF et le RGF. Le principe est de tenir compte des défauts locaux de la NTF en rendant variables les paramètres T_x, T_y, T_z en fonction de la position. Pour cela, une grille des valeurs de paramètres, dénommée GR3DF97A, a été calculée. La précision globale des transformations utilisant cette grille est de l'ordre de 10 cm, mais la cohérence locale est probablement bien meilleure.

D'autre part, l'Ecole Supérieure des Géomètres et Topographes distribue la grille RAF98 (Référence d'Altitude Française 1998) qui permet de transformer les hauteurs ellipsoïdales RGF en altitude NGF-IGN69 et réciproquement. RAF98 est un quasi-géoïde gravimétrique adapté, et donne la hauteur de la surface de référence du réseau de nivellation NGF-IGN69 au dessus de l'ellipsoïde de référence (GRS80) de la référence RGF93. Des nombreux tests réalisés sous l'égide du Conseil National de l'Information Géographique, il résulte que la précision de RAF98 estimée par un écart-type est meilleure que 3 cm.

On peut utiliser le réseau RGF et ces grilles de la manière suivante :

- les observations GPS sont réalisées en s'appuyant sur un ou, de préférence, plusieurs points RGF
- les coordonnées tridimensionnelles géocentriques sont calculées en RGF93
- elles peuvent alors être transformées
 - en géographiques (λ, φ, h) GRS80 (RGF93) puis en Lambert 93, exactement
 - en géocentriques puis en longitude et latitude géographiques NTF grâce à la grille GR3DF97A, puis en Lambert NTF
 - en altitude NGF-IGN69, grâce à la grille RAF98.

Ce procédé présente de multiples avantages :

- il est économique, puisque les déterminations planimétriques et altimétriques sont intégrées. Il n'est plus nécessaire de stationner des repères de nivellation pour déterminer les altitudes.
- il est très souple : on peut obtenir des coordonnées précises dans le système de son choix.
- il préserve l'avenir, car l'emploi des coordonnées RGF93 sera tôt ou tard généralisé, étant donné les défauts de la NTF.

6 Exercices

6.1 Exercice 1

On veut déterminer la position d'un point B par GPS avec une précision centimétrique. Pour cela, on stationne un point connu A et, simultanément, le point B. La ligne de base calculée est :

$$\overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} \Delta X = 13\,920,303 \text{ m} \\ \Delta Y = -3\,634,256 \text{ m} \\ \Delta Z = -12\,609,610 \text{ m} \end{array} \right.$$

Les coordonnées géographiques de A dans les systèmes NTF et RGF93, et son altitude (IGN69) sont :

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_{\text{NTF}} = -2,568\,504\,382 \text{ grades (origine Paris)} \\ \varphi_{\text{NTF}} = 53,354\,287\,22 \text{ grades} \\ \lambda_{\text{RGF93}} = 0^{\circ}09'17,866\,106'' \text{ (origine Greenwich)} \\ \varphi_{\text{RGF93}} = 48^{\circ}01'07,637\,781'' \\ h_{\text{RGF93}} = 167,589 \text{ m} \\ H_{\text{IGN69}} = 121,236 \text{ m} \end{array} \right.$$

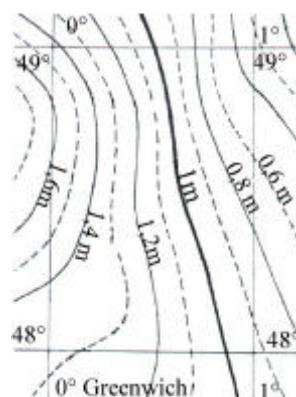
La longitude de Paris par rapport à Greenwich est : $\lambda_p = 2,596\,921\,296$ grades. Les constantes d'ellipsoïde valent :

pour Clarke 1880 IGN : $a = 6\,378\,249,2 \text{ m}$ $b = 6\,356\,515 \text{ m}$

pour GRS80 : $a = 6\,378\,137 \text{ m}$ $1/f = 298,257\,222\,101$

On donne en outre :

Extrait de carte du Géoïde LEVALLOIS :
ellipsoïde Clarke 1880 IGN, système NTF



Extrait de la grille RAF98, géoïde adapté aux systèmes
RGF93 (ellipsoïde GRS80) et IGN69 :

longitude → latitude ↓	0°06'00"	0°08'00"	0°10'00"
48°01'30"	46.4053	46.3635	46.3209
48°00'00"	46.4052	46.3653	46.3263
47°58'30"	46.4020	46.3613	46.3269
47°57'00"	46.4015	46.3638	46.3343
47°55'30"	46.4075	46.3714	46.3397
47°54'00"	46.4074	46.3745	46.3438
47°52'30"	46.4101	46.3791	46.3499
47°51'00"	46.4190	46.3903	46.3580
47°49'30"	46.4234	46.3975	46.3679

1. Calculer les coordonnées cartésiennes puis géographiques du point B dans le système RGF93
2. Calculer les trois paramètres, valables localement, de la translation pour passer du système NTF au système RGF93
3. Calculer la longitude et la latitude de B dans le système NTF
4. Calculer l'altitude IGN69 de

7 Aide à la résolution des exercices

7.1 Exercice 1

1. Il faut calculer les coordonnées géocentriques RGF93 de A, puis leur ajouter les composantes de la base GPS pour obtenir celles de B. On peut ensuite calculer les coordonnées géographiques RGF93 de B, en utilisant l'algorithme itératif pour la latitude et la hauteur ellipsoïdale.
2. Les trois paramètres à calculer sont T_x, T_y, T_z définis par : $T_x = X_{\text{NTF}} - X_{\text{RGF93}}$, etc. Il faut donc calculer les coordonnées tridimensionnelles NTF, *le plan méridien origine étant celui de Greenwich*. La succession de transformations est :

$$\lambda_{\text{NTF-Greenwich}} = \lambda_{\text{NTF}} + \lambda_p$$

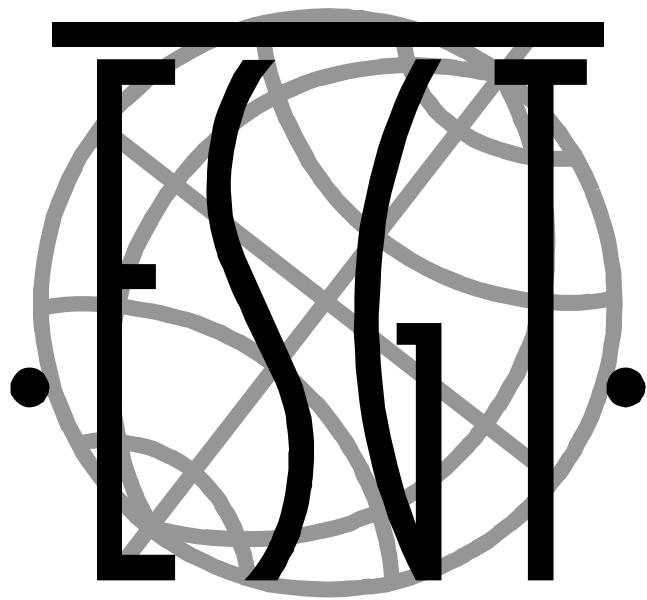
$$h_{\text{NTF}} = H + \text{géoile Lev allois (interpolé)}$$

Calcul des tridimensionnelles géocentriques.

3. On calcule les coordonnées géocentriques "NTF origine Greenwich" de B, puis les géographiques NTF origine Greenwich, enfin les géographiques NTF (en grades).
4. Pour une bonne précision sur l'altitude de B, il faut impérativement utiliser la hauteur ellipsoïdale RGF93 et la grille RAF98.

Table des matières

1	INTRODUCTION	1
2	DÉFINITION DES SYSTÈMES DE RÉFÉRENCES ET DE COORDONNÉES	1
2.1	SYSTÈME DE RÉFÉRENCE GÉODÉSIQUE (DÉFINITION)	1
2.2	COORDONNÉES ASSOCIÉES AU SYSTÈME DE RÉFÉRENCE GÉODÉSIQUE	2
2.2.1	<i>Coordonnées tridimensionnelles cartésiennes géocentriques.....</i>	2
2.2.2	<i>Coordonnées tridimensionnelles géographiques.....</i>	2
2.2.3	<i>Coordonnées planes.....</i>	3
2.2.4	<i>Eléments de définitions de chaque type de coordonnées.....</i>	3
	SYSTÈME DE RÉFÉRENCE ALTIMÉTRIQUE ET ALTITUDE (DÉFINITION)	4
2.3	RÉALISATION D'UN SYSTÈME DE RÉFÉRENCE	4
3	TRANSFORMATIONS DE COORDONNÉES.....	6
3.1	CHANGEMENT DE SYSTÈME DE RÉFÉRENCE	6
3.1.1	<i>En coordonnées cartésiennes:.....</i>	6
3.1.2	<i>Estimation des 7 paramètres ($T_X, T_Y, T_Z, D, \varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_Z$) :</i>	7
3.1.3	<i>En coordonnées géographiques: Formules de Molodenski simplifiées.....</i>	8
3.2	TRANSFORMATION DE COORDONNÉES TRIDIMENSIONNELLES CARTÉSIENNES EN GÉOGRAPHIQUES.....	8
3.3	TRANSFORMATION DES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES EN COORDONNÉES PLANES	10
3.4	TRANSFORMATION DE HAUTEUR AU DESSUS DE L'ELLIPSOÏDE EN ALTITUDE	10
3.5	ORGANIGRAMME DES TRANSFORMATIONS	11
4	EXEMPLES DE SYSTÈMES DE RÉFÉRENCES	12
4.1	LE SYSTÈME GÉODÉSIQUE FRANÇAIS : LA NTF	12
4.2	LE RÉSEAU GÉODÉSIQUE FRANÇAIS (LE RGF).....	12
4.2.1	<i>Description générale.....</i>	12
4.2.2	<i>Les étapes de la réalisation:.....</i>	14
4.3	LE RÉSEAU EUROPÉEN ED50 (EUROPEAN DATUM 1950).....	14
4.4	ITRFNM (IERS TERRESTRIAL REFERENCE FRAME DE L'ANNÉE 19NM)	16
4.5	ETRS89 (EUROPEAN TERRESTRIAL REFERENCE SYSTEM 1989)	16
4.6	WGS84 (WORD GEODETIC SYSTEM 1984).....	16
4.7	EXEMPLES DE PARAMÈTRES DE TRANSFORMATIONS ENTRE SYSTÈMES GÉODÉSIQUES	16
5	QUELQUES CAS LIÉS À GPS	17
5.1	RATTACHEMENT D'UN CHANTIER À UN SYSTÈME DE RÉFÉRENCE MONDIAL.....	17
5.1.1	<i>Positionnement absolu</i>	17
5.1.2	<i>Points d'appuis connus dans un système de référence mondial</i>	17
5.1.3	<i>Rattachement du chantier à des points connus dans un système de référence mondial.....</i>	17
5.2	RATTACHEMENT D'UN CHANTIER DANS UN SYSTÈME DE RÉFÉRENCE NATIONAL	17
5.2.1	<i>Colocation avec un point du réseau national</i>	17
5.2.2	<i>Colocation sur plusieurs points du réseau national</i>	17
5.2.3	<i>Utilisation du réseau RGF et de grilles de transformation.....</i>	18
6	EXERCICES.....	19
6.1	EXERCICE 1.....	19
7	AIDE À LA RÉSOLUTION DES EXERCICES.....	21
7.1	EXERCICE 1.....	21



ECOLE SUPERIEURE DES GEOMETRES ET TOPOGRAPHES

1, Boulevard Pythagore - 72000 LE MANS

Téléphone : 02.43.43.31.00 Télécopie : 02.43.43.31.02

<http://www.esgt.cnam.fr>

Impression : Service de Reprographie ESGT