

UNIVERSITÄT BREMEN  
FACHBEREICH 01  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

## BACHLOR-THESIS

---

# Einfluss quantenmechanischer und nicht-Markovscher Effekte auf die Modulationsantwort von Quantenpuntsystemen mit geringer Emitterzahl

---

Roy Barzel

Matrikelnummer: 2789738  
Fachbereich: 01 Physik/Elektrotechnik  
Studiengang: Physik Volfach  
Studienjahrgang: 2012  
Erstgutachter: Prof. Dr. Frank Jahnke  
Zweitgutachter: Prof. Dr. Tim Oliver Wehling

Bremen, 19. September 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Quantenpunkte als Lichtemitter . . . . .	1
<b>2. Theorie</b>	<b>3</b>
2.1. Die grundlegenden Prozesse im und um einen Laserresonator . . . . .	3
2.2. Zweite Quantisierung . . . . .	4
2.3. Quantentheorie des Lichts . . . . .	6
2.3.1. Eichfreiheit der Maxwellgleichungen . . . . .	6
2.3.2. Die homogenen Maxwellgleichungen in Coulombbeziehung . . . . .	8
2.3.3. Das quantisierte Lichtfeld . . . . .	8
2.3.4. Licht-Materie Wechselwirkung . . . . .	11
2.3.5. Simulation von dissipativen Effekten von Licht-Materie Systemen über die Wechselwirkung mit externen Wärmereservoirs für ein Zwei-Niveau- System (ZNS) . . . . .	13
2.4. Vollständige Bewegungsgleichungen für Erwartungswerte im Heisenberg-Bild . .	16
<b>3. Anwendungen</b>	<b>17</b>
3.1. Autokorrelationsfunktionen und Photonenstatistik . . . . .	17
3.1.1. Berechnung der Photonenstatistik aus bosonischen Erwartungswerten . .	20
3.2. Modulationsantwort . . . . .	21
<b>4. Ergebnisse</b>	<b>24</b>
4.1. Die Bewegungsgleichungen des des Zwei-Niveau-Systems in Ein-Elektron-Näherung	24
4.1.1. Lösung des Hierarchieproblems über den Abbruch des Differentialglei- chungssystems durch Nullsetzung höherer Korrelationen . . . . .	27
4.1.2. Faktorisierung von Erwartungswerten in Clusterentwicklung . . . . .	27
4.2. Notwendigkeit der Berücksichtigung höherer Korrelationen in den Lasergleichun- gen am Beispiel des Zwei-Niveau-Systems mit einem Emitter . . . . .	30
4.3. Vergleich der exakten Lösung mit der Clusterentwicklung für das Zwei-Niveau- System mit einem Emitter . . . . .	33
4.4. Das Zwei-Niveau-System mit mehreren Emitttern . . . . .	37
4.5. Die Lasergleichungen in Clusterentwicklung des Vier-Niveau-Systems in Ein-Elektron- Näherung . . . . .	41
4.5.1. Elimination der Polarisation aus den semiklassischen Lasergleichungen . .	44
4.6. Die Ratengleichungen der Lasertheorie für vier atomare Niveaus in Ein-Elektron- Näherung . . . . .	45
4.7. Modulationsantwort des konventionellen Vier-Niveau-Lasers . . . . .	46
4.8. Modulationsantwort von gering Emitter Vier-Niveau-Laser Systemen . . . . .	50
<b>5. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>56</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>60</b>
A.1. Rotating Wave Approximation . . . . .	60

## 1. Einleitung

Die hochfrequente Übertragung großer Datenmengen unter geringem energetischen Aufwand gewinnt im digitalen Zeitalter immer mehr an Bedeutung. Während in Rechensystemen, wie Computern, moderner Unterhaltungselektronik und vielem mehr überwiegend elektrische Schaltelemente wie Transistoren zur Datenverarbeitung und dem Transfer von Informationen genutzt werden, finden in der Telekommunikation vor allem halbleiterbasierte Lasersysteme Anwendung in der Signalübertragung über Glasfaserkabel. Ziel in der Entwicklung dieser optoelektronischen Halbleitersysteme ist es immer größere Informationsmengen pro Zeiteinheit kausal übertragen zu können. Auch soll der Energieverbrauch dieser Systeme minimiert werden, indem man diese miniaturisiert. Ein in dieser Hinsicht vielversprechendes Halbleiterlasersystem ist das des Quantenpunktes. Da es sich dabei um nanoskopische Halbleiterstrukturen handelt, ist es naheliegend, dass quantenmechanische Effekte nicht zu vernachlässigende Auswirkungen auf die hier betrachteten Quantenpunktlasersysteme haben. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher eine quantenmechanische Theorie erarbeitet um das Modulationsverhalten von Quantenpunktlasern zu beschreiben und zu untersuchen.

### 1.1. Quantenpunkte als Lichtemitter

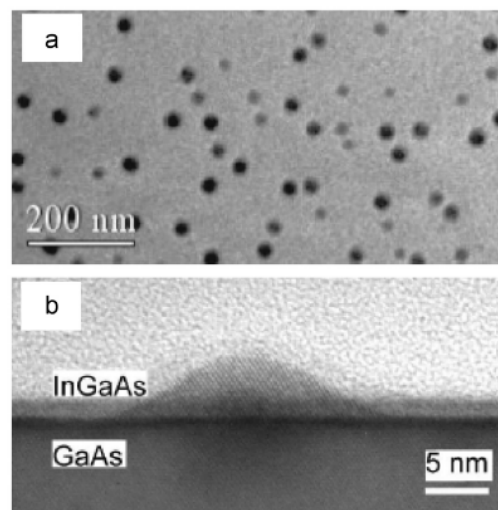


Abbildung 1.1.1: TEM-Aufnahme von oben eines selbst-organisierten Quantenpunktensembles aus InGaAs gewachsen auf GaAs (a). Querschnittsansicht eines einzelnen Quantenpunktes (b) [20].

Bei Quantenpunkten handelt es sich um Halbleiterinseln, welche auf der Oberfläche, der sogenannten Benetzungsschicht gewachsen werden (vgl. Abbildung 1.1.1). Sie schließen Ladungsträger in ihrem Inneren ein und wirken auf Elektronen sowie Löcher als sehr hoher Potentialtopf mit Ausmaßen im Nanometerbereich. Durch die strikten Einschränkungen der Ladungsträger in allen drei Raumdimensionen finden sich im Energieniveauschema (der Zustandsdichte) von Quantenpunkten lokalisierte Zustände wieder. Da sich vor allem atomare Systeme durch das Auftreten von lokalisierten Energiezuständen auszeichnen, werden Quantenpunkte auch als *künstliche Atome* bezeichnet. Abbildung 1.1.2 stellt die Analogie eines atomaren Vier-Niveau-Systems mit dem Energieniveauschema eines Quantenpunktes her. Es werden dazu im Quantenpunktsystem jeweils zwei lokalisierte Energieniveaus in Valenz- und Leitungsband betrachtet. Von den insgesamt vier Energieniveaus sollen zwei einen optischen Übergang darstellen, der in Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld steht. Zwischen den anderen beiden Übergängen findet ein Pumpprozess statt, über den Elektronen vom untersten Energieniveau in

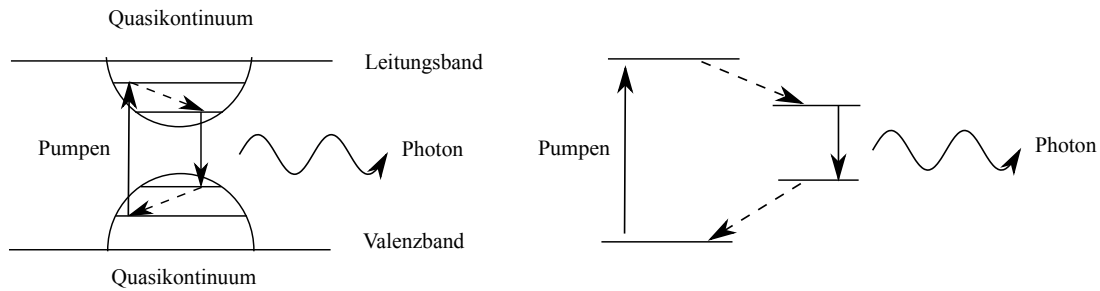


Abbildung 1.1.2: Links ist das Energieschema eines einzelnen Quantenpunktes im Raum zu erkennen. Dabei werden insgesamt vier diskrete Energieniveaus betrachtet. Es ist außerdem eingezeichnet, dass zwischen den äußeren beiden Niveaus ein Pumpprozess stattfindet, welcher Elektronen aus dem Valenzband in einen höheren energetischen Zustand im Leitungsband der Halbleiterstruktur des Quantenpunktes anhebt. Die gestrichelten Linien repräsentieren die Relaxation von Ladungsträgern in tiefere Energieniveaus. Rechts ist ein dazu analoges atomares Vier-Niveau-System zu sehen [18].

den energetisch höchst gelegenen Zustand der vier in Abbildung 1.1.2 eingezeichneten Niveaus angehoben werden. Die Übergänge der Relaxation und des Pumpprozesses tragen nicht zum Lasing bei (vgl. Abbildung 1.1.2). Das Energieniveauschema des Quantenpunktes setzt sich dabei nach oben und unten fort und bildet ein Quasikontinuum, jenes der Besetzungsschicht (vgl. Abbildung 1.1.2). Obwohl zusätzliche komplizierte Wechselwirkungen zwischen dem Quasikontinuum der Besetzungsschicht und der lokalisierten Zustände des Quantenpunktes stattfinden, können Quantenpunkte näherungsweise durch ein atomares Vier-Niveau-System simuliert werden, da die mikroskopischen Lasersysteme über lokalisierte Energiezustände verfügen.

Ein Beispiel für die technische Realisierung von Quantenpunktlasern ist eine Mikrokavität. Die linke Seite der Abbildung 1.1.3 zeigt eine solche Mikrokavität mit InGaAs als Quantenpunktmaterial. Das Quantenpunktmaterial wird von AlGaAs umschlossen. Wie auf der rechten Seite der Abbildung 1.1.3 zu erkennen ist, besteht der sogenannte Drain der Mikrokavität aus vielen dünnen Schichten verschiedener Halbleitermaterialien (beim Quantenpunkt der linken Seite der Abbildung 1.1.3 sind dies Schichten aus n-GaAs) mit unterschiedlichen Brechungsindizes. Diese Schichten fungieren als Spiegel mit endlichen Transmissionskoeffizienten für die Photonen in der Kavität. Da der Reflexionskoeffizient an der Mantelfläche der in Abbildung 1.1.3 gezeigten Mikrokavitäten auf Grund der scharfen Abbruchkante ebenfalls sehr groß ist, stellen Mikrokavitäten in allen drei Raumrichtungen ein abgeschlossenes Volumen für die vom Quantenpunktmaterial emittierten Photonen dar. Dabei ist der Resonator eines Mikropillars, wie er in Abbildung 1.1.3 zu sehen ist, in seinen räumlichen Ausmaßen so konstruiert, dass seine Zustandsdichte eine Mode beinhaltet, die mit dem optischen Übergang der Quantenpunktmaterials resonant ist. Zweck dieser Konstruktion ist es, dass durch einen Pumpprozess (z.B. in Form von elektrischer Energiezufuhr durch Anlegen einer Spannung  $V_d$  wie in Abbildung 1.1.3) das Quantenpunktmaterial im Mikropillar angeregt wird, Photonen in das Lichtfeld der Lasermode emittiert werden, dieses in seiner Intensität verstärkt wird und in vertikaler Richtung zur Besetzungsschicht als Laserstrahl transmittiert.

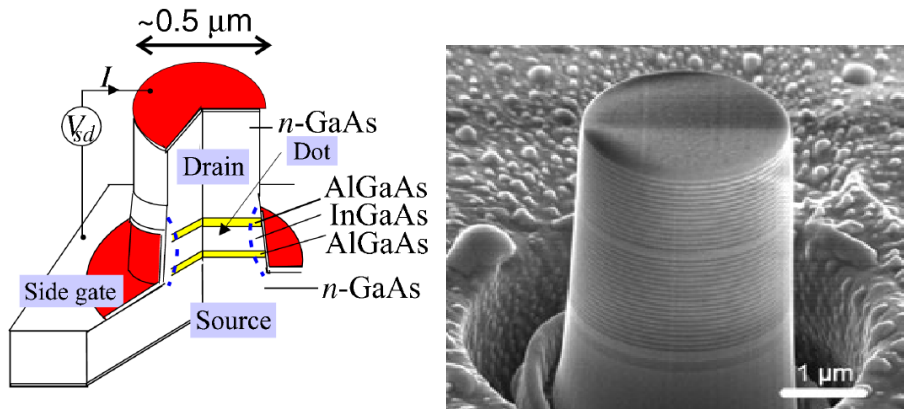


Abbildung 1.1.3: Das linke Bild zeigt den schematischen Aufbau einer Mikrostruktur. Die Energiezufuhr an das aktive Material (InGaAs) findet über das Anlegen einer Spannung  $V_{sd}$  statt. Das rechte Bild zeigt eine Mikroskopaufnahme eines solchen Resonators, der auch Mikropillar genannt wird.[1, 3]

## 2. Theorie

### 2.1. Die grundlegenden Prozesse im und um einen Laserresonator

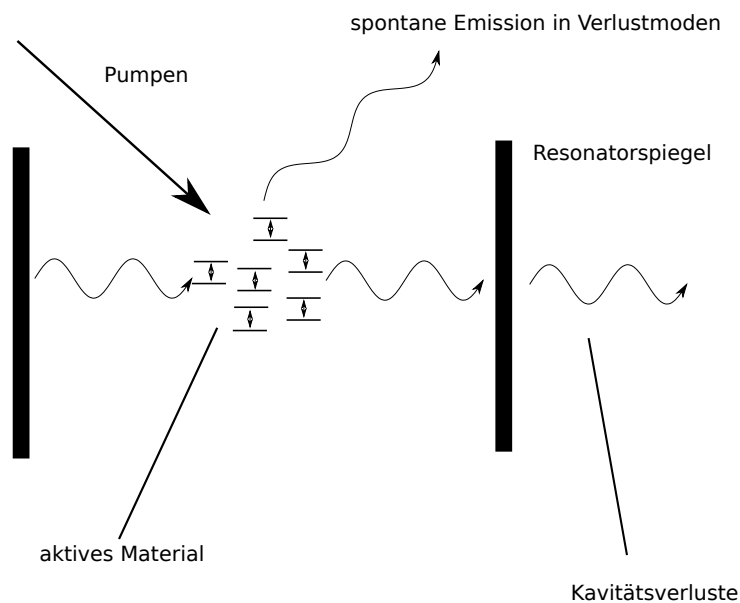


Abbildung 2.1.1: Der in dieser Abbildung gezeigte Laserresonator, auch Kavität genannt, erfährt eine externe Energiezufuhr in Form eines sogenannten Pumpprozesses und unterliegt Verlusteffekten.

Diese Arbeit beschreibt Lasersysteme im quantenmechanischen Formalismus der Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für Erwartungswerte. Dazu wird ein Lasersystem bestehend aus Atomen, welche auch stellvertretend Quantenpunkte darstellen können, als aktives Material in einem Laserresonator simuliert. In Abbildung 2.1.1 ist eine solche Kavität gezeigt. Nanoskopische Laserresonatoren mit einigen wenigen Quantenpunkten als aktives Material werden als Mikrostruktur bezeichnet. Den Resonator kann man sich als präzise abgestimmte Spiegelkonstruktion vorstellen. Beim InGaAs-Quantenpunkt der Abbildung 1.1.2 stellen gewachsene Schichten aus AlGaAs die Resonatorspiegel dar. Das Prinzip dabei ist das des Bragg-Spiegels. Die

Quantenpunkte werden in dieser Arbeit als Vier-Niveau-System beschrieben. Die Motivation dessen ist die in Abbildung 1.1.2 hergestellte Analogie des Enegieschemas von Quantenpunkten zu Vier-Niveau-Systemen mit diskreten Energieniveaus. Zur vollständigen Beschreibung der Laserdynamik sollen auch dissipative Prozesse wie eine externe Energiezufuhr (Pumpprozess) und Energieverluste simuliert werden. So wird die Simulation von Kavitätsverlusten, wie sie in Abbildung 2.1.1 zu sehen sind, dadurch motiviert, dass die Resonatorspiegel über endliche Transmissionskoeffizienten verfügen sollten um Laserstrahlen aus der Kavität austreten zu lassen. Prinzipiell kann das aktive Material, auch mit nicht resonanten Lichtmoden hinsichtlich der Richtung und des Betrages ihres Wellenzahlvektors wechselwirken, sodass die im aktiven Material gespeicherte Energie in quantisierter Form auch an sogenannte Verlustmoden abgegeben kann, die nicht zum Lasing beitragen und auch nicht weiter an der Systemdynamik beteiligt sind. Das Theoriekapitel führt den Leser an den in dieser Arbeit zur Beschreibung von Lasersystemen als Vielteilchenensemble verwendeten quantenmechanischen Formalismus heran, konstruiert darauf aufbauend die Wechselwirkung zwischen Licht und aktivem Material und stellt Anwendungen zur Charakterisierung von Lasersystemen und ihrem Antwortverhalten auf Anregungen über verschiedene Pumpprozesse vor. Dazu setzt sich das folgende Kapitel vorerst mit der quantenmechanischen Beschreibung von Systemen mehrerer Teilchen auseinander.

## 2.2. Zweite Quantisierung

Beabsichtigt man Vielteilchentheorie im Rahmen der Quantenmechanik zu betreiben, führt dies unweigerlich zum Formalismus der zweiten Quantisierung.

Der Ausgangspunkt besteht darin in einem höherdimensionalen Produkthilbertraum  $\mathcal{H}_{\mathcal{N}}$  quantenmechanische Systeme von  $N$  Teilchen zu beschreiben und zu lösen. Es wird

$$\mathcal{H}_{\mathcal{N}} = \otimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i \quad (2.2.1)$$

definiert, wobei  $\mathcal{H}_i$  der Hilbertraum des  $i$ -ten Teilchens ist. Entsprechend sind seine Elemente  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$  Produktzustände

$$|\Psi\rangle = \otimes_{i=1}^N |\Psi\rangle_i, \quad (2.2.2)$$

wobei  $|\Psi\rangle_i$  entsprechend den Zustand des  $i$ -ten Teilchens beschreibt, es sich also um Einteilchenzustände handelt [4]. Zur vollständig richtigen Beschreibung quantenmechanischer Systeme muss jedoch auch die Ununterscheidbarkeit von quantenmechanischen Teilchen Rechnung tragen. Das Betragsquadrat des Gesamtzustandes  $|\Psi\rangle$  muss also invariant gegenüber einer Teilchenvertauschung sein. Ein einfacher Ansatz dazu ist den sogenannten Vertauschungsoperator  $P_{mn}$  zu definieren, welcher die Teilchen  $m$  und  $n$  in ihrem Zustand, jedoch nicht in ihrer Abzählung vertauscht. In jedem Fall muss dann aber die Eigenwertgleichung

$$P_{mn}^2 |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (2.2.3)$$

gelten mit den Eigenwerten  $\epsilon = \pm 1$  für die einmalige Anwendung von  $P_{mn}$ . Dabei definieren sich zwei Teilchensorten. Die der Bosonen mit  $\epsilon = 1$  und die der Fermionen mit  $\epsilon = -1$ . Damit sich der Gesamtzustand bei einmaliger Anwendung des Vertauschungsoperators nicht ändert, ist es notwendig eine Linearkombination, in der alle Koeffizienten eins sind, aller möglichen Permutationen des Produktzustandes anzusetzen, wobei die Position eines Einteilchenzustandes im Produktzustand hier das Teilchenlabel festlegen soll. Mathematisch möglichst einfach ausgedrückt wäre dies im Falle der Fermionen die Determinante einer Matrix deren Zeilenindex den Zustand eines Teilchens festlegt und deren Spaltenindex das Label des Teilchens festlegt oder umgekehrt. Diese Determinante wird Slaterdeterminante genannt. Im Falle der Bosonen wäre dies die Permanente der gleichen Matrix. An dieser Stelle folgt schon das Pauliprinzip für Fermionen, da wenn sich zwei Fermionen im selben Zustand befänden, mindestens zwei Spalten der eben beschriebenen Matrix gleich wären, die Slaterdeterminante also Null wäre, es also keine physikalisch kausale

Interpretation dieses Falles gäbe. Die neuen, besser geeigneten Zustände zur Beschreibung von Vielteilchensystemen schreiben wir mit (Anti-)Symmetrisierungsoperatoren  $S_N^\epsilon$ , welche eben aus den Produktzuständen entsprechend Slaterdeterminante oder Permanente bilden. Darüber hinaus werden über eine Normierungskonstante  $K_\epsilon$  normierte, (anti-)symmetrisierte Zustände als Fockzustände bezeichnet, welche auf dem  $\mathcal{H}_N$  ein vollständiges Orthonormalsystem bilden. Die Notation folgt:

$$K_\epsilon S_N^\epsilon |\Psi\rangle := |n_1, n_2, \dots, n_N\rangle := |n\rangle \in \mathcal{H}_N. \quad (2.2.4)$$

Die  $n_i$  kennzeichnen dabei wie viele Teilchen sich im Einteilchenzustand  $|i\rangle$  befinden, da auf Grund der (Anti-)Symmetrisierung nur noch darüber eine Aussage getroffen werden kann. Es ist hier noch zu erwähnen, dass sich Fockzustände im Allgemeinen unter Vernachlässigung von Teilchenzahlerhalt auch in Unterräumen des  $\mathcal{H}_N$  befinden können, sodass

$$|n_1, n_2, \dots, n_N\rangle \in \oplus_{i=1}^N \mathcal{H}_i \quad (2.2.5)$$

geschrieben werden kann. Ein Fockzustand lässt sich bequem ändern über die Definition von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für Bosonen und Fermionen.

Es werden die Erzeuger der Bosonen

$$b_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots, n_N\rangle = \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_N\rangle, \quad (2.2.6)$$

die Vernichter der Bosonen

$$b_i |n_1, \dots, n_i, \dots, n_N\rangle = \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_N\rangle, \quad (2.2.7)$$

die Erzeuger der Fermionen

$$a_i^\dagger |n_1, \dots, n_i, \dots, n_N\rangle = -1^{x_i} \sqrt{n_i + 1} |n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_N\rangle \quad (2.2.8)$$

und die Vernichter der Fermionen

$$a_i |n_1, \dots, n_i, \dots, n_N\rangle = -1^{x_i} \sqrt{n_i} |n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_N\rangle \quad (2.2.9)$$

mit

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j. \quad (2.2.10)$$

definiert. Dabei gelten die Kommutatorrelationen

$$[c_i, c_j]_{-\epsilon} = 0, \quad (2.2.11)$$

$$[c_i^\dagger, c_j^\dagger]_{-\epsilon} = 0, \quad (2.2.12)$$

$$[c_i, c_j^\dagger]_{-\epsilon} = \delta_{ij}, \quad (2.2.13)$$

wobei der Kommutatorindex  $-$  den herkömmlichen Kommutator bezeichnet und  $+$  den Antikommutator [4, 14]. Die  $c^\dagger, c$  stehen hier für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Die Art der Teilchensorte wird durch  $\epsilon$  festgelegt. Darüber hinaus kann man mit Erzeugern und Vernichtern den sogenannten Teilchenzahloperator definieren. Teilchensortenunabhängig gilt

$$n_i = c_i^\dagger c_i. \quad (2.2.14)$$

Der Eigenwert dieses Operators auf einen Fockzustand ist gerade die Anzahl der Teilchen im Einteilchenzustand  $|\Psi\rangle_i := |i\rangle$ . Zuletzt wird in diesem Kapitel darauf eingegangen, wie Einteilchenoperatoren auf beliebige Linearkombinationen von Fockzuständen wirken und wie man

dies im Formalismus der zweiten Quantisierung notiert, da dies in späteren Kapiteln der Arbeit Verwendung findet.

Sei  $T$  ein Einteilchenoperator, so wirkt er auf ein Ensemble von Teilchen, sodass er auf jedes Teilchen einzeln wirkt und sich die einzelnen Ergebnisse der Anwendung von  $T$  wie

$$T = \sum_{\alpha} T_{\alpha} \quad \text{mit} \quad T_{\alpha} = \left( \otimes_{i=1}^{\alpha-1} \mathbb{1} \right) \otimes T \otimes \left( \otimes_{i=\alpha+1}^N \mathbb{1} \right) \quad (2.2.15)$$

addieren, wobei  $T$  selbst unabhängig von  $\alpha$  ist. Nun kann man zwei vollständige Einsen des  $\mathcal{H}_1$  einfügen [14], sodass

$$T = \sum_{i,j,\alpha} T_{ij} |i\rangle_{\alpha} \langle j|_{\alpha} \quad (2.2.16)$$

mit  $T_{ij} = \langle i|T|j\rangle$  gilt. Die Indizierung der Dirac-Vektoren signalisiert lediglich auf welches Teilchen gewirkt wird. Wollte man ganze Produktzustände verwenden, wären alle anderen Faktoren des Produktvektors Einsen. Nun kann man sich vergegenwärtigen, dass die Dirac-Vektoren auf einen Fockzustand wirken, also auf eine Linearkombination von Produktzuständen. Wertet man die Wirkung des ersten Summanden in  $\alpha$  auf den Fockzustand aus, bleiben nur solche Terme erhalten, welche ihr erstes Teilchen im Zustand  $|j\rangle$  besitzen und dieser Zustand geht dann in den Zustand  $|i\rangle$  über. Der nächste Summand wirkt auf das zweite Teilchen. Dieses muss per Konstruktion der Fockzustände, dann aber auch mindestens in einem Summanden der Slaterdeterminante oder der entsprechenden Permanente den Zustand  $|j\rangle$  besetzen. Auch dort verbleiben nur die Summanden, deren zweites Teilchen im Zustand  $|j\rangle$  ist im Zustand  $|i\rangle$ . Auf diese Weise wird der komplette Fockzustand reproduziert werden mit dem Unterschied, dass ein Teilchen, welches sich im Zustand  $|j\rangle$  des gesamten Fockzustandes wiederfand, nun den Zustand  $|i\rangle$  besetzt. Der Zustand wurde also um ein Teilchen in  $|j\rangle$  beraubt und um ein Teilchen in  $|i\rangle$  bereichert. Dies ist genau die Wirkung von Erzeugern und Vernichtern, weswegen man auch

$$T = \sum_{i,j} T_{ij} c_i^{\dagger} c_j \quad (2.2.17)$$

schreiben kann [14, 5].

## 2.3. Quantentheorie des Lichts

Ausgangspunkt der vollständig quantenmechanischen Beschreibung der Licht-Materie Wechselwirkungen ist neben der quantenmechanischen Beschreibung der Materie die quantenmechanische Beschreibung von elektromagnetischen Feldern. Die Grundlage dafür bieten die Maxwellgleichungen, welche im Nachfolgenden im Gauß'schen Einheitensystem niedergeschrieben sind und auch im weiteren Verlauf der Arbeit das Einheitensystem nicht wechseln werden [16]:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = q, \quad (2.3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.3.2)$$

Dabei stellen  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  das elektrische bzw. das magnetische Felde dar. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist  $c$  und  $q$  die Ladung vermeintlich anwesender Ladungsträger.

### 2.3.1. Eichfreiheit der Maxwellgleichungen

Zunächst seien die Potentialbeziehungen für elektrische und magnetische Felder definiert. Unter Ausschluss der Existenz magnetischer Monopole sind Magnetfeldlinien stets geschlossen und es muss für jedes endliche Volumen  $V$  gelten

$$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} \equiv 0 \quad (2.3.3)$$



und somit nach dem Gauß'schen Satz

$$\nabla \cdot \mathbf{B} \equiv 0. \quad (2.3.4)$$

Im Rahmen der Arbeit werden Magnetfelder also als rein transversal angenommen, weswegen man  $\mathbf{B}$  folglich als

$$\mathbf{B} := \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3.5)$$

schreiben kann mit  $\mathbf{A}$  als sogenanntes Vektorpotential. Unter der Annahme der Wirbelfreiheit von elektrischen Feldern, induziert durch eine punktförmige Raumladung  $q$ , kann man diese als Gradientenfeld eines skalaren Potentials  $\Phi$  schreiben gemäß

$$\mathbf{E} := -\nabla\Phi. \quad (2.3.6)$$

Nun können auch durch anwesende, sich zeitlich verändernde, magnetische Felder rotationsbehaftete Komponenten zu einem elektrischen Feld beitragen. Zu dieser Erkenntnis gelangt man zum einen durch die Vorstellung von elektrischen Feldern, induziert durch Punktladungen, als Feldlinien, deren Gesamtanzahl proportional zur Ladung  $q$  ist und durch diese festgelegt ist nach Gleichung 2.3.7 und zum anderen über die Definition von magnetischen Feldern über die Stromstärke  $I$  nach Formel 2.3.8. Die mathematische Formulierung dieser beiden Gedanken ist

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{f} = q \quad (2.3.7)$$

und

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = I := \oint_{\partial F} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.3.8)$$

mit  $F$  und  $V$  als beliebige Fläche bzw. beliebiges Volumen. Daraus folgt, dass

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}. \quad (2.3.9)$$

Somit korrigiert sich das Potential des elektrischen Feldes zu

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \quad (2.3.10)$$

(vgl. Quelle: [16]). Für das weitere Vorgehen überzeuge man sich von der Gültigkeit der Gesamtenergie für ein Teilchen der Ladung  $q$  und Masse  $m$  im äußeren Potential  $U$

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi + U, \quad (2.3.11)$$

mit  $\mathbf{p}$  als Impulsoperator in erster Quantisierung, sodass die phänomenologisch motivierte Bewegungsgleichung der Elektrodynamik

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - q\mathbf{E} - \nabla U \quad (2.3.12)$$

aus den kanonischen Gleichungen

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \text{und} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (2.3.13)$$

folgt mit  $x_j$  und  $p_j$  als Orts bzw. Impulskomponenten des betrachteten Teilchens [17]. Gleichung 2.3.11 wird auch als Prinzip der minimalen Kopplung bezeichnet.

Setzt man diese Gesamtenergie nun als Hamiltonian in erster Quantisierung in die Schrödinger-Gleichung in Ortsdarstellung des quantenmechanisch analogen Problems ein, so erhält man

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left[ \frac{1}{2m} (i\hbar \nabla - q\mathbf{A})^2 + q\Phi + U \right] \Psi \quad (2.3.14)$$

mit  $\mathbf{A}$ ,  $\Phi$  und  $U$  als zu multiplizierende Operatoren. Nun kann an eine Wellenfunktion  $\Psi' = \Psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi(\mathbf{r},t)}$  die Anforderung gestellt werden die obige Schrödinger-Gleichung zu lösen, wobei  $\chi(\mathbf{r},t)$  ein frei wählbarer Phasenfaktor als Funktion von Ort und Zeit sein soll mit  $\mathbf{r}$  als multiplikativer Ortsoperator in Ortsdarstellung.

Dabei stellt sich heraus, dass für die Lösungen der Wellenfunktionen gerade  $\Psi' \equiv \Psi$  gilt, wenn man eine Neuwahl der Potentiale gemäß

$$\Phi \rightarrow \Phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.3.15)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \chi \quad (2.3.16)$$

tätigt.

Präziser ausgedrückt folgt aus der Forderung der lokalen Eichinvarianz der Wellenfunktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld gegenüber eines frei wählbaren skalaren Phasenfaktors  $\chi(\mathbf{r},t)$  die Eichfreiheit des elektrischen und magnetischen Potentials  $\Phi$  bzw.  $\mathbf{A}$ .

### 2.3.2. Die homogenen Maxwellgleichungen in Coulombbeziehung

Durch geeignete Wahl von

$$\chi(\mathbf{r},t) = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \quad (2.3.17)$$

erhalten die in 2.3.15 und 2.3.16 aufgeführten Potentiale unter der Annahme

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_0,t) \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \approx \mathbf{E}(\mathbf{r}_0,t) \quad (2.3.18)$$

folgende Eigenschaften:

$$\Phi \equiv 0, \quad (2.3.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \equiv 0. \quad (2.3.20)$$

Dabei ist  $\mathbf{r}_0$  ein beliebiger aber fester Ortsvektor. Im Rahmen dieser Arbeit wird  $\mathbf{r}_0$  später als Ortsvektor eines Atoms angenommen mit der physikalischen Interpretation der Gleichungen 2.3.18 als Homogenität von elektrischen und magnetischen Feldern in der Größenordnung der räumlichen Ausmaße eines Atoms, wobei die rechte Gleichung aus 2.3.18 darüber hinaus auch als Dipolnäherung bezeichnet wird und in der quantenmechanischen Beschreibung der Licht-Materie Wechselwirkung in dieser Arbeit noch Verwendung finden wird. Die Gleichung 2.3.20 wird als Coulombbeziehung bezeichnet und führt zusammen mit Gleichung 2.3.19 zu den homogenen Maxwellgleichungen [6]:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.3.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.3.22)$$

### 2.3.3. Das quantisierte Lichtfeld

Aus der ersten Gleichung von 2.3.21 folgt

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\ddot{\mathbf{B}} \quad (2.3.23)$$

und somit

$$\nabla \times \nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\ddot{\mathbf{A}}. \quad (2.3.24)$$

Bildet man nun die Rotation der ersten Gleichung von 2.3.22 und schreibt  $\mathbf{B}$  gemäß 2.3.5 als Rotation des Vektorpotentials, so erhält man, auf Grund des transversalen Charakters des Vektorpotentials 2.3.20 und unter Ausnutzung von 2.3.24 die Wellengleichung für das Vektorpotential im Vakuum

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \equiv 0 \quad (2.3.25)$$

mit  $\Delta$  als Laplaceoperator.

Da  $\mathbf{A}$  der Wellengleichung genügt, lässt sich das Vektorpotential unter periodischen Randbedingungen im Volumen  $V$  als Reihenentwicklung wie folgt schreiben [2]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{2}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \Re [c_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})] \quad (2.3.26)$$

$$\text{mit } \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.3.27)$$

$$\text{und } c_{\mathbf{k}}(t) = c_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t}. \quad (2.3.28)$$

Dazu wurde die Dispersionsrelation der Wellengleichung  $\omega = c|\mathbf{k}|$  benutzt. Weiterhin legen die normierten Vektoren  $\epsilon_{\mathbf{k}}$  die Polarisationsrichtung von  $\mathbf{A}$  fest. Die Festlegung einer Polarisationsrichtung von  $\mathbf{A}$  rechtfertigt sich durch den transversalen Charakter des Vektorpotentials gemäß 2.3.20. Die  $c_{\mathbf{k}}$  repräsentieren die Amplitude des Vektorpotentials.

Zusätzlich folgt aus der Coulombbeziehung für 2.3.10, dass

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}. \quad (2.3.29)$$

Somit lässt sich  $\mathbf{E}$  wie folgt schreiben:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{-2}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \Im [\omega_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})]. \quad (2.3.30)$$

Durch die ermittelten Ausdrücke für  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{A}$  ist es nun möglich die Feldenergie des elektromagnetischen Feldes zu berechnen gemäß [6, 7]:

$$H = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2] d^3r = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{E}^2 + (\nabla \times \mathbf{A})^2] d^3r. \quad (2.3.31)$$

An dieser Stelle ist zu erwähnen, dass die Komponenten  $k_i$  der Wellenzahlvektoren  $\mathbf{k}$  durch die periodische Randbedingung für die Felder im endlichen aber hinreichend großen Volumen  $V$  festgelegt sind als

$$k_i = \frac{2\pi}{L} n_i \quad \text{mit } n_i \in \mathbb{Z} \quad \text{und } L^3 = V. \quad (2.3.32)$$

Damit bilden die  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  einen vollständigen und orthonormierten Funktionensatz im  $\mathbb{R}^3$  und verschwinden bei Auswertung des Integrals in 2.3.31.

Somit ergibt sich bei Auswertung von 2.3.31 für die Feldenergie:

$$H = 2 \sum_{\mathbf{k}} \omega^2 |c_{\mathbf{k}}(t)|^2. \quad (2.3.33)$$

An dieser Stelle lässt sich bereits erkennen, dass sich die gesamte Feldenergie aus den Energiebeiträgen der einzelnen Moden berechnet.

Fortlaufend kann man die Hamiltonmechanik ebenfalls in der Quantenmechanik anwenden um kanonische Observablen des Ortes  $q$  und Impulses  $\pi$  aus der Gesamtenergie eines Systems zu gewinnen gemäß:

$$\dot{q}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial H}{\partial \pi_{\mathbf{k}}} \quad \text{und} \quad \dot{\pi}_{\mathbf{k}} = -\frac{\partial H}{\partial q_{\mathbf{k}}}. \quad (2.3.34)$$

Schreibt man die Gesamtenergie nach 2.3.33 mittels der so gewonnenen Observablen auf, so erhält man

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [\pi_{\mathbf{k}}^2(t) + \omega^2 q_{\mathbf{k}}^2(t)]. \quad (2.3.35)$$

Dieses Ergebnis der Gesamtenergie für ein elektromagnetisches Feld stimmt exakt mit der Gesamtenergie für ein Spektrum aus unabhängigen harmonischen Oszillatoren überein.

Für einen unabhängigen, frei schwingenden harmonischen Oszillator des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  lassen sich in der Quantenmechanik bosonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $b_{\mathbf{k}}^\dagger$  bzw.  $b_{\mathbf{k}}$  definieren gemäß:

$$b_{\mathbf{k}}^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} + i\pi_{\mathbf{k}}), \quad (2.3.36)$$

$$b_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} (\omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}} - i\pi_{\mathbf{k}}). \quad (2.3.37)$$

Drückt man die  $c_{\mathbf{k}}(t)$  in 2.3.26 und 2.3.30 durch die kanonischen Observablen, welche sich wiederum eindeutig als Linearkombination der Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren schreiben lassen, aus, so erhält man die quantisierten Lichtfelder

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 2 \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} [b_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})]_S \quad (2.3.38)$$

und

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -2 \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}} [b_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})]_A. \quad (2.3.39)$$

Somit berechnet sich die Gesamtenergie eines elektromagnetischen Feldes, ausgedrückt durch Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren, wie folgt:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}. \quad (2.3.40)$$

Eigentlich ergibt sich bei genauem Nachrechnen des harmonischen Oszillators eine Vakuumenergie von

$$E_{vak} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}. \quad (2.3.41)$$

Die Vakuumsenergie wird allerdings durch geeignete Reskalierung der Energie zu Null gesetzt. Die verwendeten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lassen sich als Erzeuger und Vernichter von den Feldquanten, welche als Photonen bezeichnet werden, interpretieren. Weiterhin sind

$$A_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \quad (2.3.42)$$

und

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2V}} \quad (2.3.43)$$

die Felder pro Photon [2, 4, 12]. Darüber hinaus sind die Indexe in den Formeln 2.3.38 und 2.3.39 als der hermitesche (S) bzw. als der antisymmetrische Teil (A) der vorstehenden Operatoren zu verstehen gemäß:

$$A_S = \frac{1}{2} (A + A^\dagger) \quad (2.3.44)$$

$$A_A = \frac{1}{2i} (A - A^\dagger) \quad (2.3.45)$$

für einen beliebigen Operator  $A$ .

Um eine Basis zur Beschreibung eines Lasersystems, bestehend aus einem mit Materie in Wechselwirkung stehenden Lichtfeld, zu schaffen, setzt sich das nächste Kapitel mit der Wechselwirkung zwischen quantisierten elektromagnetischen Feldern und geladener Materie auseinander.

#### 2.3.4. Licht-Materie Wechselwirkung

In der vorherigen Sektion stellte sich heraus, dass Licht klassisch betrachtet als Welle auftritt. Aus der Homogenität des elektrischen Feldes 2.3.18 in der Nähe eines Referenzpunktes  $\mathbf{r}_0$ , welcher den Ortsvektor eines hier betrachteten Atomkerns darstellen soll, lässt sich klassisch interpretieren, dass die Wellenlänge der betrachteten elektromagnetischen Strahlung wesentlich größer ist, als die räumlichen Ausmaße eines Atoms. In Anwesenheit eines homogenen elektrischen Feldes verschieben der positiv geladene Atomkern und die negativ geladene Ladungsverteilung der Orbitalelektronen ihre Ladungsschwerpunkte gegeneinander und bilden einen elektrischen Dipol aus. Die potentielle Energie eines Dipolsystems in einem externen elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  ist aus Grundvorlesungen der Elektrodynamik bekannt gemäß:

$$H_D = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0, t) \quad (2.3.46)$$

(Quelle: [6]). Diese Vorgehensweise entspringt der Dipolnäherung 2.3.18, welche höhere Multipolmomente der Licht-Materie Wechselwirkung vernachlässigt. Dabei bezeichnet  $\mathbf{d} = q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  das Dipolmoment und  $\mathbf{E}$  das elektrische Feld und in diesem Fall die elektrische Feldkomponente der elektromagnetischen Strahlung. Setzt man für  $\mathbf{E}$  das quantisierte elektrische Feld 2.3.39 in 2.3.46 ein, erhält man durch die Einfügung zweier fermionischer Vollständigkeitseinsen in zweiter Quantisierung den folgenden Ausdruck:

$$H_D = 2 \sum_{i,j,\mathbf{k}} |i\rangle \langle j| E_{\mathbf{k}} \mathbf{d}_{ij} \cdot [b_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0)]_A. \quad (2.3.47)$$

Dabei laufen  $i$  und  $j$  die mit einem quantisierten Lichtfeld in Wechselwirkung stehenden Zustände eines fermionischen Systems ab. Da hier das fermionische Teilsystem gerade ein diskretes, atomares Energieniveausystem darstellt, laufen  $|i\rangle$  und  $|j\rangle$  die lokalisierten Energiezustände eines Atoms oder Quantenpunktes ab, die Übergängen zugehörig sind, welche sich gemäß Abbildung 1.1.2 an der Wechselwirkung mit dem hier betrachteten Lichtfeld beteiligen. Zusätzlich sei erwähnt, dass für die sogenannten Dipolmatrixelemente  $\mathbf{d}_{ij}$  auf Grund der ungeraden Symmetrie des Dipolvektors  $\mathbf{d}$  die Diagonalelemente

$$\mathbf{d}_{ii} = 0 \quad (2.3.48)$$

verschwinden. Nun kann mittels der Identität zwischen 2.2.17 und 2.2.16  $H_D$  wie folgt geschrieben werden

$$H_D = 2 \sum_{i,j,\mathbf{k}} a_i^\dagger a_j [g_{ij,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}]_S, \quad (2.3.49)$$

wobei  $a^\dagger$  und  $a$  die Rolle von fermionischen Erzeugern bzw. Vernichtern der entsprechend indizierten Zustände einnehmen. Weiterhin ist

$$g_{ij,\mathbf{k}} = -iE_{\mathbf{k}} \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) \quad (2.3.50)$$

die sogenannte Dipolkopplungskonstante.

In dieser Arbeit sollen Atome bzw. Quantenpunkte mit einem resonanten Übergang, der in Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld steht, simuliert werden (vgl. Abbildung 1.1.2). Daher wird im Folgenden die Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit einem fermionischen System untersucht, welches über zwei diskrete Energieniveaus  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  der Energien  $\epsilon_\alpha$  und  $\epsilon_\beta < \epsilon_\alpha$  verfügt. Durch eine geeignete Indizierung der Energieniveaus sollen später auch mehrere Niveaus betrachtet werden können. Das fermionische System soll später das aktive Material aus der Lasertheorie beschreiben.

Schreibt man 2.3.47 für ein System auf, dessen fermionisches Teilsystem nur über die beiden oben erwähnten Zustände verfügt, erhält man:

$$H_D = \sum_{\mathbf{k}} g_{\alpha,\beta,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} a_\alpha^\dagger a_\beta + g_{\beta,\alpha,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger a_\beta^\dagger a_\alpha + g_{\alpha,\beta,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger a_\alpha^\dagger a_\beta + g_{\beta,\alpha,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} a_\beta^\dagger a_\alpha. \quad (2.3.51)$$

Es lassen sich in der Interpretation der zweiten Quantisierung im Rahmen der Feldtheorie vier elementare Prozesse beobachten, die folgendem Schema genügen.

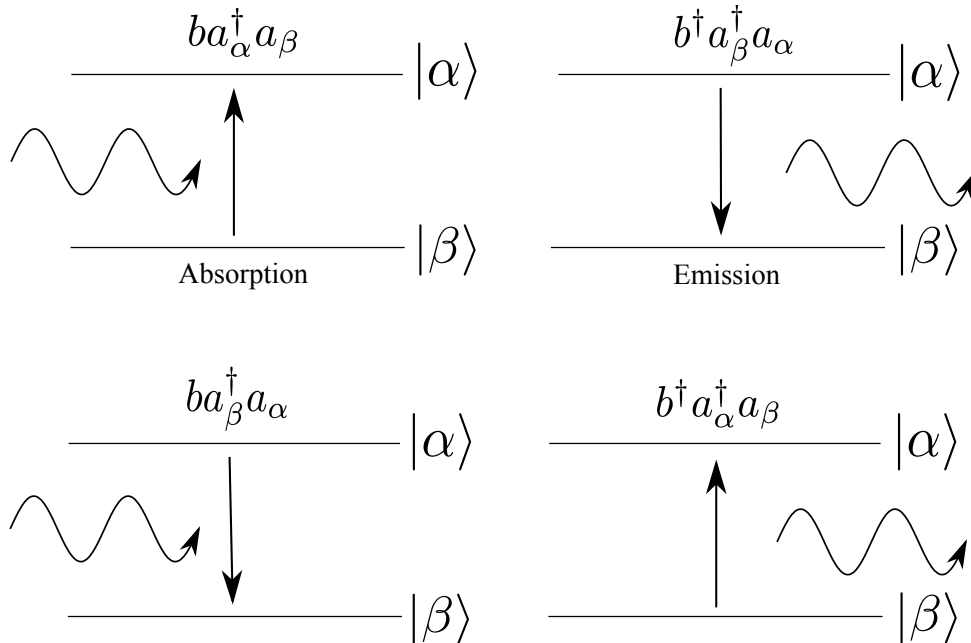


Abbildung 2.3.1: Elementarprozesse des Dipol-Hamiltonianoperators

Die zwei letzten Terme aus 2.3.51 sind jeder für sich nicht energieerhaltend und werden im Folgenden vernachlässigt [2, 12], da sich später auch herausstellen wird, dass die nicht energieerhaltenden Terme im Rahmen einer RWA, deren mathematischer Hintergrund im Anhang

A.1 nachgelesen werden kann, in der Systembeschreibung zu vernachlässigen sind. Der Dipol-Hamiltonoperator  $H_D$  reduziert sich somit auf

$$H_D = \sum_{\mathbf{k}} g_{\alpha,\beta,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} + g_{\beta,\alpha,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha}. \quad (2.3.52)$$

Der hier hergeleitete Wechselwirkungshamiltonian beschreibt die Wechselwirkung aller Resonatormoden  $\mathbf{k}$  mit einem diskreten Energieniveausystem. Diese Arbeit setzt sich jedoch vorrangig mit Mikroresonatoren mit räumlichen Ausmaßen im Nanometerbereich auseinander. Da die hier betrachteten Quantenpunkte für die darin eingeschlossenen Ladungsträger einen Potentialtopf sehr kleiner Länge  $L$  darstellen, sind die Resonatormoden nach Formel 2.3.32 sehr stark gegeneinander verstimmt, sodass im Folgenden lediglich eine resonante Resonatormode  $\mathbf{q}$  betrachtet wird, die resonant mit dem optischen Übergang zwischen den Zuständen  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  sein soll. Alle anderen Lichtfeldmoden  $\mathbf{k} \neq \mathbf{q}$  sollen folglich nicht direkt an der Laserdynamik beteiligt sein und werden fortan als Verlustmoden bezeichnet. Somit vereinfacht sich der Dipol-Hamiltonoperator zu

$$H_D = g_{\alpha,\beta,\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\beta} + g_{\beta,\alpha,\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} a_{\beta}^{\dagger} a_{\alpha} \quad (2.3.53)$$

und auf Grund der Hermitizität des Dipol-Hamiltonoperators als messbare Größe muss

$$g_{\alpha,\beta,\mathbf{q}} = g_{\beta,\alpha,\mathbf{q}}^* := g_{\mathbf{q}} \quad (2.3.54)$$

gelten. Der Schritt von 2.3.52 zu 2.3.53 wird auch als Näherung der Ein-Moden-Resonanz bezeichnet.

Nach dem nun der durch Licht-Materie Wechselwirkung hervorgerufene Energiebeitrag des Systems bekannt ist, kann zur vollständigen Beschreibung eines Licht-Materie Systems der Gesamt-hamiltonoperator definiert werden.

### 2.3.5. Simulation von dissipativen Effekten von Licht-Materie Systemen über die Wechselwirkung mit externen Wärmereservoirs für ein Zwei-Niveau-System (ZNS)

Der bisher im Theoriekapitel beschriebene Übergang zwischen zwei Energieniveaus, der für die Emission von Photonen in die Resonatormode verantwortlich ist, wird als Zwei-Niveau-System bezeichnet. Während sich das vorangegangene Kapitel mit der Wechselwirkung eines solchen Zwei-Niveau-Systems mit der resonanten Lichtfeldmode  $\mathbf{q}$  auseinander gesetzt hat, wird diesem Kapitel die Wechselwirkung des Zwei-Niveau-Systems mit den Verlustmoden und mit dem freien Raum, in den Photonen der Kavität als Laserstrahl emittiert werden, beschrieben. Um alle externen Einflüsse, wie sie in Abbildung 2.1.1 angenommen worden sind, auf das Zwei-Niveau-System zu berücksichtigen, soll auch eine externe Energiezufuhr in Form eines Pumpprozesses des Zwei-Niveau-Systems simuliert werden. Der Pumpprozess wird dabei als inverser Verlustprozess der Emission in nicht resonante Moden modelliert. Dazu wird in diesem Kapitel für jeden der beiden eben benannten Verlustprozesse des Zwei-Niveau-Systems mit der Umgebung ein unabhängiges Wärmereservoir angenommen, mit welchem das Zwei-Niveau-System quantisiert Energie austauschen kann. Die Modellierung dieses Systems wird in Abbildung 2.3.2 veranschaulicht. Unter Berücksichtigung dieser dissipativen Prozesse, kann später im Ergebniskapitel der Zwei-Niveau-Laser als Abstraktion des Vier-Niveau-Lasers simuliert und untersucht werden. Da sich bei einem kohärent gepumpten Zwei-Niveau-Lasersystem jedoch Absorption und Emission von Photonen (siehe Abbildung 2.3.1) naturgemäß aufwiegen, tritt dieses System nie ins Lasing ein. Deshalb, werden alle in dieser Arbeit betrachteten Pumpprozesse als inkohärent angenommen. Die mathematische Konsequenz des inkohärenten Pumpprozesses ist, dass die Erwartungswerte aller Operatoren verschwinden, deren Anzahl von Systemenergie steigernden

Operatoren ( $b^\dagger$ ,  $a_\alpha^\dagger a_\beta$ ) nicht mit der Anzahl der in diesem Operator vorkommenden Systemenergie senkenden Operatoren ( $b$ ,  $a_\beta^\dagger a_\alpha$ ) übereinstimmt, wobei  $a_\alpha^\dagger a_\beta$  und  $a_\beta^\dagger a_\alpha$  jeweils als ein einziger Operator aufgefasst werden. Diese Annahme wird später noch in dieser Arbeit zur Lösung der Bewegungsgleichungen der Systemgrößen von Lasersystemen ausgenutzt. Die durch Dissipation bedingten Terme der Bewegungsgleichungen sollen im Folgenden hergeleitet werden.

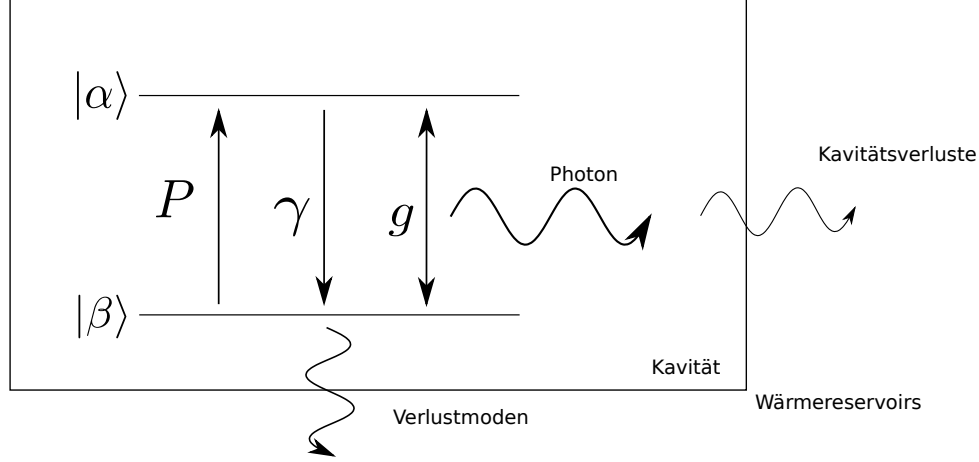


Abbildung 2.3.2: Schematische Darstellung des Zwei-Niveau-Lasers mit einem Emitter unter dissipativen Einflüssen, welche durch die Wechselwirkung des Systems mit der Umgebung (Wärmereservoirs) stattfinden.  $P$  steht dabei für die Anregung des Systems durch einen Pumpprozess,  $\gamma$  ist die Rate der spontanen Emission in die Verlustmoden und  $g$  ist die Dipolkopplungskonstante, welche für die Emission von Photonen in die Resonatormode verantwortlich ist.

Zunächst seien folgende Umschreibungen von Operatoren verabredet um die Beschreibung des Systems buchhalterisch angenehmer zu gestalten:

$$\sigma_+ := a_\alpha^\dagger a_\beta, \quad \sigma_- := a_\beta^\dagger a_\alpha, \quad n_{\alpha,\beta} := a_{\alpha,\beta}^\dagger a_{\alpha,\beta}, \quad N_{\mathbf{k}} := b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}. \quad (2.3.55)$$

Die  $a_i^\dagger$ ,  $a_i$  sind dabei, wie in den vorhergegangenen Sektionen, fermionische Erzeuger bzw. Vernichter für Elektronen im Energieniveau  $|i\rangle$ . Die  $b_{\mathbf{k}}^\dagger$ ,  $b_{\mathbf{k}}$  sind bosonische Erzeuger bzw. Vernichter von Photonen in der Lichtfeldmode  $\mathbf{k}$ . Die  $n_i$  und  $N_{\mathbf{k}}$  sind Teilchenzahloperatoren der entsprechenden Teilchensorten. Die Operatoren  $\sigma_\pm$  werden als Auf- bzw. Absteiger bezeichnet. Dann kann der Hamiltonoperator des Licht-Materie Systems wie folgt definiert werden:

$$H_S = H_{JC} = H_{\text{Materie}} + H_{\text{Licht}} + H_D = \sum_{i=\alpha,\beta} \epsilon_i n_i + \hbar\omega N + gb\sigma_+ + g^*b^\dagger\sigma_-. \quad (2.3.56)$$

Dieser Hamiltonoperator ist als Jaynes-Cumming-Hamiltonoperator bekannt. Da nur noch eine Mode  $\mathbf{q}$  im Systemhamiltonian berücksichtigt wird, werden deren modenspezifische Operatoren und Größen nicht mehr indiziert. Im Folgenden soll der Gesamthamiltonoperator des Systems definiert werden. Dazu müssen auch die energetischen Beiträge der Verlustmoden und der Resonatorverluste berücksichtigt werden. Grundsätzlich kann das aktive Material im Resonator Photonen in die Verlustmoden emittieren. Darüber hinaus werden auch Photonen der resonanten Mode  $\mathbf{q}$  durch die Resonatorspiegel in den Laserstrahl transmittieren. Damit können zunächst die Wärmereservoirs der Verlustmoden  $H_{R_1}$  und der Resonatorverluste  $H_{R_2}$  als Spektren harmonischer Oszillatoren gemäß

$$H_{R_{1,2}} = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{q}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \quad (2.3.57)$$



eingeführt werden. Die Idee dabei besteht darin, dass die resonante Lichtmode, welche selber einen harmonischen Oszillator darstellt, an ein viel größeres Spektrum anderer harmonischer Oszillatoren im thermischen Gleichgewicht am absoluten Nullpunkt koppelt, Energieverluste erleidet und dissipativ gedämpft wird. Das ZNS ist ein fermionischer harmonischer Oszillator, der sich durch das paarweise Auftreten von fermionischen anstelle von bosonischen Operatoren, nicht weiter vom bosonischen harmonischen Oszillator unterscheidet. Die Wechselwirkung des ZNS mit dem Reservoir  $H_{R_1}$  der nicht resonanten Verlustmoden wird über die Kopplungskonstante  $f_{\mathbf{k}}$  beschrieben. Die Kopplung der resonanten Lichtfeldmode  $\mathbf{q}$  an das Wärmebad  $H_{R_2}$  des freien Raums (Reservoir der Kavitätsverluste) wird durch die Kopplungskonstante  $h_{\mathbf{k}}$  bestimmt. Somit ist der entsprechende Wechselwirkungshamiltonian zwischen den Reservoirs und dem Licht-Materie System durch

$$H_{WW} = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{q}} \left( h_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} + h_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}} \right) + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{q}} \left( f_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} \sigma_{+} + f_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}^{\dagger} \sigma_{-} \right) \quad (2.3.58)$$

gegeben. Die Reservoirs  $H_{R_{1,2}}$  werden als voneinander unabhängig betrachtet. Dies rechtfertigt sich durch die Annahme, dass aus der Kavität entwichene Photonen in einen unendlich großen freien Raum propagieren ohne diesen aufzuheizen und nicht mehr am System beteiligt sind, somit auch nicht mit den Verlustmoden in Wechselwirkung stehen. Der Hamiltonoperator des gesamten Systems setzt sich also aus dem Jaynes-Cumming Hamiltonoperator, den Hamiltonians der Reservoirs und deren Wechselwirkungshamiltonoperatoren zusammen und es ergibt sich:

$$H = H_{JC} + H_{R_1} + H_{R_2} + H_{WW}. \quad (2.3.59)$$

Auf dem Gesamthamiltonoperator aufbauend kann man die dissipativen Effekte des Systems quantitativ beschreiben. Auf der Grundlage der Hinzufügung von externen Wärmebädern, wie dies in diesem Kapitel geschehen ist, lässt sich im Dichtematrixformalismus die Louville von Neuman-Gleichung herleiten, welche die Zeitentwicklung des statistischen Operators  $\rho$  beschreibt. Die dissipativ bedingte zeitliche Änderung des statistischen Operators ergibt sich dabei zu [12, 4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho|_{Diss} = & \frac{\kappa}{2} \left[ 2b\rho b^{\dagger} - b^{\dagger}b\rho - \rho b^{\dagger}b \right] \\ & + \frac{\gamma}{2} \left[ 2\sigma_{-}\rho\sigma_{+} - \sigma_{+}\sigma_{-}\rho - \rho\sigma_{+}\sigma_{-} \right] \\ & + \frac{P}{2} \left[ 2\sigma_{+}\rho\sigma_{-} - \sigma_{-}\sigma_{+}\rho - \rho\sigma_{-}\sigma_{+} \right]. \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

Die hier zu sehenden Terme sind bekannt als Lindblad-Terme.  $\kappa$ ,  $\gamma$  und  $P$  sind dabei die Raten der oben genannten und in Abbildung 2.1.1 eingezeichneten dissipativen Effekte und haben entsprechend die Einheit einer inversen Zeit. Die Kavitätsverluste der Resonatormode werden dabei von der Rate  $\kappa$  beschrieben, die spontane Emission von Photonen in nicht resonante Verlustmoden wird durch  $\gamma$  gesteuert und die Stärke der Energiezufuhr obliegt der Wahl der Pumprate  $P$ . Die Raten der Dissipation stehen im Zusammenhang mit den Kopplungskonstanten der entsprechenden dissipativen Effekte [12]. In dieser Arbeit wird der zum Dichtematrixformalismus äquivalente Formalismus der Bewegungsgleichungen benutzt, weshalb der Einfluss von Lindblad-Termen auf die Zeitentwicklung der Erwartungswerte des Systems von eigentlichem Interesse ist. Dazu kann man ausnutzen, dass sich Erwartungswerte  $\langle A \rangle$  eines Systems durch die Spurbildung einer Matrix berechnen lassen, welche durch den statistischen Operator  $\rho$  und dem Erwartungswert  $\langle A \rangle$  zugehörigen Operator  $A$  festgelegt ist (Quelle: [4]) gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle = \frac{\partial}{\partial t} Tr\{\rho A\} = Tr\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t} \rho\right) A\right\}. \quad (2.3.61)$$

Das letzte Gleichheitszeichen aus 2.3.61 gilt, da im Dichtematrixformalismus lediglich der statistische Operator eine Zeitabhängigkeit besitzt, da dieser Formalismus auf dem Schrödinger-Bild

gründet [12]. Indem man also in Formel 2.3.60 an jeden Lindblad-Term den Operator  $A$  anfügt und die Spur des gesamten Ausdrucks bildet, erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle |_{Diss} = & \frac{\kappa}{2} Tr\{2b\rho b^\dagger A - b^\dagger b\rho A - \rho b^\dagger b A\} \\ & + \frac{\gamma}{2} Tr\{2\sigma_- \rho \sigma_+ A - \sigma_+ \sigma_- \rho A - \rho \sigma_+ \sigma_- A\} \\ & + \frac{P}{2} Tr\{2\sigma_+ \rho \sigma_- A - \sigma_- \sigma_+ \rho A - \rho \sigma_- \sigma_+ A\}. \end{aligned} \quad (2.3.62)$$

Bildet man die Spur einer Operatorsequenz  $ABC$ , ist diese Sequenz zyklisch vertauschbar gemäß:

$$Tr\{ABC\} = Tr\{CAB\} = Tr\{BCA\}. \quad (2.3.63)$$

Dies ermöglicht es den statistischen Operator und die Spurbildung vor den gesamten Ausdruck 2.3.62 zu schreiben und die dissipativ bedingte zeitliche Änderung der Observablen  $A$  in kompakter Form wie folgt zu formulieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle |_{Diss} = & \frac{\kappa}{2} \left\langle [b^\dagger, A] b + b^\dagger [A, b] \right\rangle \\ & + \frac{\gamma}{2} \langle [\sigma_+, A] \sigma_- + \sigma_+ [A, \sigma_-] \rangle \\ & + \frac{P}{2} \langle [\sigma_-, A] \sigma_+ + \sigma_- [A, \sigma_+] \rangle. \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

Die eckigen Klammern bedeuten nun die Bildung des Kommutators.

Abschließend ist anzumerken, dass die Lindblad-Terme untereinander immer wieder die selbe Struktur aufweisen. Die Verlustprozesse bosonischer und fermionischer Natur weisen an den selben Stellen in den jeweiligen Termen ihre entsprechenden Operatoren zur Steigerung (im Falle der Bosonen die Feldquantenerzeuger  $b^\dagger$  und im Falle der Fermionen den Aufsteiger  $\sigma_+$ ) und Senkung (im Falle der Bosonen die Feldquantenvernichter  $b$  und im Falle der Fermionen den Absteiger  $\sigma_-$ ) der Systemenergie auf. Beim Pumpprozess sind die Rollen der Systemenergie steigernden und senkenden Operatoren gerade gegenüber den Verlustprozessen per Konstruktion als inversen Verlustprozess vertauscht.

## 2.4. Vollständige Bewegungsgleichungen für Erwartungswerte im Heisenberg-Bild

Während in der vorherigen Sektion, der durch externe Wärmebäder hervorgerufene, dissipative Anteil der Zeitentwicklung für Licht-Materie Systeme diskutiert und hergeleitet wurde, soll nun ermittelt werden, inwiefern sich ein quantenmechanisches System ohne externe Einflüsse in der Zeit entwickelt. Die Zeitentwicklung von Zuständen  $|\Psi\rangle$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  in der Quantenmechanik wird durch die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle \quad (2.4.1)$$

beschrieben, wobei  $H$  der Hamiltonoperator ist. Entsprechend gilt im zu  $\mathcal{H}$  isomorphen Raum der linearen Funktionale  $\mathcal{H}^*$  per Definition

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi| = -H \langle \Psi|. \quad (2.4.2)$$

Daraus folgt für das totale Differential von Erwartungswerten von beliebigen Operatoren  $A$  nach der Produktregel die Kommutatorrelation

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi| A |\Psi\rangle := \frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A \right\rangle \quad (2.4.3)$$

$$(2.4.4)$$

mit  $[H, A] = HA - AH$ . Hier ist zu sagen, dass im Rahmen dieser Arbeit nie explizit von der Zeit abhängige Operatoren auf ihre Zeitentwicklung untersucht werden, weswegen der letzte Term in 2.4.3 wegfällt. Nun wird im Heisenberg-Bild im Gegensatz zum Schrödinger-Bild die Zeitabhängigkeit der Systemdynamik von den Zuständen  $|\Psi\rangle$  auf die Operatoren verlagert, sodass folgende allgemein gültige Notation sinnvoll ist für explizit zeitunabhängige Operatoren  $A$ :

$$\frac{d}{dt}A := \dot{A} = \frac{i}{\hbar} [A, H]. \quad (2.4.5)$$

Man überzeuge sich von der Erhaltung aller Eigenschaften von Differentialoperatoren aus der Analysis auf Operatoren auf Hilberträumen und somit auch von der Gültigkeit der Produktregel (Quelle: [8])

$$\frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B}. \quad (2.4.6)$$

Für die Berechnung der nicht dissipativ bedingten Zeitentwicklung von Erwartungswerten der hier speziell betrachteten Lasersysteme unter Wegfall der Einflüsse durch äußere Wärmereservoirs ergibt sich folglich

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} [H_S, A] \quad (2.4.7)$$

mit  $H_S$  als Systemhamiltonoperator aus der vorherigen Sektion.

Da nun die vollständigen Bewegungsgleichungen von Erwartungswerten berechnet werden können gemäß

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} [H_S, A] + \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle|_{Diss}, \quad (2.4.8)$$

ist es möglich die Laserdynamik bestimmenden Systemgrößen der mittleren Besetzungen der Energieniveaus  $\langle n_i \rangle$  eines Lasersystems sowie die mittlere Photonenzahl  $\langle N \rangle$  in der Resonatormode in der Zeit zu berechnen. So können auch die in der folgenden Sektion aufgeführten Erwartungswerte berechnet werden.

### 3. Anwendungen

#### 3.1. Autokorrelationsfunktionen und Photonenstatistik

Lichtquellen und Lichtfelder definieren sich nicht lediglich durch ihre Intensität, ihr Frequenzspektrum und die Art ihrer Polarisierung. Ein wichtiges Kriterium zur Charakterisierung von Lichtquellen ist die Phasenbeziehung der im Lichtfeld enthaltenen Photonen untereinander. Der Kohärenzgrad eines Lichtfeldes macht über diese Phasenbeziehung gerade eine Aussage. Der Begriff der Kohärenz findet dabei nicht nur in der Quantenoptik Anwendung. Im Allgemeinen ist damit gemeint, dass ein System sich unbeeinflusst von externen Einflüssen und sich selbst entwickelt. Kohärentes Licht zeichnet sich dabei durch eine räumlich und zeitlich konstante Phasenbeziehung der im Lichtfeld enthaltenen Photonen untereinander aus, da diese sich im kohärenten Zustand nicht gegenseitig beeinflussen. Daher eignet sich kohärentes Licht auch zur Erzeugung von reproduzierbaren Interferenzmustern. Sogenannte Autokorrelationsfunktionen lassen dabei Rückschlüsse auf den Charakter einer Lichtquelle zu. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei in dieser Arbeit den Autokorrelationsfunktionen erster und zweiter Ordnung zugemessen. Sie sind wie folgt definiert:

$$g_1(\tau) = \frac{\langle b^\dagger(t+\tau)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle} \quad (3.1.1)$$

$$g_2(\tau) = \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t+\tau)b(t+\tau)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2}. \quad (3.1.2)$$

Zur anschaulichen Interpretation der Autokorrelationsfunktionen muss sich vergegenwärtigt werden, dass die bosonischen Feldquantenerzeuger bzw. -vernichter proportional zur Amplitude des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  sind (vgl. Formel 2.3.39). Folglich muss der Erwartungswert der mittleren Photonenzahl eines Systems  $\langle b^\dagger b \rangle$  ein Maß für die Laserintensität sein. So vergleicht  $g_1(\tau)$  die Amplituden eines Lichtfeldes zu zwei verschiedenen Zeitpunkten miteinander und findet daher Anwendung in Interferenzexperimenten. Der Wert der Autokorrelationsfunktion ersten Grades trifft auf Grund dessen eine Aussage über die Phasenbeziehung einzelner Photonen in einer Lichtfeldmode untereinander und somit auch über den Grad der Kohärenz des entsprechenden Lichtfeldes. Die Autokorrelationsfunktion zweiten Grades  $g_2(\tau)$  trifft hingegen eine Aussage über das statistische Verhalten einer Lichtquelle. Dazu muss man sich vorher noch an Formel 3.1.2 verdeutlichen, dass  $g_2(\tau)$  die Intensität des Lichtes einer Lichtquelle zu zwei verschiedenen Zeiten vergleicht. Dabei wird  $\tau$  als Verzögerung bezeichnet. Anschaulich stellt  $g_2(\tau)$  dann ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dar zwei Photonen im Zeitraum  $\tau$  zu detektieren [19]. So findet die Autokorrelationsfunktion im Hanbury-Brown-Twiss-Experiment zur Detektion von Photonen Anwendung. Man kann sich vorstellen, dass für sehr große Zeiträume  $\tau \rightarrow \infty$  die Autokorrelationsfunktion zweiten Grades gegen einen festen Wert läuft, was dem Fall entspricht, dass jegliche Beeinflussung zweier Photonen untereinander verloren geht. Man spricht in diesem Kontext auch von dem Verschwinden der Korrelation zwischen zwei Photonen, da die Detektion eines Photons zu Beginn des Zeitraums  $\tau$  keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit der Detektion eines zweiten Photons in diesem Zeitraum hat. Die Normierung von  $g_2(\tau)$  ist dabei gerade so gewählt, dass

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g_2(\tau) = 1 \quad (3.1.3)$$

gilt. Während  $g_2(\tau) = 1$  gerade dem Fall entspricht, dass sich die Photonen der Lichtquelle unkorreliert zueinander verhalten, entspricht  $g_2(\tau) = 2$  dem Fall, dass mit Sicherheit nach der Detektion eines Photons im Zeitraum  $\tau$  ein weiteres Photon in diesem Zeitraum detektiert wird, Photonen dann also bevorzugt in Gruppen von der Lichtquelle emittiert werden. Weiterhin ist für  $g_2(\tau) < 1$  zu erwarten, dass Photonen bevorzugt vereinzelt von der Lichtquelle emittiert werden (vgl. Abbildung 3.1.1). In dieser Arbeit ist die Korrelation zweier Photonen untereinander zu einem Zeitpunkt  $t$  von besonderem Interesse, da das statistische Verhalten der Detektion von Photonen

$$g_2(0) = \frac{\langle b^\dagger(t)b^\dagger(t)b(t)b(t) \rangle}{\langle b^\dagger(t)b(t) \rangle^2} = \frac{\langle (b^\dagger)^2 (b)^2 \rangle}{\langle b^\dagger b \rangle^2} \quad (3.1.4)$$

dann auch konkrete Aussagen über den Grad der Kohärenz einer Lichtquelle trifft. Die Ursache dessen liegt darin, dass für kohärente Lichtfeldzustände eine feste räumliche und zeitliche Phasenbeziehung zwischen den im Lichtfeld enthaltenen Photonen gelten muss, sodass diese also unabhängig vom betrachteten Zeitraum  $\tau$  völlig unkorreliert zueinander sein müssen. Roy J. Glauber konstruierte kohärente Lichtfeldzustände  $|\alpha\rangle$  mittels Fockzuständen  $|n\rangle$  als

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n |n\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}, \quad (3.1.5)$$

wobei  $n$  eine feste Photonenzahl ist und  $|n\rangle$  über alle möglichen Zustandskombinationen fester Teilchenzahl läuft. Zunächst kann man aus 3.1.5 ablesen, dass die Wahrscheinlichkeit  $m$  Photonen in einem kohärentem Lichtfeld vorzufinden

$$p_m := |\langle m|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2m}}{m!} e^{-|\alpha|^2} \quad (3.1.6)$$

gerade einer Poissonverteilung folgt. Man spricht im Zusammenhang mit der Photonenzahlverteilung  $p_m$  auch von einer Photonenstatistik. Für kohärente Lichtfeldzustände ergibt sich der

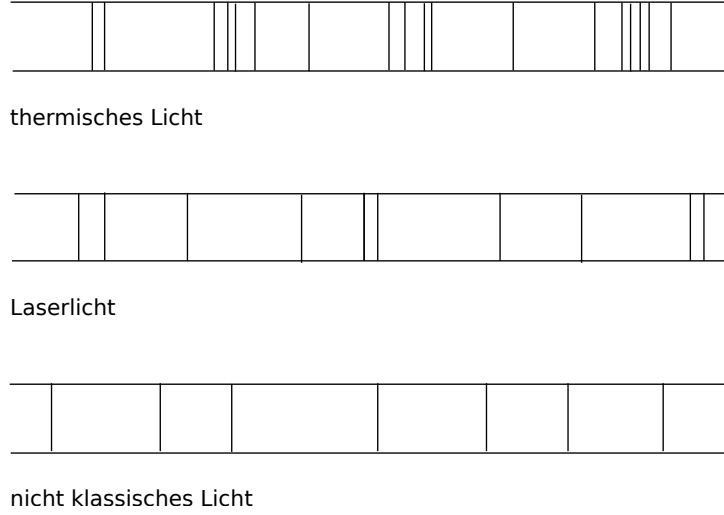


Abbildung 3.1.1: Photonverteilung in Laserstrahlen in verschiedenen Lichtfeldzuständen auf einer beliebigen Zeitskala (bei konstanter Lichtgeschwindigkeit entsprechen die verhältnismäßigen Abstände der Photonen auch der räumlichen Photonverteilung). Mit nichtklassischem Licht wird ein Lichtfeldzustand bezeichnet, für welchen  $g_2(0) \in [0, 1[$  gilt; beispielsweise ein Fockzustand mit  $n \geq 1$

charakteristische Wert der Autokorrelationsfunktion zweiter Ordnung zu

$$g_2(0) = \frac{\langle \alpha | (b^\dagger)^2 (b)^2 | \alpha \rangle}{\langle \alpha | b^\dagger b | \alpha \rangle^2} = 1. \quad (3.1.7)$$

Beachtlich ist an dieser Stelle, dass ohne genauere Kenntnis der Photonenstatistik, also die Information über die  $p_m$ , die Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  eine Aussage über den Kohärenzgrad eines Lichtfeldes trifft. Diese Aussage ist zwar nicht eindeutig, da auch andere Lichtfeldzustände in Grenzfällen den Wert eins für  $g_2(0)$  annehmen können, aber nichts desto trotz ist die Messung von  $g_2(0) = 1$  ein deutliches Indiz auf kohärente Lichtfeldzustände. Befindet sich der Laser nicht im Lasing, so sendet er im Allgemeinen Licht aus mit einer Korrelationsfunktion ungleich eins. Beispielsweise genügt ein thermischer Zustand

$$|Th\rangle = \frac{1}{Z} \sum_n |n\rangle e^{-\beta \frac{\hbar\omega}{2} n} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad \text{und} \quad Z = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar\omega}} \quad (3.1.8)$$

einer Boltzmanverteilung in der Energie, wobei  $k_B$  hier die Boltzmannkonstante und  $T$  die Temperatur bezeichnet. Hier folgt die Photonenstatistik einer Bose-Einstein-Verteilung. Die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung ergibt sich für einen thermischen Zustand zu

$$g_2(0) = \frac{\langle Th | (b^\dagger)^2 (b)^2 | Th \rangle}{\langle Th | b^\dagger b | Th \rangle^2} = 2. \quad (3.1.9)$$

Für einen Fockzustand ergibt sich eine teilchenzahlabhängige Korrelationsfunktion von

$$g_2(0) = \frac{\langle n | (b^\dagger)^2 (b)^2 | n \rangle}{\langle n | b^\dagger b | n \rangle^2} = 1 - \frac{1}{n}. \quad (3.1.10)$$

Hier kann man sehen, dass für den Grenzfall unendlich vieler Photonen in einem Fockzustand, dessen Autokorrelationsfunktion den Wert eins einnimmt. Die drei hier diskutierten Lichtfeldzustände weisen auch ein charakteristisches Verhalten ihrer Statistik zur Detektion von Photonen

auf, wie man an den zugehörigen Werten von  $g_2(0)$  erkennen kann. So emittiert eine thermische Lichtquelle Photonen bevorzugt in Gruppen, eine sub-poissonische Lichtquelle (mit  $g_2 < 1$  wie beim Fockzustand) bevorzugt vereinzelt und bei kohärenten Lichtfeldzuständen ist die Detektion von Photonen völlig zufällig. In Abbildung 3.1.1 wird die Statistik zur Detektion von Photonen dieser drei Lichtfeldzustände veranschaulicht. Dabei wird das Auftreten von Photonen in Gruppen als Photonen-Bunching und das Auftreten einzelner Photonen als Anti-Bunching von Photonen bezeichnet. Abschließend sei noch gesagt, dass Lichtfeldzustände mit  $g_2(0) \in ]1, 2[$  als super-poissonisch bezeichnet werden und ihre Photonenstatistik auch so verteilt ist. Zustände mit  $g_2(0) \in [0, 1[$  gelten als sub-poissonisch.

### 3.1.1. Berechnung der Photonenstatistik aus bosonischen Erwartungswerten

Da sich in dieser Arbeit mit der Beschreibung von Lasersystemen über Erwartungswerte und deren Entwicklung in der Zeit auseinandergesetzt wird, ist es von Interesse die vollständige Information über die Photonenstatistik eines Lichtfeldes über bosonische Operatorerwartungswerte zu ermitteln. Im Ergebniskapitel wird sich herausstellen, dass die Bekanntheit der Zeitentwicklung der rein bosonischen Operatorerwartungswerte  $\langle (b^\dagger)^n (b)^n \rangle$  eine Voraussetzung ist zur Beschreibung und Berechnung der Systemdynamik der hier untersuchten Lasersysteme. Dazu kann man sich überlegen, dass der bosonische Anteil des Systemzustandes eines Lasersystems sich als Linearkombination von Fockzuständen schreiben lässt gemäß

$$|\Psi\rangle_{Ph} = \sum_n c_n |n\rangle \quad (3.1.11)$$

mit

$$p_m = |c_m|^2 \quad (3.1.12)$$

als Wahrscheinlichkeit  $m$  Photonen im Lichtfeld vorzufinden. Über die Definition der bosonischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren erhält man nun

$$\langle (b^\dagger)^n (b)^n \rangle = \sum_m p_m \prod_{i=0}^{n-1} (m - i) \quad (3.1.13)$$

mit  $p_m$  als Wahrscheinlichkeit  $m$  Photonen im Lichtfeld vorzufinden. Gleichung 3.1.13 kann wie folgt als lineares Gleichungssystem interpretiert werden:

$$\mathbf{b} = M\mathbf{p} \quad \text{mit} \quad b_i = \langle (b^\dagger)^i (b)^i \rangle \quad \text{und} \quad M_{ij} = \prod_{x=0}^{i-1} (j - x). \quad (3.1.14)$$

Die Komponenten von  $\mathbf{p}$  sind hier die Wahrscheinlichkeiten der Photonenstatistik. Die Matrix  $M$  hat eine rechte, obere Dreiecksform und ist leicht analytisch zu invertieren, sodass man direkt das Ergebnis für die Wahrscheinlichkeiten

$$p_d = \frac{1}{(d)!} \sum_{x=0}^{n-d} \frac{(-1)^x b_{d+x}}{x!} \quad \text{mit} \quad d = 1, \dots, n \quad (3.1.15)$$

aus den Erwartungswerten berechnen kann. Formel 3.1.15 findet später in der Ergebnisauswertung Anwendung, da die zur Invertierung der Matrix  $M$  nötige Determinante sehr schnell anwächst

$$\det(M) = \prod_{j=0}^{\dim(M)} j! \quad (3.1.16)$$

sehr schnell anwächst. Da  $M^{-1} \propto \det(M)^{-1}$  würden wesentlich größere Fehler bei der numerischen Berechnung der Wahrscheinlichkeiten gemacht als über Formel 3.1.15.

### 3.2. Modulationsantwort

Als Modulationsantwort wird die Reaktion eines Systems auf Ansteuerungssignale bezeichnet. Die Ansteuerung der hier untersuchten Lasersysteme findet über den Pumpprozess statt. Dabei ist im Allgemeinen zu untersuchen, in welchem Ausmaß ein System auf eine periodische Ansteuerung in der Zeit reagiert und dieser folgt. Von besonderem Interesse ist dabei zu ermitteln ab welcher Frequenz ein System auf eine Ansteuerung nicht mehr reagiert. Die Motivation der Erstellung einer Modulationsantwort von Lasersystemen besteht darin zu untersuchen wie hochfrequent Lasersysteme angesteuert werden können über einen Pumpprozess um Signale kausal übertragen zu können. In der optoelektronischen, telekommunikativen Signaltechnik werden Lasersysteme dazu genutzt Informationen im Binärkode zu übertragen. Dabei wird zwischen den Signalen 0 und 1 unterschieden, indem das Laserlicht der Systeme detektiert wird und in seiner Intensität bestimmt wird. Es wird dabei eine definierte Intensität festgelegt, unterhalb welcher das Lasersystem als ausgeschaltet gilt und das Signal 0 überträgt. Oberhalb dieser Intensität gilt das System als eingeschaltet und überträgt das Signal 1. Die Bestrebung dabei ist es Lasersysteme so zu konstruieren, dass sie möglichst hochfrequent zwischen diesen beiden Zuständen in der Zeit wechseln können. Man kann sich vorstellen, dass bei einer instantanen Erhöhung der Pumprate  $P$ , das Lasersystem auf diese Anregung mit einer zeitlichen Verzögerung  $dt$  reagiert, einschaltet und das Signal 1 überträgt. Wird die Pumprate allerdings wieder abgesenkt, bevor das Lasersystem dieser Anregung nachkommt, kann das Signal 1 nicht erzeugt, ausgewertet und somit auch nicht übertragen werden. Die Verzögerung  $dt$  des Lasersystems um zwischen den Zuständen 0 und 1 zu wechseln definiert dann eine maximale Übertragungsfrequenz von Signalen des Systems. Über eine periodische Ansteuerung des Systems in der Zeit kann dann getestet werden bis zu welcher Frequenz dieses der Anregung folgen kann, sodass man zwischen den Zuständen 0 und 1 noch unterschieden werden kann. Im Folgenden soll die analytisch zu ermittelnde Modulationsantwort des harmonisch getriebenen und gedämpften Oszillators beschrieben werden. Dazu wird zunächst ein eindimensionaler Oszillator in Form eines Massenpunktes unter Einfluss einer zur Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung mit der Dämpfungskonstanten  $\beta > 0$  und einer antreibenden, in der Zeit  $t$  veränderlichen Kraft  $A(t)$  betrachtet, der folgender Differentialgleichung genügt:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = A(t). \quad (3.2.1)$$

Dabei ist  $x$  der Ort des Massenpunktes des Oszillators.  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  ist eine Systemkonstante, die, wie sich herausstellt, gerade der Systemeigenfrequenz der oszillierenden Lösung der homogenen Differentialgleichung 3.2.1 entspricht. Dabei ist  $k$  die sogenannte Federkonstante der Rückstellkraft des Oszillators und  $m$  die Masse des Massenpunktes.  $\gamma = \frac{\beta}{2m}$  ist ebenfalls eine zur Dämpfung proportionale Systemkonstante, die fortan als Dämpfungskonstante bezeichnet wird. Für die homogene Lösung von 3.2.1 ergibt sich die gedämpfte Oszillation

$$x_h(t) = e^{-\gamma t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) \quad (3.2.2)$$

mit den vom Initialzustand des Systems bei  $t = t_0$  abhängigen Konstanten  $A_{1,2}$ . Für die partikuläre Lösung von 3.2.1 wird sich zunächst noch einmal vergegenwärtigt, dass zur Erstellung der Modulationsantwort des Systems dessen Reaktion auf Ansteuerungen verschiedener Frequenzen untersucht werden soll. Um alle denkbaren Ansteuerungsfrequenzen abzudecken wird ein Spektrum von Oszillatoren um den Zeitpunkt  $t_0$  als treibende Kraft

$$A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(\omega_1) e^{i\omega_1(t-t_0)} d\omega_1 \quad (3.2.3)$$

mit  $\tilde{A}(\omega_1)$  als Fouriertransformierte von  $A(t)$  angesetzt. Um allen Frequenzen der antreibenden Kraft den gleichen Beitrag zuzumessen wird  $\tilde{A}(\omega_1) = \tilde{A} = \text{const.}$  gesetzt. Somit ergibt sich

$$A(t) = \tilde{A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1(t-t_0)} d\omega_1 = 2\pi \tilde{A} \delta(t - t_0). \quad (3.2.4)$$

An dieser Stelle stellt sich bereits die interessante Erkenntnis heraus, dass eine Anregung in der Zeit in Form eines  $\delta$ -Pulses alle Frequenzen enthält. Für die partikuläre Lösung wird ebenfalls ein Oszillatorspektrum

$$x_p(t) = \int X(\omega_1) e^{i\omega_1(t-t_0)} d\omega_1 \quad (3.2.5)$$

angesetzt und 3.2.1 über eine Fouriertransformation gelöst. Für die frequenzabhängige Amplitude der partikulären Lösung ergibt sich

$$X(\omega_1) = \frac{\tilde{A}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma^2\omega_1^2}}. \quad (3.2.6)$$

Da die partikuläre Lösung bei den Anfangsbedingungen  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  wesentlich größer werden kann im Betrag als die homogene Lösung, wird im Folgenden lediglich auf die partikuläre Lösung Bezug genommen. Aus 3.2.6 ist also ersichtlich, dass die Lösung  $x_p(t)$  von der Ansteuerungsfrequenz abhängig ist. Eine wichtige Erkenntnis ist, dass das Oszillatorsystem nicht auf hochfrequente Anregung reagiert, da

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \pm\infty} X(\omega_1) = 0 \quad (3.2.7)$$

gilt, während eine Resonanz des Systems bei

$$\omega_{1,max} = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \quad (3.2.8)$$

vorliegt.

Für  $\omega_1 = 0$  wird das System in jedem Falle der zeitlich konstanten Anregung nachkommen und wird sich in einen Gleichgewichtszustand begeben.  $X(0)$  kann also als Referenzamplitude benutzt werden gegenüber einer Amplitude  $X(\omega_1)$ , mit der das System auf eine Anregung der Frequenz  $\omega_1$  reagiert. Ein kalibriertes Maß für die Intensität der Reaktion eines Systems auf Anregungen der Frequenz  $\omega_1$  in Referenz zu einer zeitlich konstanten Ansteuerung ist also  $\frac{X(\omega_1)}{X(0)}$ . Da dieser Quotient bei vielen Systemen, wie auch bei Lasersystemen, frequenzabhängig Werte über viele Größenordnungen annimmt, ist es sinnvoll dieses Verhältnis logarithmisch darzustellen. Da lediglich der Betrag der Amplitude der Reaktion eines Systems auf Ansteuerungen für dessen Modulationseigenschaften von Interesse ist und  $X(\omega_1)$  im Allgemeinen eine komplexe Größe ist, wird

$$H(\omega_1) := \log_{10} \left( \frac{|X(\omega_1)|}{|X(0)|} \right) \in \mathbb{R} \quad (3.2.9)$$

als normierte Modulationsantwort in der Einheit Bel [B] bezeichnet. Ein Bel sind zehn Dezibel (1 B=10 dB). Abbildung 3.2.1 zeigt die normierten Modulationsantworten des getriebenen harmonischen Oszillators bei Variation der Dämpfung  $\gamma$  in Bell. Es lässt sich gut erkennen, dass bei ausbleibender Dämpfung  $\gamma = 0$  eine Resonanzkatastrophe bei  $\omega_1 = \omega$  vorliegt und dass sich die Modulationsantwort für verschiedene Dämpfungen qualitativ verändert. Ähnliche Ergebnisse werden sich auch für die Modulationsantworten von Lasersystemen in der Ergebnissektion herausstellen, insofern als dass die Amplitude der Antwort eines Lasersystems auf einen periodischen Pumpprozess zu sehr hohen Frequenzen abfällt. Ebenfalls wird sich zeigen, dass auch Resonanzen in den Modulationsantworten von Lasersystemen auftreten können. Dabei gilt es die Ansteuerung zur hochfrequenten und deutlichen Übertragung von Signalen über Lasersysteme im Frequenzbereich der Resonanzen zu vermeiden, da die damit verbundenen großen Intensitätsschwankungen ein Rauschen verursachen, sodass die deutliche Unterscheidung der Zustände 0 und 1 der Laserintensität erschwert würde. Eine wichtige Kenngröße des Systems ist die -3 dB-Frequenz  $\omega_{-3dB}$ . Sie gibt an, ab welcher Frequenz die Amplitude der Antwort



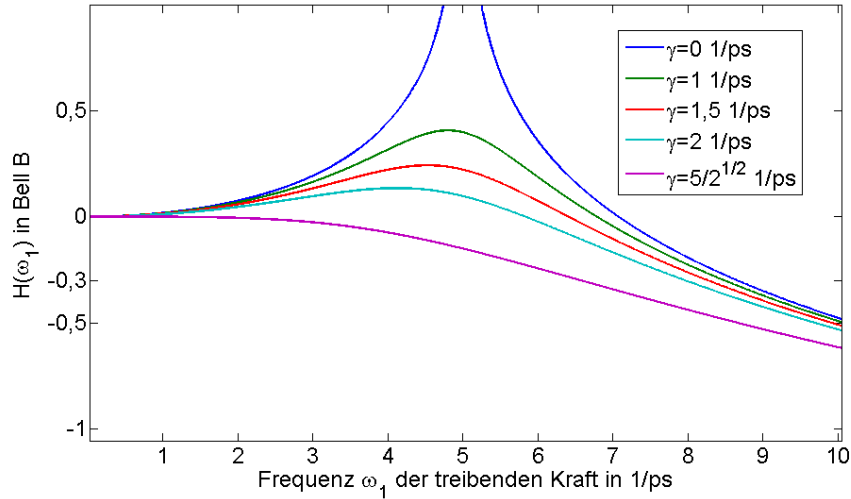


Abbildung 3.2.1: Normierte Modulationsantwort des getriebenen harmonischen Oszillator für verschiedene Dämpfungskonstanten  $\gamma$  und den Parametersatz  $\tilde{A} = 1 \frac{\text{pm}}{\text{ps}^2}$ ,  $\omega = 5 \frac{1}{\text{ps}}$ .

eines Systems  $|X(\omega_1)|$  auf die Hälfte abgefallen ist in Referenz zu der entsprechenden Amplitude  $|X(0)|$  der Reaktion des Systems auf eine zeitlich konstante Ansteuerung mit  $\omega_1 = 0$ . Die Ursache dafür liegt darin, dass aus

$$H(\omega_{-3\text{dB}}) = -0,3 \text{ B} \quad (3.2.10)$$

folgt, dass

$$X(\omega_{-3\text{dB}}) = 10^{-0,3} \cdot X(0) \approx \frac{X(0)}{2}. \quad (3.2.11)$$

Gerade zur Unterscheidung zwischen den zwei Zuständen 0 und 1 eines Lasersystems ist die -3 dB-Frequenz eine wichtige Größe in der Technik [15]. In Abbildung 3.2.1 ist die -3 dB-Frequenz bei -0,3 B auf der vertikalen Achse zu finden. Die -3 dB-Frequenz wurde in Abbildung 3.2.2 für verschiedene Dämpfungskonstanten  $\gamma$  des hier diskutierten Oszillatorsystems aufgenommen. Die Auftragung von  $\omega_{-3\text{dB}}(\gamma)$  über die Dämpfung  $\gamma$  wird auch als -3 dB-Linie bezeichnet. Hier zum Beispiel zeigt sich, dass eine umso höherfrequente kausale Signalübertragung des harmonischen Oszillators ermöglicht wird, je kleiner die Dämpfung  $\gamma$  gewählt wird.

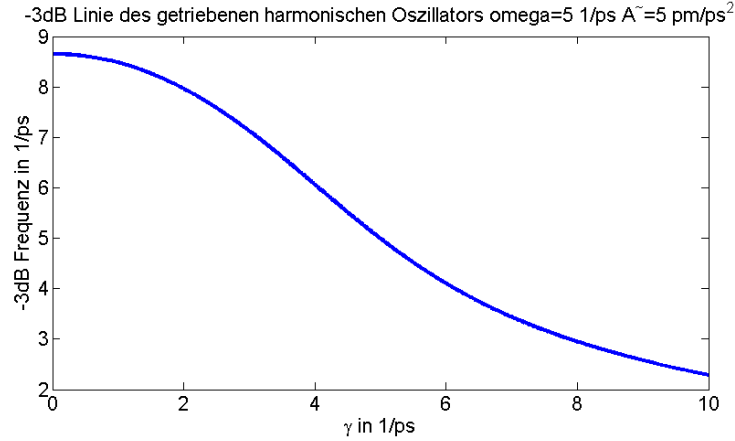


Abbildung 3.2.2: -3 dB-Linie des getriebenen harmonischen Oszillators für variable Dämpfung mit dem Parametersatz  $\tilde{A} = 1 \frac{\text{pm}}{\text{ps}^2}$ ,  $\omega = 5 \frac{1}{\text{ps}}$ .

## 4. Ergebnisse

Das Ergebniskapitel setzt sich zunächst mit dem Zwei-Niveau-System für einen Emittor auseinander. Dabei wird der Einfluss von höheren quantenmechanischen Korrelationen auf die Zeitdynamik des Zwei-Niveau-Systems untersucht. Ferner wird vertieft darauf eingegangen inwiefern sich der in dieser Sektion als Clusterentwicklung bezeichnete Lösungsansatz des Problems dazu eignet die hier behandelten Lasersysteme zu beschreiben. Anschließend werden Lasersysteme mit mehreren Emittoren simuliert. Dabei wird der Einfluss der Emittorzahl auf stationäre Größen des Systems untersucht. Die sich dabei herausstellenden Phänomene erweisen sich als fundierte Diskussionsgrundlage des großen Unterschieds der Modulationseigenschaften zwischen konventionellen, makroskopischen Lasersystemen mit sehr vielen Emittoren und den hier simulierten mikroskopischen Quantenpunktsystemen mit einer geringen Anzahl an Emittoren. In der Diskussion der Modulationseigenschaften dieser beiden gänzlich verschiedenen Vier-Niveau-Emittersysteme wird darüber hinaus auf die mit zunehmender Miniaturisierung der Systeme größer werdende Notwendigkeit eingegangen quantenmechanischen Licht-Materie und Lichtfeld internen Korrelationsfunktionen und nicht-Markovschen Effekten in der Laserdynamik Rechnung zu tragen, indem man deren Beschreibung über die Ratengleichungen aufgibt und anstelle dessen die Clusterentwicklung zur Beschreibung der Systemdynamik verwendet. Dabei sollen auch Anhaltspunkte für die Wahl der Parameter des Systems gegeben werden zur Optimierung der Signalübertragungseigenschaften von Lasersystemen geringer Emittoranzahl.

### 4.1. Die Bewegungsgleichungen des des Zwei-Niveau-Systems in Ein-Elektron-Näherung

Bevor die in der Theorie aufgebauten Grundlagen im Ergebniskapitel angewandt werden, soll noch die Ein-Elektron-Näherung diskutiert werden. Die Idee dieser vereinfachenden Näherung besteht darin in einem betrachteten, diskreten Energieniveausystem lediglich ein einziges Elektron zu simulieren. Die praktische Motivation besteht darin, dass auf diese Weise die Bewegungsgleichungen von Lasersystemen, wie sich im Folgenden zeigen wird, handhabbar rekursiv zu definieren sind, sodass die untersuchten Lasersysteme sehr exakt zu berechnen sind in der Betrachtung für ein einzelnes Emittersystem. Die Simulation mehrerer Elektronen in Quantenpunkten ist nur bedingt möglich und sinnvoll, da die Stärke der Ansteuerung selbst Einfluss auf die Elektron-Loch Paarbildung im Halbleiter nimmt. Die mathematische Konsequenz der Ein-Elektron-Näherung ist, dass jegliche Erwartungswerte von Operatoren, welche zwei oder mehr fermionische Vernichter oder Erzeuger in Folge beinhalten, Null gesetzt werden, da sich

ansonsten nicht zu allen Zeiten genau ein Elektron im System befinden würde. Nichts desto trotz können Erwartungswerte mit mehreren Erzeugen oder Vernichten einen Beitrag zum System beisteuern. Dazu soll das Vorgehen exemplarisch an dem vermeintlich im System zu behandelnden Erwartungswert  $\langle a_\alpha^\dagger a_\beta a_\beta^\dagger a_\alpha \rangle$  veranschaulicht werden. Die in diesem Erwartungswert enthaltene Operatorsequenz ist dabei wie folgt zu interpretieren. Es wird von rechts nach links gelesen. Zunächst wird aus dem Eigenzustand  $|\alpha\rangle$  des Energieniveausystems ein Elektron vernichtet und im Zustand  $|\beta\rangle$  erzeugt. Dann wird das nun in  $|\beta\rangle$  vorhandene Elektron vernichtet und im Zustand  $|\alpha\rangle$  erzeugt. Die Bedingung dafür, dass dieser Erwartungswert nicht verschwindet ist also, dass sich im Systemzustand, auf den der Operator  $a_\alpha^\dagger a_\beta a_\beta^\dagger a_\alpha$  wirkt, ein Elektron im Energieniveau  $|\alpha\rangle$  befindet. Über Auswertung der Kommutatorrelation für Fermionen 2.2.13 erhält man dieses Ergebnis auch gemäß:

$$\langle a_\alpha^\dagger a_\beta a_\beta^\dagger a_\alpha \rangle = \langle a_\alpha^\dagger (1 - a_\beta^\dagger a_\beta) a_\alpha \rangle = \langle a_\alpha^\dagger a_\alpha \rangle - \underbrace{\langle a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger a_\beta a_\alpha \rangle}_{=0}. \quad (4.1.1)$$

Der zweite Summand von 4.1.1 verschwindet, da das Elektron des Systems im Zustand  $|\alpha\rangle$  vernichtet würde und auch im Zustand  $|\beta\rangle$ . Da in Ein-Elektron-Näherung nicht jeweils ein Teilchen in den Zuständen  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  sein kann, muss mindestens einer der Vernichter den Nullvektor erzeugen.

Weiterhin werden alle zur Systembeschreibung verwendeten Erwartungswerte wie in 4.1.1 auf Normalordnung gebracht. Dies bedeutet, dass man alle Erwartungswerte über die Kommutatorrelationen ab 4.4.6 in eine Ordnung bringt, in der von links nach rechts gelesen erst alle Erzeuger in einer Operatorsequenz auftauchen und dann erst die Vernichter. Da Erzeuger und Vernichter verschiedener Teilchensorten immer kommutativ sind, wird verabredet zuerst die bosonischen Operatoren in Normalordnung und dann die fermionischen Operatoren in Normalordnung von links nach rechts als Operatorsequenzen in die Erwartungswerte zu schreiben. Damit können nun die Bewegungsgleichungen der sechs im Systemhamiltonoperator des Zwei-Niveau-Systems

$$H_S = \sum_{i=\alpha,\beta} \epsilon_i n_i + \hbar\omega N + gb\sigma_+ + g^* b^\dagger \sigma_- \quad (4.1.2)$$

vorkommenden Operatoren hingeschrieben werden. Nach 2.4.8 gilt dann:

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_\alpha = \epsilon_\alpha a_\alpha + g b a_\beta, \quad (4.1.3)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_\alpha^\dagger = -\epsilon_\alpha a_\alpha^\dagger - g^* b^\dagger a_\beta^\dagger, \quad (4.1.4)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_\beta = \epsilon_\beta a_\beta + g^* b^\dagger a_\alpha, \quad (4.1.5)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_\beta^\dagger = -\epsilon_\beta a_\beta^\dagger - g b a_\alpha^\dagger, \quad (4.1.6)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} b = \hbar\omega b + g^* a_\beta^\dagger a_\alpha, \quad (4.1.7)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} b^\dagger = -\hbar\omega b^\dagger - g a_\alpha^\dagger a_\beta. \quad (4.1.8)$$

Weiterhin kann durch eine Redefinition der bosonischen Erzeuger und Vernichter gemäß

$$b \rightarrow -ib, \quad b^\dagger \rightarrow ib^\dagger \quad (4.1.9)$$

die Dipolkopplungskonstante

$$g_{ij,\mathbf{k}} \rightarrow ig_{ij,\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}} \mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) \in \mathbb{R} \quad (4.1.10)$$

reell gewählt werden.

Aus den Bewegungsgleichungen der fermionischen und bosonischen Erzeuger und Vernichter, lässt sich bereits erkennen, dass die Bewegungsgleichung eines Operators an Operatoren koppelt, deren Zeitentwicklung selbst nicht bekannt ist. Die Bewegungsgleichungen dieser Operatoren koppeln wiederum an ebenfalls nicht in ihrer Dynamik bekannte Operatoren und es baut sich ein sogenanntes Hierarchieproblem auf. Aus den Bewegungsgleichungen ab Gleichung 4.1.3 werden die Bewegungsgleichungen der mittleren Besetzung der Energieniveaus  $\langle n_i \rangle$ , der mittleren Photonenzahl in der Resonatormode  $\langle N \rangle$  und alle an diese Erwartungswerte koppeln- den Größen berechnet. Durch die Ein-Elektron-Näherung lässt sich das dadurch aufkommende Hierarchieproblem unter Berücksichtigung der Lindblad-Terme auf vier rekursiv definierte Bewegungsgleichungen reduzieren. Sie haben folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\alpha \rangle = & -2g\Psi_n \\ & - n\kappa \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\alpha \rangle \\ & - \gamma \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\alpha \rangle \\ & + P \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\beta \rangle, \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\beta \rangle = & +2g(\Psi_n + \Psi_{n-1}) \\ & - n\kappa \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\beta \rangle \\ & + \gamma \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\alpha \rangle \\ & - P \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\beta \rangle, \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

$$\frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^{n+1} \rangle = (n+1) \left( 2\Psi_n - \kappa \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^{n+1} \rangle \right), \quad (4.1.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^n \sigma_- \rangle = & ig \left( \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^{n+1} n_\alpha \rangle - \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^{n+1} n_\beta \rangle + (n+1) \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_\alpha \rangle \right) \\ & - \frac{(2n+1)\kappa + \gamma + P + 2i\delta}{2} \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^n \sigma_- \rangle, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Weiterhin ist  $\Psi_n := \Im \left( \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^n \sigma_- \rangle \right)$ , wobei  $\Psi_{-1} = 0$  gelten soll in 4.1.12. Die  $\langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^n \sigma_- \rangle$  werden als sogenannte photonenassistierte Polarisationen bezeichnet. Hier ist anzuführen, dass die hier verwendete Dipolkopplungskonstante  $g$  bereits mit  $\hbar$  verrechnet wurde. Das bedeutet, dass nun alle Parameter des Systems  $g, \kappa, \gamma$  und  $P$  die Einheit  $\frac{1}{ps} = \text{GHz}$  haben. Weiterhin ist die Verstimmung

$$\delta = \frac{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta - \hbar\omega}{\hbar}. \quad (4.1.15)$$

Über die rekursiv definierten Gleichungen kann man nun auch rechtfertigen, warum die nicht energieerhaltenden Prozesse aus Schema 2.3.1 in RWA vernachlässigt werden können. Dann würden nämlich zusätzlich Gleichungen wie 4.1.14 in den Systemgleichungen enthalten sein, jedoch nicht mit  $i\delta$  als rein imaginärem Vorfaktor, sondern mit dem Vorfaktor  $i\delta'$  mit

$$\delta' = \frac{\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta + \hbar\omega}{\hbar} \gg \delta. \quad (4.1.16)$$

Diese zusätzlich auftretenden Terme stellen hochfrequent oszillierende Beiträge mit geringer Amplitude in den Lösungen der entsprechenden Bewegungsgleichungen dar, die in RWA vernachlässigt werden.

Hier ist noch zu sagen, dass in allen folgenden, in dieser Arbeit zur Beschreibung von Lasersystemen aufgestellten, Differentialgleichungssystemen nur noch die Imaginärteile der photonenassistierten Polarisationen  $\Psi_n$  betrachtet werden. Im folgenden werden die  $\Psi_n$  dann auch als photonenassistierte Polarisationen bezeichnet.

Man erkennt an den vollständigen Gleichungen zur Beschreibung der Systemdynamik des Zwei-Niveau-Systems, dass das resultierende, Differentialgleichungssystem theoretisch eine unendliche Dimension und keine geschlossene Form besitzt. Im Folgenden sollen in einem Exkurs Methoden zur Lösung dieses Hierarchieproblems vorgestellt und diskutiert werden.

#### 4.1.1. Lösung des Hierarchieproblems über den Abbruch des Differentialgleichungssystems durch Nullsetzung höherer Korrelationen

Zunächst lässt sich das in der vorhergegangenen Sektion hergeleitete Differentialgleichungssystem in Stufen einteilen. So ist ab Gleichung 4.1.11 die  $n$ -te Stufe des Differentialgleichungssystems niedergeschrieben. Den Erwartungswerten lässt sich eine Ordnung zuweisen. Das Kriterium für die Ordnung eines Erwartungswertes, wie sie hier behandelt werden, ist wie viele Operatoren in dessen Operatorsequenz enthalten sind. Zwei fermionische Operatoren werden dabei wie ein bosonischer Operator gezählt. So wird den als Singletts bezeichneten Operatorerwartungswerten  $\langle n_i \rangle$ ,  $\langle b^\dagger \rangle$  und  $\langle \sigma_\pm \rangle$  die Ordnung eins zugeordnet. Sogenannten Dupletts wie  $\langle N \rangle$  oder  $\Psi_0$  wird die Ordnung zwei zugeordnet, Tripletts die Ordnung drei, Quadrupletts die Ordnung vier und so weiter. Operatorerwartungswerte einer hohen Ordnung  $n$  werden als  $n$ -Multipletts oder auch als höhere Korrelationen bezeichnet. Betrachtet man nun die  $(n+1)$ -te Stufe des Differentialgleichungssystems ab 4.1.11, so ist zu bemerken, dass nach der Definition der bosonischen Vernichtungsoperatoren 2.2.7 die Erwartungswerte und entsprechend dann auch ihre Bewegungsgleichungen der Stufe  $n+1$  vollständig verschwinden, für Lichtfeldzustände des Gesamtsystems mit  $n$  oder weniger Photonen in der Resonatormode. Die rein bosonischen Erwartungswerte 4.1.13 verschwinden dabei schon in der Stufe  $n$ . Da man davon ausgehen kann, dass sich weniger als unendlich viele Photonen in der Resonatormode eines realen Lasersystems befinden, kann man immer eine obere Grenze  $n$  für die maximale Photonenzahl des resonanten Lichtfeldes finden, unter der sich die gesamte Laserdynamik abspielt. Durch das Nullsetzen von Operatoren mit mehr als  $n$  bosonischen Vernichtern in Folge kann das Differentialgleichungssystem geschlossen werden. Man kann sich vorstellen, dass die Berechnung der Lösung des Differentialgleichungssystems zur Beschreibung der Laserdynamik beginnend ab Gleichung 4.1.11 für sehr hoch angesetzte obere Grenzen  $n$  sehr genaue Ergebnisse liefert, weshalb diese als Abbruch des linearen Differentialgleichungssystems bekannte Methode auch als exakte Lösung bezeichnet wird.

#### 4.1.2. Faktorisierung von Erwartungswerten in Clusterentwicklung

Eine weitere Möglichkeit zur Schließung eines an höhere Erwartungswerte koppelnden Differentialgleichungssystems, wie in den Gleichungen beginnend von 4.1.11, ist die Methode der Faktorisierung von Erwartungswerten der Ordnung  $N$  in Erwartungswerte der Ordnung 1 bis

$N - 1$ , deren Zeitentwicklungen aus den vorhergegangenen Differentialgleichungen bekannt sind. Dazu überzeuge man sich zunächst davon, dass es sich bei höheren Erwartungswerten wie zum Beispiel  $\langle b^\dagger b n_\alpha \rangle$  um Erwartungswerte handelt, welche sich aus Verbundwahrscheinlichkeiten

$$\langle b^\dagger b n_\alpha \rangle = \sum_{n,m} p_{nm} n m \quad (4.1.17)$$

berechnen lassen, wobei  $p_{nm}$  gerade die Verbundwahrscheinlichkeit darstellt,  $n$  Photonen in der Resonatormode und gleichzeitig  $m$  Elektronen im Energieniveau  $|\alpha\rangle$  vorzufinden. Im Allgemeinen beeinflusst die Messung eines Ereignisses, wie zum Beispiel  $n$  Photonen in der Resonatormode vorzufinden, die Wahrscheinlichkeit  $m$  Elektronen im Niveau  $|\alpha\rangle$  vorzufinden. Diese Tatsache kann man sich auch leicht durch die Kopplung der Differentialgleichungen für die Besetzung in  $|\alpha\rangle$   $\langle n_\alpha \rangle$  und der mittleren Photonenzahl  $\langle b^\dagger b \rangle$  klar machen. In einem solchen Falle spricht man von korrelierten Wahrscheinlichkeiten. Diese zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich nicht aus einem funktionalen Zusammenhang der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse als unabhängige Variablen berechnen lassen. Im einfachsten Fall wäre dies das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Teilereignisse. Nun lassen sich Korrelationsfunktionen für Verbundwahrscheinlichkeiten definieren, welche gerade die durch Korrelation bedingten Anteile einer Verbundwahrscheinlichkeit darstellen. Es lässt sich also o.B.d.A. für die Verbundwahrscheinlichkeit  $p_{nm}$  zweier korrelierter Ereignisse  $n$  und  $m$

$$p_{nm} = p_n p_m + \delta p_{nm} \quad (4.1.18)$$

schreiben, wobei  $\delta p_{nm}$  als Korrelationsfunktion der Verbundwahrscheinlichkeit  $p_{nm}$  bezeichnet wird und die Abweichung der Verbundwahrscheinlichkeit  $p_{nm}$  zur faktorisierten Wahrscheinlichkeit  $p_n p_m$  darstellt. Folglich kann man schreiben:

$$\langle b^\dagger b n_\alpha \rangle = \delta \langle b^\dagger b \rangle \delta \langle n_\alpha \rangle + \delta \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle \quad (4.1.19)$$

$$\text{mit } \delta \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle = \sum_{n,m} \delta p_{nm} n m, \quad (4.1.20)$$

$$\text{wobei } \delta \langle b^\dagger b \rangle = \langle b^\dagger b \rangle, \quad \delta \langle n_\alpha \rangle = \langle n_\alpha \rangle. \quad (4.1.21)$$

Die Teilchenzahloperatoren lassen sich hier nicht mehr weiter faktorisieren, da zum einen für Fermionen des Systems Teilchenzahlerhaltung auf Grund der Ein-Elektron-Näherung gilt ( $\langle a_i^\dagger \rangle = \langle a_i \rangle = 0$ ) und zum anderen in Kapitel 2.3.5 verabredet wurde, dass die hier betrachteten Systeme inkohärent gepumpt werden ( $\langle b^\dagger \rangle = \langle b \rangle = 0$ ). Somit stellen die Teilchenzahloperatoren und darüber hinaus auch die photonenassistierte Polarisierung  $\Psi_0$  ihre eigenen Korrelationsfunktionen dar. Die Korrelationsfunktionen dieses Kapitels (mit vorangestelltem  $\delta$  gekennzeichnet) sind nicht mit allgemeinen Korrelationen zu verwechseln, welche in dieser Arbeit nicht klassische Erwartungswerte bezeichnen wie  $\langle b^\dagger b n_\alpha \rangle$ . Prinzipiell kann man jedem funktionalen Zusammenhang mit den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse als unabhängige Variablen eine Korrelationsfunktion zuordnen. Um die Stabilität eines mit dieser Methode zu schließenden Differentialgleichungssystems zu gewährleisten und valide Ergebnisse zu erwarten, muss jedoch sichergestellt werden, dass die Korrelationsfunktionen hinreichend klein werden. Die Methode der Faktorisierung „erlaubt“ als solchen funktionalen Zusammenhang jede Linearkombination von Produkten von Erwartungswerten, welche sich aus Operatoren zusammensetzen, die in dem zu faktorisierenden Erwartungswert vorkommend sind. Um den Gedanken 4.1.19 für höhere Erwartungswerte fortzuführen, mit dem Ziel eine möglichst gute Approximation für Erwartungswerte der Ordnung  $N$  im Sinne einer Faktorisierung aus Erwartungswerten niedrigerer Ordnung zu erhalten, muss das  $N$ -Multipllett in alle erdenklichen Partitionen zerlegt werden, welche  $N - 1$ -Multipllett- bis hin zu Singlettkorrelationsfunktionen enthalten [12, 9]. So zerlegt sich in Clusterentwicklung beispielsweise ein Quadruplett  $\langle 4 \rangle$  schematisch wie folgt in Singlett- bis Triplettkorrelationsfunktionen:

$$\langle 4 \rangle = \delta \langle 1 \rangle^4 + \delta \langle 1 \rangle \delta \langle 3 \rangle + \delta \langle 2 \rangle^2 + \delta \langle 1 \rangle^2 \delta \langle 2 \rangle + \delta \langle 2 \rangle \delta \langle 2 \rangle + \delta \langle 4 \rangle. \quad (4.1.22)$$

Da Gleichung 4.1.22 keine Aussage über die innere Struktur der Korrelationsfunktionen tätigt, wird im Folgenden ein Erwartungswert auf Triplett-niveau im Detail zerlegt. Dabei seien  $A, B, C$  jeweils Operatoren, deren Hinzufügung an eine Operatorsequenz die Ordnung des entsprechenden Erwartungswertes wie bosonische Operatoren um eins erhöhen würden. Dann gilt [9]:

$$\begin{aligned}\langle ABC \rangle = & \delta \langle A \rangle \delta \langle B \rangle \delta \langle C \rangle + \delta \langle AB \rangle \delta \langle C \rangle \\ & + \delta \langle AC \rangle \delta \langle B \rangle + \delta \langle A \rangle \delta \langle BC \rangle \\ & + \delta \langle ABC \rangle.\end{aligned}\tag{4.1.23}$$

Dabei ist es wichtig darauf zu achten die Reihenfolge der Operatoren innerhalb einer Korrelationsfunktion beizubehalten, da die Operatoren im Allgemeinen nicht kommutativ sind. Anschaulich kann die Faktorisierung von 4.1.23 auch in Worte gefasst werden, wenn man sich klar macht, dass die Korrelationsfunktionen konditionale Wahrscheinlichkeiten repräsentieren, dass zwei oder mehrere Teilereignisse im Gesamtereignis eintreten. Es kann konstatiert werden, dass sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Teilereignisse  $A, B$  und  $C$  eintreten  $P(ABC)$ , näherungsweise zusammensetzt aus der Wahrscheinlichkeit, dass Teilereignis  $A$  sowie  $B$  sowie  $C$  stattfinden  $P(A)P(B)P(C)$  sowie der Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $A$  und  $B$  stattfindet sowie das Ereignis  $C$  stattfindet  $P(AB)P(C)$  und so weiter. Es kann gezeigt werden, dass der hier verwendete Algorithmus zur Faktorisierung für höhere Erwartungswerte zur exakten Lösung konvergiert unter der Vernachlässigung der, dem faktorisierten Erwartungswert zugehörigen, Korrelationsfunktion [9]. Quadrupletts oder höhere Multipletts im Detail allgemein zu faktorisieren ist sehr aufwendig, jedoch lassen sich die speziell in dieser Arbeit zu faktorisierenden Erwartungswerte recht simpel faktorisieren, da abgesehen von den fermionischen Teilchenzahloperatoren alle Singletts und damit auch deren Korrelationsfunktionen verschwinden. Ebenfalls verschwinden alle Erwartungswerte und deren Korrelationsfunktionen, deren Anzahl an vorkommenden Systemenergie steigernden Operatoren nicht der Anzahl an im Erwartungswert vorkommenden Systemenergie senkenden Operatoren entspricht. So faktorisieren sich beispielsweise die Erwartungswerte  $\langle b^\dagger b n_\alpha \rangle$ ,  $\langle b^\dagger b^\dagger b b n_\alpha \rangle$  oder  $\langle b^\dagger b^\dagger b^\dagger b b b n_\alpha \rangle$  unter Vernachlässigung der zugehörigen Korrelationsfunktionen in Clusterentwicklung wie folgt:

$$\langle b^\dagger b n_\alpha \rangle \approx \langle b^\dagger b \rangle \langle n_\alpha \rangle,\tag{4.1.24}$$

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger b^\dagger b b n_\alpha \rangle \approx & 2 \left( \delta \langle b^\dagger b \rangle \right)^2 \delta \langle n_\alpha \rangle + \delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle \delta \langle n_\alpha \rangle + 4 \delta \langle b^\dagger b \rangle \delta \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle \\ = & -4 \left( \langle b^\dagger b \rangle \right)^2 \langle n_\alpha \rangle + \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle \langle n_\alpha \rangle + 4 \langle b^\dagger b \rangle \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle,\end{aligned}\tag{4.1.25}$$

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger b^\dagger b^\dagger b b b n_\alpha \rangle \approx & \langle b^\dagger b^\dagger b^\dagger b b b \rangle \langle n_\alpha \rangle + 9 \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle \\ & - 18 \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle \langle b^\dagger b \rangle \langle n_\alpha \rangle + 9 \langle b^\dagger b \rangle \langle b^\dagger b^\dagger b b n_\alpha \rangle \\ & + 36 \langle b^\dagger b \rangle^3 \langle n_\alpha \rangle - 36 \langle b^\dagger b \rangle^2 \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle.\end{aligned}\tag{4.1.26}$$

Die Ordnung eines Differentialgleichungssystems in Clusterentwicklung ist um eins geringer als die Ordnung der faktorisierten Erwartungswerte. Bei einer Faktorisierung der Erwartungswerte 4.1.25 spricht man von einer Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau. Von einer Clusterentwicklung auf Hexdruplettniveau wird gesprochen wenn gemäß 4.1.26 faktorisiert wird. Die völlige Vernachlässigung von Photon-Photon und Elektron-Photon Korrelationsfunktionen 4.1.24 wird als semiklassische Näherung bezeichnet, da das daraus resultierende Differentialgleichungssystem auch hergeleitet werden könnte, indem man das Lichtfeld klassisch beschreibt und die Laserintensität als Betragsquadrat der Amplitude des elektrischen Feldes  $|\mathbf{E}|^2$  anstelle von  $\langle b^\dagger b \rangle$  schreibt. Allen dann noch im Differentialgleichungssystem vorkommenden Größen könnte dann ein klassisches Pendant zugeordnet werden.

Es ist noch zu sagen, dass durch den Wegfall höherer Elektron-Photon Korrelationsfunktionen  $\delta \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_i \rangle$  und Photon-Photon Korrelationsfunktionen  $\delta \langle (b^\dagger)^n (b)^n \rangle$  nach dem Algorithmus

der Clusterentwicklung alle Erwartungswerte des Systems festgelegt sind durch Erwartungswerte bis zur Ordnung der Clusterentwicklung.

Abschließend ist noch festzuhalten, dass die Faktorisierung in dieser Arbeit lediglich auf geradem Multiplettniveau stattfindet. Alternativ wäre es auch möglich höhere Polarisierungen wie  $\langle b^\dagger b b \sigma_+ \rangle$  zu faktorisieren. Es stellt sich jedoch heraus, dass aus der Faktorisierung von Polarisierungen resultierende Differentialgleichungssysteme numerisch instabile Lösungen besitzen. Eine Ursache dafür könnte sein, dass die Clusterentwicklung durch die Faktorisierung von höheren Polarisierungen auf einem ungeraden Multiplettniveau stattfinden würde. Jeder Polarisation kann jedoch ein rein bosonischer Erwartungswert des Gleichungssatzes 4.1.13 der selben Ordnung zugeordnet werden, der zur Schließung des jeweiligen Differentialgleichungssystems nicht zwangsläufig faktorisiert werden muss. Das Auftreten von Erwartungswerten der selben Ordnung in linearer und nichtlinearer, faktorisierter Form in den hier betrachteten Differentialgleichungssystemen führt offensichtlich zu numerischer Instabilität und wird daher in dieser Arbeit vermieden.

#### 4.2. Notwendigkeit der Berücksichtigung höherer Korrelationen in den Lasergleichungen am Beispiel des Zwei-Niveau-Systems mit einem Emitter

Auf der Grundlage des rekursiv definierten Differentialgleichungssystems beginnend ab Gleichung 4.1.11 wird das inkohärent gepumpte Zwei-Niveau-System als Abstraktion des Vier-Niveau-Systems in seiner Zeitentwicklung für verschiedene Parametersätze berechnet. Dazu wurden die Zeitentwicklungen von Erwartungswerten hinreichend großer Ordnung Null gesetzt. Speziell für die Erstellung der Grafiken der Abbildung 4.2.1 ist es ausreichend das oben genannte Differentialgleichungssystem bis zur zweiten Stufe zu berechnen und alle Erwartungswerte höherer Ordnung Null zu setzen. Die beiden oberen Grafiken der Abbildung 4.2.1 zeigen ein konservatives und unverstimmtes ZNS in seiner Zeitentwicklung. Es ist gut zu erkennen, dass mit dem Abbau der Besetzung im oberen Energieniveau  $|\alpha\rangle$  die Photonenzahl  $\langle N \rangle$  für verschiedene Ausgangszustände steigt. Weiterhin zeigt sich, dass die Systemdynamik oszillierend ist und keinen stationären Zustand erreicht. Dies wird auch als das Phänomen der Rabioszillation bezeichnet. Auch hat sich bei der Auswertung gezeigt, dass im konservativen Fall alle Erwartungswerte mit mehr bosonischen Operatoren als der sich maximal einstellenden mittleren Photonenzahl entsprechen für alle Zeiten Null sind und somit höhere Korrelationen ab einer bestimmten Ordnung keinen Einfluss auf das konservative ZNS haben.

Dasselbe zeigt sich für den verstimmten Fall unten links im Bild mit dem Unterschied, dass nicht mehr vollständige Besetzungsinversion gegenüber dem Ausgangszustand erreicht wird und die Photonenzahl mit entsprechend geringerer Amplitude oszilliert. Hier kann die Ein-Moden-Resonanz begründet werden, da das ZNS mit stärker werdender Verstimmung weniger mit Lichtmoden wechselwirkt. Da beim Vier-Niveau-System ebenfalls nur zwei Energieniveaus mit dem Lichtfeld wechselwirken, begründet sich die Ein-Moden-Resonanz auch für eine Nanokavität eines Vier-Niveau-Lasers. Bei sehr starken Verstimmungen bleiben die Besetzungen und die Photonenzahl in ihren Ausgangszuständen. Interessant ist die Zeitentwicklung des ZNS unter dissipativem Einfluss unten rechts im Bild. Sie zeigt die Einstellung eines stationären Zustandes des

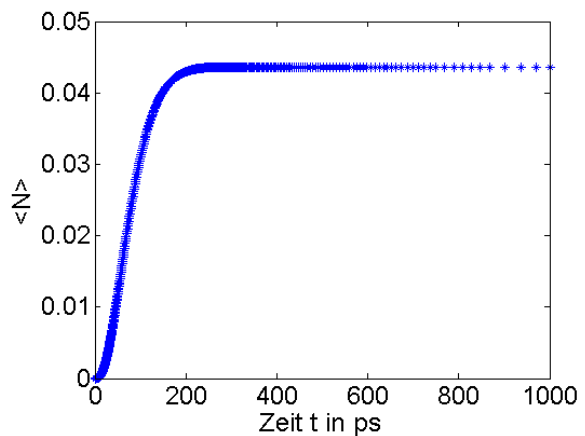


Abbildung 4.2.2: Einstellung einer stationären Photonenzahl  $\langle N \rangle$  in der Zeit für  $10g = \kappa = \gamma = P = 0,01 \frac{1}{\text{ps}}$ .



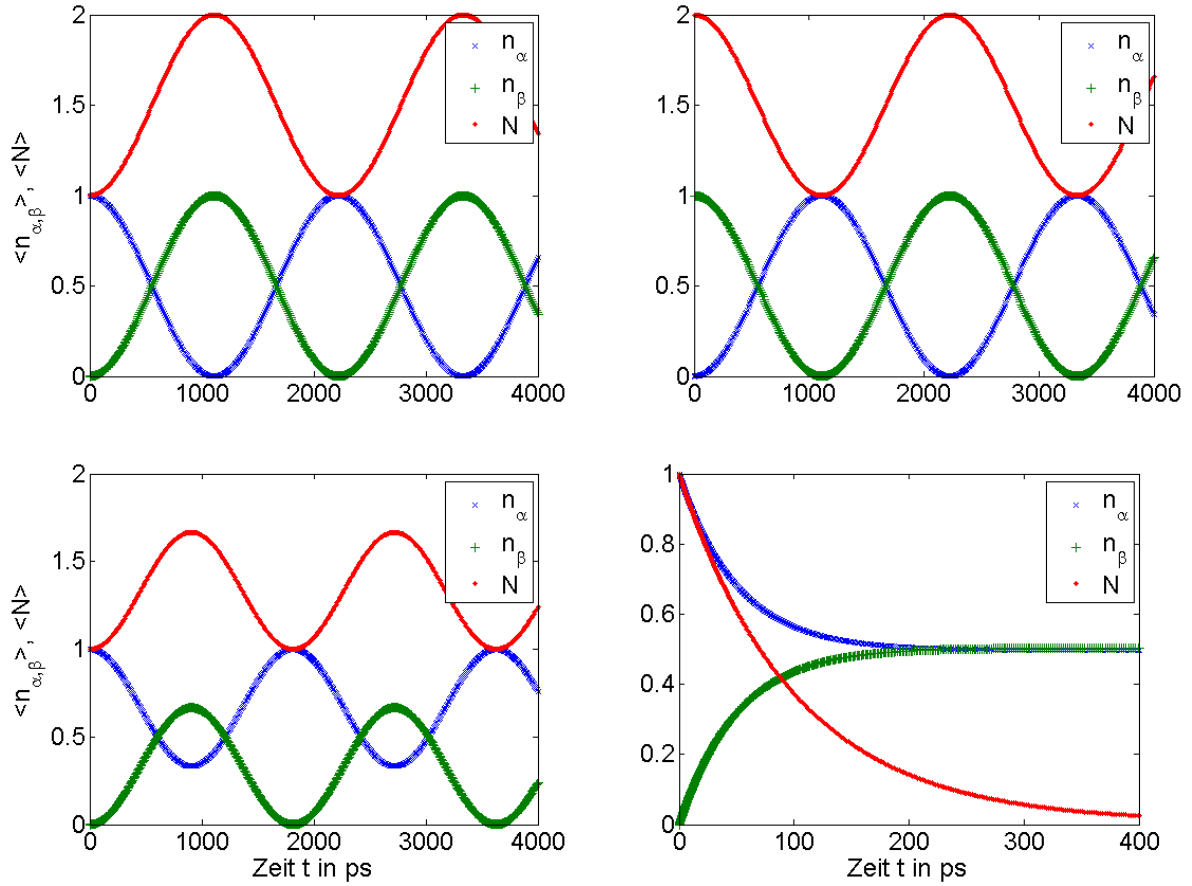


Abbildung 4.2.1: Zeitentwicklung der Besetzungen  $\langle n_{\alpha,\beta} \rangle$  und der mittleren Photonenzahl  $\langle N \rangle$  für konservative, unverstimmte Systeme (oben rechts und links) bei verschiedenen Ausgangszuständen. Unten links wird die Zeitentwicklung eines um  $|\delta| = 0,02 \frac{1}{\text{ps}}$  verstimmten ZNS gezeigt und unten rechts die Zeitentwicklung eines ZNS unter dissipativen Einflüssen ( $10g = \kappa = \gamma = P = 0,01 \frac{1}{\text{ps}}$ ).

ZNS. Es zeigt sich, dass für jegliche Anwesenheit von dissipativen Effekten das System einen stationären Zustand erreicht. Dieser wird von den Parametern gesteuert. So zeigt sich beispielsweise, dass sich die Besetzungen der Niveaus in der unteren rechten Grafik beim Wert  $\frac{1}{2}$  treffen. Dies ist damit zu erklären, dass sich wegen  $(\gamma = P)$  Energieverluste und -zufuhr gerade aufwiegen. Außerdem fällt auf Grund der Resonatorverluste  $\kappa$  die Photonenzahl auf sehr kleine Werte ab. Es stellt sich heraus, dass der stationäre Zustand, wenn er vorliegt, unabhängig vom Ausgangszustand des Systems ist. So zeigt Abbildung 4.2.2 für den selben Parametersatz wie das dissipierende System aus Abbildung 4.2.1 die Einstellung einer nicht verschwindenden aber kleinen stationären mittleren Photonenzahl für einen anderen Initialzustand des Systems mit Null Photonen. Darüber hinaus stellt man fest, dass bei weiterer Erhöhung der Ordnung des Differentialgleichungssystems sich die Lösungen nicht mehr signifikant ändern, die Lösung also konvergiert. Die Methode des Abbruchs des Differentialgleichungssystems ab einer festen, hinreichend großen Ordnung ist also erfolgreich um Lasersysteme mit einem Emitter zu berechnen. Dabei ist eine wichtige Größe zur Abschätzung der Anzahl der zu berücksichtigenden Differentialgleichungen die mittlere Photonenzahl im stationären Zustand. Da nach der Theorie thermisches Licht einer Bose-Einstein-Verteilung und kohärentes Licht einer Poissonverteilung folgt, sollten wesentlich höhere Photonenzahlen als die mittlere Photonenzahl eines Systems sehr unwahrscheinlich sein und kaum zum Ergebnis beitragen. Dies ist eine wichtige Erkenntnis zur

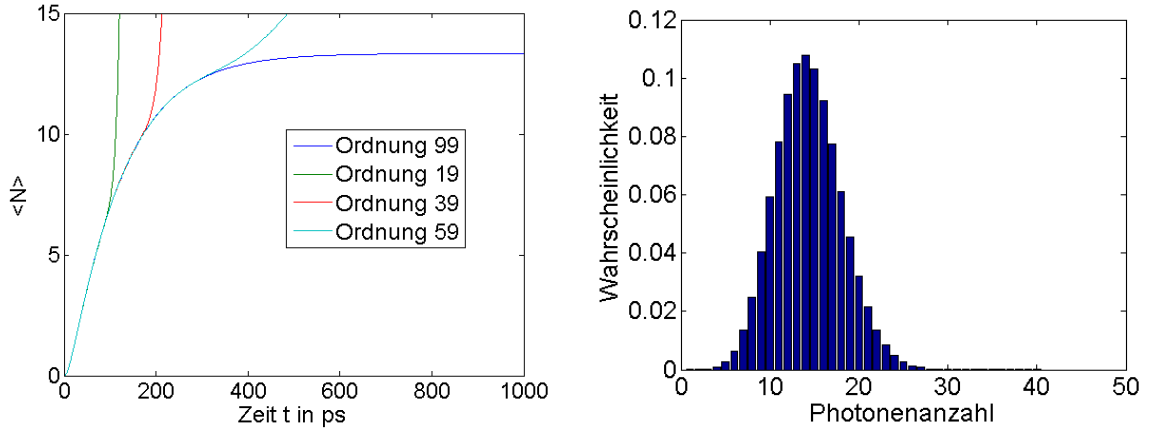


Abbildung 4.2.3: Die linke Grafik zeigt das Konvergenzverhalten der Lösung für die mittlere Photonenzahl in der Zeit für verschiedene Multipllett-Ordnungen des das System beschreibenden Differentialgleichungssystems. Rechts ist die zugehörige Photonenzahlstatistik im stationären Zustand nach  $t = 1$  ns. Der verwendete Parametersatz für starke Kopplung ist  $g = 10\kappa = 10\gamma = 0,1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $P = 0,3 \frac{1}{\text{ps}}$ .

Erstellung der Photonenzahlstatistiken. Zur Überprüfung dieser Vermutung zeigt Abbildung 4.2.3 das Konvergenzverhalten für ein stark gekoppeltes ZNS ( $g > \kappa, \gamma$ ) mit einer mittleren Photonenzahl im stationären Fall von  $\langle N \rangle \approx 14$  zusammen mit der Photonenzahlstatistik für den stationären Fall. Die linke Seite der Abbildung 4.2.3 zeigt die Lösungen des dem ZNS zugehörigen Differentialgleichungssystems unter Berücksichtigung verschieden hoher Multipllett-Ordnungen. Um auf die maximal zulässige Photonenzahl des Systems aus der Ordnung des Differentialgleichungssystems zurück zu schließen, addiert man eins auf die Ordnung und dividiert das Ergebnis durch zwei. So lässt sich erkennen, dass sich eine zuverlässige Lösung ab einer Obergrenze der maximalen Photonenzahl im System von 50 Photonen einstellt. Aus der zugehörigen Photonenzahlstatistik kann man erlesen, dass sich die Systemdynamik im wesentlichen unter dieser Grenze bewegt. Diese Erkenntnis stützt die Theorie, dass sehr viel höhere Korrelationen, als der mittleren Photonenzahl entsprechen, keine Einflüsse mehr auf das System nehmen. Darüber hinaus erkennt man, dass die über die Methode des Abbruchs des linearen Differentialgleichungssystems durch Nullsetzung höherer Korrelationen berechnete Photonenzahlstatistik eine Poissonverteilung der Photonenzahl zeigt. Dies trifft eine Aussage über die statistischen Eigenschaften des emittierten Laserlichtes. Die Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  sollte sich folglich um eins bewegen. Dazu zeigt die Grafik 4.2.4 den zeitlichen Verlauf der Photonenzahlstatistik sowie den zu diesem Parametersatz zugehörigen Verlauf der Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  und darüber hinaus wird auch der zeitliche Verlauf der Energieniveaubesetzung gezeigt. Die Photonenzahlstatistik zeigt deutlich den Übergang von einer sub-poissonischen Verteilung der Photonenzahl einer nicht klassischen Lichtquelle zu einer poissonischen Verteilung der Photonenzahl. Diese Beobachtung deckt sich auch mit der rapide auf eins anwachsenden Autokorrelationsfunktion in Abbildung 4.2.4. Darüber hinaus erkennt man deutlich durch Verfolgung des maximalen Wertes der Photonenzahlstatistik in der Zeit den Verlauf der mittleren Photonenzahl aus Abbildung 4.2.3 wieder. Weiterhin wurde ergänzend in Abbildung 4.2.4 der zeitliche Verlauf der Besetzungen  $\langle n_{\alpha,\beta} \rangle$  der Energieniveaus des ZNS dargestellt. Man kann erkennen, dass im stationären Zustand das obere Energieniveau  $|\alpha\rangle$  stärker als  $|\beta\rangle$  besetzt ist. Die Besetzungsinversion ist der Tatsache geschuldet, dass die Verluste des ZNS  $\gamma$  von der starken, inkohärenten Energiezufuhr  $P$  überkompensiert werden ( $P \gg \gamma$ ). Bisher wurde das ZNS mit der Methode des Abbruchs des linearen Differentialgleichungssystems in seiner zeitlichen Entwicklung untersucht und Abbruchskriterien für diese Methode her-

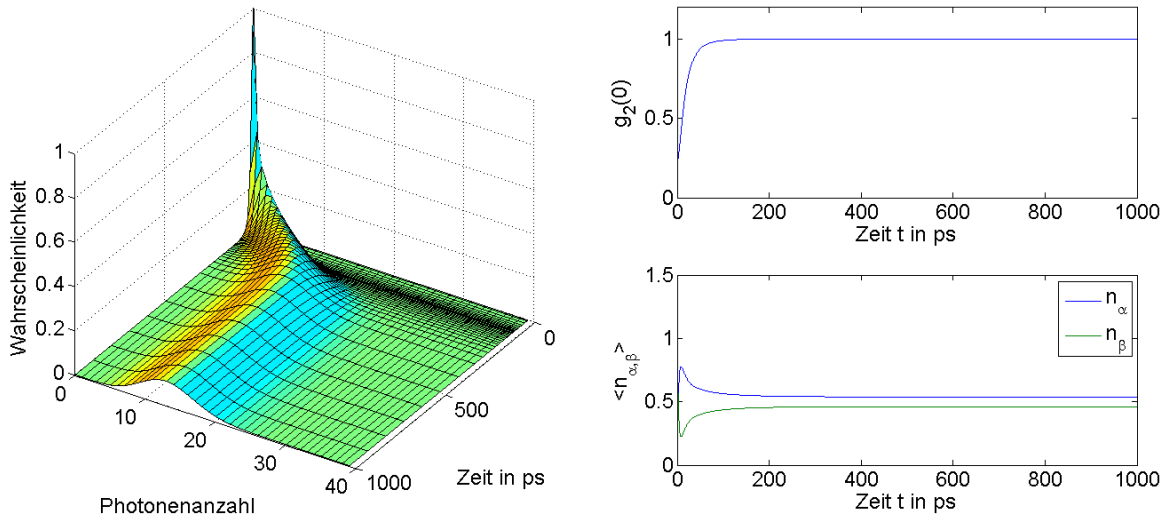


Abbildung 4.2.4: Links ist der zeitliche Verlauf der Photonenstatistik eines ZNS zu sehen. Das rechte obere Bild zeigt den zeitlichen Verlauf der Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$ . Ergänzend zeigt die Grafik unten rechts den zeitlichen Verlauf der Besetzung der Energieniveaus. Der verwendete Parametersatz ist  $g = 10\kappa = 10\gamma = 0,1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $P = 0,3 \frac{1}{\text{ps}}$ .

ausgestellt um konsistente physikalische Ergebnisse zu erhalten. Dabei hat sich herausgestellt, dass sich diese Methode dazu eignet Zwei-Niveau-Systeme unter Berücksichtigung hinreichend vieler Bewegungsgleichungen des Systems in ihrer Zeitentwicklung zu berechnen. Dieses Resultat wurde im Rahmen der Auswertung auch für das später diskutierte Vier-Niveau-System ermittelt. Wie sich in Abbildung 4.2.3 zeigt, ist bereits für die Berechnung von Systemen mit recht niedrigen stationären mittleren Photonenzahlen ein recht großer numerischer Aufwand zu tätigen, auf Grund der hohen Dimension der zu lösenden Differentialgleichungssysteme. Die Clusterentwicklung auf niedrigem Niveau ist in der Regel mit einem wesentlich geringeren Rechenaufwand verbunden als die exakte Lösung. Der Wegfall höherer Korrelationsfunktionen und der damit einhergehende Fehler für die Berechnung von Erwartungswerten hoher Ordnung soll im Folgenden in der Untersuchung des stationären Zustandes eines ZNS in der Pumprate näher beleuchtet werden. Dazu werden die exakte Lösung und die Lösung in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau miteinander in der nachfolgenden Sektion verglichen. Das zentrale Ergebnis dieser Sektion ist, dass die Berücksichtigung höherer quantenmechanischer Korrelationen in den Bewegungsgleichungen des ZNS unerlässlich ist zur konsistenten Behandlung des Problems und dass die Lösungen des Lasersystems mit der Ordnung der in den Rechnungen berücksichtigten Korrelationen konvergieren. Dies ergab sich im Rahmen der Auswertungsarbeiten auch für das hier nicht dokumentierte Vier-Niveau-System.

### 4.3. Vergleich der exakten Lösung mit der Clusterentwicklung für das Zwei-Niveau-System mit einem Emitter

In dieser Sektion findet eine Untersuchung der Clusterentwicklung statt. Es wird dabei im Vergleich zur exakten Lösung der rekursiv definierten Lasergleichungen, welche Korrelationen sehr hoher Ordnung berücksichtigen, ermittelt welche Größen des hier betrachteten einatomaren Zwei-Niveau-Systems wie genau durch die Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau wiedergegeben werden. Darüber hinaus wird auch das Verhalten stationärer Größen des Zwei-Niveau-Systems für einen Emitter in der Pumprate untersucht.

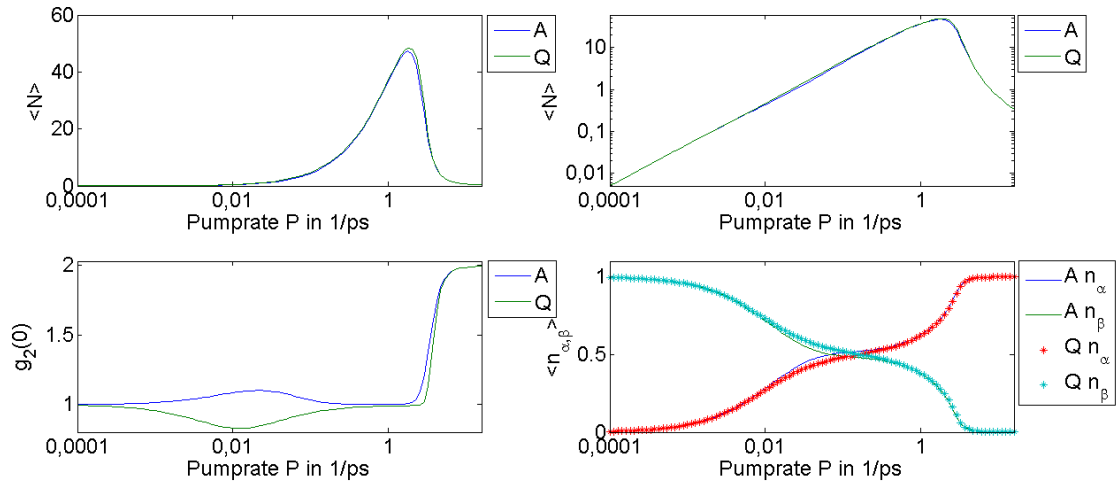


Abbildung 4.3.1: Die beiden oberen Grafiken zeigen die stationäre mittlere Photonenzahl  $\langle N \rangle$ ; links in linearer Auftragung und rechts in logarithmischer Auftragung über der logarithmisch aufgetragenen Pumprate  $P$ . Die doppellogarithmische Auftragung der Photonenzahl über der Pumprate wird Laserkennlinie genannt. In Industrie und Technik sind Laserkennlinien zur Charakterisierung und Einordnung von Lasersystemen von großer Bedeutung. Links unten erkennt man die stationäre Autokorrelationsfunktion des Systems über der Pumprate und unten rechts sieht man die stationäre Besetzung des ZNS über der Pumprate. Die Bildlegende A kennzeichnet die Lösung des Differentialgleichungssystems über die Methode des Abbruchs und die Bildlegende Q kennzeichnet die Lösung des analogen Differentialgleichungssystems in Quadruplettordnung. Der Parametersatz ist  $g = 10\kappa = 10\gamma = 0,1 \frac{1}{\text{ps}}$ .

Abbildung 4.3.1 offenbart interessante Erkenntnisse über die Natur von Zwei-Niveau-Systemen und es zeigt sich auf den ersten Blick, dass die exakte Berechnung des ZNS sich weitestgehend mit der Lösung des Systems in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau deckt. Die Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau wurde benutzt, weil das Quadruplettniveau die niedrigste Ordnung ist, auf dem die hier betrachteten Differentialgleichungssysteme abgebrochen werden können und eine nicht triviale Berechnung von  $g_2(0)$  ermöglicht wird. Die Photonenzahl steigt mit stärker werdender Energiezufuhr über den Pumpprozess  $P$  stark an. In dieser Phase im Bereich von  $P \in [10^{-4}, 10^0] \frac{1}{\text{ps}}$  emittiert das Lasersystem nahezu kohärentes Licht ( $g_2(0) \approx 1$ ). Bei  $P \approx 0,01 \frac{1}{\text{ps}}$  zeigen sich im Verlauf der Autokorrelationsfunktion die größten Unterschiede zwischen der exakten Lösung und der Berechnung in Clusterentwicklung. Während dort die exakte Lösung dem System einen leicht super-poissonischen Charakter zuspricht, weicht die Autokorrelationsfunktion der Clusterentwicklung in diesem Bereich zu leicht sub-poissonischen Werten ab. Jedoch ist der maximale Fehler der beiden Verläufe der Autokorrelationsfunktion recht klein im Gegensatz zu den absoluten Werten von  $g_2(0)$  in diesem Pumpbereich und die Abweichungen vom Wert eins der Lösungen sind auch recht gering, sodass man von kohärenter Lichtemission sprechen kann. Während dessen wird die Besetzung des ZNS mit steigender Pumprate invertiert und die mittlere Photonenzahl steigt. Wird das ZNS nun weiter angeregt, in dem die Pumprate  $P$  noch weiter erhöht wird, so lässt sich ein Einbruch in der Photonenzahl verzeichnen. Indes geht das Lasersystem, wie man am Verlauf der Autokorrelationsfunktion erkennen kann, aus dem Zustand der kohärenten Emission in den thermischen Zustand über mit  $g_2(0) = 2$ . In diesem Systemzustand liegt vollständige Besetzungsinversion vor. Der Abfall der mittleren Photonenzahl und der damit einhergehende Übergang in den thermischen Zustand

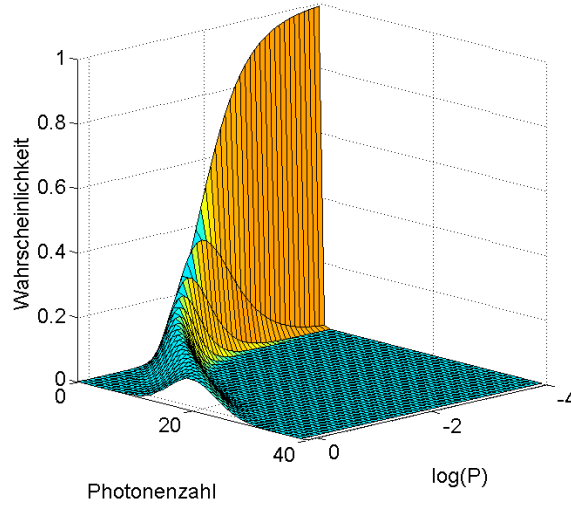


Abbildung 4.3.2: Photonenstatistik eines stark gekoppelten ZNS in der Pumprate  $P$  in  $\frac{1}{ps}$  deren dekadischer Logarithmus auf der x-Achse der Grafik aufgetragen ist. Der Parametersatz ist  $g = 10\kappa = 10\gamma = 0,1 \frac{1}{ps}$ .

der Resonatormode sind gut untersucht und werden als Quenching bezeichnet. Die physikalische Ursache dessen liegt in der starken Dephasierung der Systemdynamik bei sehr starken Pumpraten. Man kann sich vorstellen, dass sehr hohe Pumpraten das ZNS in den angeregten Zustand zwingen und die Relaxation in den Grundzustand und somit die stimulierte Emission verhindern. Mathematisch begründet sich das Phänomen des Quenchings durch die zur Pumprate  $P$  proportional induzierte Dämpfung der photonenassistierten Polarisierung in Gleichung 4.1.14, welche den Übergangsterm für den photonenerzeugenden Teilchenaustausch der Energieniveaus  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  in den Gleichungen 4.1.11 und 4.1.12 darstellt. Die aus Abbildung 4.3.1 entnommenen Informationen decken sich mit der in Abbildung 4.3.2 aufgenommenen Photonenstatistik. Sie zeigt deutlich zu erkennen, dass die Anzahl der Photonen in der Resonatormode poissonisch verteilt ist für höhere Pumpraten. Dabei ist der Erwartungswert der Photonenzahl bei niedrigen Pumpraten nahe der Null gelegen. Obwohl  $g_2(0)$  auch bei niedrigen Pumpraten in etwa den Wert eins annimmt, wie in 4.3.1 zu erkennen ist, kann man nicht von einer kohärenten Emission des Lasersystems bei sehr niedrigen Pumpraten für  $P \in [10^{-4}, 10^{-2}]$  sprechen, da die mittlere Photonenzahl in diesem Bereich deutlich kleiner als eins ist. Der Effekt des Quenchings konnte dabei aus numerischen Gründen nicht aufgenommen werden, da die stabile Berechnung der Photonenstatistik bei hohen Pumpraten noch höhere Erwartungswerte im stationären Zustand des Systems als Ausgangsinformation benötigt als die Berechnung der stationären mittleren Photonenzahl. Obwohl es sich als unproblematisch erweist Differentialgleichungssysteme jenseits der Stufe 170 zu berechnen, ist es mit den für die Ergebnisauswertung benutzten Maschinen nicht möglich Formel 3.1.15 numerisch auszuwerten, da Summanden kleiner als  $\frac{1}{170!} \approx 10^{-307}$  an die maschinelle Auflösungsgrenze stoßen. Numerisch unproblematischer wäre es in diesem Fall die Photonenstatistik im Dichtematrixformalismus aus der Summe von Matrixelementen zu berechnen. Durch dieses Problem kann aber die Erkenntnis gewonnen werden, dass obwohl sehr hohe Korrelationen keinen Einfluss auf die wesentliche Systemdynamik haben, die Photonenstatistik sehr sensibel auf Fehler derer Werte reagiert. Da in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau alle höheren Photon-Photon Korrelationen  $\langle (b^\dagger)^n (b)^n \rangle$  in ihren Werten festgelegt sind, können diese zur Erstellung einer Photonenstatistik genutzt werden. Es soll dabei untersucht werden, welche Systeminformationen durch den Wegfall höherer Photon-Photon Korrelationsfunktionen erhalten bleiben bzw. welche verloren gehen. Höhere Photon-Photon Korrelationen lassen sich nach der Faktorisierungsvorschrift der Clusterentwicklung wie folgt auf Quadruplettniveau aus

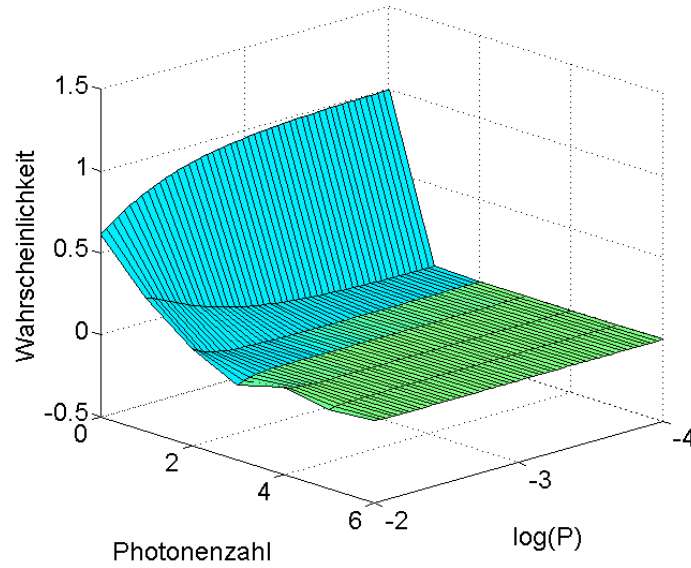


Abbildung 4.3.3: Photonenstatistik aus Clusterentwicklung eines stark gekoppelten ZNS in der Pumprate  $P$  in  $\frac{1}{ps}$  deren dekadischer Logarithmus auf der y-Achse der Grafik aufgetragen ist. Der Parametersatz ist  $g = 10\kappa = 10\gamma = 0, 1 \frac{1}{ps}$ .

bekannten bosonischen Erwartungswerten berechnen:

$$\langle (b^\dagger)^n b^n \rangle = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k} (\delta \langle 1 \rangle)^{n-2k} (\delta \langle 2 \rangle)^k + \underbrace{\delta \langle (b^\dagger)^n b^n \rangle}_{=0 \text{ für } n>2} \quad (4.3.1)$$

$$\text{mit } \delta \langle 1 \rangle = \langle b^\dagger b \rangle \quad (4.3.2)$$

$$\text{und } \delta \langle 2 \rangle = \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle - 2 \left( \langle b^\dagger b \rangle \right)^2. \quad (4.3.3)$$

Mit dieser Information lässt sich nun erneut eine Photonenstatistik in der Pumprate über Formel 3.1.15 erstellen. Das Resultat zeigt Abbildung 4.3.3. Es ist zu sehen, dass die Photonenstatistik im abgebildeten Pumpbereich eine gute Näherung an die Resultate der Photonenstatistik der Abbildung 4.3.2 darstellt. Es stellt sich jedoch heraus, dass die genäherte Berechnung der höheren bosonischen Korrelationen gemäß 4.3.3 und der damit gemachte Fehler die Erstellung der Photonenstatistik numerisch sehr instabil machen. So beginnt die Lösung im Punkt von vier Photonen und einer Pumprate von  $P = 10^{-2} \frac{1}{ps}$  in Abbildung 4.3.3 bereits zu divergieren. Dies ist gerade die Übergangsgrenze des Lasersystems in die kohärente Emission (vgl. Abbildung 4.3.2 und 4.3.1). In der Auswertung zeigte sich dieses Phänomen bei allen Berechnungen verschiedener Parametersätze für das ZNS und darüber hinaus auch für das in dieser Sektion nicht dokumentierte Vier-Niveau-System. Das wesentliche Ergebnis dieser Sektion lässt sich in der Aussage festhalten, dass sich die Clusterentwicklung dazu eignet klassische Größen von Zwei- und Vier-Niveau-Systemen in Ein-Elektron-Näherung, wie die mittleren Besetzungen der Energieniveaus und die mittlere Photonenzahl der Resonatormode zu berechnen, als auch das Verhalten niedriger statistischer Momente wie  $g_2(0)$  sehr genau wiederzugeben. Jedoch wird der durch die Clusterentwicklung gemachte Fehler der impliziten Berechnung von höheren Korrelationen mit deren Ordnung immer größer, sodass die Erstellung einer Photonenstatistik immensen numerischen Einschränkungen unterliegt, insbesondere dann, wenn kohärente Lichtfeldzustände vorliegen. Eine weitere wichtige Beobachtung dieses Kapitels ist das Phänomen des Quenchings, welches im folgenden Kapitel nochmals diskutiert wird. Da mit geringfügig mehr Rechenaufwand

ein Lasersystem mit mehreren Emitttern in Clusterentwicklung simuliert werden kann, während der ohnehin schon hohe Rechenaufwand der exakten Lösung quadratisch in der Emitterzahl skaliert, ist die Clusterentwicklung zur Simulation von mehreren Emitttern in einem Lasersystem und im Folgenden dieser Arbeit das Mittel der Wahl.

#### 4.4. Das Zwei-Niveau-System mit mehreren Emitttern

Bislang wurde in dieser Arbeit das einatomare ZNS als Lasersystem betrachtet. Konventionelle Lasersysteme haben jedoch einen Umfang von mehreren tausend bis hin zu mehreren Millionen Emitttern. Die in dieser Arbeit im Fokus stehenden Lasersysteme sollen einen Umfang von bis zu einigen hundert Emitttern haben und werden gering Emitter Laser genannt. Damit handelt es sich um mikroskopische Lasersysteme, welche sich vor allem auf Grund ihrer Größe zur energie-sparenden Informationsübertragung eignen sollen. Die Ursache dafür liegt darin, dass ein jeder Emitter eines Systems mit Energie über den Pumpprozess versorgt werden muss um angeregt zu werden und sich an der Signalübertragung zu beteiligen. Um mehrere Atome zu betrachten wird der bislang verwendete Jaynes-Cumming Hamiltonian so modifiziert, das nun mehrere atomare Systeme zum Energiehaushalt des gesamten Systems beisteuern. Die Überlegungen lassen sich dabei auf mehrere Energieniveaus ausweiten. Der Hamiltonoperator hat folgende Gestalt:

$$\tilde{H}_{JC} = \sum_{\mu=1}^{N_A} \sum_{i=\alpha,\beta} \epsilon_{i\mu} n_{i\mu} + \hbar\omega N + \sum_{\mu=1}^{N_A} g_{\mu} b \sigma_{+\mu} + g_{\mu}^* b^{\dagger} \sigma_{-\mu} \quad \text{mit} \quad g_{\mu} = g_{\mu'} = g_{\mu}^* = g \quad (4.4.1)$$

und  $N_A$  als Emitteranzahl. Formel 4.4.1 hat große Ähnlichkeit mit dem Jaynes-Cumming Hamiltonian aus 4.1.2. Der Unterschied ist, dass nun allen fermionischen Operatoren ein Teilchenindex  $\mu$  zugesprochen wird, da mehrere ZNS hier betrachtet werden. Dabei werden aber die Annahmen getroffen, dass die Atome identisch sind und folglich auch identisch in der Lage ihrer Energieniveaus

$$\epsilon_{i\mu} = \epsilon_{i\mu'} = \epsilon_i \quad (4.4.2)$$

und jeglicher Erwartungswerte  $\langle A_{\mu} \rangle$  mit  $A_{\mu} \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}$

$$\langle A_{\mu} \rangle = \langle A_{\mu'} \rangle = \langle A \rangle \quad (4.4.3)$$

sind, sowie die Unabhängigkeit der Emitter untereinander, welche mathematisch durch das Verschwinden der Korrelationsfunktionen

$$\delta \langle A_{\mu} A_{\mu'} \rangle \equiv 0 \quad (4.4.4)$$

für  $\mu \neq \mu'$  repräsentiert wird. Die identischen Kopplungseigenschaften der Atome mit Lichtfeldern wurden bereits in Formel 4.4.1 angenommen. Die nun interessanten Größen des Systems sind die verhältnismäßigen Energieniveaubesetzungen

$$\frac{1}{N_A} \sum_{\mu=1}^{N_A} \langle n_{i\mu} \rangle = \langle n_i \rangle = \langle a_i^{\dagger} a_i \rangle \quad (4.4.5)$$

und die durch diesen Schritt unveränderte mittlere Photonenzahl  $\langle N \rangle$ . Die aus diesem Hamiltonian resultierenden Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte werden unter den folgenden Kommutatorrelationen für Bosonen ( $\epsilon = 1$ ) und Fermionen mit ( $\epsilon = -1$ ) berechnet:

$$[c_{i\mu}, c_{j\mu}]_{-\epsilon} = 0, \quad (4.4.6)$$

$$[c_{i\mu}^{\dagger}, c_{j\mu}^{\dagger}]_{-\epsilon} = 0, \quad (4.4.7)$$

$$[c_{i\mu}, c_{j\mu'}^{\dagger}]_{-\epsilon} = \delta_{ij} \delta_{\mu\mu'}. \quad (4.4.8)$$



Es ergeben sich die Bewegungsgleichungen der Einteilchenoperatoren zu:

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_\alpha = \epsilon_\alpha a_\alpha + g b a_\beta, \quad (4.4.9)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_\alpha^\dagger = -\epsilon_\alpha a_\alpha^\dagger - g^* b^\dagger a_\beta^\dagger, \quad (4.4.10)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_\beta = \epsilon_\beta a_\beta + g^* b^\dagger a_\alpha, \quad (4.4.11)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_\beta^\dagger = -\epsilon_\beta a_\beta^\dagger - g b a_\alpha^\dagger, \quad (4.4.12)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} b = \hbar\omega b_q + \sum_{\mu'=1}^{N_A} g^* \sigma_{-\mu'}, \quad (4.4.13)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} b^\dagger = -\hbar\omega b^\dagger - \sum_{\mu'=1}^{N_A} g \sigma_{+\mu'}. \quad (4.4.14)$$

Man erkennt an der Kopplung von einem Einteilchenoperator an zwei Einteilchenoperatoren, dass das zu bewerkstelligende Problem wieder ein Hierarchieproblem ist. Der Unterschied zu den vorherigen Bewegungsgleichungen ist die Summation über den Teilchenindex  $\mu'$ . Auf Grund von Gleichung 4.4.3 kann man schon erwarten, dass sich das daraus ergebende Differentialgleichungssystem nicht sonderlich zum einatomaren Fall unterscheiden wird. Der Unterschied ist der, dass an einigen Stellen des Differentialgleichungssystems für mehrere Atome die Emittierzahl  $N_A$  eingefügt wird. So berechnet sich die Bewegungsgleichung für die mittlere Photonenzahl  $\langle N \rangle$  wie folgt:

$$\langle b^\dagger b \rangle = 2g \sum_{\mu'=1}^{N_A} \Im\{\langle b^\dagger \sigma_{-\mu'} \rangle\} - \kappa \langle b^\dagger b \rangle \quad (4.4.15)$$

$$= 2g N_A \Im\{\langle b^\dagger \sigma_- \rangle\} - \kappa \langle b^\dagger b \rangle. \quad (4.4.16)$$

Zusätzlich kann man sich überlegen, dass der dissipative Anteil der Bewegungsgleichungen auf Grund von 4.4.8 gänzlich unverändert bleibt, obwohl streng genommen die Lindblad-Terme auch einer Summation über  $\mu'$  unterliegen, sodass jeder Emitter sein eigenes, unabhängiges Wärmereservoir erhält. Da diese Reservoirs jedoch mit allen Emittern auf die gleiche Weise wechselwirken, kann man ersatzweise ein Wärmereservoir für alle Emittoren ansetzen. Mathematisch würde sich dieses Vorgehen auch mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{\mu\mu'}$  der Kommutatorrelation 4.4.8 in den Lindblad-Termen begründen.

Man kann sich jetzt noch überlegen inwiefern die übrigen Gleichungen modifiziert werden müssen um mehrere Emittoren zu betrachten. Offensichtlich sind, wie man in den Bewegungsgleichungen der Einteilchenoperatoren erkennen kann, nur solche Erwartungswerte von einer Modifizierung betroffen, welche bosonische Operatoren beinhalten. So sind auch Erwartungswerte wie  $\langle b^\dagger b n_i \rangle$  und  $\langle b^\dagger b^\dagger b \sigma_- \rangle$  von einer Modifizierung betroffen. In den Bewegungsgleichungen dieser Erwartungswerte finden sich Terme der folgenden Gestalt wieder:

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b n_{i\mu} \rangle \propto \sum_{\mu'=1}^{N_A} \langle b^\dagger \sigma_{-\mu'} n_{i\mu} \rangle. \quad (4.4.17)$$

Aus vorherigen Teilen der Arbeit ist der Summand für  $\mu = \mu'$  bekannt und vereinfacht sich auf Grund der Ein-Elektron-Näherung zu:

$$\langle b^\dagger \sigma_{+\mu} n_{i\mu} \rangle = \langle b^\dagger \sigma_{-\mu} \rangle \delta_{i\beta} = \langle b^\dagger \sigma_- \rangle \delta_{i\beta}. \quad (4.4.18)$$

Für  $\mu \neq \mu'$  kann man die Ein-Elektronen-Näherung jedoch nicht anwenden, da unterschiedliche Emittoren betrachtet werden. Darüber hinaus ist die Zeitdynamik für Erwartungswerte wie in



4.4.17 unbekannt. Da jedoch bereits in 4.4.4 verabredet wurde, dass die Emitter als vollständig unabhängig voneinander betrachtet werden, sind die neuen, unbekannten Erwartungswerte ohnehin zu faktorisieren. Dadurch ist es also auch nicht mehr ohne weiteres möglich Systeme mit mehreren Emitttern exakt zu berechnen. Durch die Faktorisierung entstehen wiederum die bekannten Erwartungswerte

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger \sigma_{-\mu'} n_{i\mu} \rangle &= \langle b^\dagger \sigma_{-\mu'} \rangle \langle n_{i\mu} \rangle + \delta \langle b^\dagger \sigma_{-\mu'} n_{i\mu} \rangle \\ &= \langle b^\dagger \sigma_{-\mu} \rangle \langle n_{i\mu} \rangle + \delta \langle b^\dagger \sigma_{-\mu'} n_{i\mu} \rangle.\end{aligned}\quad (4.4.19)$$

Somit vereinfacht sich die rechte Seite der Gleichung 4.4.17 zu

$$\sum_{\mu'=1}^{N_A} \langle b^\dagger \sigma_{-\mu'} n_{i\mu} \rangle = \langle b^\dagger \sigma_- \rangle \delta_{i\beta} + (N_A - 1) \langle b^\dagger \sigma_- \rangle \langle n_i \rangle, \quad (4.4.20)$$

wobei wie verabredet interatomare Korrelationsfunktionen vernachlässigt wurden. Speziell in höheren Polarisierungen wie  $\langle b^\dagger b^\dagger b \sigma_{-\mu} \rangle$  kommen Terme wie  $\sum_{\mu'} \langle b^\dagger b^\dagger \sigma_{-\mu'} \sigma_{-\mu} \rangle$  vor. Ihre Faktorisierung ergibt sich zu

$$\langle b^\dagger b^\dagger \sigma_{-\mu'} \sigma_{-\mu} \rangle = 2 \left( \langle b^\dagger \sigma_- \rangle \right)^2 \underbrace{(1 - \delta_{\mu\mu'})}_{=1 \text{ für } \mu \neq \mu'} + \underbrace{\delta \langle b^\dagger b^\dagger \sigma_{-\mu'} \sigma_{-\mu} \rangle}_{=0}. \quad (4.4.21)$$

An dieser Stelle ist noch festzuhalten, dass die Faktorisierung von Erwartungswerten, bestehend aus Operatoren verschiedener Emitter, auf jeder Stufe des Differentialgleichungssystems getätigt werden muss auf Grund der Unbekanntheit der Zeitentwicklungen der Erwartungswerte, welche fermionische Operatoren verschiedener Emitter beinhalten.

Auf der Grundlage dieses Wissens kann man das ZNS beschreibende Differentialgleichungssystem auf Quadruplettordnung hinschreiben. Das resultierende Differentialgleichungssystem hat folgende Gestalt:

$$\frac{d}{dt} \langle n_\alpha \rangle = -2g\Psi_0 - \gamma \langle n_\alpha \rangle + P \langle n_\beta \rangle, \quad (4.4.22)$$

$$\frac{d}{dt} \langle n_\beta \rangle = +2g\Psi_0 + \gamma \langle n_\alpha \rangle - P \langle n_\beta \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle N \rangle = +2gN_A\Psi_0 - \kappa \langle N \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_0 = g \left( \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle - \langle b^\dagger b n_\beta \rangle + \langle n_\alpha \rangle \right) - \frac{\gamma + \kappa + P - 2\delta}{2} \Psi_1, \quad (4.4.23)$$

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle = -2g\Psi_2 + 2g(N_A - 1)\Psi_0 \langle n_\alpha \rangle - (\gamma + \kappa) \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle + P \langle b^\dagger b n_\beta \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b n_\beta \rangle = +2g(\Psi_1 + \Psi_0) + 2g(N_A - 1)\Psi_0 \langle n_\beta \rangle + \gamma \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle - (P + \kappa) \langle b^\dagger b n_\beta \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle = +4gN_A\Psi_1 - 2\kappa \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_1 = g \left( \langle b^\dagger b b^\dagger b n_\alpha \rangle - \langle b^\dagger b b^\dagger b n_\beta \rangle + 2 \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle \right) + 4g(N_A - 1)\Psi_0^2 - \frac{\gamma + 3\kappa + P - 2\delta}{2} \Psi_1.$$

Dabei wurde zur Schließung des Systems folgende Faktorisierung verwendet:

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger b^\dagger b b n_\alpha \rangle - \langle b^\dagger b^\dagger b b n_\beta \rangle &= \left( \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle - 4 \left( \langle b^\dagger b \rangle \right)^2 \right) (\langle n_\alpha \rangle - \langle n_\beta \rangle) \\ &\quad + 4 \langle b^\dagger b \rangle \left( \langle b^\dagger b n_\alpha \rangle - \langle b^\dagger b n_\beta \rangle \right).\end{aligned}\quad (4.4.24)$$

Das entsprechende semiklassische System erhält man, wenn man das System bis zur Gleichung 4.4.23 betrachtet und die Faktorisierung der Erwartungswerte  $\langle b^\dagger n_{\alpha,\beta} \rangle$  gemäß 4.1.24 auf Duplettenebene durchführt.

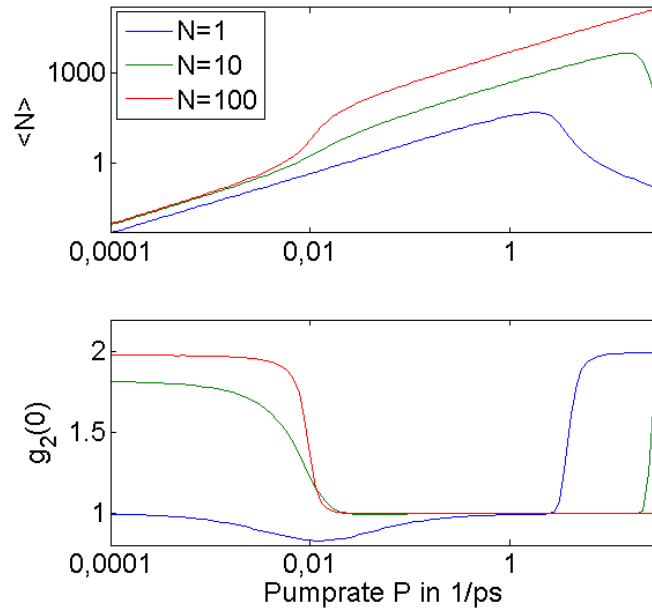


Abbildung 4.4.1: Laserkennlinien (oben) und Autokorrelationsverläufe (unten) in Clusterentwicklung auf Quadruplettordnung für variierende Emitterzahl  $N_A$ . Die Bildlegende ist für beide Grafiken gültig. Der Parametersatz ist  $g = 10\kappa = 10\gamma = 0,1 \frac{1}{\text{ps}}$ .

Um den Einfluss der Emitteranzahl  $N_A$  auf das ZNS zu untersuchen, wurde das Differentialgleichungssystem beginnend ab Gleichung 4.4.22 gelöst und die Lösungen der Laserkennlinien und der Autokorrelationsfunktionen aufgenommen. In Abbildung zeigt sich zum einen, dass mit steigender Emitterzahl die maximale mittlere Photonenzahl in der Resonatormode vor dem Eintreten des Quenchings stark ansteigt und zum anderen, dass das Quenching mit steigender Emitteranzahl erst bei höheren Pumpraten einsetzt, eine Erhöhung der Emitterzahl der Dephasierung also entgegenwirkt. Darüber hinaus zeichnet sich ab, dass sich die Autokorrelationsfunktion mit steigender Emitterzahl für niedrige Pumpraten an den thermischen Zustand in Abbildung 4.4.1 annähert. Dadurch lässt sich der sogenannte Schwellbereich eines Lasersystems definieren. Es handelt sich dabei um den Bereich, in dem das System vom thermischen Zustand in die kohärente Emission mit  $g_2(0) = 1$  übergeht. Der Schwellbereich wird mit zunehmender Emitteranzahl immer kleiner, sodass man bei sehr hohen Emitterzahlen einen Einschaltpunkt des Systems festlegen kann, in dem das System bei geringer Erhöhung der Pumprate direkt in den kohärenten Zustand übergeht. Betrachtet man genug Emitter so macht sich, wie man in der roten Linie der Abbildung 4.4.1 sehen kann, der Einschaltprozess auch in der Kennlinie des Lasersystems bemerkbar. Dort ist beim Einschaltprozess ein starker Anstieg der mittleren Photonenzahl zu verzeichnen. Abgesehen vom Phänomen des Quenchings ließen sich die hier über das Zwei-Niveau-System mit mehreren Emitttern erworbenen Erkenntnisse auch für das Vier-Niveau-System im Rahmen der Auswertungsarbeiten machen. Für kleine Pumpraten stellt das Zwei-Niveau-System ein gutes Näherungsmodell an das realistischere Vier-Niveau-System dar. Der folgende Teil der Arbeit wird sich mit dem Einfluss von quantenmechanischen Licht-Materie und Lichtfeld internen Wechselwirkungsbeiträgen in Form der Korrelationsfunktionen  $\delta \langle b^\dagger b n_i \rangle$  und  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$  auf die Modulationsantwort von Vier-Niveau-Systemen mit einer verschiedenen Anzahl an Emitttern auseinandersetzen. Die beiden dafür aus dieser Sektion wichtigen Ergebnisse sind die Verkleinerung des Einschaltbereiches in der Pumprate zu höheren Emitterzahlen und das Entgegenwirken der Dephasierung eines Systems durch Erhöhung der Emitterzahl.

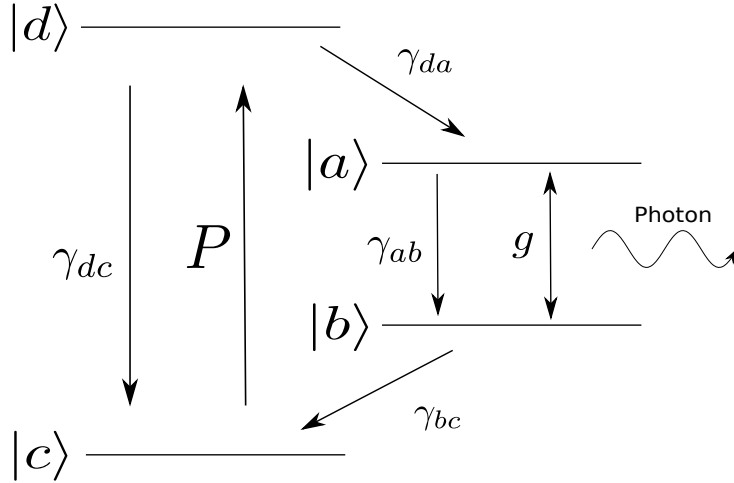


Abbildung 4.5.1: Energieniveauschema eines Vier-Niveau-Systems mit den Zuständen  $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$  und  $|d\rangle$  mit den dazugehörigen Eigenenergien  $\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c$  und  $\epsilon_d$ . Die verschiedenen Übergangsraten sind eingezeichnet. Die Kavität und die Wechselwirkung mit externen Wärmebädern wurden hier nicht wie in Abbildung 2.3.2 eingezeichnet. Zur vollständig richtigen Beschreibung eines Vier-Niveau-Lasers, müssen Kavitätsverluste und die spontane Emission in Verlustmoden jedoch berücksichtigt werden.

#### 4.5. Die Lasergleichungen in Clusterentwicklung des Vier-Niveau-Systems in Ein-Elektron-Näherung

Das Vier-Niveau-System (VNS) unterscheidet sich vom Zwei-Niveau-System im wesentlichen darin, dass die Emission von zum Lasing beitragenden Photonen und der Pumpprozess zwischen verschiedenen Energieniveaus stattfindet. Das VNS ist ein realistischeres Modell des Zwei-Niveau-Lasers, da in diskreten Energieniveausystemen die Relaxation von Ladungsträgern in und aus den lasenden Niveaus stattfindet. Zudem wird in den meisten technischen Anwendungen von Lasersystemen mit lokalisierten Energieniveaus und einem lasenden Übergang nicht der lasende Übergang gepumpt, sondern die Niveaus, von und aus welchen, Ladungsträger in und aus den lasenden Niveaus relaxieren. So kann man in Abbildung 4.5.1 das Energieniveauschema des VNS sehen. Der lasende Übergang liegt zwischen den Niveaus  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$ . Der Pumpprozess findet zwischen den Niveaus  $|c\rangle$  und  $|d\rangle$  statt. Die physikalische Motivation dieser Modellierung eines VNS besteht darin, dass die Energiedifferenz der äußeren beiden Pumpniveaus stark genug verstimmt sein soll gegenüber der Energiedifferenz des lasenden Übergangs zwischen den Niveaus  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$ , sodass der Pumpprozess nicht an die inneren beiden Niveaus koppelt. Ebenfalls soll die Resonatormode so stark gegen alle anderen Energiedifferenzen außer der zwischen  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$  verstimmt sein, dass lediglich die inneren beiden Niveaus zum Lasing beitragen. Weiterhin, wird angenommen, dass die Raten der Relaxation von Ladungsträgern von  $|d\rangle$  nach  $|b\rangle$  und von  $|a\rangle$  nach  $|c\rangle$  durch Wechselwirkung mit externen Wärmebädern vernachlässigbar gering gegenüber den Raten der in Abbildung 4.5.1 eingezeichneten Übergänge sind. Somit werden die Übergangsraten der Relaxation zu  $\gamma_{db} = \gamma_{ac} = 0$  gewählt. Wie man Abbildung 4.5.1 weiterhin entnehmen kann, werden die äußeren Niveaus lediglich durch dissipative Prozesse modelliert. Dazu wird für jeden Übergang ein unabhängiges Wärmebad angenommen. Die Lindblad-Terme

erweitern sich somit für das VNS zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle A \rangle |_{Diss} = & \frac{\kappa}{2} \left\langle \left[ b^\dagger, A \right] b + b^\dagger \left[ A, b \right] \right\rangle \\ & + \sum_{\{i,j\}} \frac{\gamma_{ij}}{2} \left\langle \left[ \sigma_+^{ij}, A \right] \sigma_-^{ij} + \sigma_+^{ij} \left[ A, \sigma_-^{ij} \right] \right\rangle \\ & + \frac{P}{2} \left\langle \left[ \sigma_-^{ab}, A \right] \sigma_+^{ab} + \sigma_-^{ab} \left[ A, \sigma_+^{ab} \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

$$\text{mit } \{i, j\} = (a, b), (b, c), (d, c), (d, a) \quad (4.5.2)$$

$$\text{und } \sigma_+^{ij} = a_i^\dagger a_j, \quad \sigma_-^{ij} = a_j^\dagger a_i. \quad (4.5.3)$$

Weiterhin werden im Hamiltonoperator für das VNS auch noch zusätzlich die Terme  $\epsilon_c n_c$  und  $\epsilon_d n_d$  berücksichtigt. Der Dipoloperator  $H_D$  bleibt unverändert. Das daraus resultierende Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der VNL-Dynamik eines einzigen Emitters hat damit folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_a \rangle = & -2g \Psi_n \\ & - n\kappa \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_a \rangle \\ & - \gamma_{ab} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_a \rangle \\ & + \gamma_{da} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_b \rangle, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_b \rangle = & +2g (\Psi_n + n\Psi_{n-1}) \\ & - n\kappa \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_b \rangle \\ & + \gamma_{ab} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_a \rangle \\ & - \gamma_{bc} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_b \rangle, \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_c \rangle = & -n\kappa \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_c \rangle \\ & + \gamma_{dc} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_d \rangle \\ & + \gamma_{bc} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_b \rangle \\ & - P \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_c \rangle, \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_d \rangle = & -n\kappa \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_d \rangle \\ & - \gamma_{dc} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_d \rangle \\ & - \gamma_{da} \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_d \rangle \\ & + P \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_c \rangle, \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi_n = &+ g \left( \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^{n+1} n_a \rangle - \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^{n+1} n_b \rangle + (n+1) \langle (b^\dagger)^n (b)^n n_a \rangle \right) \\ &- \frac{(2n+1)\kappa + \gamma_{ab} + \gamma_{bc}}{2} \Psi_n, \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

$$\frac{d}{dt} \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^{n+1} \rangle = n \left( 2\Psi_n - \kappa \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^{n+1} \rangle \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5.9)$$

mit den Polarisationen

$$\Psi_n =: \Im \{ \langle (b^\dagger)^{n+1} (b)^n \sigma_-^{ab} \rangle \}. \quad (4.5.10)$$

Über dieses Differentialgleichungssystem kann die exakte Lösung für den einatomaren Vier-Niveau-Laser berechnet werden und darüber hinaus die Lasergleichungen von Vier-Niveau-Lasern mit mehreren Emitttern in Clusterentwicklung hergeleitet werden.

Um einen VNL mit  $N_A$  voneinander unabhängigen Emitttern zu simulieren, wird der Hamiltonoperator analog wie dies im Kapitel 4.4 geschehen ist, modifiziert. Alle mathematischen Eigenschaften für Operatoren verschiedener Emittter 4.4.2 bis 4.4.8 sind dabei weiterhin gültig. Das aus diesen Überlegungen entspringende Differentialgleichungssystem auf Quadruplettniveau in Clusterentwicklung ist dann

$$\frac{d}{dt} \langle n_a \rangle = -2g\Psi_0 - \gamma_{ab} \langle n_a \rangle + \gamma_{da} \langle n_d \rangle, \quad (4.5.11)$$

$$\frac{d}{dt} \langle n_b \rangle = +2g\Psi_0 + \gamma_{ab} \langle n_a \rangle - \gamma_{bc} \langle n_b \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle n_c \rangle = -P \langle n_c \rangle + \gamma_{dc} \langle n_d \rangle + \gamma_{bc} \langle n_b \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle n_d \rangle = +P \langle n_c \rangle - \gamma_{dc} \langle n_d \rangle - \gamma_{ad} \langle n_d \rangle.$$

$$\frac{d}{dt} \langle N \rangle = +2gN_A\Psi_0 - \kappa \langle N \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_0 = g \left( \langle b^\dagger b n_a \rangle - \langle b^\dagger b n_b \rangle + \langle n_a \rangle \right) - \frac{\gamma_{ab} + \kappa + \gamma_{bc}}{2} \Psi_0, \quad (4.5.12)$$

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b n_a \rangle = -2g\Psi_1 + 2g(N_A - 1)\Psi_0 \langle n_a \rangle - (\gamma_{ab} + \kappa) \langle b^\dagger b n_a \rangle + \gamma_{da} \langle b^\dagger b n_d \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b n_b \rangle = +2g(\Psi_1 + \Psi_0) + 2g(N_A - 1)\Psi_0 \langle n_b \rangle + \gamma_{ab} \langle b^\dagger b n_a \rangle - (\gamma_{bc} + \kappa) \langle b^\dagger b n_b \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b n_c \rangle = +2g(N_A - 1)\Psi_0 \langle n_c \rangle - P \langle b^\dagger b n_c \rangle + \gamma_{dc} \langle b^\dagger b n_d \rangle + \gamma_{bc} \langle b^\dagger b n_b \rangle - \kappa \langle b^\dagger b n_c \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b n_d \rangle = +2g(N_A - 1)\Psi_0 \langle n_d \rangle + P \langle b^\dagger b n_c \rangle - \gamma_{dc} \langle b^\dagger b n_d \rangle - \gamma_{ad} \langle b^\dagger b n_d \rangle - \kappa \langle b^\dagger b n_d \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle = +4gN_A\Psi_1 - 2\kappa \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_1 = g \left( \langle b^\dagger b b^\dagger b n_a \rangle - \langle b^\dagger b b^\dagger b n_b \rangle + 2 \langle b^\dagger b n_a \rangle \right) + 4g(N_A - 1)\Psi_0^2 - \frac{\gamma_{ab} + 3\kappa + \gamma_{bc}}{2} \Psi_1.$$

Das Differentialgleichungssystem in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau berücksichtigt quantenmechanische Korrelationsfunktionen zwischen Elektronen und Photonen  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger n_i \rangle$  und Korrelationsfunktionen zwischen Photonen untereinander  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$ . In der Ergebnisauswertung werden diese Korrelationsfunktionen auch als quantenmechanische Korrelationsfunktionen bezeichnet, da sie keine klassische Interpretation besitzen. Das entsprechende semiklassische Differentialgleichungssystem entspringt aus den Gleichungen 4.5.11 bis 4.5.12 unter Faktorisierung

der quantenmechanischen Erwartungswerte  $\langle b^\dagger b n_i \rangle$  in klassische Größen gemäß 4.1.24 und wird im Folgenden als semiklassischer Lösungsansatz des Hierarchieproblems bezeichnet. Aus den semiklassischen Lasergleichungen können durch adiabatische Elimination der Polarisation  $\Psi_0$  über eine Markov-Näherung die Ratengleichungen gewonnen werden. Dazu sollen die Vorgehensweise und die Markov-Näherung im Folgenden Unterkapitel gesondert behandelt werden.

#### 4.5.1. Elimination der Polarisation aus den semiklassischen Lasergleichungen

Betrachtet man die lineare, inhomogene Differentialgleichung 4.5.12, so kann man die formale Lösung für die Polarisation in der Zeit schreiben. Unter semiklassischer Faktorisierung der Erwartungswerte  $\langle b^\dagger b n_{a,b} \rangle$  ergibt sich dann:

$$\Psi_0(t) = g \int_0^\infty e^{-\Gamma\tau} [\langle N \rangle(t')(\langle n_a \rangle(t') - \langle n_b \rangle(t')) + \langle n_a \rangle(t')] d\tau \quad (4.5.13)$$

mit

$$\Gamma = \frac{\kappa + \gamma_{ab} + \gamma_{bc}}{2} \geq 0 \quad (4.5.14)$$

als Dämpfungsterm der Polarisation. Des weiteren gründet Gleichung 4.5.13 auf der Annahme, dass in weiter Vergangenheit die photonenassistierte Polarisation  $\Psi_0$  verschwindet. Das heißt

$$\Psi_0(t \rightarrow -\infty) = 0. \quad (4.5.15)$$

Da die Initialbedingungen der Polarisation theoretisch unendlich weit in der Vergangenheit liegen, spricht man auch von Gedächtniseffekten des Systems. Darüber hinaus wurde folgende Substitution

$$\tau = t - t' \quad (4.5.16)$$

mit  $t'$  als ursprünglichem Integrationsdifferential verwendet. Zur Behandlung des Problems 4.5.13 wird sich der Markov-Näherung bedient. Diese trifft unter anderem die Aussage über Integrale der Form

$$\int_0^x e^{-kx'} f(x') dx' \quad (4.5.17)$$

mit  $\Re(k) > 0$  und beliebig positivem  $x \in \mathbb{R}^+$ , dass wenn  $\frac{d}{dx} f(x)$  klein gegenüber der Änderung des exponentiellen Abfalls im Intervall  $x' \in [0, x]$  ist, man über partielle Integration näherungsweise

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-kx'} f(x') dx' &= \left[ \int_0^x e^{-kx'} dx' f(x') \right]_0^x + \frac{1}{k} \int_0^x e^{-kx'} \frac{d}{dx'} f(x') dx' \\ &\approx \left[ \int_0^x e^{-kx'} dx' f(x') \right]_0^x = \frac{f(0) - f(x)e^{-kx}}{k} \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

erhält. Speziell für  $x \rightarrow \infty$  gilt

$$\int_0^\infty e^{-kx'} f(x') dx' \approx \int_0^\infty e^{-kx'} dx' f(0). \quad (4.5.19)$$

Für hinreichend große Realteile von  $k$  liefert eine Markov-Näherung also eine gute Approximation an das oben stehende Integral 4.5.18. Anschaulich „schneidet“ die Exponentialfunktion die Funktion  $\frac{d}{dx} f(x)$  lange vor dem Erreichen der oberen Integrationsgrenze  $x$  ab, sodass dieser Term keinen nennenswerten Beitrag zum gesamten Integral beisteuert. Somit lässt sich für

hinreichend starke Dämpfung  $\Gamma > 0$  Gleichung 4.5.13 wie folgt schreiben, indem man ausnutzt, dass aus  $\tau = 0$  folgt, dass  $t = t'$  gilt:

$$\Psi_0(t) = g \int_0^\infty e^{-\Gamma\tau} d\tau [\langle N \rangle(t) (\langle n_a \rangle(t) - \langle n_b \rangle(t)) + \langle n_a \rangle(t)]. \quad (4.5.20)$$

Das Integral in 4.5.20 ist analytisch gemäß

$$\Psi_0(t) = \frac{g}{\Gamma} [\langle N \rangle(t) (\langle n_a \rangle(t) - \langle n_b \rangle(t)) + \langle n_a \rangle(t)] \quad (4.5.21)$$

lösbar. Da die Polarisation durch eine Markov-Näherung als Funktion anderer Systemgrößen geschrieben werden kann, ist es nicht mehr notwendig in Kenntnis ihrer Bewegungsgleichung zu sein um das semiklassische Differentialgleichungssystem der Laserdynamik zu lösen.

#### 4.6. Die Ratengleichungen der Lasertheorie für vier atomare Niveaus in Ein-Elektron-Näherung

Durch Einsetzen der Polarisation 4.5.21 in die übrigen Gleichungen folgen die Ratengleichungen der Lasertheorie. Sie lauten:

$$\frac{d}{dt} n_a = -R \cdot N (n_a - n_b) + \frac{n_d}{\tau_{rel}} - \frac{n_a}{\tau_{sp}}, \quad (4.6.1)$$

$$\frac{d}{dt} n_b = +R \cdot N (n_a - n_b) - \frac{n_b}{\tau_{rel}} + \frac{n_a}{\tau_{sp}}, \quad (4.6.2)$$

$$\frac{d}{dt} n_c = -P \cdot n_c + \frac{n_b}{\tau_{rel}}, \quad (4.6.3)$$

$$\frac{d}{dt} n_d = +P \cdot n_c - \frac{n_d}{\tau_{rel}}, \quad (4.6.4)$$

$$\frac{d}{dt} N = +R \cdot N \cdot N_A (n_a - n_b) - \beta N_A \cdot \frac{n_a}{\tau_{sp}} - \kappa \cdot N. \quad (4.6.5)$$

Dabei sind die  $n_i$  die mittleren Besetzungen der Energieniveaus,  $N$  ist die mittlere Photonenzahl und  $N_A$  die Emitteranzahl. Weiterhin werden die Raten

$$s := \gamma_{bc} = \gamma_{da} = \frac{1}{\tau_{rel}} \quad (4.6.6)$$

als Rate der Relaxation,

$$R + \gamma_{ab} = \frac{1}{\tau_{sp}} \quad (4.6.7)$$

als Rate der spontanen Emission,

$$\gamma_{ab} = \frac{1}{\tau_{nl}} \quad (4.6.8)$$

als Anteil der spontanen Emission in nicht lasende Moden und

$$R = \frac{4g^2}{\kappa + \gamma_{ab} + \gamma_{bc}} = \frac{1}{\tau_l} \quad (4.6.9)$$

als Anteil der spontanen Emission in die Lasermode bezeichnet. Abgesehen davon stellt der sogenannte  $\beta$ -Faktor gerade das Verhältnis des Anteils der spontanen Emission in die Lasermode zur gesamten spontanen Emission gemäß

$$\beta = \frac{R}{R + \gamma_{ab}} \quad (4.6.10)$$

dar. Folglich gilt

$$\beta \frac{1}{\tau_{sp}} = \frac{1}{\tau_l}. \quad (4.6.11)$$

Darüber hinaus wird  $\gamma_{dc}$  zu Null gewählt, da diese Größe mit der Pumprate  $P$  verrechnet werden kann, sodass, wenn in dieser Arbeit im Folgenden von der Pumprate  $P$  gesprochen wird, die effektive Pumprate  $P_{\text{eff}} = P - \gamma_{dc}$  gemeint ist. Hier ist noch ein mal hervorzuheben, dass die oben zu sehenden Ratengleichungen in Ein-Elektron-Näherung hergeleitet wurden. Ein Merkmal, dass darauf aufmerksam macht ist, dass als Faktor hinter der Pumprate  $P$  in den Gleichungen keine Blocking-Terme wie  $(n_c - n_d)$  stehen, wie es von den herkömmlichen Ratengleichungen bekannt ist [4], sondern nur die mittlere Besetzung des Energieniveaus  $n_c$ . Die sogenannten Pauli-Blocking-Terme treten in den Lasergleichungen in der semiklassischen Näherung auf, wenn die Ein-Elektron-Näherung nicht durchgeführt wird wie in Gleichung 4.1.1, in deren mittleren Teil ein Blocking-Term deutlich zu erkennen ist.

Zusammenfassend kann man nun sagen, dass aus den Lasergleichungen für vier atomare Energieniveaus und einen Emitter die Lasergleichungen in Clusterentwicklung für mehrere Emitter hergeleitet worden sind. Speziell aus der semiklassischen Clusterentwicklung auf Duplett-niveau wurden über eine Markov-Näherung dann die Ratengleichungen hergeleitet. Im Folgenden sollen die Lösungen der Ratengleichungen, der semiklassischen Näherung und der Gleichungen in Clusterentwicklung auf Quadruplett-niveau, welche zusätzlich den Einfluss von rein quantenmechanischen Effekten in Form von Licht-Materie und Lichtfeld interner Kopplung durch Korrelationsfunktionen auf Quadruplett-niveau berücksichtigen, verglichen werden. Dazu soll zunächst der konventionelle Vier-Niveau-Laser simuliert werden.

#### 4.7. Modulationsantwort des konventionellen Vier-Niveau-Lasers

Zur Einführung in die Modulationsantwort von Vier-Niveau-Laser Systemen, soll zunächst die grundlegende Natur des konventionellen Vier-Niveau-Lasers über Abbildung 4.7.1 veranschaulicht werden. Bei konventionellen Lasersystemen handelt es sich um Systeme mit einer sehr hohen Anzahl an atomaren Emittlern mit vier diskreten Energieniveaus. Solche Systeme verfügen zumeist über einen sehr geringen Anteil des aktiven Materials, der Photonen in die Lasermode emittiert, also über sehr geringe  $\beta$ -Faktoren. Ein typisches Beispiel für ein konventionelles Lasersystem ist ein Gaslaser wie der HeNe-Laser (Helium-Neon-Laser). Bei Gaslasern befindet sich das gasförmige, aktive Material in einem Resonator. In den meisten Anwendungen wird das Lasersystem über elektrische Entladung gepumpt [21]. Zur Untersuchung des Systems wurden die Lösungen der Laserkennlinie, der Autokorrelationsfunktion und der Besetzungen in der Pumprate über die Ratengleichungen, die semiklassische Näherung und die Lasergleichungen in Clusterentwicklung auf Quadruplett-niveau für den konventionellen Vier-Niveau-Laser in Ein-Elektron-Näherung berechnet. Dabei zeigte sich, dass die auf verschiedenem Wege berechneten Resultate der mittleren Photonenzahl in Abbildung 4.7.1 keine sichtlichen Unterschiede untereinander aufweisen. Es kann also festgehalten werden, dass Photon-Photon und Elektron-Photon Korrelationsfunktionen und nicht-Markovsche Effekte keinen merklichen Einfluss auf die in Abbildung 4.7.1 gezeigte mittlere Photonenzahl für den verwendeten Parametersatz des hier betrachteten konventionellen Lasersystems haben. Die Ergebnisse der Abbildung 4.7.1 sollen im Folgenden inhaltlich kurz diskutiert werden. Zuallererst fällt bei dem hier betrachteten Vier-Niveau-System in der Kennlinie der Abbildung 4.7.1 auf, dass anstelle des Auftretens des Quenchings die mittlere Photonenzahl zu hohen Pumpraten beim Vier-Niveau-Laser sättigt. Die Ursache dafür liegt in der Auslagerung des Pumpprozesses auf äußere Energieniveaus des Vier-Niveau-Systems. Dies macht sich in den Lasergleichungen des Vier-Niveau-Systems mathematisch bemerkbar. Dort findet sich die Pumprate nicht mehr im Dämpfungsterm der Polarisationen  $\Psi_n$  wieder (vgl. Gleichung 4.5.8), wodurch eine Erhöhung der Pumprate nicht mehr zur Dephasierung beiträgt. Des weiteren schaltet das hier simulierte Lasersystem deutlich bei



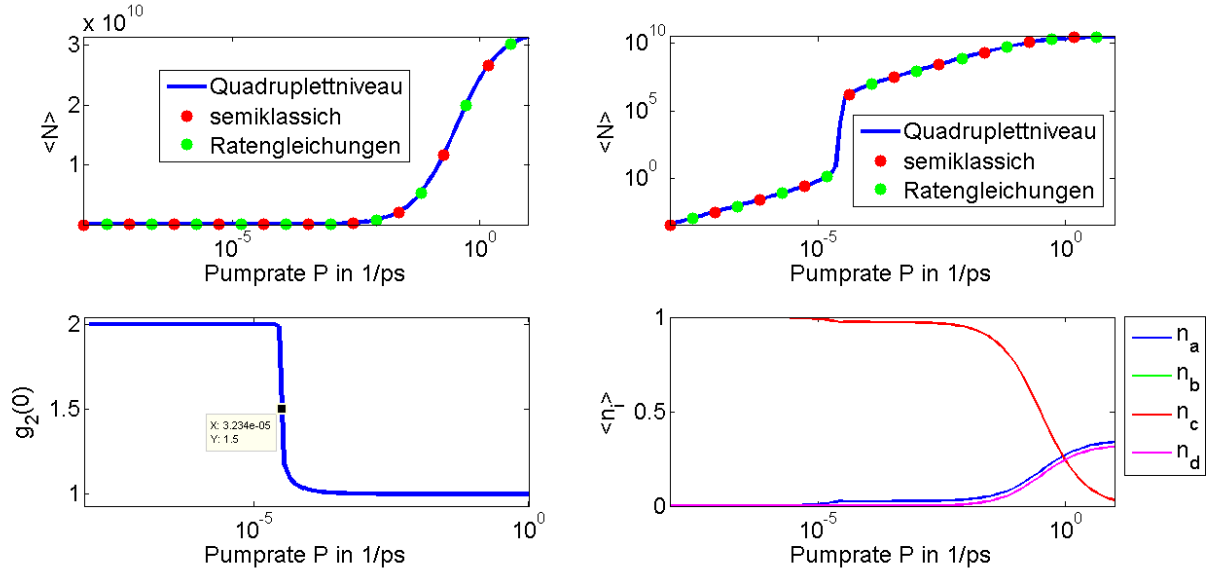


Abbildung 4.7.1: Das Abbildungsschema folgt jenem der Abbildung 4.3.1 und zeigt entsprechend den Verlauf der mittleren stationären Photonenzahl (links linear und rechts logarithmisch), der Autokorrelation und der Besetzung des stationären Zustandes des VNL für verschiedene Pumpraten. Die Ergebnisse für die Autokorrelationsfunktion mit eingezeichnetem Einschaltpunkt und die Besetzungen sind in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau dokumentiert. Der verwendete Parametersatz ist  $g = 10^{-5} \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\kappa = 10^{-2} \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\gamma_{ab} = 10^{-3} \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\gamma_{bc} = \gamma_{da} = s = 1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $N_A = 10^9$ . Daher gilt  $\beta \approx 3,96 \cdot 10^{-7}$ .

einer sehr niedrigen Pumprate von  $P_E \approx 3,23 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{ps}}$  im Vergleich zu Zwei-Niveau-Lasern (vgl. Abbildung 4.4.1) und wie sich in der nachfolgenden Sektion zeigen wird, auch im Vergleich zu mikroskopischen Vier-Niveau-Systemen ein. Dabei ist ein abrupter Zustandswechsel in der Autokorrelationsfunktion in Abbildung 4.7.1 vom thermischen Zustand in die kohärente Emission zu beobachten, während die mittlere Photonenzahl um fünf Größenordnungen anwächst. Dieses Verhalten ist auf die hohe Anzahl an Emittlern zurückzuführen und zeigt sich auch in den Ergebnissen für das Zwei-Niveau-System mit mehreren Atomen aus Kapitel 4.4. Ebenfalls ist die hohe Emittterzahl die Ursache für die hohen mittleren Photonenzahlen, die schon bei niedrigen Besetzungen der lasenden Niveaus erreicht werden. Des Weiteren sind in Abbildung 4.7.2 die Verläufe der mittleren Photonenzahl in der Zeit für drei verschiedene Pumpraten zu sehen. Besonders interessant ist dabei die mittlere Grafik für eine Pumprate von  $P = 10^{-4} \frac{1}{\text{ps}}$  kurz über dem Einschaltpunkt des Systems. Das zu beobachtende Phänomen wird Relaxationsoszillationen genannt. Relaxationsoszillationen sind anschaulich dadurch zu erklären, dass das Lasersystem im Schwellbereich hochfrequent ein- und ausschaltet. Schnell die mittlere Photonenzahl im Resonator, wie dies in der mittleren Grafik der Abbildung 4.7.2 zu beobachten ist, in die Höhe, so erleidet das System beachtliche Energieverluste durch Kavitätsverluste und die spontane Emission in nicht resonante Moden, sodass das System wieder unter die Laserschwelle tritt. Das fortwährende Pumpen des Systems hebt den Laser dann wieder über die Schwelle und so weiter bis das System sich in einen stationären Zustand begibt. Bei dem hier simulierten konventionellen Lasersystem sind Relaxationsoszillationen im Einschaltbereich des Systems auf Grund der hohen Emittterzahl besonders stark ausgeprägt, da das System durch die scharfe Grenze zwischen dem thermischen und kohärenten Emissionszustand bei  $P = P_E$  durch minimale Änderungen der Pumprate hochfrequent zwischen diesen Zuständen wechseln kann. Wird

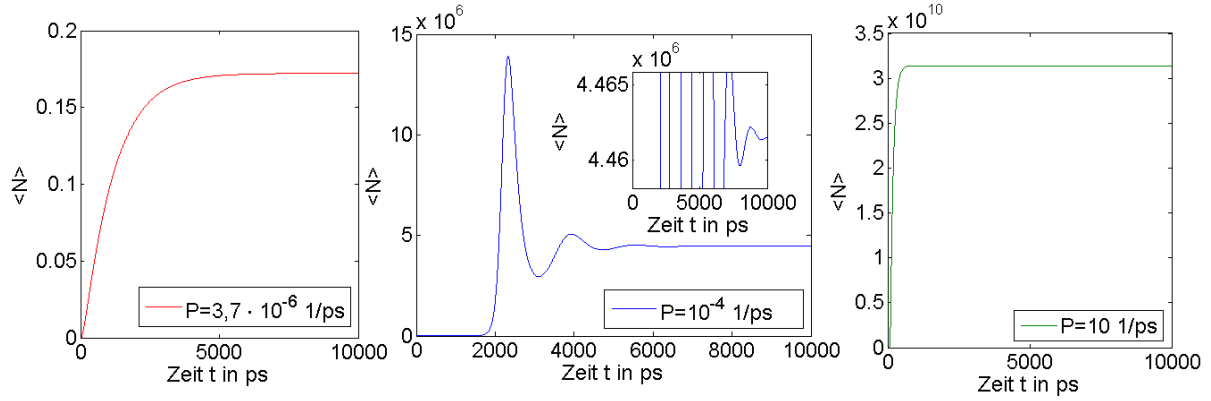


Abbildung 4.7.2: Die Grafiken zeigen den Verlauf der mittleren Photonenzahl in der Zeit für drei verschiedene Pumpraten. Der Inset der mittleren Grafik zeigt eine vergrößerte Ansicht der Relaxationsoszillationen. Die Berechnungen wurden in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau getätigt. Der verwendete Parametersatz ist der selbe wie in Abbildung 4.7.1.

nun weit abseits der Laserschwelle gepumpt, wie in den äußeren beiden Grafiken der Abbildung 4.7.2, so befindet sich das System in einem eindeutigen Zustand und es treten keine Relaxationsoszillationen auf. Es ist im Inset der mittleren Grafik der Abbildung 4.7.2 zu erkennen, dass der Wert der mittleren Photonenzahl noch recht lange in der Zeit um den stationären Wert oszilliert. Die Relaxationsoszillation ist jedoch stark gedämpft. Durch Abzählen der Durchläufe der mittleren Photonenzahl im Zeitintervall  $t \in [5, 10]$  ns des Insets der mittleren Grafik der Abbildung 4.7.2 kann die Frequenz der Relaxationsoszillation näherungsweise zu

$$\omega = 2\pi f \approx 2\pi \frac{4}{5 \text{ ns}} \approx 5,027 \text{ MHz} \quad (4.7.1)$$

bestimmt werden. Um nun den Einfluss des Aufkommens von Relaxationsoszillationen auf das Modulationsverhalten im System zu untersuchen wird das Kleinsignalverhalten des konventionellen Lasersystems erstellt. Das Kleinsignalverhalten macht eine Aussage über das Antwortverhalten eines Systems bei Ansteuerung mit einem Frequenzspektrum geringer Amplitude kurz über dem Arbeitspunkt. Der Arbeitspunkt eines Lasersystems legt sich gerade durch den stationären Zustand des Systems bei einer zeitlich konstanten Pumprate  $P$  fest. Im Gegensatz zu der um den Nullpunkt schwingenden Anregung des harmonischen Oszillators aus Kapitel 3.2 wird die oszillierende Anregung eines Systems zur Erstellung des Kleinsignalverhaltens auf eine Basisanregung aufgesetzt. Ein Frequenzspektrum geringer Amplitude über dem Arbeitspunkt eines Lasersystems kann durch

$$P(t) = P + p\delta(t - t_0) \quad (4.7.2)$$

modelliert werden, wobei  $p \ll P$  gilt. Dabei ist  $t_0$  ein Zeitpunkt nach Beginn der Anregung über die konstante Pumprate  $P$ , in dem sich das System bereits im stationären Zustand befindet. Während die Erstellung des Kleinsignalverhaltens des harmonischen Oszillators trivial ist, da durch eine Basisanregung einfach ein neuer Gleichgewichtspunkt des Systems definiert wird, hat die Hinzuziehung einer Basispumprate bei der Erstellung des Kleinsignalverhaltens von Lasersystemen den Vorteil, dass über die Anregung selbst Informationen erhalten werden können um ein System möglichst hochfrequent modullieren zu können, da die Basispumprate frei gewählt werden kann. Abgesehen davon kann erwartet werden, dass sich besondere Modulationseigenschaften im Einschaltbereich eines Lasersystems herausstellen, da dort zum einen die mittlere Photonenzahl sehr sensibel auf Variationen in der Pumprate reagiert und zum anderen dadurch bedingt das Phänomen der Relaxationsoszillationen auftritt. Durch eine Anregung wie

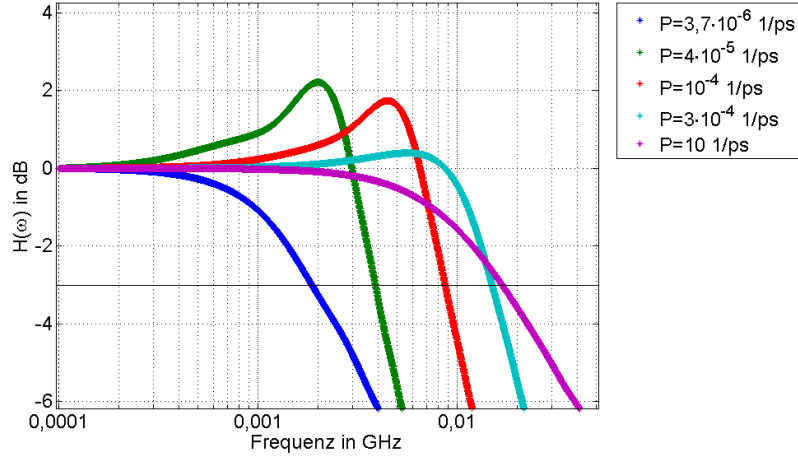


Abbildung 4.7.3: Kleinsignalverhalten des konventionellen VNL mit dem Parametersatz der Abbildung 4.7.1 für verschiedene Werte der Basispumprate  $P$ . Die Rechnungen wurden mit den Ratengleichungen durchgeführt. Die -3 dB-Linie wurde eingezeichnet.

in Gleichung 4.7.2 wird die mittlere Photonenzahl in der Resonatormode des Systems kurzzeitig ansteigen und dann wieder auf den stationären Wert relaxieren. Zur Untersuchung der am Relaxationsprozess beteiligten Frequenzanteile wird der Relaxationsprozess der mittleren Photonenzahl des Systems ab dem Zeitpunkt  $t_0$  unter Abzug des stationären Wertes  $\langle N \rangle(t_0)$  über eine diskrete Fouriertransformation (DFT) spektral zerlegt um so ein Maß für die Intensität der Reaktion eines Systems auf eine periodische Anregung mit einer definierten Frequenz zu erhalten. Der dekadische Logarithmus des Betrages der auf  $|F(0)|$  normierten Fourier-Transformierten des Relaxationsprozesses  $F(\omega) = \int_{t_0}^{\infty} dt (\langle N \rangle(t) - \langle N \rangle(t_0)) e^{-i\omega(t-t_0)}$  wird dann als normierte Modulationsantwort im Sinne eines Kleinsignalverhaltens bezeichnet. Die  $\delta$ -Puls förmige Anregung  $P(t)$  selbst kann dabei numerisch durch die Addition einer sehr schmalen Gaußkurve der maximalen Höhe  $p$  mit der Basispumprate  $P$  modelliert werden. In Abbildung 4.7.3 ist das Kleinsignalverhalten des konventionellen Vier-Niveau-Lasers zu sehen. Es ist zu erkennen, dass die Resonanzen der Modulationsantwort des Systems in sehr guter Näherung den Frequenzen der Relaxationsoszillationen entsprechen (vgl. rote Linie der Abbildung 4.7.3 mit Rechnung 4.7.1). Ebenfalls ist zu sehen, dass die Frequenzbeiträge für Frequenzen, welche größer als die der Relaxationsoszillationen sind, schnell abfallen und somit kaum am Relaxationsprozess beteiligt sind. Das Kleinsignalverhalten des konventionellen Lasersystems zeigt weiterhin deutlich, dass das Auftreten von Relaxationsoszillationen das Frequenzspektrum der Antwort eines Systems qualitativ verändert (Abbildung 4.7.3). Damit verbunden ist auch das Auftreten wesentlich höherer -3 dB-Frequenzen in den Modulationsantworten des Systems (siehe Abbildung 4.7.3), wenn Relaxationsoszillationen vorliegen. Um die Lage der Parameter gesteuerten -3 dB-Frequenz des konventionellen Lasersystems zu untersuchen, wurde die -3 dB-Linie des Systems in der Pumprate erstellt. Hier ist zunächst die sehr gute Übereinstimmung der Lösungen der -3 dB-Linien für die verschiedenen, in der Bildlegende der Abbildung 4.7.4 aufgeführten, Lösungsmethoden anzumerken. Dies bedeutet, dass zum einen die konditionale, quantenmechanische Beeinflussung zwischen Elektronen und Photonen  $\delta \langle b^\dagger b n_i \rangle$  und zwischen Photonen untereinander  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$  keinen merklichen Einfluss auf die Laserdynamik des hier betrachteten makroskopischen Emittersystems haben und zum anderem, dass auch die Markov-Näherung für den hier verwendeten Parametersatz eine sinnvolle Näherungsmethode darstellt. Die hohe Güte der Markov-Näherung ist bei dem hier berechneten Lasersmodell auf die recht hohe Dämpfungskonstante der Polarisation  $\Gamma \approx 0,5 \frac{1}{\text{ps}}$  zurückzuführen. Das in Abbildung 4.7.5 zu sehende Ergebnis der -3 dB-Linie für einen Parametersatz mit viel kleinerem  $\Gamma \approx 0,05 \frac{1}{\text{ps}}$  zeigt eine deutliche Abweichung der Markov-

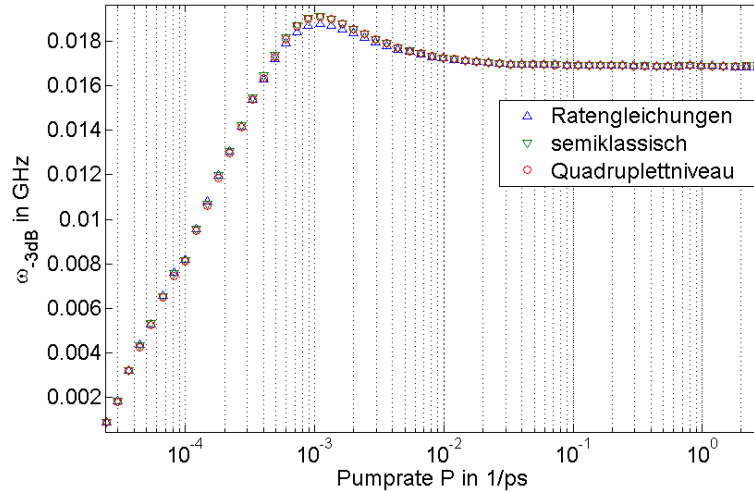


Abbildung 4.7.4: -3 dB-Linie des konventionellen VNL für den Parametersatz aus Abbildung 4.7.1. Der aus dem Parametersatz resultierende Wert der Dämpfungskonstanten der Polarisation ist  $\Gamma \approx 0,5 \frac{1}{\text{ps}}$ . Die Methode der Berechnung der -3 dB-Linie ist der Bildlegende zu entnehmen.

genäherten Lösung der Ratengleichungen gegenüber der Ergebnisse aus der Clusterentwicklung. Der Fehler der Ratengleichungen gegenüber der Clusterentwicklung macht sich insbesondere bei hohen -3 dB-Frequenzen bemerkbar. Diese Resultate sind im Konsens mit der Theorie, da die Markov-Näherung der Ratengleichungen für kleiner werdende Dämpfungskonstanten  $\Gamma$  immer schlechtere Approximationen an den tatsächlichen Sachverhalt gemäß Formel 4.5.18 liefert, insbesondere wenn die Ableitung nach der Zeit für die eckige Klammer der Gleichung 4.5.20 zu höherfrequenten Modulationen des Systems immer größer wird. Für beide Parametersätze liefern jedoch alle drei Lösungsmethoden qualitativ die selben Ergebnisse. In Abbildung 4.7.4 ist im Verlauf der -3 dB-Linie zu verzeichnen, dass die -3 dB-Frequenz mit dem Aufkommen von Relaxationsoszillationen hinter dem Einschaltpunkt erheblich ansteigt. Dies ist auch damit verbunden, dass die Resonanzen, wie in Abbildung 4.7.3 zu erkennen ist, mit steigender Basispumprate  $P$  in ihren Frequenzwerten ansteigen. Zu höheren Pumpraten, weit über dem Einschaltpunkt des Systems bei  $P = P_E$ , werden die Relaxationsoszillationen dann ausgedämpft und es stellt sich eine konstante -3 dB-Frequenz ein. Ein ähnliches Verhalten der -3 dB-Frequenz zeigt sich bei mikroskopischen Quantenpunktsystemen im folgenden Kapitel. Dort wird das Verhalten der -3 dB-Frequenzen genauer analysiert für die Variation verschiedener Systemparameter.

#### 4.8. Modulationsantwort von gering Emitter Vier-Niveau-Laser Systemen

In dieser Sektion werden mikroskopische Quantenpunktsysteme mit einem Umfang von bis zu einigen wenigen hundert Quantenpunkten auf ihre Modulationseigenschaften untersucht. Solche Systeme verfügen über sehr hohe  $\beta$ -Faktoren nahe eins [15]. Ein zentraler Punkt in den hier durchgeführten Untersuchungen ist es auch die Abweichungen der hier zur Beschreibung von Lasersystemen mit mehreren Emitttern erarbeiteten Lösungsansätze der Ratengleichungen, der semiklassischen Näherung und der Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau untereinander zu vergleichen, um so auch qualitative und quantitative Aussagen über die Einflüsse von quantenmechanischen Korrelationsfunktionen und nicht-Markovscher Effekte auf Lasersysteme tätigen zu können. Dazu wurden zunächst das Verhalten der -3 dB-Frequenz, der mittleren Photonenzahl und der Autokorrelationsfunktion in der Basispumprate  $P$  in Abbildung 4.8.1 für die drei Lösungsmethoden aufgenommen. Zunächst sollen die Ergebnisse der Abbildung 4.8.1 inhaltlich diskutiert werden um die auf verschiedenem Wege berechneten Lösungen der -3 dB-

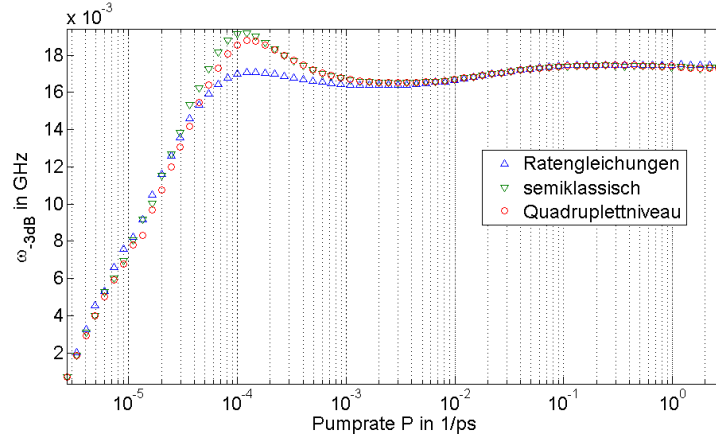


Abbildung 4.7.5: -3 dB-Linie des konventionellen VNL für den Parametersatz aus Abbildung 4.7.1. Der aus dem Parametersatz ist  $g = 10^{-5} \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\kappa = 0,01 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\gamma = 10^{-3} \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $s = 0,1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $N_A = 10^9$ . Daher sind  $\Gamma \approx 0,05 \frac{1}{\text{ps}}$  und  $\beta \approx 4 \cdot 10^{-6}$ .

Linien anschließend zu vergleichen. Unabhängig von der Lösungsmethode zeigen die -3 dB-Linien ähnliche Ergebnisse auf in Abbildung 4.8.1. Bei niedrigen Basispumpraten liegen niedrige -3 dB-Frequenzen vor, wenn sich das System im thermischen Zustand mit  $g_2(0) \approx 2$  befindet. Wechselt das System in den kohärenten Zustand treten Relaxationsoszillationen, die man an den Resonanzen der Modulationsantwort des hier simulierten Quantenpunktsystems in Abbildung 4.8.2 erkennen kann, auf und die -3 dB-Frequenz des Systems steigt stark an. Dabei liegen zwei qualitative Unterschiede in der Modulationsantwort des mikroskopischen Quantenpunktsystems in Abbildung 4.8.2 gegenüber der Modulationsantwort des konventionellen Lasersystems aus Abbildung 4.7.3 für die Variation der Basispumprate vor. Zum einen sind die Relaxationsoszillationen des Quantenpunktsystems wesentlich schwächer ausgeprägt als die des konventionellen Lasersystems. Die Ursache dafür liegt darin, dass sich der Einschaltbereich des Systems nicht in der Laserkennlinie der Abbildung 4.8.1 bemerkbar macht in Form eines abrupten Anstieges in der mittleren Photonenzahl wie in Abbildung 4.7.1. Da sich die mittlere Photonenzahl beim Quantenpunktsystem also wesentlich weniger sensibel gegenüber einer Veränderung in der Pumprate  $P$  im Einschaltbereich verhält und sich der Einschaltbereich des Systems, wie an der Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  in Abbildung 4.8.1 zu erkennen ist, über circa zwei Größenordnung in der Pumprate erstreckt, wechselt das System nicht hochfrequent zwischen den Zuständen der thermischen und kohärenten Emission und es treten nur sehr schwach ausgeprägte Relaxationsoszillationen auf. Der zweite Unterschied ist, dass die Relaxationsoszillationen beim Quantenpunktsystem zu sehr hohen Basispumpraten nicht ausgedämpft werden, wie dies beim konventionellen Lasersystem in Abbildung 4.7.3 zu erkennen ist. Dies hängt auch damit zusammen, dass sich der Einschaltbereich bei dem hier simulierten Quantenpunktsystem über mehrere Größenordnungen erstreckt. Das System ist auch zu sehr hohen Basispumpraten im Vergleich zum konventionellen Lasersystem recht empfindlich gegenüber Veränderungen in der Pumprate. Zu sehr hohen Basispumpraten sättigt die -3 dB-Frequenz des Systems dann. Die Ursache dafür ist, dass die niedrigste Übergangsrate die maximale Übertragungsfrequenz des Systems limitiert. Für den in Abbildung 4.8.1 verwendeten Parametersatz ist die kleinste Übergangsrate, die der spontanen Emission  $\frac{1}{\tau_{sp}} = R + \gamma_{ab} \approx 0,3 \frac{1}{\text{ps}}$ . Überschreitet die Pumprate diese Übergangsrate, sättigt die -3 dB-Frequenz. Da nur ein Ladungsträger im System simuliert wird, werden für  $P > R$  keine höheren Übertragungsfrequenzen des Systems mehr erreicht, weil keine anderen Ladungsträger im System enthalten sind und den Teilchen- und Informationsfluss im Vier-Niveau-System aufrecht erhalten können. Da nur ein einziges Elektron die Information über den Pumpprozess an

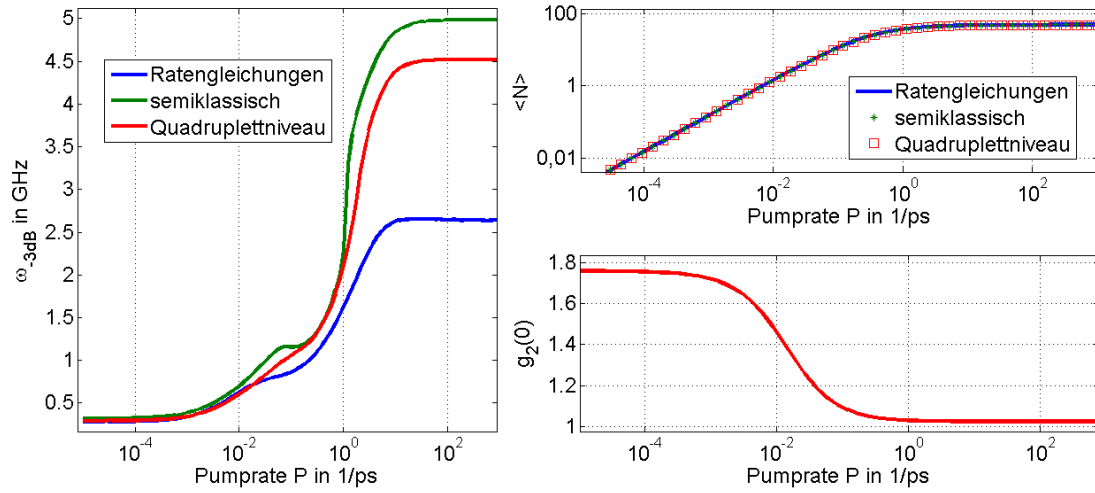


Abbildung 4.8.1: Links sind die -3 dB-Linien für die der Bildlegende zu entnehmenden Lösungsmethoden in der Pumprate eingezeichnet. Rechts oben ist die Berechnung der Kennlinie des Systems für die drei Methoden zu sehen. Rechts unten erkennt man das Ergebnis der Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau für den Verlauf der Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  in der Pumprate. Der verwendete Parametersatz ist  $g = 0,3 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\kappa = 1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\gamma_{ab} = 0,01 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $s = 1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $N_A = 150$ . Daher folgt  $\beta = 0,95$ .

das Lichtfeld weiterleiten kann, gilt strikt

$$\omega_{-3\text{dB}}(P) \leq \omega_{-3\text{dB}}(R). \quad (4.8.1)$$

$R$  kann hier im Allgemeinen als kleinste Übergangsrate gelten. Die Aussage 4.8.1 gilt in guter Näherung auch für konventionelle Lasersysteme. Bei konventionellen Lasersystemen wird ein kleiner Fehler gemacht, da die Relaxationsoszillationen des Systems so stark ausgedämpft werden. Hier wäre eine Simulation des Systems mit mehreren Elektronen angebracht um auch höhere Werte der -3 dB-Frequenzen zu erreichen. Der durch die Ein-Elektronen-Näherung gemachte Fehler ist schwerwiegend, da sich in Modellen, die sich nicht der Ein-Elektron-Näherung bedient haben, -3 dB-Frequenzen von mehreren hundert GHz ergeben für vergleichbare Parametersätze, wie sie in dieser Arbeit angenommen wurden [15]. Qualitativ scheinen jedoch auch die hier in Ein-Elektron-Näherung simulierten Systeme physikalisch sinnvolle Aussagen über das Verhalten von Lasersystemen zu liefern. Im Folgenden soll der Einfluss von quantenmechanischen Korrelationsfunktionen auf Quadruplettniveau und nicht-Markovschen Effekten auf die -3 dB-Frequenz in der Basispumprate der Abbildung 4.8.1 untersucht werden. Man erkennt, dass die -3 dB-Linien besonders zu hohen Pumpraten, wenn hohe -3 dB-Frequenzen erreicht werden, unterschiedliche Verläufe aufweisen. In diesem Bereich der hochfrequenten Modulation liefert die Markov-Näherung eine schlechte Näherung nach Formel 4.5.18, da wenn das System hochfrequent modulliert wird, die zeitliche Ableitung des Ausdrucks der eckigen Klammer der Formel 4.5.20 sehr groß wird gegenüber  $e^\Gamma$  mit  $\Gamma$  als Dämpfungskonstanten der Polarisaton  $\Psi_0$ . Interessant ist, dass die quantenmechanischen Einflüsse von Elektron-Photon  $\delta \langle b^\dagger b n_i \rangle$  und Photon-Photon  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$  Korrelationsfunktionen die Modulationseigenschaften des Systems verschlechtern, da die über die semiklassische Näherung berechnete -3 dB-Linie für alle Basispumpraten oberhalb der -3 dB-Linie verläuft, welche in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau berechnet wurde. Für niedrige Pumpraten, wenn sich das System im thermischen Zustand befindet, haben rein quantenmechanische Licht-Materie und Lichtfeld interne Wechselwirkungsbeiträge durch Korrelationsfunktionen auf Quadruplettniveau und nicht-Markovsche



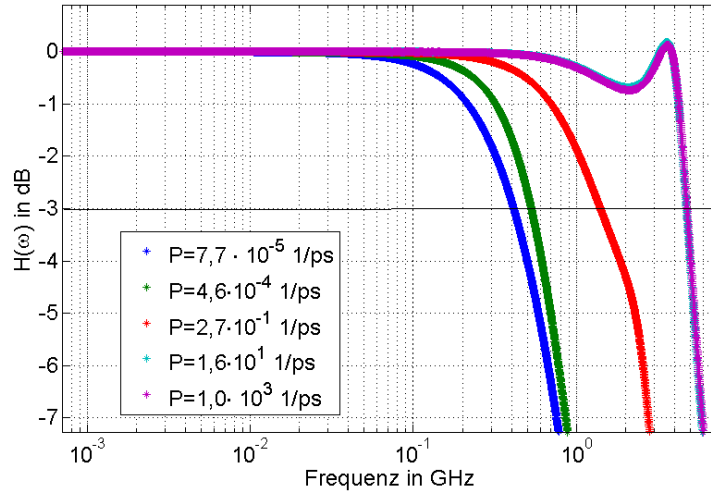


Abbildung 4.8.2: Kleinsignalverhalten für Variation der Basispumprate des Quantenpunktsystems mit dem Parametersatz aus Abbildung 4.8.1. Die -3 dB-Linie wurde eingezeichnet. Die Berechnung wurde in der semiklassischen Näherung durchgeführt. Qualitativ unterscheiden sich die Ergebnisse in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau und die der Ratengleichungen nicht von den hier dokumentierten Ergebnissen der Modulationsantworten für verschiedene Basispumpraten.

Effekte keinen Einfluss mehr auf die -3 dB-Frequenz des Systems. Drückt man das zweite statistische Moment in Korrelationsfunktionen gemäß

$$g_2(0) = 2 + \frac{\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle}{\delta \langle b^\dagger b \rangle} \quad (4.8.2)$$

aus, so erkennt man auch, dass die Photon-Photon Korrelationsfunktion für thermische Zustände ( $g_2(0) = 2$ ) bei endlichen mittleren Photonenzahlen  $\delta \langle b^\dagger b \rangle = \langle b^\dagger b \rangle < \infty$  des Systems verschwinden müssen und deren quantenmechanischer Einfluss auf das System verloren geht. Offensichtlich haben auch Elektron-Photon Korrelationsfunktionen dann keinen merklichen Einfluss mehr auf das System. Beachtlich ist, dass obwohl quantenmechanische Korrelationsfunktionen und nicht-Markovsche Effekte in bestimmten Bereichen des Systems gravierende Einflüsse auf dessen Modulationsverhalten nehmen, die stationäre mittlere Photonenzahl gänzlich unbeeinflusst von diesen Effekten ist (vgl. Laserkennlinie der Abbildung 4.8.1).

Weiterhin wurde der Einfluss der Kavitätsverluste in Abbildung 4.8.3 auf die Modulationseigenschaften des hier betrachteten Quantenpunktsystems untersucht. Es zeigt sich, dass zum Erreichen möglichst hoher -3 dB-Frequenzen die Kavitätsverluste  $\kappa$  möglichst hoch zu wählen sind, sodass sich das System jedoch noch in der kohärenten Emission befindet (vgl. Autokorrelation der Abbildung 4.8.3). Wieder zeigt sich, dass deutlich messbare Einbußen der -3 dB-Frequenzen durch die Einflüsse von quantenmechanischen Korrelationsfunktionen vorliegen, insbesondere wenn hohe -3 dB-Frequenzen auftreten. Auch ist zu erkennen, dass die Ratengleichungen einen stark Abweichenden Verlauf der -3 dB-Linie gegenüber der Clusterentwicklung aufweisen. Alle drei Lösungen zeigen aber die selben Modulationseigenschaften des Systems auf für sehr hohe und sehr niedrige Kavitätsverluste. Die Gleichheit der Lösungen für sehr niedrige Kavitätsverluste ist darauf zurückzuführen, dass sehr geringe Resonatorverluste dazu führen, dass nur sehr wenige Photonen die Kavität als Laserstrahl verlassen können um sich an der Signalübertragung zu beteiligen. Wenn nur sehr wenige Photonen pro Zeiteinheit die Kavität verlassen können, wird eine obere Schranke für die Übertragungsfrequenz von Signalen festgelegt, die offensichtlich für alle Lösungsmethoden gültig ist. Die Gleichheit der drei Lösungen für sehr hohe Resonatorverluste begründet sich zum einen dadurch, dass alle höheren Korrelationen

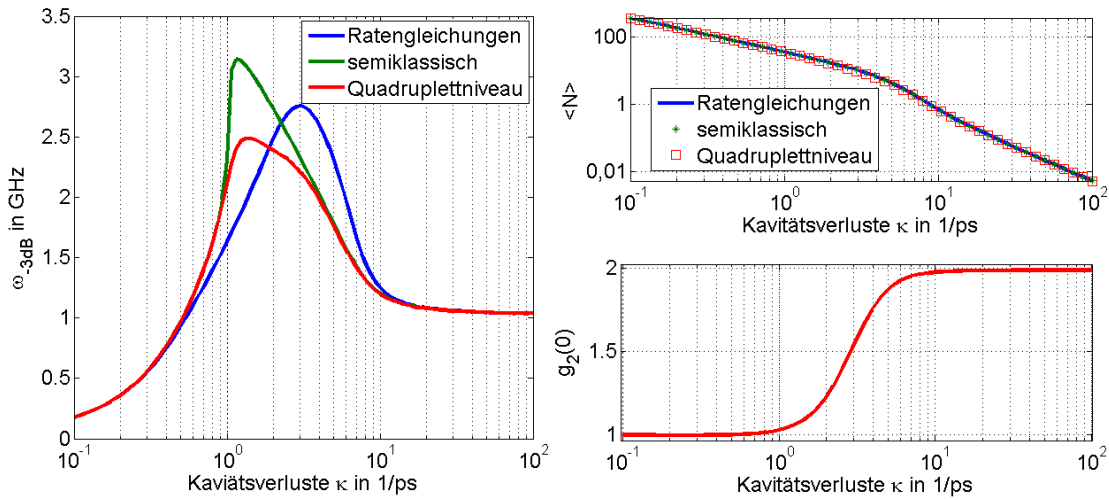


Abbildung 4.8.3: Links sind die -3 dB-Linien für die der Bildlegende zu entnehmenden Lösungsmethoden in den Kavitätsverlusten eingezeichnet. Rechts oben ist die doppellogarithmisch in den Kavitätsverlusten aufgetragene stationäre mittlere Photonenzahl des Systems für die drei Methoden zu sehen. Rechts unten erkennt man das Ergebnis der Clusterentwicklung auf Quadrupelettniveau für den Verlauf der Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  in den Kavitätsverlusten. Der verwendete Parametersatz ist  $g = 0,3 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $P = 1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\gamma_{ab} = 0,01 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $s = 1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $N_A = 150$ .

der Lasergleichungen auf Quadrupelettniveau der Clusterentwicklung, beginnend ab Gleichung 4.5.11, proportional zu  $\kappa$  ausgedämpft werden (und somit auch deren Korrelationsfunktionen [12]) und an Bedeutung verlieren und zum anderen darin, dass die Dämpfungskonstante  $\Gamma$  der Polarisation  $\Psi_0$  proportional mit dem Wert von  $\kappa$  anwächst. Da hohe Werte von  $\Gamma$  eine höhere Güte der Markov-Näherung 4.5.18 nach sich ziehen, liefern die Ratengleichungen auch genauere Ergebnisse für die -3 dB-Frequenz bei hohen Kavitätsverlusten. Wieder ist zu erkennen, dass das Vorliegen des kohärenten Zustandes ein vorangestelltes Kriterium ist im Hinblick auf die Optimierung der Modulationseigenschaften und dass weder quantenmechanische Korrelationsfunktionen auf Quadrupelettniveau noch nicht-Markovsche Einflüsse Auswirkungen auf die stationäre mittlere Photonenzahl des Systems haben (vgl. Abbildung 4.8.3).

Zudem wurden die Resultate der Modulationseigenschaften von Quantenpunktsystemen der drei verschiedenen Lösungsansätze der Ratengleichungen, der semiklassischen Näherung und der Clusterentwicklung auf Quadrupelettniveau auch für die Variation der Emittierzahl  $N_A$  untersucht. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.8.4 zu erkennen. Wieder zeigt sich, dass die stationäre mittlere Photonenzahl nicht durch quantenmechanische Korrelationsfunktionen und nicht-Markovsche Effekte beeinflusst wird im Gegensatz zur -3 dB-Frequenz des Systems. Auch für die Variation der Emittierzahl, sollen die in Abbildung 4.8.4 zu sehenden Grafiken inhaltlich untersucht werden bevor die Unterschiede der Resultate der drei hier verwendeten Lösungsmethoden für die in Abbildung 4.8.4 untersuchten Größen herausgestellt werden. Es zeigt sich, dass sich die stationäre mittlere Photonenzahl streng proportional zur Emittierzahl  $N_A$  verhält, da die rechte obere Grafik der Abbildung 4.8.4 eine Ursprungsgerade zeigt. Im Verlauf der Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  der Abbildung 4.8.4 lässt sich erkennen, dass das Lichtfeld des hier betrachteten Quantenpunktsystems für sehr geringe Emittierzahlen ( $N_A < 10$ ) sub-poissonischen Charakter aufweist ( $g_2(0) \in [0, 1]$ ). Damit verbunden sind sehr niedrige

-3 dB-Frequenzen des Systems. Die Ursache dessen sind zum einen die sehr niedrigen stationären mittleren Photonenzahlen in der Resonatormode in diesem Bereich. Dadurch können nur sehr wenige Photonen in den Laserstrahl emittieren, sodass dessen Informationsgehalt entsprechend



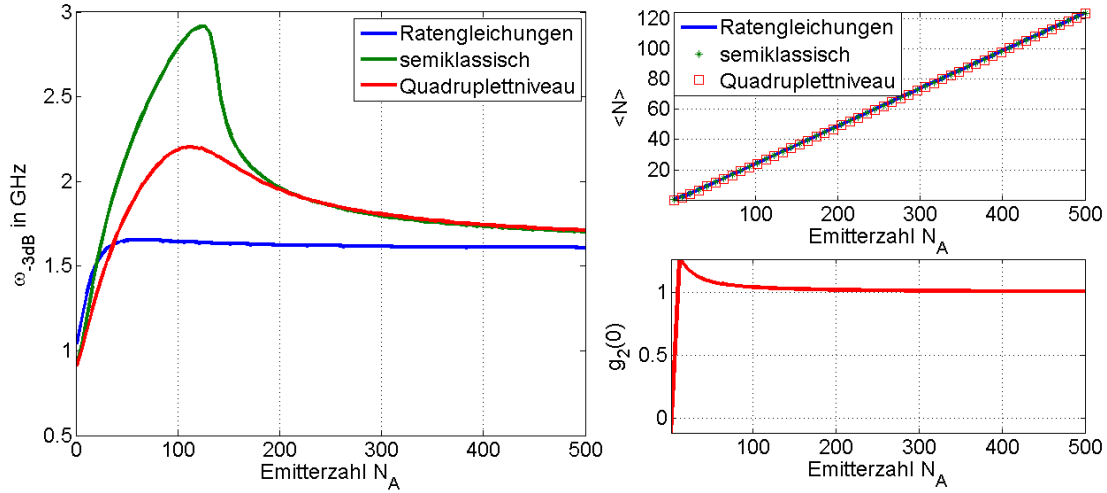


Abbildung 4.8.4: Links sind die -3 dB-Linien für die der Bildlegende zu entnehmenden Lösungsmethoden in der Emittierzahl eingezeichnet. Rechts oben ist die linear in der Emittierzahl aufgetragene stationäre mittlere Photonenzahl des Systems für die drei Methoden zu sehen. Rechts unten erkennt man das Ergebnis der Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau für den Verlauf der Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  in der Emittierzahl. Der verwendete Parametersatz ist  $g = 0,3 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\kappa = 1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\gamma_{ab} = 0,01 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $s = 1 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $P = 1 \frac{1}{\text{ps}}$ . Daher folgt  $\beta = 0,95$ .

gering ist. Zum anderen hängt dies auch mit der sub-poissoisch verteilten Photonenzahlstatistik (Anti-Bunching) des Systems für  $g_2(0) < 1$  zusammen. Das Anti-Bunching nicht klassischer Lichtquellen ( $g_2(0) < 0,5$ ) führt dazu, dass Photonen bevorzugt einzeln in näherungsweise konstanten zeitlichen Abständen aus der Kavität austreten (vgl. Abbildung 3.1.1). Zur Unterscheidung der Zustände 0 und 1 eines Lasersystems über die Messung der Intensität des Laserstrahls in der Zeit, wie in Kapitel 3.2 erläutert worden ist, erweisen sich nicht klassische Lichtfeldzustände also als ungeeignet. Tritt das System zu höheren Emittierzahlen in den kohärenten Zustand über, so erhöhen sich die -3 dB-Frequenzen stark, da das System Relaxationsoszillationen ausprägt, wie in Abbildung 4.8.5 zu sehen ist. Dazu ist noch zu sagen, dass die Resultate der Berechnung der Modulationsantwort über die semiklassische Näherung sich nicht qualitativ von der in Abbildung 4.8.5 in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau berechneten Modulationsantwort unterscheidet. Die entsprechende, über die Ratengleichungen berechnete, Modulationsantwort des Systems weist keine Relaxationsoszillationen auf. Da die Markov-genäherten Ratengleichungen mehr Näherungsannahmen unterliegen als die Gleichungen der Clusterentwicklung, es sich demnach um eine Theorie niedrigerer Ordnung handelt und der über die Ratengleichungen berechnete Verlauf der -3 dB-Frequenz sich deutlich von den entsprechenden Berechnungen in Clusterentwicklung in Abbildung 4.8.4 unterscheidet, wird im Folgenden nur auf die in Clusterentwicklung ermittelten Ergebnisse der Modulationseigenschaften des hier betrachteten Systems eingegangen. Die -3 dB-Frequenzen der Clusterentwicklung in Abbildung 4.8.4 erreichen mit steigender Emittierzahl ein lokales Maximum und fallen dann auf einen konstanten Wert ab. Dies ist darauf zurückzuführen, dass bei konstanter Basispumprate  $P$  eine Überhöhung der Emittierzahl des hier simulierten Quantenpunktsystems zu einer Ausdämpfung der Relaxationsoszillationen führt (vgl. Abbildung 4.8.5), sodass die -3 dB-Frequenzen zu höheren Emittierzahlen  $N_A > 120$  in dem hier untersuchten Modell wieder abfallen. Hier sei jedoch noch gesagt, dass durch Anpassung der anderen Parameter an die Emittierzahl mit steigender Emittierzahl höhere maximale -3 dB-Frequenzen erreicht werden können. Dazu wurde exemplarisch die -3 dB-Linie in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau für ein System mit  $N_A = 250$  Emittlern berechnet und in Abbildung 4.8.6 dokumentiert. Es ist zu erkennen, dass wesentlich höhere -3 dB-Frequenzen über

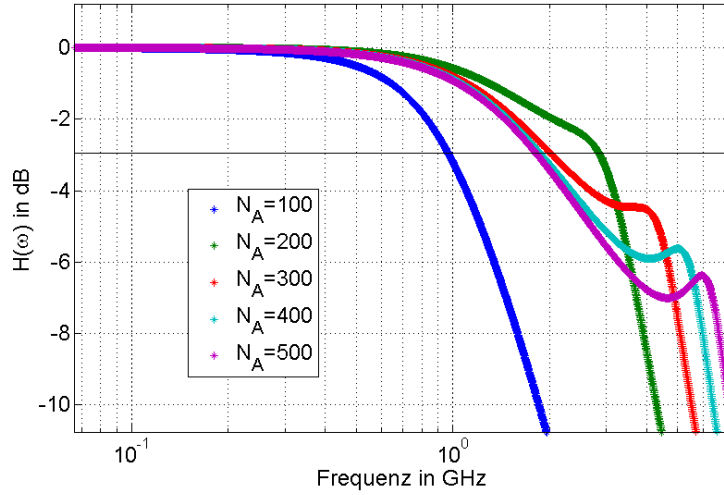


Abbildung 4.8.5: Kleinsignalverhalten für Variation der Emittierzahl des Quantenpunktsystems mit dem Parametersatz aus Abbildung 4.8.1. Die -3 dB-Linie wurde eingezeichnet. Die Berechnungen wurden in Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau durchgeführt.

10 GHz mit dem in Abbildung 4.8.6 simulierten Quantenpunktsystem, dessen Parametersatz auf die Emittierzahl  $N_A = 250$  hinsichtlich der Modulationseigenschaften optimiert wurde, erreicht werden können gegenüber dem in Abbildung 4.8.1 simulierten Quantenpunktsystem mit  $N_A = 150$  Emitttern.

An dieser Stelle ist noch zu sagen, dass die quantenmechanischen Einflüsse durch Korrelationsfunktionen auf Quadruplettniveau auf die Modulationseigenschaften des in Abbildung 4.8.4 simulierten Quantenpunktsystems nicht zu vernachlässigen sind. Die maximale, semiklassisch berechnete -3 dB-Frequenz der Abbildung 4.8.4 bedarf einer 30%-igen Korrektur zu niedrigeren Werten um mit der maximalen -3 dB-Frequenz der roten Linie bei  $N_A \approx 120$  in Abbildung 4.8.4 übereinzustimmen. Damit zeigt sich weiterhin konsequent für alle Parametervariationen, dass die durch die Korrelationsfunktionen hervorgerufenen Wechselwirkungsbeiträge zwischen Licht und Materie  $\delta \langle b^\dagger b n_i \rangle$  und Photonen untereinander  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$  die Modulationseigenschaften von Quantenpunktsystemen verschlechtern. In Abbildung 4.8.4 ist zu erkennen, dass quantenmechanische Korrelationsfunktionen auf Quadruplettniveau keine Rolle für die Modulationseigenschaften des Systems spielen, insofern sich das Lichtfeld in einem sub-poissonischen Zustand befindet ( $g_2(0) < 1$ ), da die rote und die grüne -3 dB-Linie das selbe Verhalten für  $N_A < 10$  aufweisen. Ebenfalls konvergieren die beiden eben genannten -3 dB-Linien für steigende Emittierzahlen gegeneinander. Dies deckt sich auch mit den Ergebnissen des konventionellen Lasersystems, bei dessen Untersuchung sich herausstellte, dass quantenmechanische Kopplungseffekte durch die Korrelationsfunktionen  $\delta \langle b^\dagger b n_i \rangle$  und  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$  keine Bedeutung für das makroskopische Emittersystem haben. Offensichtlich findet bei einer Vergrößerung des Systems im Sinne der Steigerung der Emittierzahl eine Mittlung der Werte der quantenmechanischen Korrelationsfunktionen  $\delta \langle b^\dagger b n_i \rangle$  und  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$  statt, sodass diese mit der Systemgröße  $N_A$  an Einfluss auf das System verlieren. Die wesentlichen Ergebnisse dieser Sektion sollen im folgenden Kapitel mit den anderen Ergebnissen dieser Arbeit in einen Kontext gebracht und zusammengefasst werden.

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es den Einfluss von nicht-Markovschen und quantenmechanischen Effekten, induziert durch höhere Licht-Materie und Lichtfeld interne Korrelationsfunktionen, auf

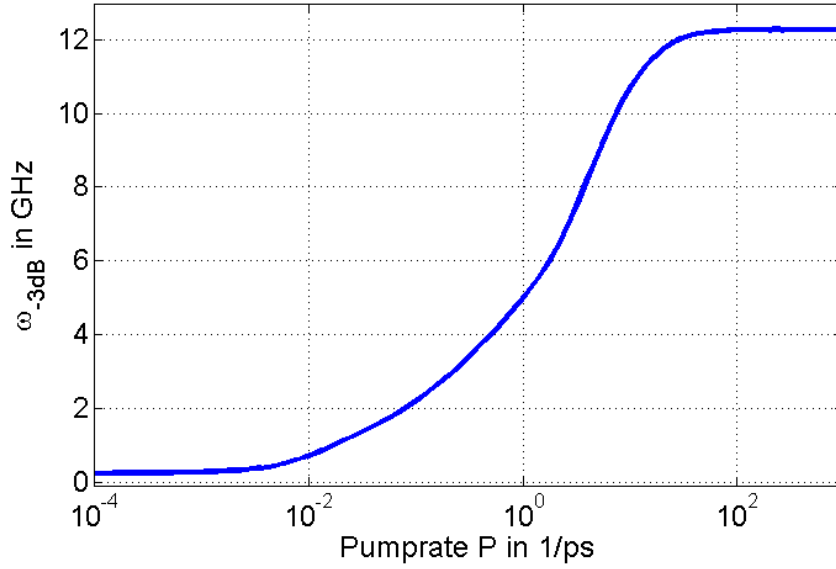


Abbildung 4.8.6: Zu sehen ist die über die Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau berechnete -3dB-Linie für ein System bestehend aus  $N_A = 250$  Quantenpunkten. Der auf diese Emitterzahl im Hinblick auf die Modulationseigenschaften des Quantenpunktsystems optimierte Parametersatz ist  $g = 0,5 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\kappa = 3 \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $\gamma_{ab} = 10^{-4} \frac{1}{\text{ps}}$ ,  $s = 2 \frac{1}{\text{ps}}$ . Daher folgt  $\beta = 0,99$ .

die Dynamik und den Gleichgewichtszustand von Zwei- und Vier-Niveau-Lasersystemen in Ein-Elektron-Näherung zu untersuchen. Dazu wurde zunächst im Theoriekapitel eine Theorie zur vollständig quantenmechanischen Beschreibung von Licht, Materie und deren Wechselwirkung untereinander über die Quantisierung von Lichtfeldern und die quantenmechanische Beschreibung der Licht-Materie Wechselwirkung in Dipolnäherung durch den Jaynes-Cumming Hamiltonoperator erarbeitet. Durch die Licht-Materie Wechselwirkungsbeiträge des Jaynes-Cumming Hamiltonoperator nimmt das aus den Heisenbergschen Bewegungsgleichungen resultierende Differentialgleichungssystem zur Beschreibung der Dynamik von Erwartungswerten der hier betrachteten Lasersysteme den Charakter eines Hierarchieproblems an. Durch die Ein-Elektron-Näherung sind die Differentialgleichungen dieses Hierarchieproblems rekursiv zu definieren, wodurch eine effiziente numerische Handhabung des Problem ermöglicht wird. Indem Erwartungswerte einer definierten Ordnung Null gesetzt werden, können die das jeweilige Lasersystem beschreibenden Differentialgleichungssysteme geschlossen werden. Es zeigt sich, dass die Lösungen der Zeitentwicklung der hier betrachteten Lasersysteme mit der Ordnung an noch berücksichtigten Bewegungsgleichungen des Differentialgleichungssystems konvergieren (vgl. Abbildung 4.2.3). Diese Erkenntnis führt zu den zwei Aussagen, dass unendlich hohe Korrelationen keinen Einfluss mehr auf die Systemdynamik der hier betrachteten Lasersysteme haben und dass der in dieser Arbeit verwendete Lösungsansatz des Abbruchs der Lasergleichungen durch Nullsetzung von sehr hohen Korrelationen eine sehr exakte Lösungsmethode der hier zu behandelnden Hierarchieprobleme darstellt. Dieser sehr rechenaufwendigen Lösungsmethode steht die Clusterentwicklung gegenüber, die unbekannte Erwartungswerte des Systems in bekannte faktorisiert und die Berechnung höherer Korrelationen implizit beinhaltet. Im Vergleich dieser beiden Methoden zeigte sich, dass die Clusterentwicklung in wesentlich niedrigerer Ordnung durchgeführt werden kann als die Nullsetzung von Korrelationen um den stationären Zustand der hier betrachteten Lasersysteme sehr genau zu berechnen. Speziell für die Untersuchung der Quadruplettordnung der Clusterentwicklung ergab sich, dass klassische Größen des Systems wie die mittleren Energieniveaubesetzungen und die mittlere Photonenzahl der Resonatormode als

auch niedrige statistische Momente wie die Autokorrelationsfunktion  $g_2(0)$  sehr genau durch die Clusterentwicklung auf dem niedrigen Quadruplettniveau im Vergleich zum 99-Multiplettniveau der Nullsetzung wiedergegeben werden können (vgl. Abbildung 4.3.1). Jedoch ergab sich auch, dass die implizite approximative Berechnung sehr hoher bosonischer Korrelationen durch die Clusterentwicklung zu erheblichen relativen Fehlern führt, sodass die Erstellung einer Photonstatistik aus der Clusterentwicklung auf Quadruplettniveau erheblichen numerischen Einschränkungen unterlegen ist, insbesondere dann wenn kohärente Lichtfeldzustände vorliegen (vgl. Abbildung 4.3.2 und 4.3.3).

Für die Betrachtung mehrerer Emittter im System wächst der Rechenaufwand der Methode des Abbruchs des linearen Differentialgleichungssystems durch Nullsetzung so stark an um verlässliche Ergebnisse zu erwarten, dass die Clusterentwicklung unverzichtbar wird für die Simulation und Untersuchung der Modulationseigenschaften von Quantenpunktsystemen mit einem Umfang von bis zu mehreren hundert Emitttern oder makroskopischen konventionellen Lasersystemen. In der Untersuchung der Modulationseigenschaften dieser beiden, sich hauptsächlich in der Anzahl ihrer Emittter unterscheidenden, Systeme stellte sich heraus, dass die Emittterzahl  $N_A$  der hier simulierten Lasersysteme eine einflussreiche Größe auf das Modulationsverhalten darstellt. Die Ursachen dafür wurden im Kapitel 4.4 ermittelt, in dem der Einfluss der Emittterzahl auf die stationäre mittlere Photonenzahl und die Autokorrelationsfunktion zweiten Grades  $g_2(0)$  von Zwei- und Vier-Niveau-Systemen untersucht worden ist, wobei lediglich das unrealistischere Zwei-Niveau-System dokumentiert worden ist, da bei diesem System eine Erhöhung der Pumprate zur Dephasierung des Systems beiträgt und die Dephasierung sich als sehr einflussreiches Phänomen auf die Modulationseigenschaften von Lasersystemen herausstellt, insofern als dass eine so starke Dephasierung, sodass das Lasersystem in den thermischen Zustand übergeht, die Modulationseigenschaften dieses Systems stark verschlechtern im Sinne einer Absenkung der -3 dB-Frequenz des betrachteten Lasers. Die beiden wichtigen Erkenntnisse der Sektion 4.4 sind zum einen, dass eine Erhöhung der Emittterzahl der Dephasierung des Systems entgegenwirkt und dass eine Erhöhung der Anzahl der Emittter eines Systems dessen Einschaltbereich in der Pumprate verkleinert, sodass das Auftreten von Relaxationsoszillationen des Systems begünstigt wird (vgl. Abbildung 4.4.1), was sich in der Betrachtung des konventionellen Vier-Niveau-Lasers besonders deutlich macht (vgl. Abbildung 4.7.1 und 4.7.2). Unabhängig davon, ob nun ein makroskopisches konventionelles oder mikroskopisches Quantenpunkt-Lasersystem betrachtet wird, zeigt sich, dass das Auftreten von Relaxationsoszillationen die -3 dB-Frequenz der hier betrachteten Lasersysteme erhöht und somit die Modulationseigenschaften dieser Systeme verbessert (vgl. Abbildung 4.7.3 und 4.8.2). Im Allgemeinen lassen sich darüber hinaus die in Sektion 4.8 gewonnenen Erkenntnisse über das Modulationsverhalten von Quantenpunktlasern auf einige wenige Thesen für die Wahl der Parameter zur Optimierung der Modulationseigenschaften des Systems reduzieren. Diese Thesen gelten ferner auch für konventionelle Lasersysteme. Sie lauten:

- Die Basispumprate  $P$  ist möglichst hoch zu wählen,
- Die Kavitätsverluste  $\kappa$  sollten möglichst groß sein, jedoch noch so klein, dass sich das System nicht in der thermischen Emission befindet,
- Die spontane Emission in Verlustmoden  $\gamma_{ab}$  sollte möglichst gering sein,
- Die Relaxationsrate  $s = \gamma_{bc} = \gamma_{da}$  sollte möglichst hoch sein, jedoch noch so klein, sodass das System nicht durch zu starke Dephasierung durch den Beitrag von  $\gamma_{bc}$  thermisches Licht emittiert.

Die letzten beiden Punkte wurden in Sektion 4.8 nicht dokumentiert, ergaben sich jedoch im Rahmen der Auswertungsarbeiten dieser Arbeit. Da alle Übergangsraten möglichst hoch zur Optimierung der Modulationseigenschaften von Lasersystemen zu wählen sind, mit der vorangestellten Bedingung, dass das betrachtete Lasersystem kohärentes Licht emittiert und die Erhöhung der Emittterzahl einer Dephasierung entgegenwirkt (vgl. Abbildung 4.4.1) und die

Ausbildung von Relaxationsoszillationen begünstigt (vgl. Abbildung 4.7.2), können über Anpassung der Parameter an die Emitterzahl nach den oben aufgelisteten Thesen mit steigender Emitterzahl immer höhere -3 dB-Frequenzen des Systems erreicht werden (vgl. Abbildung 4.8.6). Dadurch dass eine Erhöhung der Emitterzahl mit einem höheren Energieverbrauch einhergeht, sind in der Konstruktion von Quantenpunktsystemen Kompromisse zwischen dem Energieverbrauch und der maximalen Übertragungsfrequenz des Systems zu schließen.

Die aus Sicht der theoretischen Physik noch interessanteren Erkenntnisse aus den Ergebnissen 4.7 und 4.8 sind, dass mit zunehmender Miniaturisierung der betrachteten Vier-Niveau-Lasersysteme nicht-Markovsche Effekte und durch Korrelationsfunktionen induzierte quantenmechanische Wechselwirkungsbeiträge zwischen Licht und Materie ( $\delta \langle b^\dagger b n_i \rangle$ ) und Photonen untereinander ( $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle$ ) immer mehr an Bedeutung gewinnen. So zeigte sich, dass makroskopische konventionelle Vier-Niveau-Lasersysteme schon sehr genau durch die Ratengleichungen beschrieben werden können (vgl. Abbildung 4.7.4 und 4.7.5), während sich die Ratengleichungen zur Beschreibung von Quantenpunktsystemen im kohärenten Zustand als gänzlich ungeeignet erwiesen haben. Eine besonders interessante Erkenntnis der Sektion 4.8 ist, dass der Einfluss der eben genannten quantenmechanischen Wechselwirkungsbeiträge auf Quadruplettniveau zu immensen Einbußen der -3 dB-Frequenz, also zu einer Verschlechterung der Modulationseigenschaften der hier simulierten Quantenpunktsysteme führt, wenn sich diese im kohärenten Zustand befinden. Die semiklassische Lasertheorie stellt sich hinsichtlich der Modulationseigenschaften der hier modellierten Lasersysteme als Grenzfall der quantenmechanischen Lasertheorie heraus, wenn keine kohärenten Lichtfeldzustände vorliegen, sprich sub-poissonische oder thermische Lichtfeldzustände (vgl. Abbildung 4.8.1 und 4.8.4), für die Wahl sehr kleiner oder sehr großer Kavitätsverluste (vgl. Abbildung 4.8.3) und in der Betrachtung sehr großer Systeme (vgl. Abbildung 4.8.4 und 4.7.1). Obwohl alle Untersuchungen der Modulationseigenschaften dieser Arbeit physikalisch nachvollziehbare Ergebnisse liefern, ist diese Arbeit mit der Aussage zu schließen, dass die hier simulierten Quantenpunktsysteme auf Grund der Ein-Elektron-Näherung wesentlich geringere -3 dB-Frequenzen erreichen als dies in der Realität der Fall ist, weshalb dies eine große Motivation dafür bietet die hier angewandten Lasergleichungen auch für mehrere Ladungsträger in Lasersystemen zu formulieren. Da die Elektron-Loch Paarbildung in Halbleitersystemen von der Anregung des Systems selbst abhängt, stellt die Formulierung einer quantenmechanischen Halbleiterlasertheorie einen wesentlichen Ausblick dieser Arbeit dar, um so auch kompliziertere Halbleiterlasersysteme auf ihre Modulationseigenschaften untersuchen zu können.

## Literatur

- [1] Hildegard Uecker, Andreas Sorge, *Seminar Quantenmechanik II, Quantum Dots*. Institut für Theoretische Physik, Georg August Universität Göttingen, Januar 2006
- [2] C. Gies *Seminar Quantenmechanik II, Höhere Quantenmechanik, Quantenoptik*. Institut für Theoretische Physik, Universität Bremen, 2014
- [3] C. Gies, *Micropillar Laser*.  
[www.itp.uni-bremen.de/images/ag-jahnke/Mikrolaser\\_Quantenpunkte-sm.jpg](http://www.itp.uni-bremen.de/images/ag-jahnke/Mikrolaser_Quantenpunkte-sm.jpg),  
27.08.2015 00:48 2015
- [4] David Klosik, *Quantenmechanische Modelle zur Beschreibung von Relaxationsoszillationen in Lasern*. Bachelorarbeit, Universität Bremen, 2009
- [5] G. Czycholl, *Theoretische Festkörperphysik*. Springer, 3. Auflage, Universität Bremen, 2012
- [6] W. Demtroeder, *Experimentalphysik 3*. Springer, 5. Auflage, New York, 2005
- [7] W. Demtroeder, *Experimentalphysik 4*. Springer, 4. Auflage, New York, 2007

- 
- [8] W. Nolting, *Grundkurs theoretische Physik 7*. Springer, 4. Auflage, New York, 2005
  - [9] K. Baumann G.C. Hegerfeldt, *A Nonkommutative Marcinkiewicz Theorem. Publ. RIMS Kyoto Univ. 21(1985) 191-204*, Kyoto, 1985
  - [10] D.F. Walls G.F. Milburn, *Quantum Optics*. Springer, Heidelberg New York, 2007
  - [11] D. Preißer, *Theorie der quantenoptischen und nicht-linearen Eigenschaften von Halbleiterlasern*. Dissertation, Stuttgart, 2001
  - [12] Alexander Steinhoff, *Photonenstatistik des Ein-Atom-Lasers*. Bachelorarbeit, Universität Bremen, 2009
  - [13] K. Schuh, *Polaronen in Halbleiter-Quantenpunkten*. Diplomarbeit, 2008
  - [14] T.O. Wehling, *Seminar Quantenmechanik II, Höhere Quantenmechanik*. Institut für Theoretische Physik, Universität Bremen, 2014
  - [15] M. Lorke, T Suhr, N Gregersen, J. Mork , *Modulation response of quantum dot nanolight-emitting-diodes exploiting purcell-enhanced spontaneous emission. Applied Physics Letters 98, 211109 (2011); doi: 10.1063/1.3592571*
  - [16] Thorsten Fließbach, *Elektrodynamik Lehrbuch zur Theoretischen Physik II*. Spektrum Akademischer Verlag, 6. Auflage, Universität Siegen, 2012
  - [17] Wolfgang Nolting, *Klassische Mechanik*. 7. Auflage, 2005
  - [18] N. Baer, C. Gies, J. Wiersig and F. Jahnke, *Luminescence of a Semiconductor Quantum Dot System. Eur. Phys. J. B, 50:411, 2006.*
  - [19] R. H. Brown and R. Twiss. *Correlation between photons in two coherent beams of light. Nature, 177:27–29, 1956.*
  - [20] W. Chow and F. Jahnke *Review On the physics of semiconductor Quantum dots for applications of laser quantum dot optics. Progress in Quantum Electronics, 37(2013)109-184.*
  - [21] J. Kehlbeck *Aufbau eines Versuchs für das Fortgeschrittenenpraktikum am Beispiel des He-Ne-Lasers*, Bachelorarbeit, Universität Bremen, 2012.

## A. Anhang

### A.1. Rotating Wave Approximation

Die Rotating Wave Approximation (RWA) ist eine Näherung für die Lösung von linearen Differentialgleichungen der Form

$$\frac{d}{dt}y(t) = (a(t)y(t) + f(t))e^{ict} + (b(t)y(t) + g(t))e^{idt} \quad , c, d \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1.1})$$

in der der zweite Summand der Differentialgleichung vernachlässigt wird unter den Voraussetzungen, dass

$$|d| \gg |c|, \quad |d(a(t)y(t) + f(t))| \gg |c(b(t)y(t) + g(t))| \quad \forall t \quad (\text{A.1.2})$$

gilt. Anschaulich wird bei dieser Näherung ein sich schnell ändernder, oszillierender Anteil geringer Amplitude im Vergleich zu den absoluten Beträgen der Lösungsfunktion aus dieser herausgefiltert. Die folgenden Grafiken zeigen die Lösung einer Differentialgleichung der Form A.1.1, welche A.1.2 genügt, mit und ohne RWA.

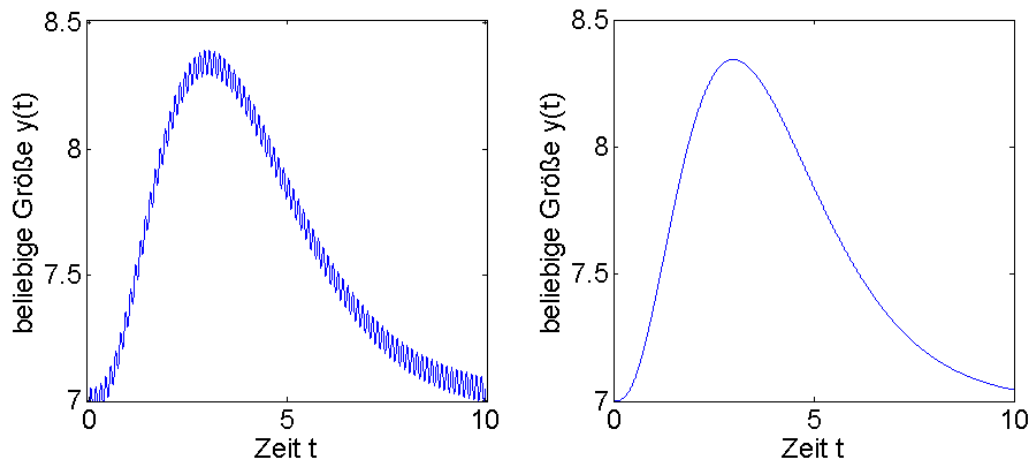


Abbildung A.1.1: Lösung einer Differentialgleichung der Form A.1.1 in RWA (rechts) und ohne RWA (links). Obwohl die meisten Differentialgleichungssysteme in dieser Arbeit numerisch gelöst werden, hat man sich nichts desto trotz für die Anwendung der RWA entschieden, da dies den Rechenaufwand senkt, insbesondere für Solver, welche besonders geeignet für steife Differentialgleichungen sind.

Es zeigt sich, dass sich die wesentliche Systemdynamik durch eine RWA nicht ändert unter den Konditionen A.1.2.