

UNIVERSITÄT BREMEN  
FACHBEREICH 01  
INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

## MASTER-THESIS

---

Kohärenzeigenschaften von Gewinnmaterialien mit  
diskreter und kontinuierlicher Zustandsdichte

---

Roy Barzel

Matrikelnummer: 2789738  
Fachbereich: 1 Physik/Elektrotechnik  
Studiengang: Physik Volfach  
Erstgutachter: Dr. Christopher Gies  
Zweitgutachter: Dr. Kathrin Sebald

eingereicht am: 18. Dezenmer 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Kohärenzeigenschaften von Gewinnmaterialien mit diskreter Zustandsdichte</b>	<b>6</b>
2.1. $N$ identische Zwei-Niveau-Emitter . . . . .	6
2.2. Beschreibung nach Jaynes-Cummings . . . . .	7
2.2.1. Hamiltonoperator . . . . .	7
2.2.2. Dichtematrixformalismus . . . . .	8
2.3. Mastergleichung . . . . .	9
2.3.1. Anwendung . . . . .	11
2.4. Clusterentwicklung . . . . .	12
2.4.1. Ratengleichungen . . . . .	13
2.4.2. Erweiterung der Ratengleichungen (Quadruplettgleichungen) . . . . .	15
2.5. Analytisches Ergebnis für $g^2(0)$ . . . . .	16
2.5.1. Analytisches Ergebnis für $g^2(0)$ aus den Quadruplettgleichungen . . . . .	16
2.5.2. Berechnung von $g^2(0)$ aus der Photonenzahl . . . . .	17
2.5.3. Vergleich zur Mastergleichung . . . . .	18
2.6. Betrachtung des Lasingübergangs . . . . .	19
2.6.1. Definition der Laserschwelle . . . . .	19
2.6.2. Photonenzahl beim Übergang in die kohärente Emission . . . . .	22
2.6.3. Aufbau von Kohärenz oberhalb der Laserschwelle . . . . .	24
2.7. Zusammenfassung . . . . .	27
<b>3. Kohärenzeigenschaften von Gewinnmaterialien mit kontinuierlicher Zustandsdichte</b>	<b>30</b>
3.1. Einführung in das Materialsystem . . . . .	31
3.1.1. Photonischer Kristall-Resonator . . . . .	32
3.1.2. Quantenfilm-Gewinnmaterial . . . . .	33
3.2. Quantenmechanische Lasertheorie . . . . .	35
3.2.1. Lokalisierte Resonatormode . . . . .	36
3.2.2. Licht-Materie Wechselwirkung . . . . .	39
3.2.3. Elektronen im Quantenfilm und Bloch-Theorem . . . . .	40
3.2.4. Hamiltonoperator in der Blochbasis . . . . .	42
3.2.5. Nanobeam Lasergleichungen . . . . .	46
3.2.6. Berechnung des $\beta$ -Faktors . . . . .	50
3.3. Theorie und Experiment im Vergleich . . . . .	50
3.4. Modellierung durch diskrete Emitter . . . . .	55
3.5. Zusammenfassung . . . . .	57
<b>4. Positionierung, Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>59</b>
<b>A. Berechnung von Erwartungswerten im Dichtematrixformalismus</b>	<b>61</b>
<b>B. Herleitungsskizze der Mastergleichung</b>	<b>61</b>
<b>C. Numerische Implementation der Mastergleichung</b>	<b>62</b>
<b>D. Berechnung von Autokorrelationsfunktionen</b>	<b>63</b>
<b>E. Vollständige analytische Lösung der Ratengleichungen für die stationäre Photonenzahl</b>	<b>63</b>

F. Definition der Laserschwelle über die Photonendichte $\eta$	63
G. Nicht-klassisches Licht	64
H. Ideale und gemessene photonische Autokorrelation	65

## 1. Einleitung

Laser (*engl.*: light amplification by stimulated emission of radiation, *dt.*: Licht-Verstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung) wurden seit ihrer Entdeckung vor ungefähr 60 Jahren in zahlreichen Experimenten untersucht. Von der Entdeckung der Möglichkeit das Strahlungsverhalten von Atomen durch die Unterbringung in einem Resonator beeinflussen zu können [1, 2], bis hin zur Erforschung und Entwicklung von modernen und energieeffizienten Nanolasern [3, 4], hat sich die Art und Weise Laser zu charakterisieren fortlaufend verändert und weiterentwickelt. Der größte Teil der zugrundeliegenden Physik des Zusammenspiels der spontanen und stimulierten Emission in Lasern wurde bereits weitgehend erforscht und verstanden. Eine der bis heute bedeutsamsten Eigenschaften zur Charakterisierung eines Lasers ist die Laserschwelle (*engl.*: laser threshold). Sie grenzt das Regime der spontanen Emission von dem der stimulierten Emission ab [5] (siehe Abb. 1.1).

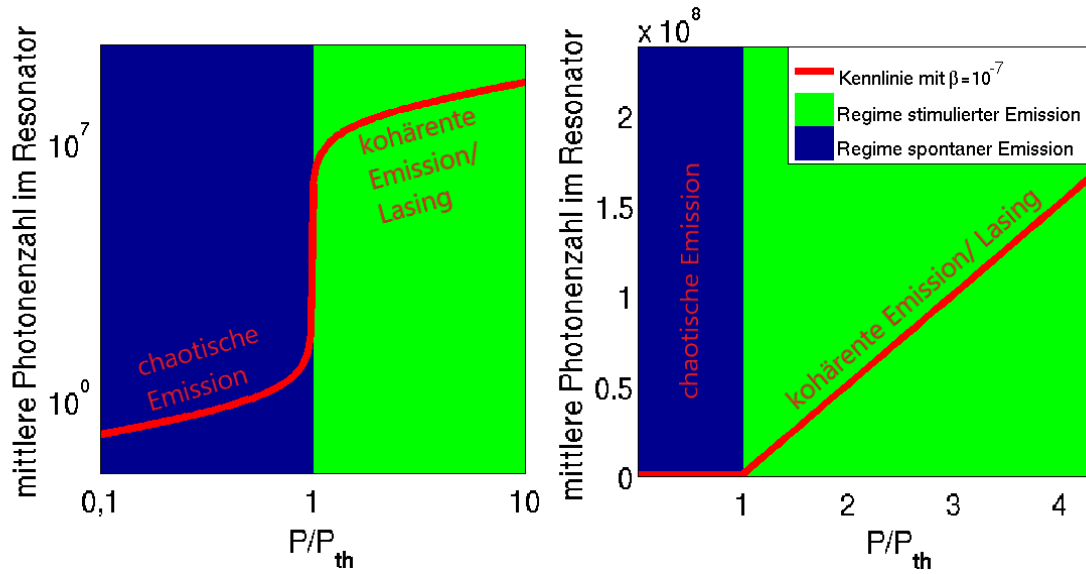


Abbildung 1.1: Schematischer Verlauf einer Laserkennlinie (links in doppellogarithmischer und rechts in linearer Darstellung) eines konventionellen Lasers mit  $\beta = 10^{-7}$ . Auf Grund des geringen  $\beta$ -Faktors kann der Wechsel des Emissions-Regimes deutlich anhand des abrupten Intensität-Anstiegs identifiziert bzw. im Experiment nachgewiesen werden.  $P/P_{th}$  ist die auf die Laserschwelle  $P_{th}$  normierte Eingangsleistung.

Neben der Laserschwelle ist auch der  $\beta$ -Faktor eine der wichtigsten Kenngrößen zur Charakterisierung eines Lasers [6, 7]. Er stellt den Anteil der spontanen Emission des Laser-Gewinnmaterials, der in eine der Lichtfeldeigenmoden des Resonators geleitet wird, zur gesamten spontanen Emission dar. An der Laserschwelle vervielfacht sich durch den Einsatz der stimulierten Emission die Laserintensität in der Größenordnung des inversen  $\beta$ -Faktors  $\beta^{-1}$  [7]. Dadurch macht sich bei konventionellen Lasern, wie Gas-Lasern oder Oberflächenemittern (*engl.*: vertical-cavity surface-emitting laser (VCEL)), in denen nur der aller geringste Anteil ( $\beta \approx 10^{-8} - 10^{-5}$ ) der spontanen Emission in eine Resonatormode geleitet wird [5, 9], der Wechsel des Emissionsregimes deutlich durch einen abrupten, nicht-linearen Anstieg der Laserintensität an der Laserschwelle bemerkbar und kann auf diese Weise im Experiment nachgewiesen werden (siehe Abb. 1.1).

Der technische Fortschritt in der Herstellung von Laserresonatoren führte zur Realisierung von Halbleiter Mikrokavitäten, wie Mikropillars und Microdisks [10, 11], welche anstelle von Atomen niederdimensionale Halbleiter-Gewinnmaterialien wie z.B. Quantenpunkte verwenden

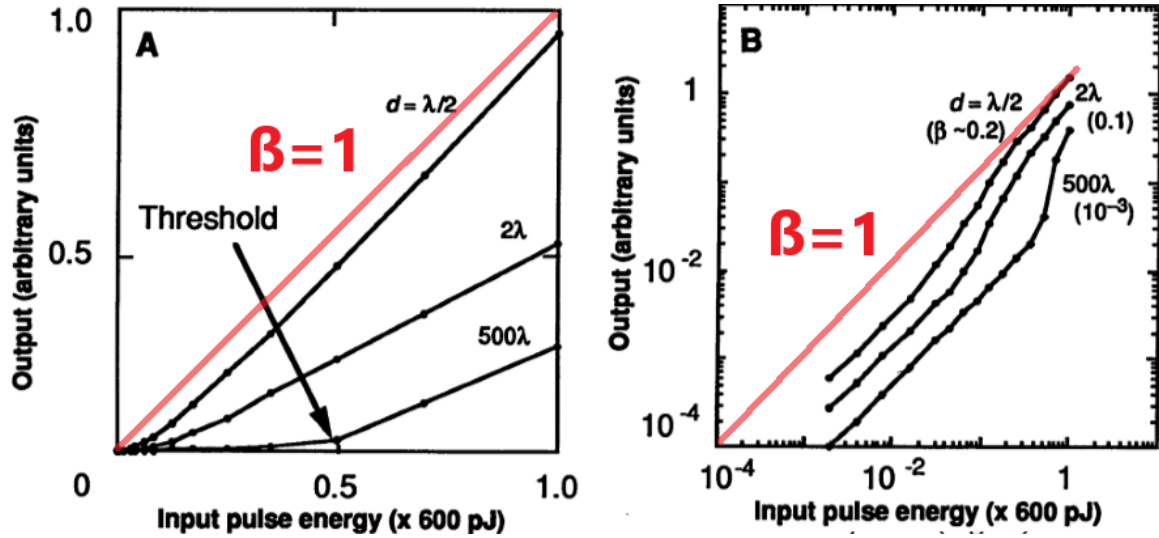


Abbildung 1.2: Experimentelle Messdaten zu Laserkennlinien von Nanolasern mit verschiedenen  $\beta$ -Faktoren in (A) linearer Darstellung und (B) doppell-logarithmischer Darstellung. Die  $\beta$ -Faktoren sind in runden Klammern in Abbildung (B) eingetragen. Die jeweils in (A) und (B) eingezeichnete rote Linie stellt die Kennlinie dar, die gemessen werden würde für einen  $\beta$ -Faktor von  $\beta = 1$ . Es ist zu erkennen, dass die Laserschwelle, die in (A) durch den Pfeil gekennzeichnet ist, sich mit steigendem  $\beta$ -Faktor zu kleineren Eingangsleistungen hin verschiebt. Für  $\beta = 1$  stehen die Aus- und Eingangsleistung in einem linearen Zusammenhang, sodass der Einsatz stimulierter Prozesse nicht mehr durch eine Nichtlinearität in der Kennlinie zu identifizieren ist. Quelle: [6].

und räumliche Abmessungen im Mikrometerbereich haben [12]. In diesen Nanolasersystemen sind radiative Verluste stark reduziert und es werden  $\beta$ -Faktoren von  $\beta = 10^{-3}$  bis nahezu eins erreicht [6, 10–15], sodass der nicht-lineare Anstieg der Laserintensität wesentlich schwächer ausgeprägt ist als bei konventionellen Lasern und im Fall  $\beta = 1$  gänzlich verschwindet, wie man in Abb. 1.2 erkennen kann. Daher ist die Laserintensität keine geeignete Größe zur Charakterisierung des Emissionszustandes von Nanolasern mit hohen  $\beta$ -Faktoren [7, 12]. Um zu identifizieren, welche physikalischen Prozesse die Dynamik eines Nanolasers treiben, wurde ausgenutzt, dass die spontane Emission eine chaotische Emissionsstatistik hat, in dem Sinne dass die Intensitätsfluktuationen der spontan emittierten Strahlung in der Größenordnung der Strahlungs-Intensität selber liegen [7, 16]. Durch stimulierte Prozesse emittiertes, kohärentes (*lat.*: cohaerere, *dt.*: zusammenhängend, selbigen Ursprungs) Licht hingegen weist keine Intensitätsfluktuationen auf [16, 24]. So hat sich in der Quantenoptik die Charakterisierung von Nanolasern durch ihre statistischen Emissionseigenschaften durchgesetzt [7, 8, 12, 17–23]. Eine der heutzutage am meisten verwendeten und etablierten Größen zur Charakterisierung des Emissionszustandes einer Lichtquelle ist die photonische Paarkorrelationsfunktion zweiter Ordnung zu gleichen Zeiten  $g^2(0)$ . Chaotisches Licht weist per Definition einen Wert von  $g^2(0) = 2$  auf [7, 24]. Kohärente Lichtfeldzustände hingegen zeichnen sich durch den Wert  $g^2(0) = 1$  aus [16, 24].

Während bei konventionellen Lasern der abrupte, überproportionale Intensitäts-Anstieg den Übergang in die kohärente Emission markiert, an dem der Wert von  $g^2(0)$  umgehend von zwei auf eins abfällt, wurde bei Nanolasern mit  $\beta \approx 1$  nach alternativen Bedingungen gesucht, unter denen sich Kohärenz mit  $g^2(0) = 1$  aufbaut. Da die Schwell-Nichtlinearität in der Laserkennlinie für Laser mit  $\beta \rightarrow 1$  „verschwindet“ [6], wurde von schwellenlosem Lasing gesprochen [6, 14, 25].

Dieser Begriff wurde dadurch untermauert, dass sich in der Ratengleichungstheorie für einen Laser mit  $\beta = 1$  eine verschwindende Schwell-Eingangsleistung  $P_{th} = 0$  ergibt [7, 17]. Es stand also die Frage im Raum, ob Laser mit einer idealen Einkopplung der spontanen Emission in die Resonatormode ( $\beta = 1$ ) bereits bei einer infinitesimal kleinen Eingangsleistung kohärentes Licht emittieren. An anderer Stelle wurde vorgeschlagen als Lasingkriterium festzulegen, dass die mittlere Photonenzahl  $n$  im Laserresonator eins sein muss, damit der Übergang in die kohärente Emission stattfindet [9, 26, 27]. Gefestigt wurde dieses Kriterium dadurch, dass sich in der Ratengleichungstheorie ergibt, dass die Raten der stimulierten und spontanen Emission gleich sind für  $n = 1$  [7, 17]. Auch ergaben numerische Berechnungen von Quantenpunkt-Nanolasern, dass sich unabhängig vom  $\beta$ -Faktor Kohärenz aufbaut, wenn im Mittel ca. ein Photon im Resonator enthalten ist [8] (siehe Abb. 1.3). Auf der anderen Seite wurde jedoch - auch im Vergleich zum Experiment - gezeigt, dass sich Nanolaser durchaus noch im Regime der spontanen Emission mit  $g^2(0) = 2$  befinden können, auch wenn viel mehr als ein Photon im Mittel im Resonator enthalten sind und dass die mittlere Anzahl von Photonen im Resonator beim Übergang in die kohärente Emission keine universelle Konstante ist, sondern von den Systemparametern abhängt [28]. Wie die mittlere Photonenzahl im Laserresonator beim Übergang in die kohärente Emission genau von den Systemparametern abhängt, wurde in der genannten Referenz jedoch nicht thematisiert.

Motiviert durch die lebendige und kontroverse Diskussion über die Vorhersagbarkeit und die Interpretation von Lasing bei hohen  $\beta$ -Faktoren, werden in der vorliegenden Arbeit die Bedingungen, unter denen sich in einem Laser Kohärenz aufbaut, untersucht. Dazu analysieren wir im zweiten Kapitel der Arbeit - für Systeme mit räumlich lokalisierten Gewinnmaterialien, wie Atomen oder Quantenpunkten - die Beziehung zwischen  $g^2(0)$  und der mittleren Photonenzahl  $n$  im Laserresonator analytisch und berechnen, wie viele Photonen  $n_{g^2(0)=1}$  im Mittel im Resonator enthalten sind, wenn der Laser in die kohärente Emission mit  $g^2(0) = 1$  wechselt. Wir erklären, warum immer mehr Photonen  $n_{g^2(0)=1}$  im Resonator sein müssen, damit sich Kohärenz im Laser aufbaut, wenn die Menge des Gewinnmaterials und die Resonatorverluste steigen. Zusätzlich definieren wir die Laserschwelle  $P_{th}$  analytisch durch den Punkt, an dem stimulierte Prozesse in einem Laser zur überproportionalen Selbstverstärkung der Lichtintensität im Resonator führen und wir berechnen die mittlere Photonenzahl im Resonator an der Laserschwelle  $n_{th}$ . Eine besondere Erkenntnis dieser Arbeit ist, dass die Photonenzahl beim Übergang in die kohärente Emission  $n_{g^2(0)=1}$  auch deutlich größer sein kann als die Photonenzahl an der Laserschwelle  $n_{th}$ , sodass Laser, in denen  $n_{g^2(0)=1} \gg n_{th}$  gilt, nicht an der Laserschwelle sondern erst oberhalb der Laserschwelle, nach dem Einsetzen stimulierter Prozesse, Kohärenz mit  $g^2(0) = 1$  aufbauen. Wir möchten daher bereits eingangs betonen, dass wir den Begriff der Laserschwelle nicht mit dem Übergang in die kohärente Emission bzw. dem Übergang ins Lasing gleichsetzen. Die kohärente Emission setzen wir mit Lasing gleich in dem Sinne, dass  $g^2(0) = 1$  gilt und die Laserschwelle setzen wir mit

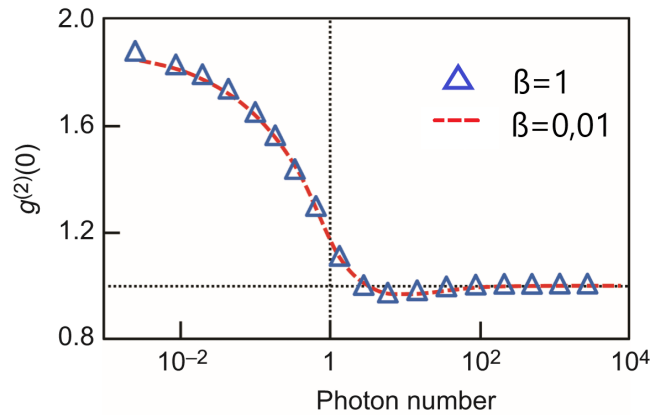


Abbildung 1.3: Beziehung zwischen dem durch  $g^2(0)$  reflektierten Kohärenzgrad und der mittleren Photonenzahl im Resonator eines theoretisch modellierten Quantenpunktlasers mit  $N = 50$  Quantenpunkten als Gewinnmaterial für zwei verschiedene  $\beta$ -Faktoren. Quelle: [8].

---

dem Einsatz stimulierter Prozesse gleich, der zu einem überproportionalen Intensitäts-Anstieg im Laserresonator führt. Als Trivial-Beispiel von Lasing oberhalb der Laserschwelle führen wir einen Laser mit  $\beta = 1$  auf. Dazu zeigen wir, dass das System bestenfalls für endliche Eingangsleistungen  $P > P_{th} = 0$  Kohärenz aufbaut, es jedoch nicht zum schwellenlosen Lasing mit  $g^2(0) = 1$  kommt, wenn man einen Laser mit  $\beta = 1$  mit einer verschwindenden Eingangsleistung an der Laserschwelle mit  $P = P_{th} = 0$  anregt. Für konventionelle Gas-Laser mit  $\beta \ll 1$  und Quantenpunkt-Nanolaser mit  $\beta \approx 1$ ,  $\beta < 1$  zeigen wir im zweiten Kapitel, dass es in diesen etablierten Lasersystemen durch den Einsatz stimulierter Prozesse an der Laserschwelle zum Aufbau von Kohärenz mit  $g^2(0) = 1$  kommt.

Im dritten Kapitel der Arbeit befassen wir uns mit einem Nanolasersystem mit einem räumlich ausgedehnten Quantenfilm-Gewinnmaterial: Dem Nanobeam-Quantenfilm Laser. Im Vergleich zum Experiment modellieren wir den Quantenfilm-Laser numerisch. Dazu erarbeiten wir eine Lasertheorie, welche ausgedehnte Gewinnmaterialien in Wechselwirkung mit einer Lichtfeldmode vollständig quantenmechanisch beschreibt. Mit diesem Theoriemodell interpretieren wir experimentelle Messdaten zum Nachweis von Lasing bei Nanobeam-Kavitäten und erhärten den Lasingnachweis durch theoretisch berechnete Daten. Wir bilden die Parameter eines von uns im Vergleich zum Experiment modellierten Nanobeam-Quantenfilm-Lasers auf das im zweiten Kapitel der Arbeit verwendete Lasermodell für räumlich lokalisierte Gewinnmaterialien ab, welches identische und diskrete Lichtemitter in Wechselwirkung mit einer Resonatormode beschreibt. Im Zusammenhang mit den analytischen Berechnungen aus Kapitel 2 stellen wir fest, dass der auf diese Weise durch diskrete Lichtemitter modellierte Quantenfilm-Laser in einem Regime operiert, in dem  $n_{g^2(0)=1} \gg n_{th}$  und  $n_{g^2(0)=1} \gg 1$  gilt. Unsere physikalische Interpretation dessen ist, dass die spontane Emission in diesem Lasersystem eine so dominante Bedeutung hat, dass sie sogar nach dem Einsatz stimulierter Prozesse an der Laserschwelle eine nicht zu vernachlässigende Rolle an der Laserdynamik spielt. Deswegen baut sich in diesem System Kohärenz erst weit oberhalb der Laserschwelle auf, wenn die Intensität des Lichtfeldes im Resonator groß genug ist und die stimulierten Prozesse die spontane Emission dominieren. In dieser Eigenschaft unterscheidet sich der von uns untersuchte Nanobeam-Laser deutlich von konventionellen Gas-Lasern oder Quantenpunktlasern, in denen die spontane Emission eine praktisch zu vernachlässigende Rolle an der Laserdynamik spielt, wenn stimulierte Prozesse einsetzen und die Laserintensität überproportional erhöhen. Die unterschiedlichen Kohärenzeigenschaften von konventionellen Lasern, Quantenpunkt-Nanolasern und Quantenfilm-Lasern sind schematisch in Abb. 1.4 gezeigt.

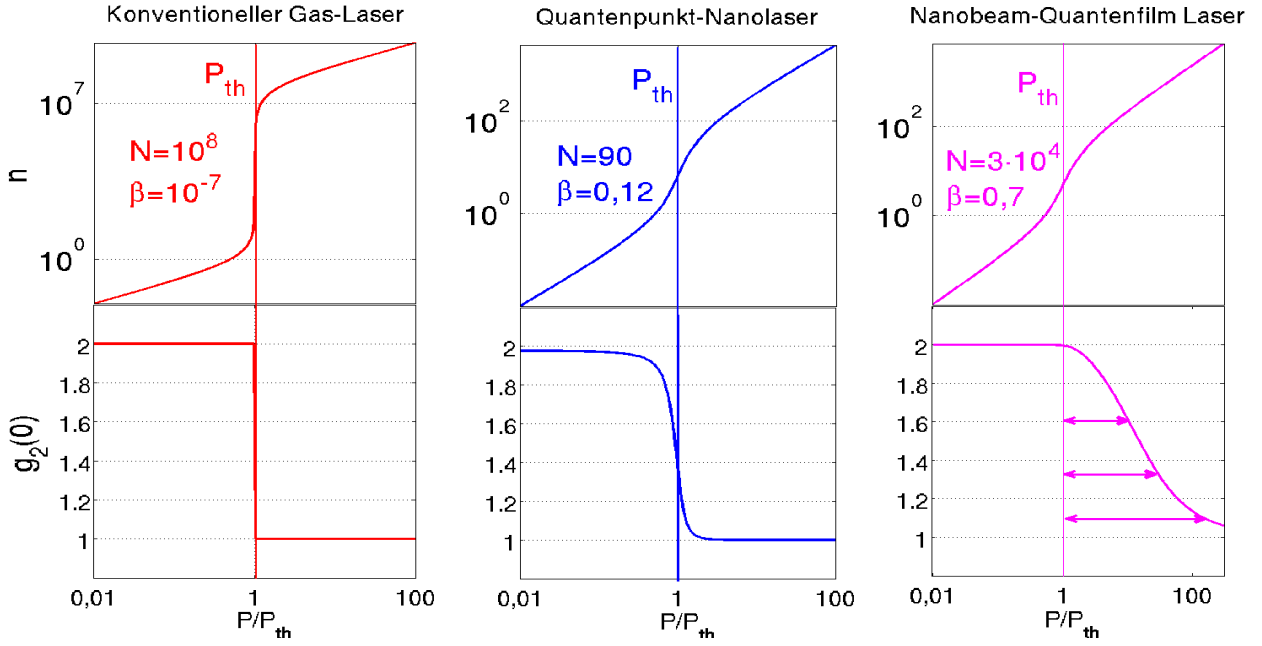


Abbildung 1.4: Schematischer Verlauf der Kennlinien (oben) und  $g^2(0)$  (unten) in der auf die Laserschwelle  $P_{th}$  normierten Pumprate  $P$  für drei verschiedene Lasersysteme. In den Bildlegenden ist  $N$  ein Maß für die Menge des Gewinnmaterials des jeweiligen Systems. Von links nach rechts bezeichnet  $N$ : Die Anzahl an optisch aktiven Gas-Atomen, die Anzahl an optisch aktiven Quantenpunkten und die Anzahl an optisch aktiven Ladungsträgern im Quantenfilm-Gewinnmaterial. Die Laserschwellen der jeweiligen Systeme sind als senkrechte Linien eingezeichnet und markieren den Bereich, in dem die Kennlinie eine Nichtlinearität aufweist, welche ihre Ursache in stimulierten Prozessen hat. Diese führen zur überproportionalen Selbstverstärkung der Intensität des Laserlichtfeldes an der Laserschwelle. Es ist zu sehen, dass der Quantenfilm-Laser im Gegensatz zu den anderen beiden Systemen erst deutlich oberhalb der Laserschwelle bzw. nach dem Einsatz stimulierter Prozesse Kohärenz mit  $g^2(0) \approx 1$  aufbaut. Die Diskrepanz zwischen der Laserschwelle und dem Übergang in die kohärente Emission wird durch die Doppelpfeile verdeutlicht.



---

## 2. Kohärenzeigenschaften von Gewinnmaterialien mit diskreter Zustandsdichte

In diesem Kapitel untersuchen wir den Übergang ins Lasing analytisch. Anhand der photonischen Autokorrelationsfunktion zu gleichen Zeiten  $g^2(0)$  charakterisieren wir den Emissionszustand einer Lichtquelle, als chaotisch ( $g^2(0) = 2$ ) oder kohärent ( $g^2(0) = 1$ ). Es wird untersucht, inwiefern der Einsatz stimulierter Prozesse den Wechsel des Emissionszustandes bedingt und wie viele Photonen  $n_{g^2(0)=1}$  im Mittel im Resonator enthalten sind, wenn das System in die kohärente Emission wechselt. Diese Eigenschaften werden als Kohärenzeigenschaften bezeichnet. Zu deren Untersuchung wird eines der einfachsten Lasermodele betrachtet, in dem die Menge des am Lasing beteiligten Gewinnmaterials vorgegeben werden kann. Das verwendete Lasermodele ist das von  $N$  identischen und voneinander unabhängigen Zwei-Niveau-Emittern in einer Kavität, welches Gewinnmaterialien mit diskreter Zustandsdichte, wie z.B. Atome in einem konventionellen Gas-Laser oder Quantenpunkte in einem Nanolaser beschreibt [17, 18, 33].

Als erstes beschreiben wir das  $N$ -Emitterensemble im Gleichgewicht quantenmechanisch exakt, d.h. ohne rechnerische Näherungsannahmen, über die Methode der Mastergleichung. Dann werden die Ergebnisse der Mastergleichung mit denen zweier Gleichungssätze verglichen, die das System approximativ beschreiben: Die Ratengleichungen und die Quadruplett-Lasergleichungen. Letztere sind eine Erweiterung der Ratengleichungen, die quantenmechanische Korrelationen zwischen Photonen im System berücksichtigen und deshalb die Berechnung von  $g^2(0)$  ermöglichen. Wir kombinieren die beiden Gleichungssätze zur Herleitung eines geschlossenen analytischen Ausdrucks für  $g^2(0)$  in Abhängigkeit von der mittleren Photonenzahl  $n$  im Resonator. Aus diesem Ausdruck berechnen wir den Wert  $n_{g^2(0)=1}$ .

Insbesondere berechnen wir mit den Ratengleichungen die mittlere Photonenzahl im Resonator an der Laserschwelle  $n_{th}$  analytisch und vergleichen sie mit der mittleren Photonenzahl beim Übergang in die kohärente Emission  $n_{g^2(0)=1}$ . Wir zeigen ein Parameterregime auf, in dem  $n_{th} \ll n_{g^2(0)=1}$  gilt, der Beitrag stimulierter Prozesse an der Laserschwelle also nicht ausreichend ist, um die spontane Emission zu dominieren und Kohärenz aufzubauen.

### 2.1. $N$ identische Zwei-Niveau-Emitter

Es wird ein Lasermodele bestehend aus  $N$  identischen und voneinander unabhängigen Emittern betrachtet, von denen jeder über zwei energetisch diskrete Energieniveaus  $|c\rangle$  und  $|v\rangle$  mit den Energieeigenwerten  $\varepsilon_c$  und  $\varepsilon_v$ ,  $\varepsilon_c > \varepsilon_v$  verfügt. Die Energieniveaus können diskrete Energieeigenzustände von Elektronen in Quantenpunkten oder Atomen darstellen [17, 33]. Allgemeiner beschreiben die  $N$  Emitter ein räumlich lokalisiertes Gewinnmaterial mit einer diskreten elektronischen Zustandsdichte. Jeder Lichtemitter hat dabei insgesamt einen Ladungsträger, sodass sich die mittleren Elektronenbesetzungen der Energieniveaus eines jeden Emitters zu  $f_c + f_v = 1$  ergeben. Diese Annahme wird als Ein-Elektron Näherung bezeichnet [33].  $N$  stellt also die am Lasingprozess beteiligte Anzahl an optisch aktiven Ladungsträgern dar [17]. Die  $N$  Emitter stehen über die Licht-Materie Kopplungskonstante  $g$  mit einer Resonatoreigenmode der Energie  $\hbar\omega$  in Wechselwirkung. Die über  $g$  vermittelte Kopplung zwischen Licht und Materie bildet die Emission und Absorption von Photonen der Resonatormode durch das Gewinnmaterial ab. Der  $N$ -Emitter Zwei-Niveau-Laser ist in Abb. 2.1 zu sehen. Durch die Wechselwirkung der Resonatormode mit einem externen Wärmereservoir (1) werden in der Kavität befindliche Photonen mit der Rate  $\kappa$  in den freien Raum abgegeben (Auskopplung des Laserstrahls aus dem Resonator). Das System wird extern über einen Pumpprozess angeregt, welcher Elektronen im Gewinnmaterial mit der Rate  $P$  vom Grundzustand  $|v\rangle$  in den angeregten Zustand  $|c\rangle$  anhebt. Über eine Kopplung des  $N$ -Emitter-Gewinnmaterials an ein weiteres externes Wärmereservoir (2) wird die spontane Emission in sogenannte Verlustmoden modelliert [24]. Die Verlustmoden stellen

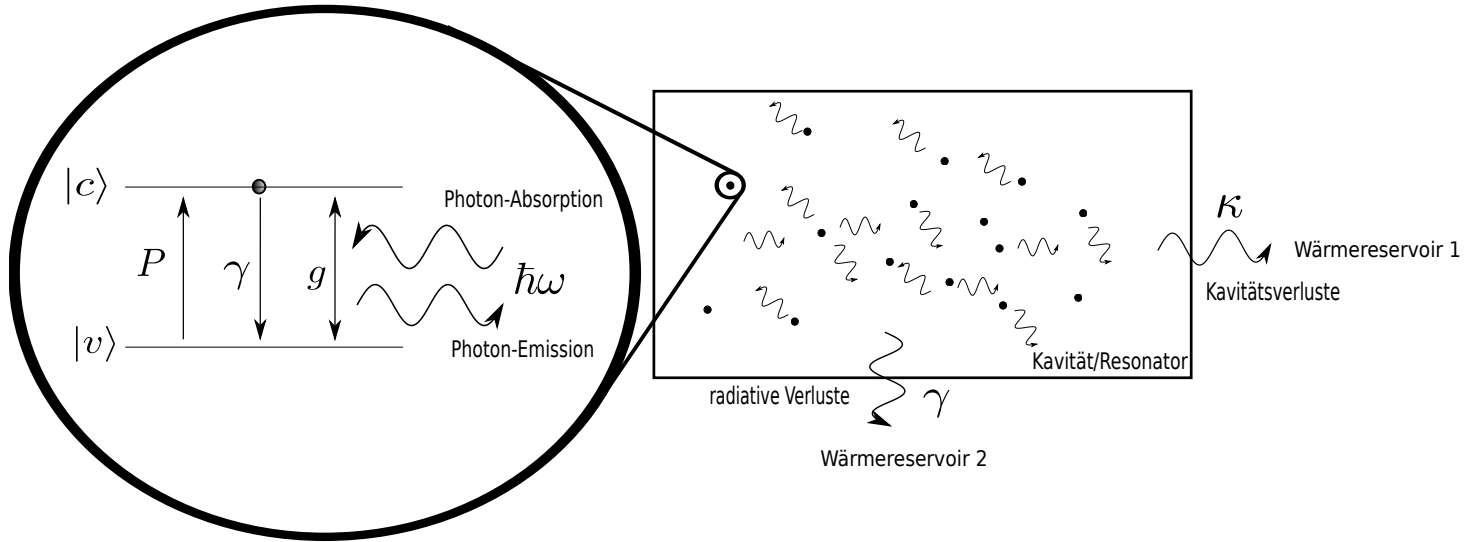


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung von  $N$  identischen Emitttern (schwarze Punkte) in einem Resonator unter dissipativen Einflüssen, welche durch die Wechselwirkung des Systems mit der Umgebung (Wärmereservoirs) stattfinden. Ein Emitter wurde in der Grafik vergrößert dargestellt. Er hat zwei diskrete Energiezustände  $|c\rangle$  und  $|v\rangle$ . Jeder Emitter hat einen Ladungsträger (schwarzer Kreis welcher im gezeigten Beispiel gerade im Zustand  $|c\rangle$  ist). Die als Pfeile eingezeichneten Wechselwirkungs-Prozesse zwischen Licht (Photonen) und Materie werden im Haupttext erklärt.

alle anderen Lichtfeldmoden außer die Resonatormode dar. Die Rate der spontanen Emission in Verlustmoden ist  $\gamma$ . Wir führen die dissipativen Effekte über eine Wechselwirkung mit externen und voneinander unabhängigen Wärmereservoirs deswegen ein, weil dies die grundlegende Idee zur Beschreibung von Dissipation in der Lindblad-Theorie ist. Diese wenden wir auf das hier betrachtete Lasermodell an, wie in Kapitel 2.2.2 genauer erläutert wird.

## 2.2. Beschreibung nach Jaynes-Cummings

### 2.2.1. Hamiltonoperator

Zur vollständig quantenmechanischen Beschreibung unseres Systems aus Licht und Materie verwenden wir einen auf  $N$  Emitter erweiterten Jaynes-Cummings Hamilton Operator [17, 34]

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_{JC} \\
 &= \sum_{i=1}^N \left( \varepsilon_{c,i} c_i^\dagger c_i + \varepsilon_{v,i} v_i^\dagger v_i \right) + \hbar\omega b^\dagger b \\
 &\quad + i\hbar \sum_{i=1}^N g_i \left( b^\dagger v_i^\dagger c_i - h.c. \right).
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Jeder diskrete Emitter wird mit einem Index  $i$  identifiziert. Die erste Zeile von (2.2.1) ist der freie Hamiltonoperator  $H_0$ , welcher sich aus den freien Elektronen Energien  $\varepsilon_{(c/v),i}$  und der Energie der Lasermode  $\hbar\omega$  zusammensetzt. Dabei sind  $c_i^{(\dagger)}$  und  $v_i^{(\dagger)}$  fermionische Erzeugungs-

und Vernichtungsoperatoren, welche den Antikommutatorrelationen [36–38]

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^\dagger]_+ &= \delta_{ij}, \\ [a_i^\dagger, a_j^\dagger]_+ &= [a_i, a_j]_+ = 0 \text{ mit } a = c, v \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

genügen. Neben der quantenmechanischen Beschreibung der Materie wird in der quantenmechanischen Lasertheorie im Gegensatz zur semiklassischen Lasertheorie auch das Lichtfeld in quantisierter Form beschrieben. Dabei sind die Photonen erzeugenden und vernichtenden bosonischen Operatoren  $b^\dagger$  und  $b$ . Diese erfüllen die Kommutatorrelationen [24]

$$\begin{aligned} [b_\xi, b_{\xi'}^\dagger]_- &= \delta_{\xi\xi'}, \\ [b_\xi^\dagger, b_{\xi'}^\dagger]_- &= [b_\xi, b_{\xi'}]_- = 0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

wobei in (2.2.3) verallgemeinert die Zugehörigkeit der bosonischen Operatoren zu einer Lichtfeldmode  $\xi$  mit notiert wurde. Die Resonatormode wird hier und im Folgenden mit  $\xi_l$  bezeichnet. Wenn an die bosonischen Operatoren kein Modenindex geschrieben ist, sind diese der Resonatormode zuzuordnen ( $b^{(\dagger)} = b_{\xi_l}^{(\dagger)}$ ).

Die zweite Zeile von (2.2.1) ist der auf  $N$  Emitter erweiterte Licht-Materie Wechselwirkungsoperator  $H_{JC}$  nach Jaynes-Cummings. In ihm ist die Kopplungskonstante  $g_i$  der Wechselwirkung zwischen der Lasermode und dem  $i$ -ten Emitter enthalten. Da die Emitter als identisch betrachtet werden, sind sowohl die Kopplungskonstanten  $g_i = g$  als auch die Eigenenergien  $\varepsilon_{(c/v),i} = \varepsilon_{(c/v)} \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  unabhängig vom Emitterindex  $i$  [17]. Auch alle Erwartungswerte des Systems sind aus diesem Grund unabhängig vom Emitterindex (siehe dazu auch Anhang A). Die  $N$  Emitter seien in Resonanz mit der Lasermode, sodass die Verstimmung  $\hbar\delta = \hbar\omega - (\varepsilon_c - \varepsilon_v) = 0$  verschwindet.

Im Folgenden zeigen wir, wie die Zeitentwicklung des quantenmechanischen Zustandes, in dem sich das betrachtete Lasersystem befindet, im Dichtematrixformalismus durch die von Neumann-Lindblad Gleichung beschrieben wird. Diese ist die Grundlage zur Herleitung der Mastergleichung.

### 2.2.2. Dichtematrixformalismus

Der Dichteoperator  $\rho$  enthält die gesamte Information über ein quantenmechanisch beschriebenes System und wurde bereits häufiger dazu verwendet, um optisch aktive Ladungsträger mit diskreter Zustandsdichte in Wechselwirkung mit einer Lasermode zu beschreiben [7, 17, 18, 22, 24, 33, 34, 39].

Als Basis der quantenmechanischen Zustände dieses Systems wählen wir die Darstellung  $\{|n, N_e\rangle\}$ . Jeder Basiszustand  $|n, N_e\rangle$  ist eindeutig durch die Anzahl  $n$  der Photonen im Resonator und durch die Anzahl  $N_e$  der angeregten Ladungsträger unter den insgesamt  $N$  Ladungsträgern im System bestimmt<sup>1</sup>. Ein Ladungsträger gilt als angeregt, wenn er sich im oberen diskreten Energiezustand  $|c\rangle$  seines zugehörigen Zwei-Niveau-Systems befindet. Die Anzahl der unangeregten Ladungsträger im elektronischen Grundzustand  $|v\rangle$  ist  $N_g = N - N_e$ . Die Diagonalmatrixelemente des Dichteoperators

$$\rho_{n,N_e} = \langle n, N_e | \rho | n, N_e \rangle = p_{n,N_e} \quad (2.2.4)$$

geben die Wahrscheinlichkeit  $p_{n,N_e}$  an, mit der sich das System im Zustand  $|n, N_e\rangle$  befindet [24]. Die Zeitentwicklung des Dichteoperators und damit auch die seiner Matrixelemente wird durch

<sup>1</sup>Der Satz der Zustände  $\{|n, N_e\rangle\}$  bildet ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) [24].

die von Neumann-Lindblad Gleichung [17, 24]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho = & -\frac{i}{\hbar} [H_{JC}, \rho]_- + \frac{\kappa}{2} [2b\rho b^\dagger - b^\dagger b\rho - \rho b^\dagger b] \\ & + \frac{\gamma}{2} \sum_i^N [2\sigma_i^- \rho \sigma_i^+ - \sigma_i^+ \sigma_i^+ \rho - \rho \sigma_i^+ \sigma_i^-] \\ & + \frac{P}{2} \sum_i^N [2\sigma_i^+ \rho \sigma_i^- - \sigma_i^- \sigma_i^+ \rho - \rho \sigma_i^- \sigma_i^+] \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

bestimmt, wobei  $\sigma_i^+ = c_i^\dagger v_i$  und  $\sigma_i^- = v_i^\dagger c_i$  ist. Die letzten drei Terme aus Gl. (2.2.5) sind die Lindblad-Terme, welche über die Wechselwirkung des Systems mit externen Wärmereservoirs/-bädern dissipative Effekte simulieren, wie die spontane Emission in Verlustmoden mit der Rate  $\gamma$  und die Resonatorverluste mit der Rate  $\kappa$ . Die externe Anregung mit der Rate  $P$  stellt in der Lindblad-Theorie den inversen Verlustprozess zur spontanen Emission in Verlustmoden dar [24]. Dies lässt sich auch an der Struktur der entsprechenden Lindblad-Terme in Gl. (2.2.5) erkennen. Aus der von Neumann-Lindblad Gleichung (2.2.5) lässt sich die Bewegungsgleichung der Diagonalmatrixelemente des Dichteoperators  $p_{n,N_e}$  herleiten [17], welche wir in dieser Arbeit als Mastergleichung bezeichnen.

### 2.3. Mastergleichung

Eine detaillierte Herleitung der Mastergleichung aus der von Neumann-Lindblad Gleichung ist im Anhang von Ref. [17] zu finden. Die schematische Vorgehensweise wird im Anhang B dieser Arbeit skizziert. Dort wird auch erklärt, warum die Mastergleichung das hier betrachtete Lasermodell näherungsfrei im Gleichgewicht beschreibt. Auf der Basis der von Neumann-Lindblad Gleichung (2.2.5) erhält man die als Mastergleichung bezeichnete Bewegungsgleichung der Diagonalmatrixelemente des Dichteoperators

$$\begin{aligned} \gamma_{sp}^{-1} \frac{d}{dt} p_{n,N_e} = & +\beta [(n+1)(N_e+1)p_{n-1,N_e-1} - nN_e p_{n,N_e}] \\ & +\beta [(N_e+1)p_{n-1,N_e-1} - N_e p_{n,N_e}] \\ & -\beta [n(N_g+1)p_{n,N_e} - (n+1)(N_g+1)p_{n+1,N_e-1}] \\ & + (1-\beta) [(N_e+1)p_{n,N_e+1} - N_e p_{n,N_e}] \\ & + \tilde{P} [(N-N_e+1)p_{n,N_e-1} - (N-N_e)p_{n,N_e}] \\ & - \lambda [np_{n,N_e} - (n+1)p_{n+1,N_e}]. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Die in der Mastergleichung (2.3.1) auftretenden Parameter sind die Rate der totalen spontanen Emission in alle Lichtfeldmoden [17]

$$\gamma_{sp} = R_c + \gamma \quad \text{mit} \quad R_c = \frac{4g^2}{\kappa + \gamma + P} \quad (2.3.2)$$

als Rate der spontanen Emission in die Lasermode, wobei sich somit der  $\beta$ -Faktor als Verhältnis der Rate der spontanen Emission in die Lasermode  $R_c$  zur gesamten Rate der spontanen Emission  $\gamma_{sp}$  durch

$$\beta = \frac{R_c}{\gamma_{sp}} \quad (2.3.3)$$

definiert. Weiterhin wurden die Kavitätsverluste und die Pumprate in die dimensionslosen Größen

$$\lambda = \frac{\kappa}{\gamma_{sp}} \quad \text{und} \quad \tilde{P} = \frac{P}{\gamma_{sp}} \quad (2.3.4)$$

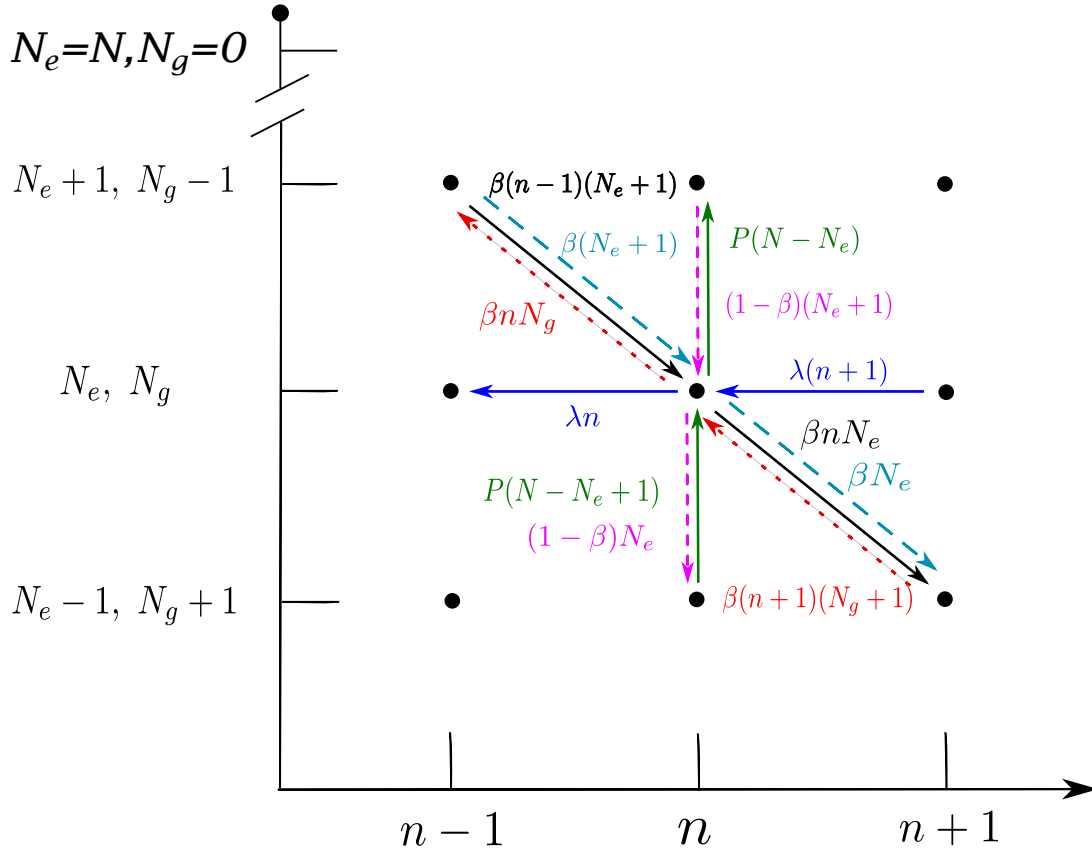


Abbildung 2.2: Die schwarzen Punkte repräsentieren die Wahrscheinlichkeiten  $p_{n, N_e}$ . Die Pfeile stellen sind Übergangsraten, welche sich physikalischen Prozessen zuordnen lassen. Schwarz: stimulierte Emission, Hellblau: spontane Emission in die Resonanzmode, Rot: Absorption, Violett: spontane Emission in Verlustmoden, Grün: Pumpprozess mit Pauli-Blocking Term, Dunkelblau: Kavitätsverluste. Während die Photonenzahl im Resonator  $n$  beliebig groß werden kann, ist der elektronische Freiheitsgrad des Systems endlich, da maximal  $N_e = N$  angeregte Ladungsträger im System enthalten sein können.

umgeschrieben. Die Mastergleichung (2.3.1) wurde in äquivalenter Form bereits in Ref. [17] aufgestellt (Gleichung 6 in der genannten Ref.). Dort wurde sie jedoch nur für den Spezialfall des thermodynamischen Limes<sup>2</sup> unter vereinfachenden Näherungsannahmen ausgewertet. Hier lösen wir die Mastergleichung (2.3.1) numerisch ohne Approximationen. Nähere Details zur numerischen Implementation können in Anhang C nachgelesen werden.

Jede Zeile der Mastergleichung (2.3.1) kann einem elementaren physikalischen Prozess zugeordnet werden. Die erste Zeile von (2.3.1) beschreibt beispielsweise die stimulierte Emission, bei der eine elektronische Anregung des Systems unter Emission eines Photons in den Resonator zerstört wird, sodass sich die Anzahl der angeregten Ladungsträger im System um eins verringert und sich gleichzeitig die Anzahl der Photonen im Resonator um eins erhöht. Illustriert ist dieser Prozess zusammen mit allen anderen am Lasingsprozess beteiligten Elementarprozessen in Abb. 2.2.

An dieser Stelle möchten wir einen wesentlichen Unterschied der Mastergleichung (2.3.1) zu anderen in der Literatur aufgeführten Mastergleichungen zur Beschreibung der Dynamik von

<sup>2</sup>Der thermodynamische Limes wird in Kapitel 2.6.1 erklärt.

(Halbleiter-)Lasern hervorheben. Dies ist die Endlichkeit des Gewinnmaterials. Auf der einen Seite existieren mikroskopische Mastergleichungs-Modelle, welche Lasersysteme mit einem einzigen Lichtemitter  $N = 1$  in einem Resonator beschreiben [18, 33, 39]. Auf der anderen Seite steht das sehr bekannte, makroskopische Mastergleichungs-Model von Rice und Carmichael zur Beschreibung des Lasingübergangs von Halbleiterlasern, in dem die Menge der optisch aktiven Ladungsträger  $N$  durch andere Systemparameter festgelegt wird und nach oben hin unbeschränkt ist [7]. In unserem mesoskopischen Mastergleichungs-Model können wir dem System die Anzahl der am Lasingprozess beteiligten, optisch aktiven Ladungsträger  $N$  unabhängig von anderen Parametern vorgeben und auf diese Weise auch kleine Lasersysteme mit zehn bis hundert Emittern näherungsfrei im stationären Zustand (Gleichgewicht) beschreiben. Durch die Forderung einer festen Systemgröße  $N$ , kann das System nie über mehr als  $N \geq N_e$  angeregte Ladungsträger verfügen ( $p_{n,N_e} = 0 \forall N_e > N$ ). Dies bildet sich auch durch die Pauli-Blocking Terme in der Mastergleichung (2.3.1) ( $N - N_e$ ) und ( $N - N_e + 1$ ) ab, welche im Model von Rice und Charmichael nicht enthalten sind.

Eine weitere Erweiterung zum Model von Rice und Carmichael ist die Absorption von Photonen der Resonatormode durch das Gewinnmaterial, welche proportional zur Menge der unangeregten Ladungsträger  $N_g$  ist (vgl. dritte Zeile von Gl. (2.3.1) oder rote Pfeile in Abb. 2.2).

### 2.3.1. Anwendung

Mit der Mastergleichung (2.3.1) kann die Wahrscheinlichkeit  $p_{n,N_e}$  jeder Zustandskonfiguration  $|n, N_e\rangle$  des  $N$ -Emitter Zwei-Niveau-Lasers berechnet werden. Über Partialspurbildung kann die Photonenstatistik des Systems  $p_n = \sum_{N_e} p_{n,N_e}$  berechnet werden. [16, 24]. Die Photonenstatistik thermischen Lichtes [24]

$$p_n = \frac{(n_A)^n}{(1 + n_A)^{n+1}} \quad (2.3.5)$$

unterscheidet sich qualitativ von der Photonenstatistik eines phasenkohärenten Lichtfeldes (Laserlicht) [24]

$$p_n = \frac{(n_A)^{2n}}{n!} e^{-n_A^2}, \quad (2.3.6)$$

welche einer Poissonverteilung entspricht. Dabei ist in Gl. (2.3.5) und (2.3.6)  $n_A = \sum_n n p_n$  jeweils die mittlere Photonenzahl des betrachteten Lichtfeldes [24], deren Berechnung über die Photonenstatistik  $p_n$  im Dichtematrixformalismus im Anhang A gezeigt wird. Nicht nur die Photonenstatistik zwischen thermischen und kohärenten Lichtfeldzuständen unterscheidet sich qualitativ voneinander. Auch korrelierte Größen wie photonische Autokorrelationsfunktionen, welche in  $x$ -ter Ordnung gemäß  $g^x(0) = \langle (b^\dagger)^x (b)^x \rangle / \langle b^\dagger b \rangle^x$ ,  $x = 1, 2, 3, \dots$  definiert werden [17, 18], nehmen charakteristische Werte an, je nach dem welche Photonenstatistik vorliegt und werden daher ebenfalls häufig zur Charakterisierung von Lichtquellen verwendet [12, 17, 18, 18, 23, 24, 40]. Liegt ein thermisches Lichtfeld mit einer Photonenstatistik wie (2.3.5) vor, so ergibt sich ein charakteristischer Wert von  $g^x(0) = x!$  [24]. Liegt ein kohärenter Lichtfeldzustand mit einer Photonenstatistik, wie in (2.3.6) vor, so ergibt sich  $g^x(0) = 1$  [24]. In Anhang D wird die Berechnung der Autokorrelationsfunktionen aus der Photonenstatistik  $p_n$  gezeigt. Der Abfall des Wertes der Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  von zwei auf eins während des Lasingübergangs ist experimentell belegt [12, 28, 41]. Auch gibt es experimentelle Nachweise für den Abfall des Wertes der Autokorrelationsfunktion  $g^3(0)$  von sechs auf eins während des Lasingübergangs [23].

Wie in Abbildung 2.3 zu sehen ist, spiegelt die Mastergleichung den Verlauf der Autokorrelationsfunktionen korrekt wieder. Es ist der Übergang ins Lasing eines homogenen Emittersensembles aus  $N = 25$  Lichtemittern zu sehen. Für den verwendeten Parametersatz wechselt das System in

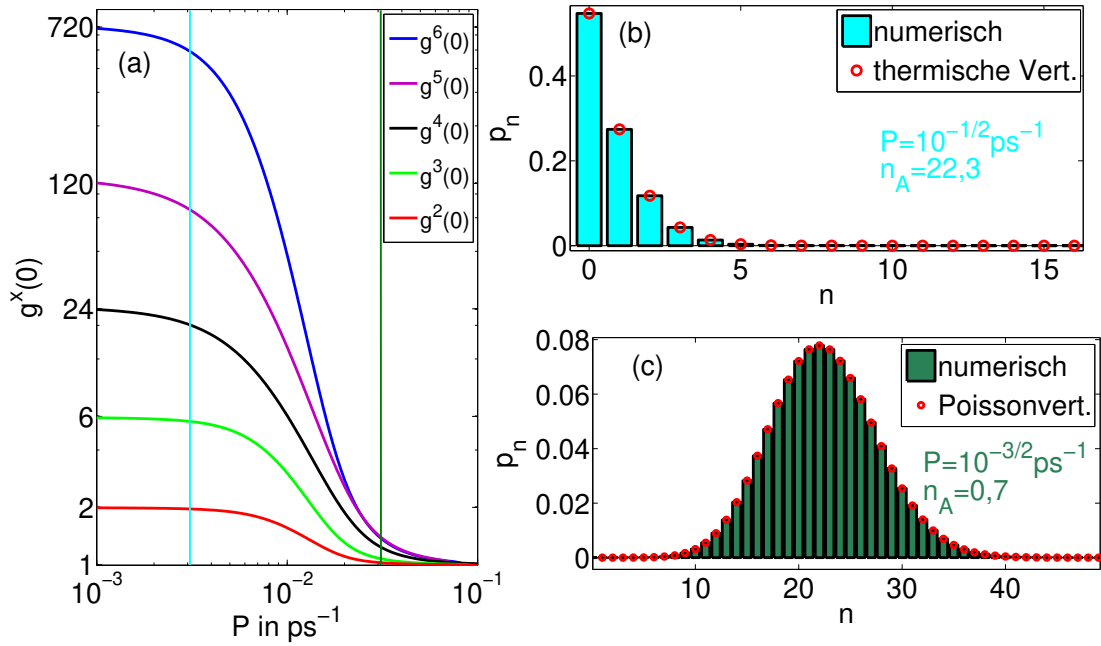


Abbildung 2.3: Stationäre Lösung der Mastergleichung (2.3.1). (a): Autokorrelationsfunktionen  $x$ -ter Ordnung als Funktion der Pumprate  $P$ . Die vertikalen Linien sind die Pumpraten, an denen die Photonenzahlstatistik in Grafik (b) und (c) ausgewertet worden sind. (b,c): Photonenzahlstatistik bei (b) schwacher und (c) starker Anregung. Die Balken sind die numerischen Ergebnisse der Mastergleichung (2.3.1) für die Photonenzahlstatistik. Die roten Kreise sind die über Formel (2.3.5) und (2.3.6) berechneten Photonenzahlstatistiken, in die jeweils die mittlere Photonenzahl  $n_A = \sum_n n p_n$  aus der Mastergleichung eingegangen ist. Die Parameter sind  $\gamma = 0,02 \text{ ps}^{-1}$  und  $10\kappa = g = 0,1 \text{ ps}^{-1}$ . Die Emitterzahl ist  $N = 25$ .

einem Anregungsbereich um  $P \approx 10^{-2} \text{ ps}^{-1}$  herum von der thermischen in die kohärente Emission und die Werte der Autokorrelationsfunktionen fallen kollektiv auf eins ab (vgl. Abb. 2.3 (a)). Während des Übergangs ins Lasing verändert sich die Photonenzahlstatistik von einer thermischen Verteilung zu einer Poissonverteilung (vgl. Abb. 2.3 (b) und (c)). Das Modell von  $N$  identischen Zwei-Niveau-Emittern in einer Kavität bildet somit die statistischen Eigenschaften eines Lasers während des Lasingübergangs physikalisch korrekt ab.

Mit der Mastergleichung können wir unser betrachtetes Lasermodell zwar numerisch exakt berechnen, jedoch ist es schwierig über die numerischen Ergebnisse hinaus präzise Vorhersagen über die Bedingungen, unter denen sich der Aufbau von Kohärenz vollzieht, zu treffen. Dazu werden im Folgenden zwei weitere Theorieansätze zur Beschreibung unseres Lasermodells vorgestellt: Die Ratengleichungen und Quadruplett-Lasergleichungen. Beide Gleichungssätze können aus der sogenannten Clusterentwicklungsmethode hergeleitet werden, wie im folgenden Kapitel gezeigt wird.

## 2.4. Clusterentwicklung

Alternativ zur Berechnung der Matrixelemente des Dichteoperators lässt sich die Dynamik eines quantenmechanischen Systems auch durch die Zeitentwicklung von Erwartungswerten beschreiben. Zur Beschreibung der Laserdynamik berechnen wir die Zeitentwicklung der Erwartungswerte

te der elektronischen Besetzungen  $f_c = \langle c^\dagger c \rangle$  und  $f_v = \langle v^\dagger v \rangle^3$  und der mittleren Photonenzahl im Resonator  $n = \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} \rangle = \langle b^\dagger b \rangle$ . Die Grundlage dafür ist die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für Erwartungswerte [24]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle A \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle + \frac{\kappa}{2} \left\langle \left[ b^\dagger, A \right] b + b^\dagger [A, b] \right\rangle \\ &\quad + \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^N \langle [\sigma_+, A] \sigma_- + \sigma_+ [A, \sigma_-] \rangle \\ &\quad + \frac{P}{2} \sum_{i=1}^N \langle [\sigma_-, A] \sigma_+ + \sigma_- [A, \sigma_+] \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

für einen beliebigen Operator  $A$ . Die drei letzten Terme von (2.4.1) stellen die Lindblad-Terme im Formalismus von Erwartungswerten dar. Die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für Erwartungswerte (2.4.1) kann über die Bildung der Spur mit dem Dichteoperator  $Tr\{\rho A\}$  aus der von Neumann-Lindblad Gleichung (2.2.5) hergeleitet werden und ist äquivalent zu dieser. Die Dynamik des hier betrachteten Lasersystems aus  $N$  homogenen Zwei-Niveau-Emittern wird durch den Hamiltonoperator  $H$  aus Gl. (2.2.1) getrieben.

Die Ausführung des Kommutators (2.4.1) eines Operators  $A$  mit dem Hamiltonoperator (2.2.1) führt dazu, dass die Bewegungsgleichung eines Erwartungswertes an Erwartungswerte koppelt, welche eine höhere Anzahl an Operatoren beinhalten und deren Zeitentwicklung selber nicht bekannt ist. Auf diese Weise baut sich ein Hierarchieproblem in Form eines sich nicht schließenden Differentialgleichungssystems auf. Die Clusterentwicklungs-Methode ist ein Faktorisierungsschema [35], welches Erwartungswerte von Operatoren approximativ durch andere Erwartungswerte darstellt und so zur Schließung des Bewegungsgleichungssystems führt [21]. Die Clusterentwicklung kann in verschiedenen Ordnungen durchgeführt werden. In niedrigster Ordnung, dem Duplett-Niveau, können die Ratengleichungen hergeleitet werden. In nächster Ordnung, dem Quadruplett-Niveau, ergeben sich die Quadruplett-Lasergleichungen [21, 22], aus denen  $g^2(0)$  berechnet werden kann.

### 2.4.1. Ratengleichungen

Aus der Heisenbergschen Bewegungsgleichung (2.4.1) werden die Dynamiken der mittleren Photonenzahl  $n$  und die der mittleren Besetzung  $f_c$  zu

$$\frac{d}{dt} f_c = -2\Re\{gp\} - \gamma f_c + P f_v, \quad (2.4.2)$$

$$\frac{d}{dt} n = +N2\Re\{gp\} - \kappa n, \quad (2.4.3)$$

bestimmt. Diese koppeln an den Erwartungswert der photonenassistierten Polarisation  $p = \langle b^\dagger v^\dagger c \rangle$ , deren Dynamik

$$\frac{d}{dt} p = g \left[ \langle b^\dagger b c^\dagger c \rangle - \langle b^\dagger b v^\dagger v \rangle + f_c \right] - \frac{\Gamma}{2} p \quad (2.4.4)$$

wiederum an die höheren Erwartungswerte  $\langle b^\dagger b c^\dagger c \rangle$  bzw.  $\langle b^\dagger b v^\dagger v \rangle$  koppelt. Dabei ist  $\Gamma = \kappa + \gamma + P$  die Dephasierungskonstante der photonenassistierten Polarisation, welche sich aus den Lindblad-Termen ergibt.

---

<sup>3</sup>Der Emitterindex  $i$  der fermionischen Operatoren muss in den Erwartungswerten nicht mitgeschrieben werden, da alle die Emitter als identisch angenommen werden (siehe Quelle [44] oder Anhang A).



An dieser Stelle kann die Clusterentwicklung in niedrigster Ordnung auf Duplett-Niveau angewandt werden, um das Differentialgleichungssystem der Gleichungen (2.4.2), (2.4.3) und (2.4.4) zu schließen. Die Clusterentwicklung auf Duplett-Niveau, welche auch als semiklassische Faktorisierung bezeichnet wird [7], erfolgt über die Entkopplung der photonischen und fermionischen Freiheitsgrade des Systems durch den Schritt

$$\begin{aligned}\langle b^\dagger b a^\dagger a \rangle &= \langle b^\dagger b \rangle \langle a^\dagger a \rangle + \delta \langle b^\dagger b a^\dagger a \rangle \\ &\approx \langle b^\dagger b \rangle \langle a^\dagger a \rangle = n f_a \quad \text{mit } a = c, v.\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

Dabei wird der korrelierte Erwartungswert  $n$  Photonen im Resonator und gleichzeitig  $f_c$  ( $f_v$ ) Elektronen im Mittel im oberen (unteren) elektronischen Energieniveau zu messen, approximativ durch das Produkt der einzelnen Erwartungswerte  $n$  und  $f_a$  dargestellt. Der Korrekturterm dieser Näherung ist dabei durch  $\tilde{f}_a := \delta \langle b^\dagger b a^\dagger a \rangle$  gegeben und wird als Elektron-Photon Korrelation bezeichnet [21]. Die semiklassische Faktorisierung ist Äquivalent zur Faktorisierung der Dichtematrix  $\rho_{n, N_e} = \rho_n \rho_{N_e}$  in einen bosonischen Anteil  $\rho_n$  und einen fermionischen Anteil  $\rho_{N_e}$ .

Die Clusterentwicklung wurde in der Literatur bereits häufiger angewandt, erläutert und durchgeführt [8, 12, 20–22, 35], speziell auch für das hier betrachtete Lasermode [44]. Der Faktorisierungsalgorithmus höherer Erwartungswerte, wie  $\langle b^\dagger b a^\dagger a \rangle$  in Gl. (2.4.5) wird hier daher nicht gesondert erläutert. Er kann jedoch in aller Ausführlichkeit in den Referenzen [21] und [35] nachgelesen werden. Es sei erwähnt, dass die wesentliche Näherungsannahme der Clusterentwicklung auf Duplett-Niveau die Vernachlässigung von Zwei-Teilchen Korrelationen zwischen einem Ladungsträger und einem Photon  $\tilde{f}_a = \delta \langle b^\dagger b a^\dagger a \rangle = 0$  bzw. zwischen zwei Photonen im System ist. Zwei-Teilchen Korrelationen zwischen zwei Ladungsträgern werden in unserem Lasermode ohnehin nicht berücksichtigt, da wir die Emitter als voneinander unabhängig betrachten.

Zur Herleitung der Ratengleichungen wird zunächst durch die adiabatische Elimination der Polarisation  $p$  die linke Seite der Gl. (2.4.4) Null gesetzt. Durch das Einsetzen der adiabatisch eliminierten Polarisation  $p$  aus (2.4.4) in Gleichung (2.4.2) und (2.4.3) erhält man unter der semiklassischen Faktorisierung (2.4.5) die Ratengleichungen für  $N$  identische Zwei-Niveau-Emitter

$$\frac{d}{dt}n = R_c N [n(2f - 1) + f] - \kappa n,\tag{2.4.6}$$

$$\frac{d}{dt}f = -R_c [n(2f - 1) + f] + [P - (P + \gamma)f],\tag{2.4.7}$$

wobei in der Ein-Elektron Näherung  $f_v = 1 - f_c$  ausgenutzt wurde [33] und wir die Notation  $f_c = f$  verwendet haben.  $R_c$  ist die Rate der spontanen Emission in die Lasermode aus (2.3.2). Die Ratengleichungen werden in Kapitel 2.6.1 dazu benutzt, um die Laserschwelle  $P_{th}$  zu definieren.

An dieser Stelle wird noch angemerkt, warum aus den Ratengleichungen häufig abgelesen wird, dass die Bedingung für Lasing ist, dass sich im Mittel ein Photon  $n = 1$  im Resonator befindet [7, 9, 26, 27]. Der erste Term in den eckigen Klammern der Ratengleichungen  $n(2f - 1)$  repräsentiert die stimulierten Prozesse, welche sich aus der stimulierten Emission  $n f_c = n f$  und der stimulierten Absorption  $n f_v = n(1 - f)$  zusammensetzen. Der dahinter stehende Term  $f_c = f$  repräsentiert die spontane Emission [7]. Setzt man als Lasingkriterium fest, dass die stimulierte Emission, die spontane überwiegen muss mit  $n f_c \geq f_c$  [9, 26, 27], erhält man als Bedingung für Lasing:  $n \geq 1$ . In Kapitel 2.6.2 stellt sich jedoch heraus, dass dieses Kriterium i.A. nicht gültig ist, wenn man als Bedingung für Lasing Kohärenz im Sinne  $g^2(0) = 1$  fordert. Wir zeigen, dass der Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion i.d.R. erst auf den Wert eins abfällt, wenn mehr als ein Photon im Mittel im Resonator enthalten sind. Dies hängt damit zusammen,

dass die gesamten stimulierten Prozesse  $n(2f - 1)$  die Systemdynamik gegenüber der spontanen Emission dominieren müssen, um Kohärenz aufzubauen.

### 2.4.2. Erweiterung der Ratengleichungen (Quadruplettgleichungen)

Während die semiklassische Faktorisierung (2.4.5) Zwei-Teilchen Korrelationen, wie die Elektron-Photon Korrelationen  $\tilde{f}_c$  und  $\tilde{f}_v$ , vernachlässigt, werden diese in Clusterentwicklung auf Quadruplett-Niveau berücksichtigt, sodass die Bewegungsgleichung der photonenassistierten Polarisations

$$\frac{d}{dt}p = g \left[ n(f_c - f_v) + f_c + (\tilde{f}_c - \tilde{f}_v) \right] - \frac{\Gamma}{2}p \quad (2.4.8)$$

ist. Über die Heisenbergsche Bewegungsgleichung (2.4.1) werden die Dynamiken der Korrelationen

$$\frac{d}{dt}\tilde{f}_c = \frac{d}{dt} \left( \langle b^\dagger b c^\dagger c \rangle - \langle b^\dagger b \rangle \langle c^\dagger c \rangle \right) = -2g\Re[\tilde{p} + (n + f_c)p] - (\gamma + \kappa)\tilde{f}_c + P\tilde{f}_v, \quad (2.4.9)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{f}_v = \frac{d}{dt} \left( \langle b^\dagger b v^\dagger v \rangle - \langle b^\dagger b \rangle \langle v^\dagger v \rangle \right) = +2g\Re[\tilde{p} + (n + 1 - f_v)p] - (P + \kappa)\tilde{f}_v + \gamma\tilde{f}_c, \quad (2.4.10)$$

berechnet. Die Bewegungsgleichungen der Elektron-Photon Korrelationen koppeln an die Polarisations-Photon Korrelation  $\tilde{p} = \delta \langle b^\dagger b^\dagger b v^\dagger c \rangle = \langle b^\dagger b^\dagger b v^\dagger c \rangle - 2 \langle b^\dagger b \rangle \langle b^\dagger v^\dagger c \rangle$  [22]. Die Bewegungsgleichung der Korrelation zwischen Polarisations und Photonen im System ist

$$\frac{d}{dt}\tilde{p} = g \left\{ (f_c - f_v)\tilde{n} + (2n + 1) [\tilde{f}_c - \tilde{f}_v] - 2p^2 \right\} - \left( \kappa + \frac{\Gamma}{2} \right) \tilde{p}, \quad (2.4.11)$$

wobei Drei-Teilchen Korrelationen zwischen zwei Photonen und einem Ladungsträger  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b a^\dagger a \rangle = 0$ ,  $a = c, v$  bzw. zwischen drei Photonen  $\delta \langle b^\dagger b^\dagger b^\dagger b b b \rangle = 0$  in Gl.(2.4.11) vernachlässigt worden sind. Die Vernachlässigung von Drei-Teilchen Korrelationen ist die wesentliche Näherungsannahme der Clusterentwicklung auf Quadruplett-Niveau. Auf dem Hexdruplett-Niveau würden Vier-Teilchen Korrelationen vernachlässigt werden und so weiter. An dieser Stelle sei noch erwähnt, dass die Mastergleichung (2.3.1) alle Vielteilchen-Teilchen Korrelationen zwischen allen Photonen im System untereinander und zwischen allen Photonen und einem Ladungsträger im System berücksichtigt und daher das Problem näherungsfrei für voneinander unabhängige Emittter beschreibt.

Gleichung (2.4.11) koppelt an die Photon-Photon Korrelation  $\tilde{n} = \delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle = \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle - 2 \langle b^\dagger b \rangle^2$  [22], aus der

$$\begin{aligned} g^2(0) &= \frac{\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle}{\langle b^\dagger b \rangle^2} \\ &= 2 + \frac{\delta \langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle}{\langle b^\dagger b \rangle^2} = 2 + \frac{\tilde{n}}{n^2}. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

berechnet wird. Auf dem Duplett-Niveau der Clusterentwicklung wird die Korrelation  $\tilde{n}$  zwischen zwei Photonen im System vernachlässigt. Daran kann man auch erkennen, dass die Clusterentwicklung eine Entwicklung unseres Lasersmodells um den thermischen Zustand herum ist, da sich für  $\tilde{n} = 0$  aus Gl. (2.4.12)  $g^2(0) = 2$  ergibt. Auf Quadruplett-Niveau berücksichtigen wir den Einfluss der Photon-Photon Korrelation jedoch. Die dazugehörige Bewegungsgleichung ist

$$\frac{d}{dt}\tilde{n} = +N4\Re\{g\tilde{p}\} - 2\kappa\tilde{n}. \quad (2.4.13)$$

In der Herleitung der Ratengleichungen und der Quadruplett-Lasergleichungen - für voneinander unabhängige Emittoren - haben wir Korrelationen der Art  $\delta \langle (b^\dagger)^x (b)^y c_i^\dagger v_i v_j^\dagger c_j \rangle \forall x, y \in \mathbb{N}; i \neq j; i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  zu Null gesetzt. Terme dieser Art repräsentieren die Korrelation zwischen Ladungsträgern untereinander und können zu einem anderen Emissionsverhalten der Lichtemitter führen. Ladungsträger-Ladungsträger Korrelationen können sowohl zur Behinderung (photon trapping) als auch zur Erhöhung (collective spontaneous emission) der Rate der spontanen Emission führen [32, 58]. Diese Phänomene werden gemeinhin als sub- und superradiante Effekte bezeichnet. Die Erweiterung unseres Lasermodells um Korrelationen zwischen Ladungsträgern stellt einen Ausblick dieser Arbeit dar, welcher nochmals in Kapitel 2.7 aufgegriffen wird.

## 2.5. Analytisches Ergebnis für $g^2(0)$

In dieser Sektion wird aus den Quadruplett-Lasergleichungen (2.4.2), (2.4.3), (2.4.8)-(2.4.11) und (2.4.13) ein analytischer Ausdruck für  $g^2(0)$  hergeleitet und unter Zuhilfenahme der Ratengleichungen (2.4.6) und (2.4.7) weiter vereinfacht. Anschließend wird mit den Ergebnissen der Mastergleichung überprüft, wie zuverlässig die ermittelte Formel für  $g^2(0)$  den Emissionszustand des hier betrachteten Lasermodells wiedergibt.

### 2.5.1. Analytisches Ergebnis für $g^2(0)$ aus den Quadruplettgleichungen

Im Folgenden betrachten wir den Laser aus  $N$  identischen Zwei-Niveau-Emittoren im Gleichgewicht, also im stationären Zustand, wenn alle Größen des Systems zeitlich konstant sind und ihre Zeitableitungen verschwinden. Zunächst sieht man an Gleichung (2.4.3) und (2.4.13), dass die Photonenzahl  $n$  mit der Polarisierung  $p$  und die Photon-Photon Korrelation  $\tilde{n}$  mit der Polarisations-Photon Korrelation  $\tilde{p}$  im stationären Zustand in der Beziehung

$$p = \frac{\kappa}{2Ng} n \quad (2.5.1)$$

beziehungsweise

$$\tilde{n} = \frac{2Ng}{\kappa} \tilde{p} \quad (2.5.2)$$

zueinander stehen. Die Bildung des Realteils in den Quadruplettgleichungen spielt dabei keine Rolle mehr, da in Resonanz ( $\hbar\delta = 0$ ) alle Systemgrößen reell sind. Auch die Licht-Materie-Kopplung  $g$  ist eine reelle Größe<sup>4</sup>. Setzt man (2.5.2) in (2.4.12) ein, erhält man

$$g^2(0) = 2 + \frac{2gN\tilde{p}}{\kappa n^2}. \quad (2.5.3)$$

Weiterhin kann man aus der Addition der Bewegungsgleichungen der Elektron-Photon Korrelationen (2.4.9) und (2.4.10)

$$\left( \frac{d}{dt} + \kappa \right) (\tilde{f}_c + \tilde{f}_v) = 0, \quad (2.5.4)$$

zeigen. Bei endlichen Resonatorverlusten  $\kappa \neq 0$  ergibt sich demzufolge im stationären Zustand  $\tilde{f} := \tilde{f}_c = -\tilde{f}_v$ . Durch Einsetzen der stationären Lösung der Elektron-Photon Korrelation  $\tilde{f}$  aus Gleichung (2.4.9) in Gleichung (2.4.11), erhält man

$$g \left\{ \frac{4g}{\Gamma} (2n+1)(n+f)p - 2p^2 \right\} = \left\{ \kappa + \frac{\Gamma}{2} + \frac{4g^2}{\Gamma} (2n+1) - \frac{2g^2 N}{\kappa} (2f-1) \right\} \tilde{p}. \quad (2.5.5)$$

<sup>4</sup>Dies muss i.A. nicht der Fall sein. Durch die Reskalierung der bosonischen Operatoren  $b$  und  $b^\dagger$  kann  $g$  jedoch immer zu einer reellen Größe transformiert werden, ohne dass die Kommutatorrelationen (2.2.3) verletzt werden [44].

Wird die Polarisation  $p$  über Gleichung (2.5.1) durch die Photonenzahl ausgedrückt, ergibt sich durch Einsetzen der Polarisations-Photon Korrelation  $\tilde{p}$  aus Gleichung (2.5.5) in Gleichung (2.5.3) der geschlossene Ausdruck

$$g^2(0) = 2 - \frac{\frac{R_c}{n}(2n+1)(n+f) + \frac{\kappa}{N}}{\kappa + \frac{\Gamma}{2} + R_c(2n+1) - \frac{R_c\Gamma}{2\kappa}N(2f-1)}. \quad (2.5.6)$$

Gleichung (2.5.6) gibt den exakten Wert der stationären Lösung der Quadruplett-Lasergleichungen für die photonische Autokorrelationsfunktion an. Die Quadruplettgleichungen müssen numerisch gelöst werden, um  $g^2(0)$  aus den stationären Werten für  $n$  und  $f$  zu berechnen. Dem Ausdruck (2.5.6) lässt sich ansehen, dass wenn die Photonenzahl  $n$  bzw. die Laserintensität hinreichend groß ist, sich das System im Lasing befindet wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^2(0) = 1. \quad (2.5.7)$$

### 2.5.2. Berechnung von $g^2(0)$ aus der Photonenzahl

In der Herleitung der Formel (2.5.6) sind alle korrelierten Größen, wie  $\tilde{f}_c$ ,  $\tilde{f}_v$ ,  $\tilde{p}$  oder  $\tilde{n}$  eliminiert worden, sodass lediglich die Photonenzahl  $n$  und die Besetzung des oberen Energieniveaus  $f$  bekannt sein müssen, um  $g^2(0)$  zu berechnen. Diese beiden Größen können auch über die Ratengleichungen (2.4.6) und (2.4.7) berechnet werden. Insbesondere kann über die stationäre Lösung der Ratengleichung (2.4.6)

$$\kappa n = R_c N [n(2f-1) + f], \quad (2.5.8)$$

die funktionale Abhängigkeit der Besetzung  $f$  von der Photonenzahl  $n$

$$f = n \frac{NR_c + \kappa}{NR_c(2n+1)} \quad (2.5.9)$$

dazu genutzt werden, um die Besetzung  $f$  im Ausdruck (2.5.6) zu eliminieren und die photonische Autokorrelationsfunktion

$$g^2(0) = 2 - \frac{R_c(x+1) + \frac{2\kappa}{N}}{\kappa + R_c x + \frac{\Gamma}{2\kappa} \frac{(NR_c + \kappa)}{x}}, \quad (2.5.10)$$

mit  $x = 2n + 1$  nur in Abhängigkeit von der Photonenzahl  $n$  darzustellen.

Hier möchten wir die besondere Bedeutung, die wir der Formel (2.5.10) zukommen lassen, hervorheben. Mit Formel (2.5.10) lässt sich über die stationäre Lösung der Photonenzahl  $n$  aus den Ratengleichungen (2.4.6) und (2.4.7) der Wert von  $g^2(0)$  berechnen. Da die Ratengleichungen im stationären Zustand analytisch lösbar sind und die stationäre Photonenzahl  $n$  sich somit in geschlossener Form aus den Systemparametern darstellen lässt (siehe Anhang E), kann auch  $g^2(0)$  durch Einsetzen von Formel (E.1) aus dem Anhang in Gl. (2.5.10) in geschlossener Form nur durch die Systemparameter dargestellt und berechnet werden. Die Berechnung von  $g^2(0)$  auf diese Weise ist immens weniger rechenintensiv als die numerische Berechnung von Differentialgleichungssystemen zur Bestimmung von  $g^2(0)$ . Formel (2.5.10) kann zusammen mit Formel (E.1) mit einem Computer-Algebra System, wie zum Beispiel Mathematica, ausgewertet werden, um Laserkennlinien und die dazugehörigen Werte von  $g^2(0)$  einfach und schnell an experimentelle Messdaten anzupassen. Eine solche Applikation wurde im Rahmen dieser Arbeit in Mathematica programmiert und der elektronischen Version dieser Arbeit beigelegt. Zudem kann Gl. (2.5.10) nach der Photonenzahl  $n$  aufgelöst werden, um die Photonenzahl bei einem festen Kohärenzgrad des Systems  $g^2(0) = \text{const.}$  zu berechnen. Dies geschieht in Kapitel 2.6.2.

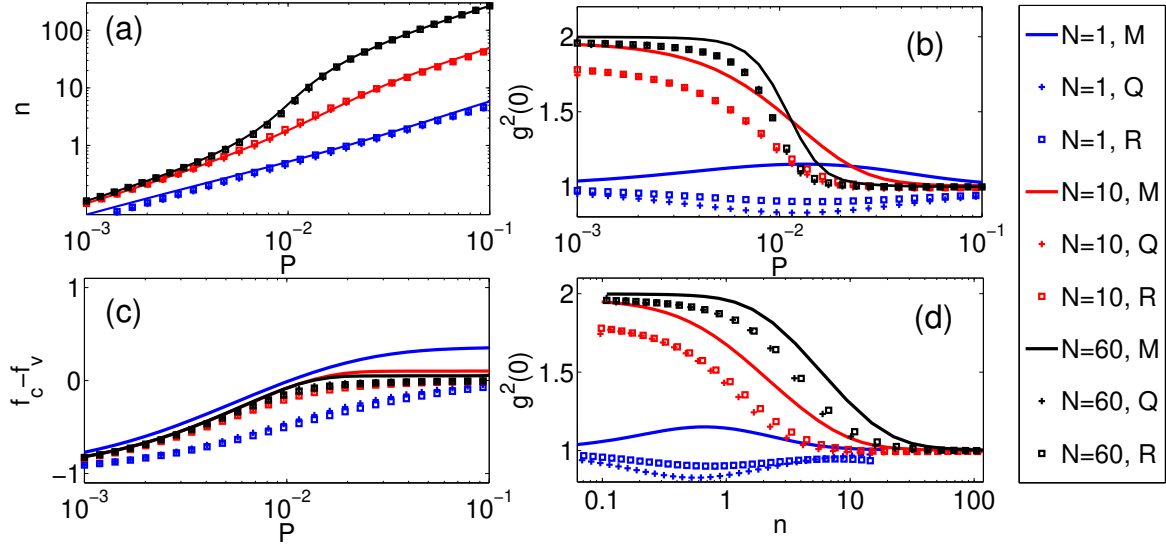


Abbildung 2.4: In (a) ist die Laserkennlinie zu sehen. In (b) ist  $g^2(0)$  als Funktion der Pumprate  $P$  dargestellt. Die Besetzungsinversion als Funktion von  $P$  ist in (c) zu sehen und (d) zeigt  $g^2(0)$  als Funktion der mittleren Photonenzahl  $n$  im Resonator. Die Linien (M) sind die stationären Lösungen der Mastergleichung, die Kreuze (Q) die der Quadruplett-Lasergleichungen und die Quadrate die der Ratengleichungen (R), wobei  $g^2(0)$  aus den Ratengleichungsergebnissen über Formel (2.5.10) berechnet wurde. Variiert wurde die Emitterzahl  $N = 1, 10, 60$ . Die übrigen Parameter sind  $g = 10\kappa = 10\gamma = 0,1 \text{ ps}^{-1}$ . Die Einheit der Pumprate ist  $[P] = \text{ps}^{-1}$ .

### 2.5.3. Vergleich zur Mastergleichung

Um die Berechnung der Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  aus den Quadruplett-Lasergleichungen und insbesondere aus den Ergebnissen der Ratengleichungen über Formel (2.5.10) zu überprüfen, werden diese beiden approximativen Ansätze mit der exakten Lösung der Mastergleichung verglichen.

In Abb. 2.4 (a) ist zu erkennen, dass die Mastergleichung, die Quadruplett-Lasergleichungen und die Ratengleichungen nahezu ununterscheidbare Ergebnisse für die stationäre Photonenzahl  $n$  im Resonator ergeben.

In Abb. 2.4 (b) und (d) ist zu erkennen, dass sowohl die Quadruplett-Lasergleichungen als auch Formel (2.5.10) den Wert von  $g^2(0)$  qualitativ korrekt wiedergeben, insofern  $N = 10$  oder mehr Emitter am Lasingsprozess beteiligt sind. Mit zunehmender Emitterzahl  $N$  gleichen sich die verschiedenen Lösungen für  $g^2(0)$  immer mehr. Außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Quadruplettgleichungen und der Formel (2.5.10) liegt offensichtlich der Fall des Einzelemitters. Für  $N = 1$  unterscheidet sich das Ergebnis der Mastergleichung für  $g^2(0)$  qualitativ von den anderen beiden Methoden. Wir gehen in dieser Arbeit jedoch nicht weiter auf den Fall  $N = 1$  ein. Bemerkenswert ist, dass der über die Ergebnisse der Ratengleichungen mit Formel (2.5.10) berechnete Wert von  $g^2(0)$  konsequent näher am Mastergleichungsergebnis liegt, als der aus den Quadruplett-Lasergleichungen berechnete Wert für  $g^2(0)$  (siehe Abb. 2.4 (b) und (d)), obwohl in Formel (2.5.10) die zusätzliche Näherungsannahme (2.5.9) aus den Ratengleichungen eingegangen ist.

Betrachtet man Abb. 2.4 (c) erkennt man zum einen, dass die Quadruplett-Lasergleichungen

und die Ratengleichungen die Besetzungsinversion im Vergleich zur Mastergleichung unterschätzen. Zum anderen ist zu sehen, dass die durch die Mastergleichung berechneten Besetzungsinversionen insbesondere im kohärenten Regime mit  $g^2(0) \approx 1$  und  $P \in [10^{-2}, 10^{-1}] \text{ ps}^{-1}$  kleinere Werte einnehmen, wenn die Menge  $N$  des Gewinnmaterials steigt. Das Stattfinden der kohärenten Emission mit  $g^2(0) \approx 1$  bei kleineren Besetzungsinversionen, wenn die Menge  $N$  des Gewinnmaterials erhöht wird, hat wichtige Konsequenzen auf die Kohärenzeigenschaften eines Lasers, welche genauer in Kapitel 2.6.2 diskutiert werden.

### 2.6. Betrachtung des Lasingübergangs

Im ersten Abschnitt dieses Unter-Kapitels definieren wir die Laserschwelle  $P_{th}$  analytisch durch den Punkt, an dem stimulierte Prozesse in einem Laser zur überproportionalen (nicht-linearen) Selbstverstärkung der Laserintensität führen, welcher für gewöhnlich mit dem Lasingübergang (Übergang in die kohärente Emission) assoziiert wird [7, 17, 78]. Dabei berechnen wir die mittlere Photonenzahl an der Laserschwelle  $n_{th}$ . Im zweiten Abschnitt berechnen wir aus Gl. (2.5.10) die mittlere Photonenzahl  $n_{g^2(0)=1}$ , wenn  $g^2(0) = 1$  ist und stellen fest, dass Kohärenz in einem Laser nicht zwangsläufig mit dem Einsatz stimulierter Prozesse an der Laserschwelle aufgebaut wird und  $n_{th} \approx n_{g^2(0)=1}$  gilt, sondern dass sich der Lasingübergang auch deutlich oberhalb der nicht-linearen Selbstverstärkung der Lichtintensität an der Laserschwelle vollziehen kann und  $g^2(0) = 1$  erst gilt, wenn wesentlich mehr Photonen  $n_{g^2(0)=1} \gg n_{th}$  im Mittel im Resonator enthalten sind, als an der Laserschwelle. Im letzten Abschnitt vergleichen wir zwei Systeme mit unterschiedlichen Kohärenzeigenschaften miteinander. In dem einen wird Kohärenz an der Laserschwelle aufgebaut. In dem anderen findet der Übergang in die kohärente Emission, wenn der Wert von  $g^2(0)$  auf eins abfällt, erst oberhalb der Laserschwelle statt. Dabei ist der Begriff des Übergangs ins Lasing bzw. in die kohärente Emission strikt vom Begriff der Laserschwelle zu trennen.

#### 2.6.1. Definition der Laserschwelle

Wir definieren die Laserschwelle (LS) im thermodynamischen Limes (TL). Für unser Lasermode definieren wir den TL als Grenzfall, in dem die Menge des Gewinnmaterials gegen unendlich geht ( $N \rightarrow \infty$ ) und die Kopplungsstärke zwischen Licht und Materie gegen Null ( $g^2 \rightarrow 0$ ), sodass das Produkt dieser zwei Größen  $g^2 N$  konstant bleibt [7, 17].

Abbildung 2.5 zeigt das Verhalten der Photonenzahl  $n$ , der Photonendichte pro Emittor  $\eta = n/N$  und der Besetzungsinversion  $I = f_c - f_v = 2f - 1$ , wenn sich das System dem TL annähert, die Menge  $N$  des Gewinnmaterials also zunimmt und gleichzeitig die Licht-Materie Kopplung  $g^2$  abnimmt, sodass  $g^2 N$  konstant bleibt. Insbesondere der Photonendichte  $\eta$  in Grafik (b) und der Inversion  $f_c - f_v$  in Grafik (c) lässt sich ansehen, dass es zu einem abrupten Wechsel ihres Verhaltens an zwei Punkten in der Pumprate  $P_{1,2}$  kommt. Der kleinere Wert dieser beiden wird als Laserschwelle  $P_{th} := \min\{P_1, P_2\}$  definiert [17, 18]. An der Laserschwelle  $P_{th}$  kommt es zu einem nicht-linearen Anstieg der Photonenzahl in der Pumprate (siehe Abb. (2.5) (a)). Die Nichtlinearität in der Kennlinie an der LS ist umso stärker ausgeprägt, je näher das System dem TL kommt, also je größer  $N$  bzw. je kleiner  $g^2$  ist. Physikalisch ist die Laserschwelle durch die Eingangsleistung zu interpretieren, bei der sich das Lichtfeld im Laserresonator durch stimulierte Prozesse überproportional selber verstärkt [7, 17], weshalb wir die Laserschwelle als den Punkt bezeichnen, an dem stimulierte Prozesse einsetzen. Der Wert  $P_{qu} := \max\{P_1, P_2\}$  ist der Ausschaltpunkt des Lasers, an dem die Laserintensität mit stärker werdender Anregung  $P$  wieder abfällt (vgl. Abb. 2.5 (a)). Dieser Effekt wird als Selbstquenching bezeichnet und ist ein intrinsischer Effekt eines Lasermode auf der Basis eines Zwei-Niveau-Systems [33]. Er tritt auf, weil sich das Zwei-Niveau-System selber dephasiert, da im Lindblad-Term der Polarisation (Dephasierungskonstante)  $\Gamma = \kappa + \gamma + P$  die Pumprate enthalten ist und die Rate der sponta-

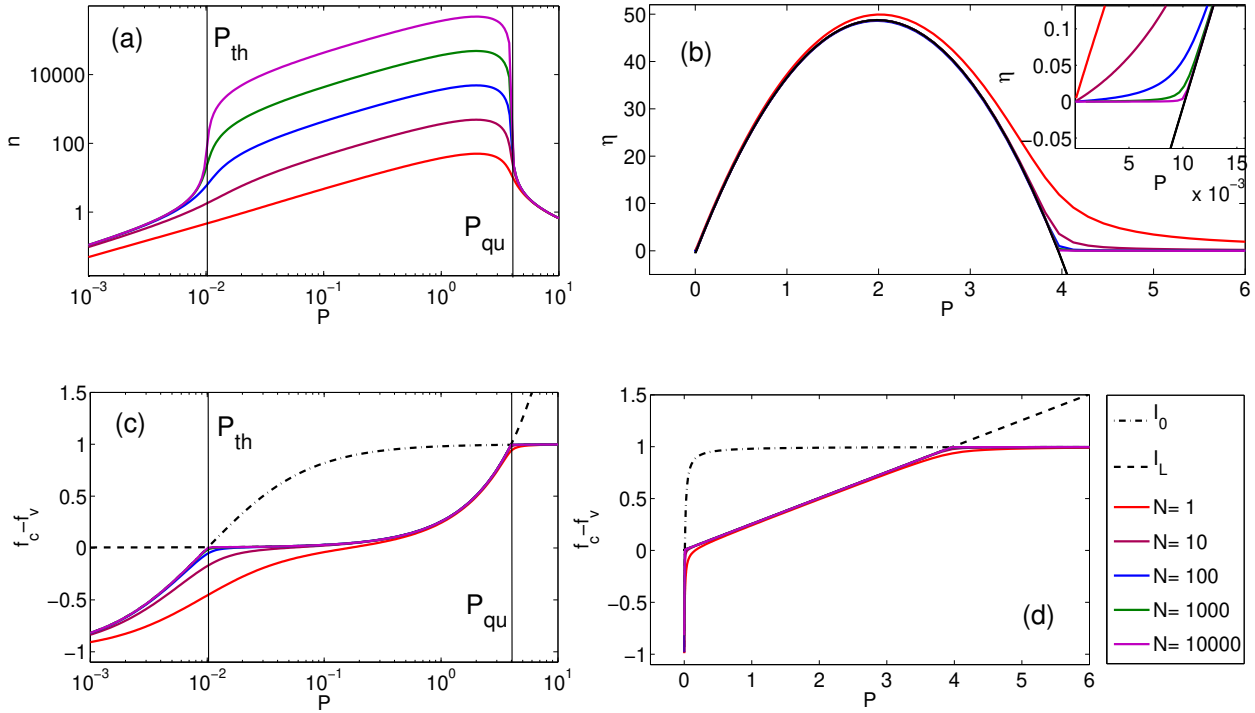


Abbildung 2.5: Ergebnisse der stationären Lösung der Ratengleichungen (2.4.6) und (2.4.7), wenn sich das System dem TL annähert und die Emitterzahl  $N$  größer wird bzw.  $g^2$  kleiner, sodass  $g^2 N = 0,01 \text{ ps}^{-2}$  gilt. (a): Laserkennlinien. (b): Dichte der Photonen pro Emitter  $\eta = n/N$  als Funktion von  $P$ . Die Schwarze Linie stellt die Photonendichte  $\eta$  im thermodynamischen Limes dar (siehe Gl. (F.1) im Anhang). (c,d): Besetzungsinversion  $I = f_c - f_v$  als Funktion von  $P$  in halb logarithmischer Darstellung (c) und in linearer Darstellung (d).  $I_0$  und  $I_L$  werden im Haupttext erläutert. In (a) und (c) sind die über Gl. (2.6.7) berechnete Laserschwelle  $P_{th}$  und der Ausschaltpunkt  $P_{qu}$  mit eingezeichnet. Die restlichen Parameter sind  $\gamma = \kappa = 0,01 \text{ ps}^{-1}$ . Die Einheit der Pumprate ist  $[P] = \text{ps}^{-1}$ .

nen Emission in die Resonatormode  $R_c = 4g^2/\Gamma$  daher für unendlich starke Anregungen gegen  $\lim_{P \rightarrow \infty} R_c = 0$  geht. Im Folgenden gehen wir jedoch nicht weiter auf diesen Effekt ein.

Zur quantitativen Definition der Laserschwelle betrachten wir zunächst die stationären Lösungen der Ratengleichungen (2.4.6) und (2.4.7)

$$\kappa n = R_c N [n(2f - 1) + f], \quad (2.6.1)$$

$$\kappa n = N [P - (P + \gamma)f], \quad (2.6.2)$$

wobei zur Herleitung von (2.6.2) Gl. (2.4.7) mit der Emitterzahl  $N$  multipliziert wurde. Die stationären Lösungen (2.6.1) und (2.6.2) können in

$$f_L - f = \frac{f}{2n} \quad \text{mit} \quad f_L = \frac{\kappa}{2R_c N} + \frac{1}{2} \quad (2.6.3)$$

$$\text{und} \quad f_0 - f = \frac{\kappa n}{N(P + \gamma)} \quad \text{mit} \quad f_0 = \frac{P}{P + \gamma} \quad (2.6.4)$$

umgeschrieben werden. Da jeweils die rechte Seite der Gleichungen (2.6.3) und (2.6.4) größer

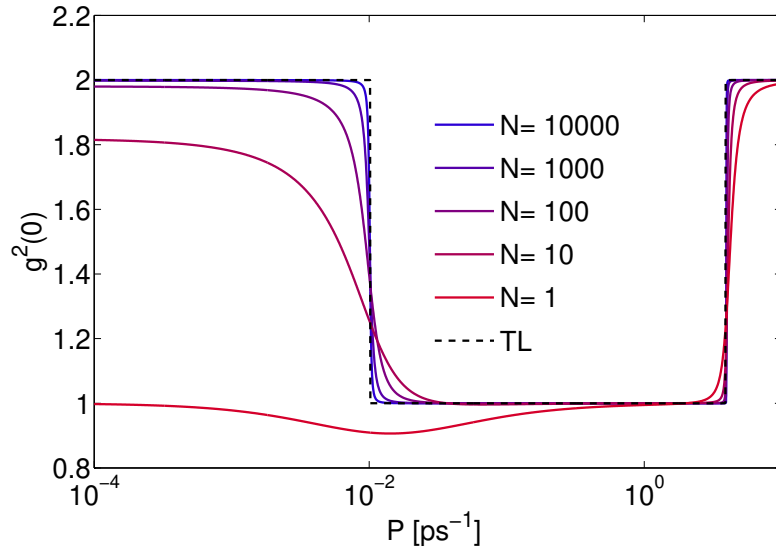


Abbildung 2.6: Verhalten von  $g^2(0)$ , wenn sich das System dem TL annähert. Die Parameter sind die selben wie in Abb. 2.5. Das Produkt  $g^2N$  wurde konstant gehalten. Der Wert  $g^2(0)$  wurde über Formel (2.5.10) aus dem Ergebnis der Ratengleichungen für die Photonenzahl  $n$  berechnet. Die gestrichelte Linie stellt den stufenförmigen Verlauf von  $g_{TL}^2(0) = 2 - \Theta(P - P_{th}) + \Theta(P - P_{qu})$  dar.

gleich Null ist<sup>5</sup>, folgt für die Besetzung  $f \leq f_0$  und  $f \leq f_L$ . Die zu  $f_0$  und  $f_L$  zugehörigen Besetzungsinversionen sind

$$I_0 = 2f_0 - 1 = \frac{P - \gamma}{P + \gamma} \quad \text{und} \quad I_L = 2f_L - 1 = \frac{\kappa}{NR_c} \quad (2.6.5)$$

und wurden in Garfik 2.5 (c) und (d) mit eingezeichnet. Es ist zu erkennen, dass sich die Besetzungsinversion  $I = 2f - 1$  zum TL hin  $I_0$  bzw.  $I_L$  asymptotisch annähert. Dies kann auch durch die Elimination der Photonenzahl  $n$  in den Gleichungen (2.6.3) und (2.6.4) gezeigt werden, was auf [17]

$$(f_L - f)(f_0 - f) = \frac{\kappa f}{2(P + \gamma)N} \quad (2.6.6)$$

führt. Im TL wird die rechte Seite der Gleichung (2.6.6) wegen  $N \rightarrow \infty$  Null, sodass entweder  $f = f_0$  oder  $f = f_L$  sein muss. Dabei wird  $f_0$  als Besetzung im TL unterhalb der LS und  $f_L$  oberhalb der LS bezeichnet [17]. Im TL kommt es an der LS  $P = P_{th}$  zu einer abrupten Änderung des Kurvenverlaufs der Besetzungsinversion  $I$  und zwar gerade an dem Punkt, an dem  $f_0 = f_L$  gilt (siehe Abb. 2.5 (c)). Dies nutzen wir aus, um aus den Gleichungen (2.6.3) und (2.6.4) eine Bestimmungsgleichung für die Laserschwelle

$$0 = \frac{P - \gamma}{2\kappa} - \frac{(P + \gamma)(P + \gamma + \kappa)}{8g^2N} \quad \text{für} \quad P = P_{th} \vee P = P_{qu}; \quad P_{th} \leq P_{qu} \quad (2.6.7)$$

zu erhalten. Gleichung (2.6.7) definiert die LS auch außerhalb des TL für endliche Werte von  $g^2$  und  $N$ . Speziell für den Fall  $\gamma = 0$  d.h.  $\beta = 1$  folgt aus Gl. (2.6.7)  $P_{th} = 0$ , weshalb an einigen Stellen der Literatur auch von schwellenlosem Lasing gesprochen wird [7, 14, 25]. Im Spezialfall  $\beta = 1$  kommt es bei keiner endlichen Eingangsleistung zur nicht-linearen Selbstverstärkung der

---

<sup>5</sup>Die rechten Seiten der Gleichungen (2.6.3) und (2.6.4) sind größer gleich Null, da sowohl die Photonenzahl  $n$  als auch die Besetzung  $f$  positive Größen sind.



Laserintensität, weshalb in diesem Fall nicht wirklich die Rede von einem (messbaren) Einsatz stimulierter Prozesse sein kann. In den folgenden Diskussionen betrachten wir jedoch immer den Fall  $\beta \neq 1$ , wenn wir vom Einsatz stimulierter Prozesse an der Laserschwelle sprechen. Die LS kann auch über den abrupten Verhaltenswechsel der Photonendichte  $\eta$  berechnet werden. Dies führt auf das gleiche Ergebnis für  $P_{th}$  (siehe Anhang F).

Nun berechnen wir die mittlere Photonenzahl  $n_{th}$  an der LS. Durch die Elimination der Besetzung  $f$  in den Gleichungen (2.6.4) und (2.6.6) erhalten wir eine quadratische Bestimmungsgleichung für die Photonenzahl, welche an der LS ausgewertet wird, weshalb  $f_0 = f_L$  gesetzt wird. Die positive der beiden Lösungen dieser quadratischen Bestimmungsgleichung gibt den Wert der mittleren Photonenzahl

$$n_{th} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{8P_{th}}{\kappa} N} - 1 \right) \quad (2.6.8)$$

an der LS an. Für  $\beta = 1$  und damit  $P_{th} = 0$  ergibt sich  $n_{th} = 0$ . An dieser Stelle kann Kritik an dem Begriff des schwellenlosen Lasings [25] geäußert werden, da Gl. (2.5.10) für  $N > 10$  und  $n = n_{th} = 0$  für alle Parametervariationen von  $R_c$  und  $\kappa$  einen Wert von  $g^2(0) \approx 2$  aber nie  $g^2(0) = 1$  ergibt. In diesem Fall würde an der LS mit  $n_{th} = 0$  kein Lasing, sondern die Emission von chaotischem Licht mit  $g^2(0) \approx 2$  stattfinden. Der Fall  $\beta = 1$  bzw.  $n_{th} = 0$  ist das Trivial-Beispiel für eine Lichtquelle, die das Lasingregime nicht an, sondern erst oberhalb der Laserschwelle erreicht, wenn die Laserintensität ausreichend ist, damit stimulierte Prozesse die Systemdynamik dominieren und sich Kohärenz aufbauen kann. In Kapitel 2.6.3 sind zwei Beispiele für Laser mit  $\beta = 1$  gezeigt, die das Regime der kohärenten Emission (oberhalb der verschwindenden Laserschwelle) erreichen.

Weiterhin lässt sich Gl. (2.6.8) ansehen, dass die Photonenzahl an der Laserschwelle im TL wegen  $\lim_{N \rightarrow \infty} n_{th} = \infty$  divergiert. Da Formel (2.5.10) für  $n \rightarrow \infty$  einen Wert von  $g^2(0) = 1$  ergibt, ist damit auch erklärt, warum es bei konventionellen Lasern, welche in der Nähe des TL mit  $N \in [10^6, 10^9]$  und  $\beta \in [10^{-8}, 10^{-5}]$  operieren [5, 9], zu einem abrupten Wechsel in die kohärente Emission mit  $g^2(0) = 1$  an der LS kommt. Unterhalb der Laserschwelle  $P_{th}$  bzw. oberhalb des Ausschaltpunktes  $P_{qu}$ , wenn die Photonenzahl  $n < \infty$  endliche Werte einnimmt, ergibt sich im TL wegen  $g^2 \rightarrow 0$  bzw.  $R_c \rightarrow 0$  und  $N \rightarrow \infty$  aus Formel (2.5.10) ein Wert von  $g^2(0) = 2$ . Im TL ist der Kurvenverlauf von  $g^2(0)$  also wie der einer Stufenfunktion  $g_{TL}^2(0) = 2 - \Theta(P - P_{th}) + \Theta(P - P_{qu})$  (siehe Abb. 2.6).

### 2.6.2. Photonenzahl beim Übergang in die kohärente Emission

Löst man Formel (2.5.10) nach  $x = 2n + 1$  auf, so erhält man die zwei Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2(1 - g^2(0))} \left\{ 1 + \frac{2\kappa}{NR_c} + (g^2(0) - 2) \frac{\kappa}{R_c} \pm \sqrt{\left( 1 + \frac{2\kappa}{NR_c} + (g^2(0) - 2) \frac{\kappa}{R_c} \right)^2 - 2(1 - g^2(0))(2 - g^2(0)) \frac{\Gamma}{\kappa} \left( N + \frac{\kappa}{R_c} \right)} \right\}. \quad (2.6.9)$$

Da die mittlere Photonenzahl eine positive Größe ist und damit auch  $x = 2n + 1$ , ist für  $g^2(0) \in ]1, 2[$  nur die Lösung mit dem Minuszeichen in (2.6.9) physikalisch sinnvoll. Für  $g^2(0) < 1$  gibt es zwei positive Lösungen für die Photonenzahl. Dies zeigt, dass in den Quadruplett-Lasergleichungen das Auftreten von Signaturen von nicht klassischem Licht nicht ausgeschlossen ist. Dazu sei hier auf Anhang G verwiesen, in dem dieses Thema diskutiert wird. Wir interessieren uns an dieser Stelle für die Photonenzahl  $n_{g^2(0)=1}$  bei perfekter Kohärenz. Setzt man  $g^2(0) = 1$

in (2.5.10) und löst dann nach  $x$  auf, erhält man die eindeutige Lösung einer linearen Gleichung

$$x_{g^2(0)=1} = 2n_{g^2(0)=1} + 1 = \frac{\Gamma}{2\kappa} \frac{(NR_c + \kappa)}{(R_c - \kappa - \frac{2\kappa}{N})}. \quad (2.6.10)$$

Gleichung (2.6.10) lässt sich ansehen, dass die Photonenzahl  $n_{g^2(0)=1}$ , um perfekte Kohärenz zu erreichen, mit der Menge des Gewinnmaterials  $N$  skaliert und im Allgemeinen nicht eins ist. Auch steigt der Wert  $n_{g^2(0)=1}$  mit den Resonatorverlusten und divergiert, wenn der Nenner von (2.6.10) Null wird. Die Divergenz der Photonenzahl  $n_{g^2(0)=1}$  stellt ein Problem bei deren Berechnung dar. In Kapitel 2.6.3 wird daher die mittlere Photonenzahl, bei der sich der Laser in der kohärenten Emission befindet, durch den Wert  $n_{coh} := n_{g^2(0)=1,1}$  definiert, welcher mit Formel (2.6.9) berechnet werden kann. Auch Gl. (2.6.9) lässt sich ansehen, dass der Wert  $x_{1,2}$  für  $g^2(0) \in ]1, 2[$  mit  $N$  und  $\kappa$  steigt.

### Physikalische Interpretation

Alle Aussagen, die in diesem Abschnitt über das Verhalten von  $n_{g^2(0)=1}$  getroffen werden, können auch auf Photonenzahlen bei einem geringeren Kohärenzgrad  $n_{g^2(0)=h}$  mit  $h \in ]1, 2[$  verallgemeinert werden.

Die Zunahme der Photonenzahl  $n_{g^2(0)=1}$ , damit das System Kohärenz aufbaut, mit der Menge des Gewinnmaterials  $N$  ist physikalisch sinnvoll und kann auch in Abb. 2.4 (d) beobachtet werden. Mit einer größeren Menge an Gewinnmaterial ist eine umso kleinere Besetzungsinversion pro Emitter  $I = f_c - f_v$  erforderlich, damit der optische Gewinn die optischen Verluste im stationären Zustand kompensiert. In Abb. 2.4 (c) ist zu erkennen, dass die (insbesondere die durch die Mastergleichung berechnete) Besetzungsinversion mit zunehmendem  $N$  kleiner wird. Im theoretischen Extremfall des TL skaliert die Besetzungsinversion oberhalb der Laserschwelle  $P_{th}$  genau invers mit der Menge des Gewinnmaterials (vgl. Gl. (2.6.5)). Eine kleinere Besetzungsinversion bedeutet aber auch, dass der Beitrag der stimulierten Prozesse  $n(2f - 1)$  gegenüber der spontanen Emission  $f$  in den Ratengleichungen (2.4.6) und (2.4.7) bei konstanter Laserintensität kleiner ist. Je näher die Besetzungsinversion  $2f - 1$  der Transparenz  $2f - 1 = 0$  ist, desto mehr Photonen  $n_{g^2(0)=1}$  müssen folglich zu stimulierten Prozessen beitragen, damit das System Kohärenz aufbaut. Die Menge  $N$  des Gewinnmaterials beeinflusst das Verhältnis der stimulierten Prozesse zur spontanen Emission und somit die Laserintensität, bei der sich Kohärenz aufbaut.

Der Fall  $n_{g^2(0)=1} = 1$  stellt sich in unserem Lasermodel als Grenzfall des Einzelemitters heraus (vgl. Abb. 2.4). An dieser Stelle sei erwähnt, dass der Wert  $n_{g^2(0)=1}$  offensichtlich abhängig von der Wahl des Lasermodels ist. Dazu sei auf Ref. [8] verwiesen, in der sich  $n_{g^2(0)=1} \approx 1$  für ein Quantenpunkt-Nanolaser mit  $N = 50$  nicht-identischen (inhomogenen) Emittoren ergibt (siehe dazu auch Abb. 1.3). Es bleibt zu untersuchen, inwiefern die Inhomogenität der Emitter, die Betrachtung eines Lasers in der Ein-Elektron Näherung oder im Elektron-Loch Bild, die Anzahl der Energieniveaus - ob zwei, drei, vier oder mehr - oder andere Variationen des Lasermodels sich auf die Beziehung zwischen der mittleren Photonenzahl  $n$  im Resonator und  $g^2(0)$  auswirken. Diese Fragestellungen stellen einen Ausblick dieser Arbeit dar.

Unsere physikalische Interpretation der Zunahme von  $n_{g^2(0)=1}$  mit den Resonatorverlusten, ist, dass bei größeren Verlusten  $\kappa$  die Wahrscheinlichkeit steigt, dass vom Gewinnmaterial emittierte Photonen den Resonator wieder verlassen, ehe sie mit dem Gewinnmaterial wechselwirken und so zu stimulierten Prozessen beitragen. Die spontane Emission hingegen wird nicht durch die Resonatorverluste unterdrückt. Je höher die Resonatorverluste sind, desto mehr Photonen  $n_{g^2(0)=1}$  müssen folglich im Resonator enthalten sein, damit der zu stimulierten Prozessen beitragende Anteil der Photonen im System groß genug ist, um die spontane Emission zu dominieren,

Parameter	System QD	System QW
$N$	90	$3,1 \cdot 10^4$
$\kappa$	$0,07 \text{ ps}^{-1}$	$1,88 \text{ ps}^{-1}$
$g$	$0,0032 \text{ ps}^{-1}$	$0,041 \text{ ps}^{-1}$
$\gamma$	$0,01 \text{ ps}^{-1}$	$0,0032 \text{ ps}^{-1}$
$P_{th}$	$0,011 \text{ ps}^{-1}$	$0,0032 \text{ ps}^{-1}$
$P_{coh}$	$0,013 \text{ ps}^{-1}$	$0,4 \text{ ps}^{-1}$
$n_{th}$	9,92	10,23
$n_{coh}$	30,92	1554
$\beta_{th}$	0,12	0,7

Tabelle 1: Parametertabelle des Quantenpunktlasers QD mit einem Resonatordurchmesser von  $d^{QD} = 3 \mu\text{m}$  und einer Resonatorgüte von  $Q = 8600$  aus Ref. [12] und des Lasersystems QW. Die Abschätzung der Parameter des QW-Lasers wird in Kapitel 3.4 diskutiert. Aus den Parametern der ersten vier Zeilen folgen die Werte der Tabelle ab Zeile fünf. Die Eingangsleistung, um die Lichtquellen kohärent zu treiben wird definiert als  $P_{coh} := \min\{P \mid g^2(0) \leq 1, 1\}$ . Die dazugehörigen Photonenzahlen beim Übergang in die kohärente Emission  $n_{coh} := \min\{n \mid g^2(0) \leq 1, 1\} = n_{g^2(0)=1,1}$  wurden nach Gleichung (2.6.9) berechnet. Die Photonenzahlen an der Laserschwelle  $n_{th}$  wurden aus Gl. (2.6.8) berechnet. Die Position der Laserschwelle  $P_{th}$  wurde aus Gl. (2.6.7) berechnet.

damit sich Kohärenz aufbauen kann.

Während die mittlere Photonenzahl im Resonator  $n_{g^2(0)=h}$ , um einen konstanten Kohärenzgrad von  $g^2(0) = h$  zu erreichen, mit den Resonatorverlusten steigt, sinkt der Wert der Photonenzahl an der Laserschwelle, wenn stimulierte Prozesse einsetzen nach Gl. (2.6.8) mit  $\kappa$ . Daher tendieren insbesondere Systeme mit hohen Resonatorverlusten dazu, dass der Übergang in die kohärente Emission mit  $g^2(0) = 1$  nicht an, sondern erst oberhalb der Laserschwelle nach Einsatz stimulierter Prozesse stattfindet. Unsere physikalische Interpretation eines Lasers, der erst oberhalb der Laserschwelle in die kohärente Emission übergeht, ist, dass die spontane Emission einen so bedeutsamen Einfluss in diesem System hat, sodass der Beitrag stimulierter Prozesse an der Laserschwelle, welcher zur nicht-linearen Selbstverstärkung der Laserintensität führt, nicht ausreichend ist, um Kohärenz aufzubauen. Erst wenn eine Intensität von  $n_{g^2(0)=1} > n_{th}$  Photonen im Laserresonator erreicht wird, dominieren stimulierte Prozesse die Laserdynamik und es kommt zum Aufbau von Kohärenz.

### 2.6.3. Aufbau von Kohärenz oberhalb der Laserschwelle

Wir möchten an dieser Stelle nochmals betonen, dass wir den Begriff der Laserschwelle nicht mit dem Übergang in die kohärente Emission gleichsetzen. Die Laserschwelle setzen wir gleich mit der Eingangsleistung, oberhalb derer stimulierte Prozesse zu einer überproportionalen Selbstverstärkung des Lichtfeldes des Lasers führen und die kohärente Emission setzen wir gleich mit Lasing in dem Sinne das  $g^2(0) = 1$  gilt. Die wesentliche Thematik, die wir in diesem Abschnitt diskutieren ist gerade, dass der durch stimulierte Prozesse induzierte Einsatz der Selbstverstärkung des Laserlichtfeldes nicht zwangsläufig den Aufbau von Kohärenz nach sich zieht.

Wir vergleichen die Kohärenzeigenschaften eines Quantenpunkt-Nanolasers QD mit denen eines Lasersystems QW. Die Parameter zur Beschreibung des QD-Lasers wurden aus Ref. [12] entnommen. Die Parameter zur Beschreibung des QW-Lasers sind eine Abbildung der Parameter eines Nanobeam-Quantenfilm-Lasers, welchen wir im dritten Kapitel der Arbeit mit einem

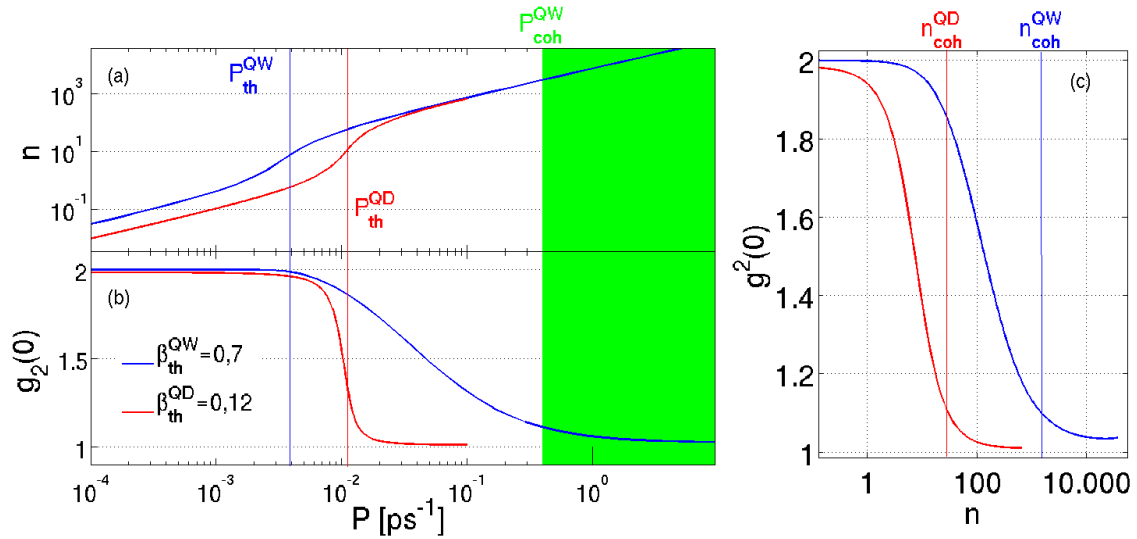


Abbildung 2.7: (a): Laserkennlinien des QD-Lasers (rot) und des QW-Lasers (blau). Die vertikalen Linien markieren die nach Formel (2.6.7) berechneten Laserschwellen  $P_{th}^{QD}$  und  $P_{th}^{QW}$ , an denen stimulierte Prozesse zu einem nicht-linearen Anstieg der Laserintensität über der Eingangsleistung führen. (b): Anregungsabhängiger Wert von  $g^2(0)$ . Die grüne Fläche markiert das Regime der kohärenten Emission des QW-Lasers, in dem  $g^2(0) \leq 1,1$  gilt. Die Bildlegende zeigt die nach Gl. (2.3.3) berechneten  $\beta$ -Faktoren der Systeme an der Laserschwelle. (c):  $g^2(0)$  als Funktion der mittleren Photonenzahl im Resonator. Die vertikalen Linien markieren die nach Formel (2.6.9) berechneten mittleren Photonenzahlen  $n_{coh}^{QD}$  und  $n_{coh}^{QW}$ , wenn die Systeme das Regime der kohärenten Emission mit  $g^2(0) \leq 1,1$  erreichen. Die genauen Zahlenwerte sind Tabelle 1 zu entnehmen. Es ist zu erkennen, dass der Einsatz stimulierter Prozesse an der Laserschwelle des QD-Lasers zum Aufbau von Kohärenz führt und der Wert  $g^2(0)$  abfällt. Beim QW-Laser reicht der Beitrag stimulierter Prozesse an der Laserschwelle nicht aus, um die spontane Emission zu dominieren.

komplexeren Lasermodell für räumlich ausgedehnte Gewinnmaterialien beschreiben. Insofern beschreibt das System QW ein Lasersystem mit einem ausgedehnten Quantenfilm-Gewinnmaterial vereinfacht durch diskrete und homogene Lichtemitter. Die Wahl der Parameter des QW-Lasers wird in Kapitel 3.4 diskutiert. Die Parameter der beiden Systeme QD und QW sind der Tabelle 1 zu entnehmen. Im wesentlichen unterscheidet sich der QW-Laser vom QD-Laser durch deutlich höhere Resonatorverluste  $\kappa$  und eine erheblich größere Anzahl an Lichtemittern  $N$ . Wie in Kapitel 2.6.2 erläutert wurde, ist dadurch eine wesentlich höhere Laserintensität bzw. mittlere Photonenzahl  $n_{coh}^{QW} \approx 1554$  im Resonator des QW-Lasers erforderlich, um Kohärenz aufzubauen im Vergleich zum QD-Laser, welcher bei einer mittleren Photonenzahl von  $n_{coh}^{QD} \approx 30$  einen Kohärenzgrad von  $g^2(0) = 1,1$  erreicht (siehe Tabelle 1 und Abb. 2.7 (c)).

Beide Systeme haben ungefähr die selbe Schwell-Photonenzahl  $n_{th} \approx 10$ . Diese ist ausreichend, damit der QD-Laser an der Laserschwelle in die kohärente Emission übergeht. In Abb. 2.7 (a) und (b) ist zu sehen, dass der QW-Laser hingegen mehr als zwei Größenordnungen oberhalb der Laserschwelle angeregt werden muss, um das Regime der kohärenten Emission mit  $g^2(0) \leq 1,1$  im grün hervorgehobenen Anregungsbereich zu erreichen. Die spontane Emission spielt beim QW-Laser durch die große Menge an Gewinnmaterial eine so dominante Rolle, dass die stimulierten Prozesse an der Laserschwelle, die zu einem nicht-linearen Anstieg in der Laserkennlinie

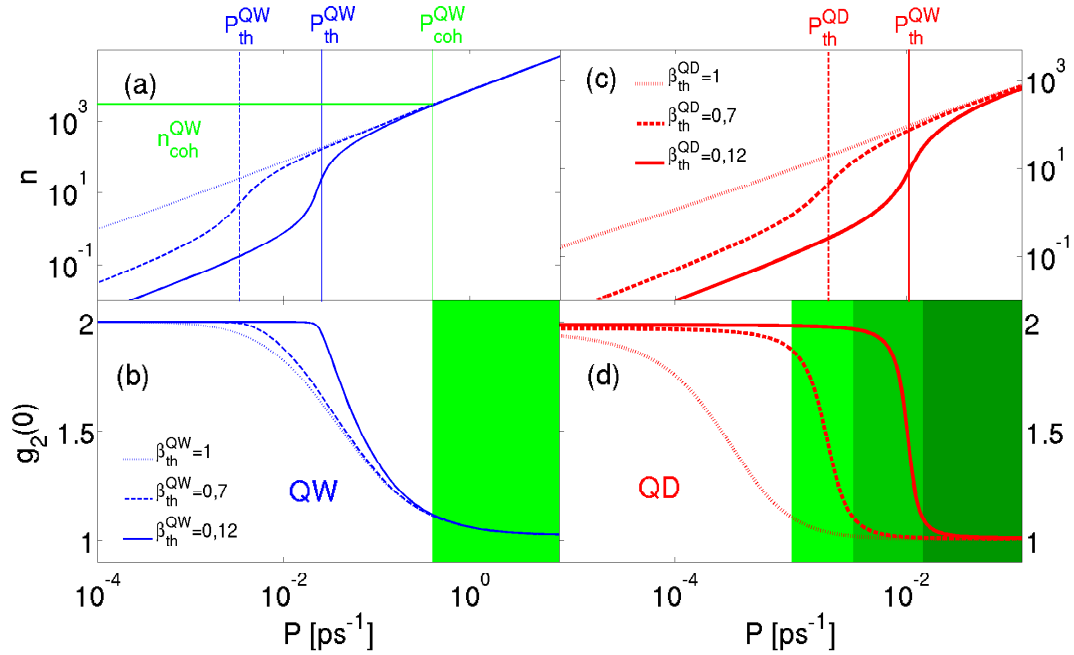


Abbildung 2.8: (a): Laserkennlinien des QW-Lasers für verschiedene radiative Verlustraten  $\gamma$ , die so gewählt wurden, dass sich die in der Bildlegende (in Grafik (b)) eingetragenen  $\beta$ -Faktoren ergeben. Die nach Gl. (2.6.7) berechneten Laserschwellen der verschiedenen Kennlinien wurden als vertikale Linien mit eingezeichnet. Der nach Gl. (2.6.9) berechnete Wert  $n_{coh}$  ist näherungsweise für alle drei  $\beta$ -Faktoren des QW-Lasers gleich und wurde als horizontale, grüne Linie eingezeichnet. (b): Anregungsabhängiger Wert von  $g^2(0)$ . Die grüne Fläche markiert den Anregungsbereich  $P \geq P_{coh}^{QW}$ , in dem sich der QW-Laser in der kohärenten Emission befindet und  $g^2(0) \leq 1,1$  gilt. Grafik (c) und (d) zeigen die zu (a) und (b) analogen Diagramme für den QD-Laser. Die drei Flächen unterschiedlicher Grüntöne in Grafik (d) markieren den Anregungsbereich, in dem sich der QD-Laser in der kohärenten Emission befindet und  $g^2(0) \leq 1,1$  gilt. Es ist zu erkennen, dass der QD-Laser mit steigendem  $\beta$ -Faktor schwächer angeregt werden muss, um in die kohärente Emission überzugehen im Gegensatz zum QW-Laser, bei dem  $P_{coh}^{QW}$  unabhängig von  $\beta_{th}$  ist.

des QW-Lasers führen (siehe blaue Linie Abb. 2.7 (a)), nicht ausreichend sind, um Kohärenz im System aufzubauen. Erst wenn die Laserintensität und damit auch die Rate der stimulierten Prozesse oberhalb der Laserschwelle nach und nach zunimmt, kommt es zum graduellen Aufbau von Kohärenz, sodass sich  $g^2(0)$  dem Wert eins immer weiter annähert.

Das unterschiedliche Verhältnis der spontanen Emission zu den stimulierten Prozessen der beiden Lichtquellen hat zur Folge, dass der  $\beta$ -Faktor einen verschiedenen Einfluss auf die Eingangsleistung  $P_{coh}$  hat, mit der die beiden Systeme angeregt werden müssen, um Kohärenz aufzubauen. In Abb. 2.8 (a) und (b) ist zu sehen, dass der QW-Laser für alle drei gezeigten  $\beta$ -Faktoren<sup>6</sup> immer gleich stark angeregt werden muss, um einen Kohärenzgrad von  $g^2(0) \leq 1,1$  im grün hervorgehobenen Anregungsbereich mit  $P \geq P_{coh}^{QW} \approx 0,4 \text{ ps}^{-1}$  zu erreichen.

Die Erhöhung des  $\beta$ -Faktors von  $\beta_{th} = 0,12$  auf  $\beta_{th} = 1$  hingegen senkt den Wert  $P_{coh}^{QD}$  beim Quantenpunktlaser um mehr als eine Größenordnung, wie man in Abb. 2.8 (d) daran erken-

<sup>6</sup>Die  $\beta$ -Faktoren wurden an der Laserschwelle  $P = P_{th}$  ausgewertet, da der  $\beta$ -Faktor  $\beta(P)$  beim Zwei-Niveau-System abhängig von der Pumprate ist. Wir verwenden die Notation  $\beta_{th} = \beta(P_{th}) = R_c(P_{th})/\gamma_{sp}(P_{th})$ .

nen kann, dass die grünen Flächen, in denen  $g^2(0) \leq 1$ , 1 gilt, für verschiedene  $\beta$ -Faktoren aufspreizen. Dieses unterschiedliche Verhalten lässt sich darauf zurückführen, dass sich die Variation des  $\beta$ -Faktors im Intervall  $\beta_{th} \in [0, 12; 1]$  beim QW-Laser lediglich auf die Beziehung zwischen der Eingangsleistung  $P$  und der mittleren Photonenzahl  $n$  in einem Anregungsbereich auswirkt, in dem wesentlich geringere Laserintensitäten bzw. mittlere Photonenzahlen erreicht werden, als sie zum Aufbau von Kohärenz ( $n_{coh}^{QW} \approx 1554$ ) ausreichend sind. Beim Quantenpunktlaser hingegen wird die notwendige Photonenzahl ( $n_{coh}^{QD} \approx 30$ ) mit der Erhöhung des  $\beta$ -Faktors bei einer geringeren Eingangsleistung  $P_{coh}^{QD}$  erreicht. Dazu sei an dieser Stelle noch gesagt, dass der Wert  $n_{coh}$  nach Gl. (2.6.9) näherungsweise konstant in  $\gamma$  bzw.  $\beta$  ist, die notwendige Laserintensität zum Aufbau von Kohärenz also nur schwach vom  $\beta$ -Faktor abhängt<sup>7</sup>.

### 2.7. Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Übergang ins Lasing untersucht. Anhand der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  haben wir den Emissionszustand einer Lichtquelle charakterisiert. Verwendet wurde als Lasermode ein Ensemble aus  $N$  identischen und voneinander unabhängigen Zwei-Niveau-Emittern mit diskreter elektronischer Zustandsdichte in einem Resonator in Wechselwirkung mit einer einzigen Resonatormode. Zunächst wurde der Formalismus nach Jaynes-Cummings erläutert, in dessen Rahmen die vollständig quantenmechanische Beschreibung der Licht-Materie Wechselwirkung erfolgte. Dissipative Effekte im System, wie die externe Anregung und Verlustprozesse, wurden durch Lindblad-Terme in den Bewegungsgleichungen des Dichteoperators modelliert.

Mit den Quadruplett-Lasergleichungen und den Ratengleichungen wurde ein geschlossener Ausdruck für  $g^2(0)$  in Abhängigkeit von der mittleren Photonenzahl  $n$  im Resonator hergeleitet. Im Vergleich zur exakten Lösung des Lasermode durch die Mastergleichung zeigte sich, dass der analytische Ausdruck (2.5.10) den Wert  $g^2(0)$  mit steigender Emitterzahl  $N$  immer akkurater abbildet und ab einer Emitterzahl von  $N \geq 10$  zuverlässig wiedergibt (siehe Abb. 2.4 (b) und (d)).

Mit Formel (2.5.10) haben wir gezeigt, dass die mittlere Photonenzahl im Resonator beim Übergang in die kohärente Emission  $n_{g^2(0)=1}$  im Allgemeinen nicht eins ist [9, 26, 27], sondern mit der Menge des Gewinnmaterials  $N$  und den Resonatorverlusten  $\kappa$  steigt. Als physikalische Interpretation gaben wir an, dass die Menge des Gewinnmaterials das Verhältnis der spontanen Emission zu den stimulierten Prozessen in einem Laser beeinflusst und dass die spontane Emission eine dominantere Rolle in Systemen mit viel Gewinnmaterial spielt. Diese können Kohärenz daher erst bei höheren Laserintensitäten aufbauen. Hohe Resonatorverluste verringern die Wahrscheinlichkeit, dass Photonen zu stimulierten Prozessen im Laserresonator beitragen, bevor sie diesen wieder verlassen. Daher müssen bei hohen Resonatorverlusten umso mehr Photonen im Resonator enthalten sein, sodass der zu stimulierten Prozessen beitragende Anteil der Photonen im Resonator groß genug ist, um die spontane Emission zu dominieren und Kohärenz im Laser aufzubauen.

Die Ratengleichungen haben wir dazu genutzt, um die Laserschwelle durch den Punkt zu definieren, an dem stimulierte Prozesse zu einem nicht-linearen Anstieg der mittleren Photonenzahl führen, welcher in der Regel mit dem Übergang in die kohärente Emission assoziiert wird [7, 17, 78]. Jedoch haben wir im Vergleich der analytisch berechneten Photonenzahl an der Laserschwelle  $n_{th}$  mit der Photonenzahl  $n_{g^2(0)=1}$  beim Übergang in die kohärente Emission die besonders hervorzuhebende Erkenntnis gewonnen, dass die spontane Emission in Lasern, sogar neben stimulierten Prozessen, eine so wichtige Rolle spielen kann, dass es nicht zwangsläufig mit

---

<sup>7</sup>Die Konstanz von  $n_{g^2(0) \approx 1}$  in  $\beta$  ist auch ein zentrales Ergebnis der Ref. [8]. Siehe dazu auch Abb. 1.3.

dem Einsatz stimulierter Prozesse an der Laserschwelle, welcher zu einer überproportionalen Selbstverstärkung der Laserintensität führt, zum Aufbau von Kohärenz kommen muss.

Mit dem QW-Laser aus dem letzten Teil dieses Kapitels haben wir ein Beispiel für ein System gegeben, in dem sich Kohärenz erst deutlich oberhalb der Laserschwelle, nach dem Einsatz stimulierter Prozesse aufbaut. Das Lasersystem QW beschreibt einen Nanobeam-Quantenfilm-Laser mit einem ausgedehnten Quantenfilm-Gewinnmaterial, welcher Gegenstand des nächsten Kapitels der Arbeit ist, vereinfacht durch diskrete Emittter. Wir haben die Kohärenzeigenschaften des auf diese Weise modellierten Quantenfilm-Lasers mit denen eines Quantenpunkt-Nanolasers QD verglichen, welcher mit dem Einsatz stimulierter Prozesse an der Laserschwelle Kohärenz aufbaut. Es zeigte sich, dass die unterschiedliche Dominanz der spontanen Emission in den beiden Systemen dazu führt, dass der  $\beta$ -Faktor einen großen Einfluss auf die Eingangsleistung hat, mit welcher der Quantenpunktlaser angeregt werden muss, um in die kohärente Emission überzugehen, jedoch kaum einen Einfluss auf die Eingangsleistung hat, welche erbracht werden muss, damit der QW-Lasers Kohärenz aufbaut. Dies führten wir darauf zurück, dass sich eine Veränderung des  $\beta$ -Faktors lediglich auf die Emissionseigenschaften des QW-Lasers in einem Regime auswirkt, in dem viel kleinere Laserintensitäten erreicht werden, als sie zum Aufbau von Kohärenz im System QW erforderlich sind. Die Unabhängigkeit des Energieverbrauchs des Quantenfilm-Lasers QW vom  $\beta$ -Faktor, um als Quelle kohärenten Lichtes betrieben zu werden, ist insbesondere für das nächste Kapitel der Arbeit interessant, in dem wir dieses System mit einem Lasermodell für ausgedehnte Gewinnmaterialien beschreiben. Bei Nanobeam-Quantenfilm-Lasern wird der  $\beta$ -Faktor häufig als Maß für den Energieverbrauch verwendet, den das System hat, um als Quelle kohärenten Lichtes (Laser) eingesetzt zu werden [4, 50, 51]. Im Allgemeinen wird der  $\beta$ -Faktor häufig als Maß für den Energieverbrauch einer Lichtquelle verwendet, um ins Lasing überzugehen [7, 46, 48]. Ist der  $\beta$ -Faktor jedoch unabhängig vom Energieverbrauch, stellt er keine geeignete Größe dar, um diesen zu bemessen.

## Ausblick

Eine denkbare Erweiterung des in diesem Kapitel verwendeten Lasermodells wäre es, die Lichtemitter des Gewinnmaterials nicht mehr als unabhängig voneinander zu betrachten und Korrelations-Effekte zwischen Emitttern bzw. Ladungsträgern im System untereinander zu berücksichtigen. Ladungsträger-Ladungsträger (LL) Korrelationen stehen in Zusammenhang mit sub- und super-radianten Effekten in Lasern [31, 32, 58], wie sie ursprünglich von Robert Dicke für Emittter im freien Raum beschrieben worden sind [29, 30]. Das kollektive Emissionsverhalten von angeregten Ladungsträgern ist von fundamentalem Interesse für das theoretische Verständnis des Lasingübergangs, da es dazu führt, dass Kohärenz in einem Laser auch von spontanen Emissionsprozessen aufgebaut und damit unterstützt werden kann [28, 30]. In der Praxis könnte dies dazu ausgenutzt werden, um die Energieeffizienz von Lasern zu steigern, da das zusammenhängende Verhalten der Ladungsträger die Eingangsleistung und die mittlere Photonenzahl, bei der sich Kohärenz im Laser aufbaut, herabsetzen kann [28, 31]. Nanolaser, wie Quantenpunktlaser oder VCSEL-Strukturen, können in Parameterregimen operieren, in denen Ladungsträger-induzierte Dephasierungseffekte stark reduziert sind. In einem solchen Regime spielen Korrelations-Effekte zwischen Ladungsträgern in einem Laser eine nicht zu vernachlässigende Rolle [58] und sollten in der theoretischen Beschreibung berücksichtigt werden. Eine sehr interessante Fortsetzung dieser Arbeit bestünde darin die Mastergleichung (2.3.1), die Ratengleichungen und die Quadruplett-Lasergleichungen um LL-Korrelationen zu erweitern und diese Ansätze dann miteinander zu vergleichen. Besonders wünschenswert wäre es einen zu Gl. (2.5.10) analogen, analytischen Zusammenhang zwischen der mittleren Photonenzahl im Resonator und  $g^2(0)$  unter Berücksichtigung von LL-Korrelationen herzuleiten, um zu untersuchen, wie sich kollektive Effekte von Ladungsträgern im Gewinnmaterial auf die von  $g^2(0)$  reflektierten statistischen Emissionseigenschaften eines Lasers auswirken. Im Rahmen dieser Fortsetzungen wäre es auch sehr interessant, zu

überprüfen, ob die Berücksichtigung von LL-Korrelationen in der Mastergleichung dazu führt, dass sich Signaturen von Anti-Photon Bunching mit  $g^2(0) < 1$  zeigen, wie dies im Anhang G vermutet wurde.



### 3. Kohärenzeigenschaften von Gewinnmaterialien mit kontinuierlicher Zustandsdichte

Die Steigerung der Energieeffizienz von Lasern ist in vielen Anwendungsgebieten ein zentrales Ziel [4, 46, 48, 50, 51]. Optische Schalter könnten künftig z.B. in Form von verlustarmen Nanolasern in Computern elektrische Schaltelemente wie Transistoren ersetzen, um die Rechenleistung zu steigern [3, 63]. Vor allem aber würde dadurch der Energieverbrauch der Schaltelemente um ein Vielfaches reduziert [52, 53]. Verbrauchsarme Nanolaser könnten darüber hinaus in der Zukunft in den Bereichen der hochfrequenten Modulation [57, 63], des optischen Datenaustausches [54], optischer Speicher [55], der Blue-Ray Technologie, Biosensorik [56], Optogenetik und vielen mehr [49] Anwendung finden.

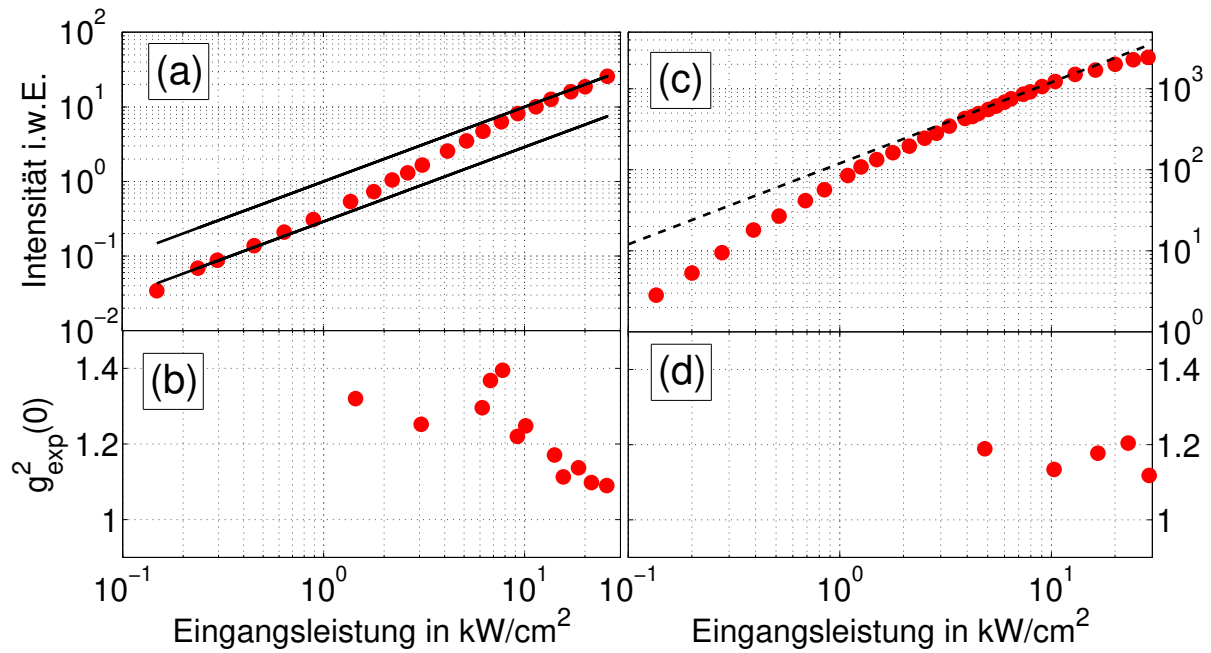


Abbildung 3.1: **Messdaten zweier Nanobeam-Proben:** (a,b): Messwerte der ersten Nanobeam-Probe. Grafik (a) zeigt die Kennlinie und (b) zeigt den experimentell ermittelten Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g_{\text{exp}}^2(0)$ . (c,d): Zu sehen sind die Kennlinie in (c) und der Wert  $g_{\text{exp}}^2(0)$  in (d) für eine zweite Nanobeam-Probe. Die schwarzen Linien in (a) und die gestrichelte Gerade in (b) sind Referenzgeraden der Steigung eins. Die Messdaten der ersten Probe zeigen eine Nichtlinearität in der Kennlinie und einen Abfall von  $g_{\text{exp}}^2(0)$  mit zunehmender Anregung. Dies deutet auf den Einsatz kohärenter Emission der ersten Probe hin.

Im Bereich des telekommunikativen Datenaustausches über Glasfaserkabel herrscht ebenfalls ein reges Interesse daran, die Energieeffizienz der verwendeten Laser zu erhöhen. Derzeit machen die Kosten zur Kühlung von Glasfaserkabeln und Rechenzentren in etwa 40% der Gesamtbetriebskosten des Internets aus [59]. Die Frage nach energieeffizientem Lasing geht für gewöhnlich Hand in Hand mit der Frage nach Lasing bei hohen  $\beta$ -Faktoren [7, 10, 50, 51]. Der  $\beta$ -Faktor stellt den Anteil der gesamten spontanen Emission des Gewinnmaterials in die Lasermode dar. Moderne Nanolaser, welche die spontane Emission fast vollständig in eine Lasermode leiten, sind daher aktuell Gegenstand hoher Forschungsaktivität [3, 4, 10, 45–48, 50, 51, 60]. Hohe  $\beta$ -Faktoren im Bereich  $\beta \approx 0,7 - 0,9$  werden beispielsweise von sogenannten photonischen-Kristall-Resonator

Lasern (*engl.*: photonic crystal cavity Laser (PCC-Laser)) erreicht, mit denen sich dieser Teil der Arbeit befasst.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird das Materialsystem der PCC-Laser erläutert und es wird erklärt, durch welche physikalischen Effekte PCC-Laser so hohe  $\beta$ -Faktoren erreichen. Der Hauptteil dieses Kapitels gründet auf einer Experiment/Theorie-Kooperation mit der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Reitzenstein von der Technischen Universität in Berlin und der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Grandjean vom EPFL in Lausanne in der Schweiz zu einem Lasersystem mit einem eindimensionalen photonischen Kristall als Resonator: Dem Nanobeam-Laser. Ziel der experimentellen Arbeiten war der Nachweis von Lasing bei Nanobeam-Kavitäten, da in diesen Systemen radiative Verluste stark reduziert sind und die nanoskopischen Lichtquellen als vielversprechende Kandidaten gelten, um als energieeffiziente Laser mit einem hohen  $\beta$ -Faktor in vielen Anwendungsbereichen in der Zukunft zum Einsatz zu kommen [4]. Dazu wurden zwei unter ein tausend am EPFL in der Schweiz hergestellte Nanobeam-Proben ausgewählt und in Berlin auf ihre Kohärenzeigenschaften untersucht. Es wurden Messungen zur Lumineszenz und zu den statistischen Emissionseigenschaften der Proben durch die Messung der photonischen Autokorrelation gemacht. Die in Abb. 3.1 gezeigten experimentellen Messdaten deuten zwar auf Lasing einer der beiden untersuchten Proben hin, identifizieren den Einsatz kohärenter Emission jedoch nicht eindeutig. Der Beitrag der vorliegenden Arbeit zu dieser Kooperation bestand darin eine quantenoptische, mikroskopische Lasertheorie zur Beschreibung der vermessenen Nanobeam-Proben aufzustellen, um den experimentellen Nachweis von Lasing durch theoretische Berechnungen zu unterstützen. In Kapitel 3.2 erarbeiten wir diese Theorie.

In Kapitel 3.3 findet ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment statt, in dessen Rahmen wir die experimentellen Messdaten mit theoretischen Berechnungen reproduzieren und rechnerisch nachweisen, dass eine der beiden untersuchten Proben als Quelle kohärenten Lichtes (Laser) betrieben werden kann. Im Zuge der Untersuchungen stellt sich heraus, dass die lasende Nanobeam-Probe in die kohärente Emission übergeht, wenn wesentlich mehr als ein Photon im Mittel im Resonator enthalten sind. Auch beobachten wir, dass der nicht-lineare Anstieg in der Kennlinie der lasenden Nanobeam-Probe deutlich unterhalb des Lasingübergangs liegt, wenn der Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  auf eins abfällt. Diese ungewöhnlichen Kohärenzeigenschaften deuten darauf hin, dass in diesem System die spontane Emission sogar neben stimulierten Prozessen eine bedeutsame und nicht zu vernachlässigende Rolle spielt. Im letzten Abschnitt (Kapitel 3.4) erklären wir, wie wir die Systemparameter der lasenden Nanobeam-Probe auf das Lasersystem eines homogenen Emittersensembles aus dem zweiten Kapitel der Arbeit abbilden. Das Lasersystem QW aus Kapitel 2.6.3 bildet die lasende Nanobeam-Probe durch homogene Lichtemitter ab. In diesem System haben wir analytisch nachgewiesen, dass sich der Lasingübergang erst deutlich nach dem Einsatz stimulierter Prozesse vollzieht. Dies verstärkt die Vermutung, dass die spontane Emission eine nicht zu vernachlässigende Rolle in Nanobeam-Kavitäten spielt und daher in der theoretischen Modellierung dieser Systeme unbedingt berücksichtigt werden sollte. Abschließend findet in Kapitel 3.5 eine Zusammenfassung der Ergebnisse und Einsichten statt.

#### 3.1. Einführung in das Materialsystem

Wir beginnen mit der Einführung in das Materialsystem und die Funktionsweise von PCC-Lasern, deren Resonator ein photonischer Kristall ist. Das Gewinnmaterial ist ein Halbleiter-Quantenfilm mit einer räumlichen Ausdehnung in zwei Dimensionen. Es wird erklärt, wie diese beiden Komponenten dazu verwendet werden, um energieeffiziente Nanolaser mit einem hohen  $\beta$ -Faktor nahe eins zu bauen. Mit dem Nanobeam-Laser wird ein Beispiel eines photonischen Kristall-Resonators mit einem Quantenfilm-Gewinnmaterial betrachtet, bei dem Lasing bei hohen  $\beta$ -Faktoren bereits dokumentiert werden konnte [4, 50].

### 3.1.1. Photonischer Kristall-Resonator

Photonische Kristalle (PKs) sind Festkörper mit einem räumlich periodischen Brechungsindex  $n(\mathbf{r})$ . Sie sind in verschiedenen Geometrien in ein, zwei und drei Dimensionen realisierbar und stellen für Photonen das Analogon zur periodischen Anordnung von Atomen in einem Festkörpergitter für Elektronen dar [62, 64].

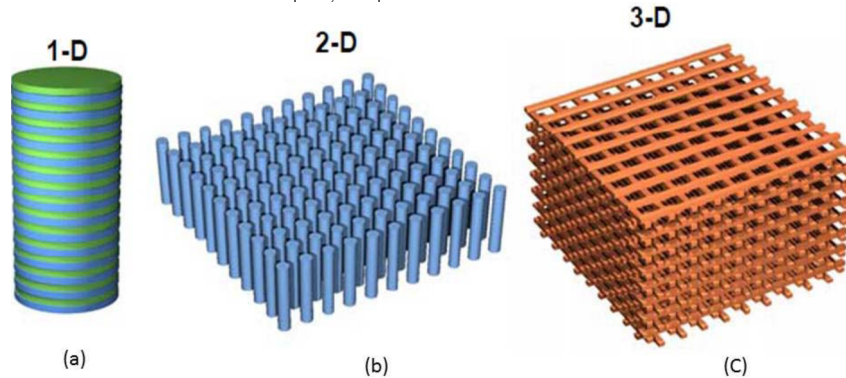


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung photonischer Kristalle in (a) ein, (b) zwei und (c) drei Dimensionen. Quelle: [61].

Abbildung 3.2 zeigt jeweils ein Beispiel für verschieden dimensionale photonische Kristalle. Sie kommen in der Natur beispielsweise in Form von Vogelgefieder, Schmetterlingsflügeln oder Edelsteinen vor und verleihen ihnen ihr charakteristisches Farbspektrum. Die periodischen Strukturen können aus verschiedenen Materialsystemen, darunter auch Halbleiter(-heterostrukturen), angefertigt werden.

Analog zur elektronischen Bandstruktur von Festkörpern, besitzen PKs eine Dispersion, welche auch als photonische Bandstruktur bezeichnet wird. Ebenso wie bei Elektronen ist die photonische Bandstruktur verbunden mit einer Zustandsdichte. Frequenzbereiche mit verschwindender photonischer Zustandsdichte in der photonischen Bandstruktur werden als photonische Bandlücke bezeichnet. Im Frequenzbereich der photonischen Bandlücke wird die Propagation von Licht im PK unterdrückt [62, 64].

Durch die Platzierung von Defekten in der periodischen Anordnung des PKs kann die Unterdrückung der photonischen Zustandsdichte in einem kleinen Frequenzintervall der photonischen Bandlücke lokal wieder aufgehoben werden, sodass Licht der entsprechenden Frequenz wieder durch den Kristall propagieren kann [62, 64]. Die Platzierung von Defekten im PK kann somit zur Ausbildung einer Resonatormode (Kavität) in der photonischen Bandlücke führen. Über die Geometrie, Platzierung der Defekte, Periodizität und der Wahl der Materialien bzw. der Brechungsindizes des PKs kann die photonische Zustandsdichte und somit der Spektralbereich, in dem eine Propagation von Licht möglich bzw. nicht möglich ist, sozusagen maßgeschneidert werden [64, 67]. Damit kann über die Ausnutzung des Purcell-Effekts die Rate der spontanen Emission eines in den photonischen Kristall eingebrachten optisch aktiven Gewinnmaterials frequenzabhängig beeinflusst werden.

Der Purcell-Effekt besagt, dass die Rate der spontanen Emission von Materie nach Fermis goldener Regel proportional zur photonischen Zustandsdichte ist [2, 65]. Die Erhöhung der Rate der spontanen Emission (Purcell-Verstärkung) in photonischen Kristall-Resonatoren konnte bereits häufiger dazu genutzt werden, um Lasing bei hohen  $\beta$  Faktoren  $\beta \approx 0,1 - 0,9$  nachzuweisen [13, 45–49, 63].

Das in dieser Arbeit untersuchte Lasersystem verwendet einen eindimensionalen PK aus

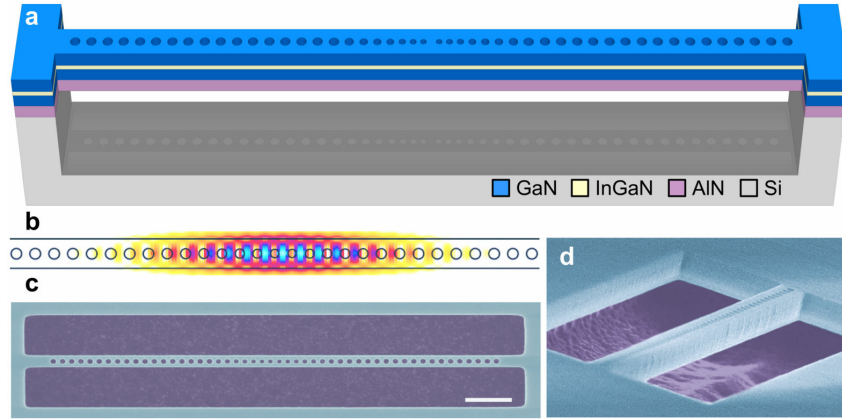


Abbildung 3.3: **Nanobeam-Laserresonator** (a): Schematischer Aufbau des eindimensionalen photonischen Kristalls, bestehend aus einer GaN-Matrix (blau) mit einem eingebetteten In<sub>0,15</sub>Ga<sub>0,85</sub>N Quantenfilm als optisch aktives Gewinn Material (gelb). Gewachsen wurde der Resonator auf einem Aluminium-Buffer (violett), welcher auf einem Silizium-Substrat (grau) gewachsen worden ist. (b): 3D-FDTD-Simulation des Betrages der elektrischen Feldstärke im Nanobeam-Resonator. Es lässt sich erkennen, dass das elektrische Feld effektiv in einem sehr kleinen Volumen im sub-Mikrometerbereich eingeschlossen wird. (c): Draufsicht von oben auf einen Nanobeam-Resonator. Der Maßstab entspricht 1 µm. (d): Seitenansicht des selben Nanobams. Grafik (c) und (d) sind Aufnahmen eines Transmissions-Elektronen-Mikroskops. Quelle: [4].

GaN als Resonator, welcher hohe  $\beta$ -Faktoren hauptsächlich durch die Unterdrückung (Purcell-Abschwächung) der spontanen Emission in Verlustmoden in einem relativ großen Spektralbereich mit einer Breite von mehreren hundert Nanometern Wellenlänge ermöglicht [4, 67]. Es wurde bereits demonstriert, dass die photonische Bandlücke eindimensionaler photonischer Kristall-Resonatoren im Spektralbereich von UV-Strahlung liegen kann, aber auch im Telekom-Wellenlängenbereich ( $\lambda \lesssim 1500$  nm) oder dazwischen [4, 67]. Dadurch stellt der Nanobeam-Laser einen vielversprechenden Kandidaten für die Umsetzung einer Vielzahl von optoelektronischen Anwendungen im Kurz- und Langwellenbereich dar [4].

Abbildung 3.3 (a) zeigt die schematische Darstellung eines Nanobeam-Resonators aus GaN mit Abmessungen im Mikrometerbereich. Auf Grund der Wellenleiternatur des Nanobeams wird das Ausdringen von Licht senkrecht zur Längsachse des Nanobeams durch Totalreflexion verhindert [3, 4]. Die Geometrie der räumlich inhomogenen Anordnung der Brechungsindizes in der Nanobeam-Struktur führt zur Ausbildung einer räumlich stark lokalisierten Resonatormode mit einem Modenvolumen  $V_M \approx \lambda^3$  in der Größenordnung der Wellenlänge  $\lambda$  der Resonatormode selber [60]. In Abb. 3.3 (b) ist die Simulation einer lokalisierten Resonatormode, die sich in einem Nanobeam-Resonator ausbildet, zu sehen.

#### 3.1.2. Quantenfilm-Gewinnmaterial

Im Gegensatz zu nulldimensionalen Quantenpunkten oder Atomen ist das hier betrachtete Quantenfilm-Gewinnmaterial in zwei Dimensionen räumlich ausgedehnt und besitzt eine kontinuierliche elektronische Zustandsdichte. In diesem Abschnitt wird erläutert, wie eine Dimension in der Bewegungsdynamik der Ladungsträger abgespalten wird, indem der Quantenfilm als eindimensionaler Quantentopf entlang der Quantenfilmhöhe beschrieben wird. Anschließend wird gezeigt, wie wir die Ladungsträger in der Quantenfilm-Ebene beschreiben.

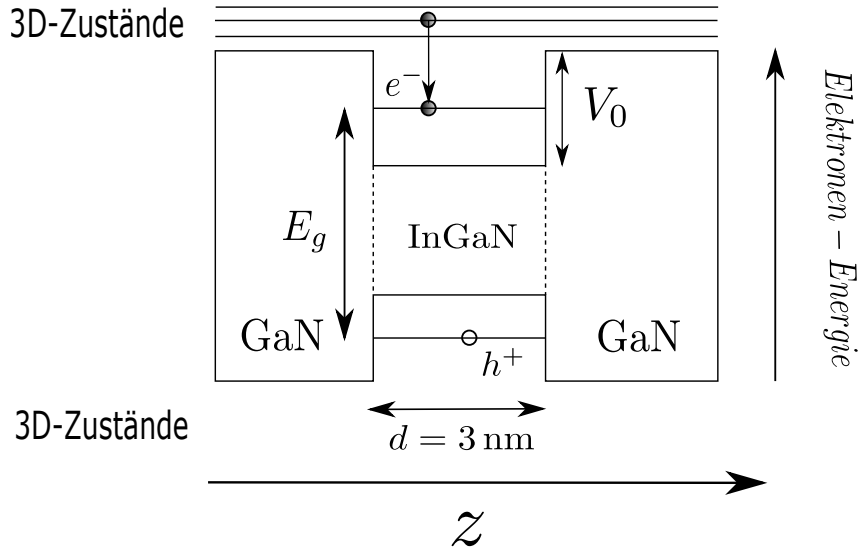


Abbildung 3.4: **Betrachtung des Quantenfilms als Quantentopf:** Die Bandlücke des Quantenfilms  $E_g$  ist kleiner als der energetische Abstand der 3D-Zustände der GaN-Matrix. Ladungsträger: Elektronen ( $e^-$ ) bzw. Löcher ( $h^+$ ), können aus den Zuständen des Quantenfilms nicht ohne eine Energiezufuhr, wie bei einem Potentialtopf „entkommen“, jedoch aus den 3D-Zuständen in die Quantenfilmzustände relaxieren. Die Breite des Quantentopfs ist die Quantenfilmdicke  $d$  und die Quantentopfhöhe ist  $V_0$ . Die zur Quantenfilmebene senkrechte Raumkoordinate ist  $z$ . Das Quantentopfmodell führt zur Diskretisierung des vertikalen Ladungsträgerimpulses  $k_z$  in Abhängigkeit von  $d$  und  $V_0$  [36]. Zur Übersichtlichkeit wurden die Quantenfilmzustände als diskrete Linien eingezeichnet. In Wirklichkeit hat das Quantenfilm-Gewinnmaterial jedoch eine kontinuierliche Bandstruktur in den übrigen beiden Impulskomponenten  $k_x$  und  $k_y$  des reziproken Raums, welche in Abb. 3.5 gezeigt ist.

### Quantentopfmodell

Das optisch aktive Gewinnmaterial der in dieser Arbeit betrachteten Nanobeam-Proben ist ein in die GaN-Matrix eingewachsener  $\text{In}_{0,15}\text{Ga}_{0,85}\text{N}$ -Quantenfilm mit einer Dicke von  $d = 3 \text{ nm}$  (siehe Abb. 3.3 (a)). Ladungsträger (Elektronen und Löcher) werden im Quantenfilm räumlich in einer Dimension „eingeschlossen“, da dessen Bandstruktur gegenüber der des Volumenmaterials eine kleinere elektronische Bandlücke besitzt. In einfachster Anschauung kann der räumliche Einschluss der Ladungsträger in der Quantenfilm-Ebene als eindimensionales Quantentopf-Problem aufgefasst werden (siehe Abb. 3.4). Dies ist gerechtfertigt, wenn die Dicke des Quantenfilms  $d$  in der Größenordnung der DeBroglie-Wellenlänge  $\lambda_B$  der Elektronen liegt [36]. Die Bewegungsdynamik der Ladungsträger im Quantenfilm wird durch diesen Ansatz in einer Dimension durch ein Quantentopf-Problem beschrieben und vom restlichen Problem abgespalten.

### Beschreibung von Ladungsträgern in der Quantenfilm-Ebene

Zur Beschreibung der Elektronen in der Quantenfilm-Ebene werden das Valenzband-Maximum und das Leitungsband-Minimum des Quantenfilms in Effektivmassennäherung [68] als isotrope Paraboliden in den Impulskomponenten  $k_x$  und  $k_y$  aufgefasst [36] (Näherung parabolischer Bänder). Dieser Ansatz ist gerechtfertigt, da die Dispersionsrelation von Licht näherungsweise eine vertikale Gerade in der Bandstruktur eines typischen Halbleiterfestkörpers darstellt [36, 37, 43] und sich die Licht-Materie Wechselwirkung hauptsächlich in einem kleinen Bereich um

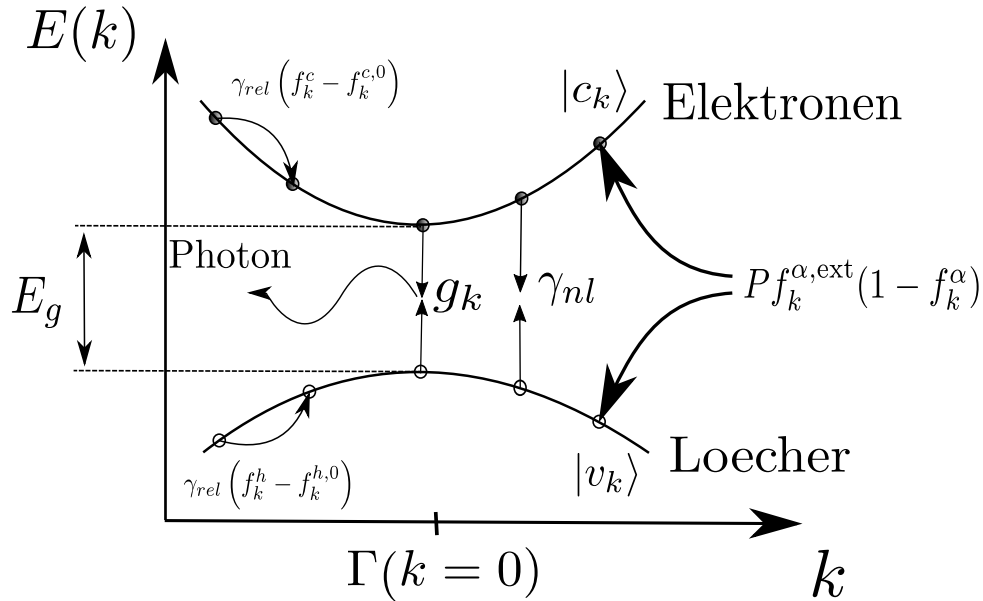


Abbildung 3.5: **Ladungsträgerprozesse im Quantenfilm:** Die Elektronen sind in den Leitungsbandzuständen  $|c_k\rangle$  und die Löcher in den Valenzbandzuständen  $|v_k\rangle$  befindlich.  $E_g$  ist die direkte Bandlücke. Durch die Relaxation von Ladungsträgern aus den 3D-Zuständen des GaN-Volumenmaterials werden Ladungsträger in die Zustände des Quantenfilms gebracht. Die Zufuhr von Ladungsträgern in die Bänder wird durch einen Pumpprozess modelliert. Mit der Rate  $P$  werden Ladungsträger mit einer Funktion  $f_k^{\alpha,\text{ext}}$ ,  $\alpha = e, h$  gewichtet in Valenz- und Leitungsband gepumpt. Innerhalb eines Bandes relaxieren Ladungsträger unter Teilchenzahlerhaltung mit der Rate  $\gamma_{\text{rel}}$  in ihre jeweilige Fermiverteilung  $f_k^{\alpha,0}$ . Die spontane Emission in Verlustmoden wird über die Rate  $\gamma_{\text{nl}}$  abgebildet. Die Wechselwirkung zwischen der Resonatormode und dem Quantenfilm wird durch die Kopplungskonstante  $g_k$  vermittelt. Der Betrag des zweidimensionalen Impulsvektors der Ladungsträger  $\mathbf{k}_{\parallel} = \{k_x, k_y\}$  ist  $k$ . Die Energie der Ladungsträger ist  $E(k)$ . Der  $\Gamma$ -Punkt ist der Punkt in der Brillouin-Zone, an dem  $k = 0$  ist.

die direkte Bandlücke herum beim  $\Gamma$ -Punkt (vgl. Abb. 3.5) abspielt. In Abbildung 3.5 ist die durch parabolische Bänder vereinfachte Bandstruktur des Quantenfilms in der Nähe des  $\Gamma$ -Punktes zu sehen. Eine detaillierte Erklärung der in Abb. 3.5 eingezeichneten Prozesse, welche die Ladungsträgerdynamik im Quantenfilm bestimmen, findet in Kapitel 3.2.5 statt.

### 3.2. Quantenmechanische Lasertheorie

Wir erarbeiten eine vollständig quantenmechanische, mikroskopische Lasertheorie für einen Nanobeam-Laser mit einem Quantenfilm-Gewinnmaterial. Dazu wird zunächst die lokalisierte Lichtfeldmode im photonischen Kristall-Resonator in quantisierter Form beschrieben. Dann werden die einzelnen Komponenten des Hamiltonoperators des gesamten Systems in zweiter Quantisierung hergeleitet. Dazu zählen der bosonische Anteil der Resonatormode, der rein fermionische Hamiltonoperator der Elektronen im Quantenfilm-Gewinnmaterial und der Wechselwirkungsoperator zwischen der lokalisierten Resonatormode und dem Quantenfilm. Letzterer enthält die Licht-Materie Kopplungskonstante, welche für das hier betrachtete System ebenfalls hergeleitet wird.

Aus dem Hamiltonoperator werden dann im Heisenbergbild Bewegungsgleichungen herge-

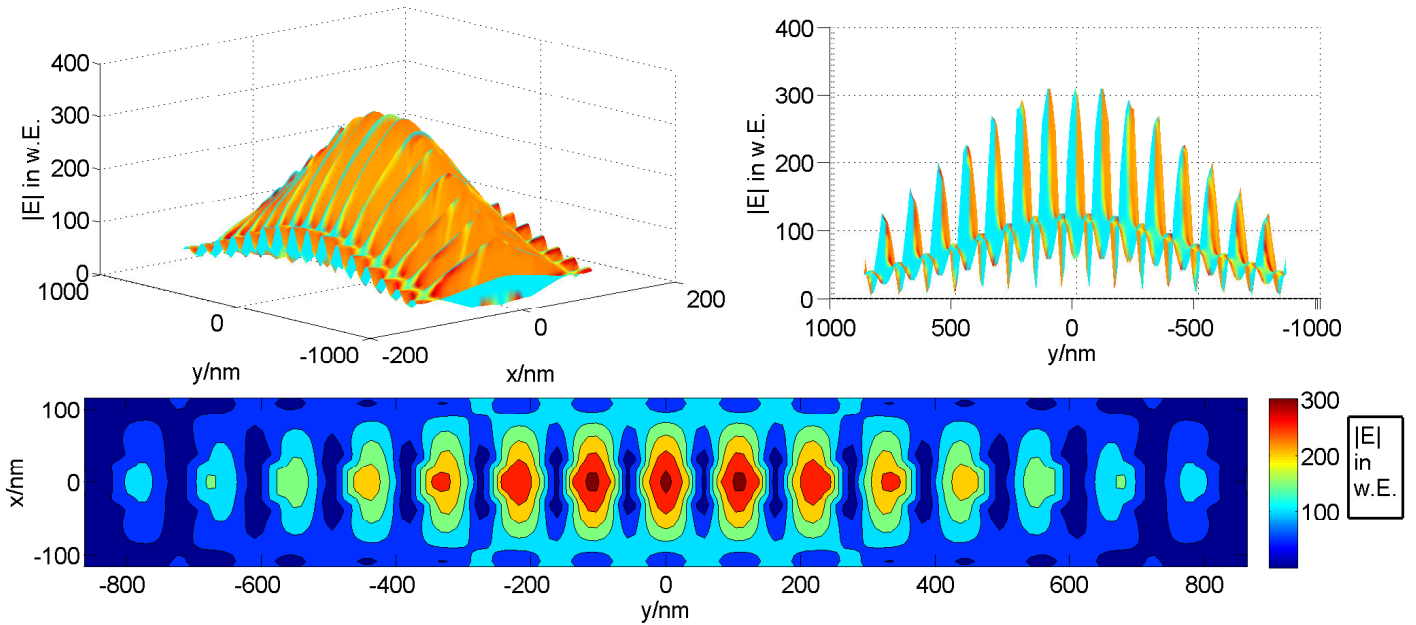


Abbildung 3.6: Alle Grafiken zeigen die stationäre Lösung der Maxwellgleichungen für den Betrag des elektrischen Feldes  $|\mathbf{E}(x, y, z_{QW})|$  der lokalisierten Resonatormode, welche sich in der Geometrie der in der Schweiz am EPFL hergestellten Nanobeam-Resonatoren ausbildet. Die oberen Graphiken zeigen den Betrag des Feldes aus verschiedenen Perspektiven in zwei Dimensionen und der untere Plot eine Farbkarte für den Betrag des elektrischen Feldes. Die  $z$ -Koordinate, bei der die Feldstärke ausgewertet worden ist, entspricht der Höhe im photonischen Kristall  $z_{QW}$ , in der das Quantenfilm-Gewinnmaterial eingewachsen worden ist. Die Lösung der Maxwellgleichungen wurde über eine dreidimensionale und in der Zeit aufgelöste finite Elemente Methode (3D-FDTD) erstellt. Aus dem unteren Plot lässt sich abschätzen, dass die Schnittfläche der lokalisierten Mode mit dem Quantenfilm ungefähr  $A_{\varnothing} \approx 0,31 \mu\text{m}^2$  ist.  $A_{\varnothing}$  ist ein Maß für die am Lasing beteiligte Menge des optisch aktiven Gewinnmaterials.

leitet, welche die Dynamik des Nanobeam-Lasers beschreiben. Wir gehen über die Ratengleichungstheorie hinaus, indem wir Korrelations-Effekte zwischen Photonen und Ladungsträgern und zwischen Photonen untereinander im System berücksichtigen, aus denen wir die photonische Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  berechnen. Die zur Herleitung der Lasergleichungen verwendete Methode ist die Clusterentwicklung (auf Quadruplett-Niveau), welche im zweiten Kapitel der Arbeit erläutert wurde. Die Lasergleichungen werden um Terme ergänzt, welche Dissipation im System, wie Verlustprozesse und die externe Anregung, simulieren.

### 3.2.1. Lokalisierte Resonatormode

Um die lokalisierte Resonatormode in der Nanobeam-Geometrie aus Abbildung 3.6 korrekt zu quantisieren, ist es eigentlich notwendig das Maxwell-Problem des photonischen Kristall-Resonators zu lösen. Die Quantisierung von Lichtfeldern in dispersiven und absorptiven Medien, wie dem photonischen Kristall des Nanobeam-Lasers, kann je nach Geometrie und den diffraktiven Eigenschaften des Systems beliebig kompliziert werden und stellt somit ein eigenes Themenfeld dar [69]. Hier wird das im Nanobeam-Resonator befindliche Lichtfeld vereinfacht über eine Modenexpansion nach ebenen Wellen quantisiert. Dieser Ansatz ist insofern gerechtfertigt, da sich die lokalisierte Resonatormode in der Nanobeam-Geometrie aus Abb. 3.6 im wesentlichen aus einer dominanten ebenen Wellen Komponente zusammensetzt (siehe Abb. 3.7). Alle



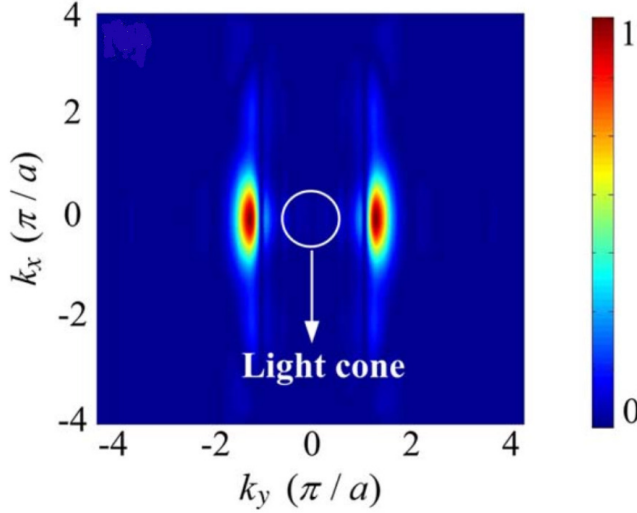


Abbildung 3.7: Normierte Fouriertransformation der lokalisierten Resonatormode, im Nanobeam. Es ist zu erkennen, dass sich die lokalisierte Resonatormode hauptsächlich aus einer dominanten Komponente einer ebenen Welle zusammensetzt mit  $|k_x| \approx 0$  und  $|k_y| \approx 1$  in Einheiten von  $\pi/a$  mit  $a$  als Lochabstand des PKs. Die zwei roten Peaks stellen die ein- bzw. auslaufende Komponente einer ebenen Welle im Nanobeam-Resonator dar. Quelle: [3].

anderen Fourierkomponenten sind dazu im Vergleich schwach ausgeprägt. In diesem Fall kann davon ausgegangen werden, dass andere in der Resonatormode enthaltene ebene Wellen Komponenten die Laserdynamik nur schwach beeinflussen. Darüber hinaus kann deswegen auch die Kopplung von Lichtfeldmoden untereinander vernachlässigt werden [69]. In der Quantisierung nach ebenen Wellen ist das quantisierte elektrische Verschiebungsfeld  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  in Coulomb-Eichung<sup>8</sup> [43]

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\xi} E_{\xi} \left[ \frac{u_{\xi}(z)}{\sqrt{d_{\xi}}} \frac{\mathbf{u}_{\xi}(\boldsymbol{\rho})}{\sqrt{A_{\xi}}} b_{\xi}(t) - h.c. \right]. \quad (3.2.1)$$

Dabei wird  $E_{\xi} V_{\xi}^{-1/2} = \sqrt{\hbar \omega_{\xi} / (2 \varepsilon_0 V_{\xi})}$  als Feld pro Photon bezeichnet mit  $V_{\xi} = A_{\xi} d_{\xi}$  als Modenvolumen der  $\xi$ -ten Mode. Die Energie der  $\xi$ -ten Mode ist  $\hbar \omega_{\xi}$ . Die Modenfunktion des Verschiebungsfeldes bzw. des elektrischen Feldes ist  $\mathbf{u}_{\xi}(\mathbf{r}) = u_{\xi}(z) \mathbf{u}_{\xi}(\boldsymbol{\rho})$ . Die lokalisierte Resonatormode  $\xi_l$  wird vereinfacht als monochromatische „ebene Welle im Kasten“ beschrieben mit dem In-Plane Anteil der Modenfunktion

$$\mathbf{u}_{\xi_l}(\boldsymbol{\rho}) = \Theta_{A_{\xi_l}}(\boldsymbol{\rho}) \hat{\mathbf{e}}_{\xi_l} e^{i \mathbf{q}_{\xi_l} \parallel \boldsymbol{\rho}}, \quad (3.2.2)$$

wobei  $\hat{\mathbf{e}}_{\xi_l}$  der die Polarisationsrichtung der Resonatormode vorgebende Einheitsvektor ist. Dabei ist

$$\Theta_{A_{\xi_l}}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \boldsymbol{\rho} \in A_{\xi_l} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

die  $\Theta$ -Funktion, welche die In-Plane Modenfunktion auf die Schnittfläche  $A_{\varnothing} = A_{\xi_l}$  der lokalisierten Resonatormode mit dem Quantenfilm beschränkt (siehe Abb. 3.8). Der vertikale Anteil der Resonatormodenfunktion wird ebenfalls als „ebene Welle im Kasten“

$$u_{\xi_l}(z) = \Theta(z - z_o) \Theta(z_u - z) e^{i q_{\xi_l} z} \quad (3.2.4)$$

<sup>8</sup>Die Coulomb-Eichung setzt die Quellenfreiheit des Vektorpotentials  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  voraus, sodass  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$  gilt.



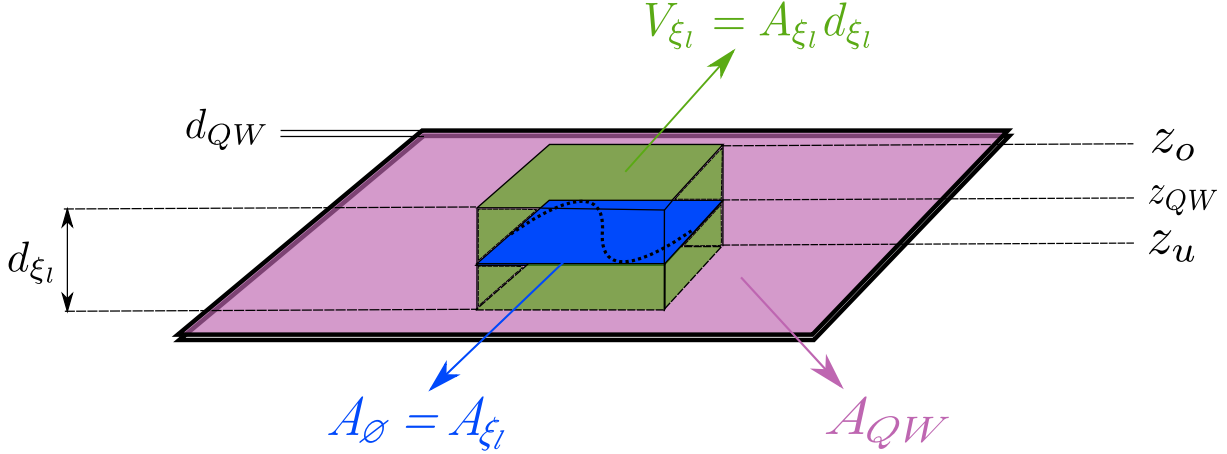


Abbildung 3.8: Schematische Darstellung der Resonatormode aus Abb. 3.6 als monochromatische „ebene Welle im Kasten“. Die blaue Fläche  $A_{\emptyset} = A_{\xi_l}$  stellt die optisch aktive Region des Quantenfilms dar, die in Wechselwirkung mit der Resonatormode (grüner Kasten) steht. Die violette Fläche  $A_{QW}$  ist die Quantenfilmfäche in der Nanobeam-Struktur. Die schwarz-gestrichelte Linie stellt vereinfacht eine ebene Welle dar, die in Wirklichkeit eine vektorielle Größe im dreidimensionalen Modenvolumen  $V_{\xi_l}$  ist.

angesetzt mit  $z_o - z_u = d_{\xi_l}$  als vertikale Ausdehnung der lokalisierten Mode im photonischen Kristall. Der Photonenimpuls der Resonatormode ist gegeben durch  $\mathbf{q}_{\xi_l} = \{\mathbf{q}_{\xi_l \parallel}, q_{\xi_l z}\}$ . Die hier beschriebene Situation ist in Abb. 3.8 dargestellt. Die  $b_{\xi}^{(\dagger)}(t)$  in Gl. (3.2.1) sind photonische Vernichtungs- bzw. Erzeugungsoperatoren, welche den bosonischen Kommutatorrelationen zu gleichen Zeiten [24]

$$\begin{aligned} [b_{\xi}(t), b_{\xi'}^{\dagger}(t)] &= \delta_{\xi\xi'} \\ [b_{\xi}^{\dagger}(t), b_{\xi'}^{\dagger}(t)] &= [b_{\xi}(t), b_{\xi'}(t)] = 0 \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

genügen. In Coulomb-Eichung ( $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ ) stehen das elektrische Verschiebungsfeld  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  und das Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  in der Beziehung  $(\epsilon_0 \epsilon)^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  zueinander [70]. Bei der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes im homogenen Raum nach ebenen Wellen ist die Wirkung der partiellen Ableitung nach der Zeit auf die bosonischen Erzeuger und Vernichter  $\frac{\partial}{\partial t} b_{\xi}^{(\dagger)}(t) = -i\omega_{\xi} b_{\xi}^{(\dagger)}(t)$  [69]. Das quantisierte Vektorpotential ist daher [43]

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\xi} \omega_{\xi}^{-1} E_{\xi} \left[ \frac{u_{\xi}(z)}{\sqrt{d_{\xi}}} \frac{\mathbf{u}_{\xi}(\boldsymbol{\rho})}{\sqrt{A_{\xi}}} b_{\xi}(t) + h.c. \right]. \quad (3.2.6)$$

Der explizite Ausdruck des Vektorpotentials (3.2.6) wird benötigt, um in der folgenden Sektion die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie zu beschreiben. Weiterhin kann aus dem Vektorpotential das magnetische Feld  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  berechnet werden. Aus dem elektrischen und magnetischen Feld wird die Feldenergie der elektromagnetischen Strahlung [24, 69]

$$H = \frac{1}{2} \int [\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mu_0 \mathbf{B}^2] d^3r \quad (3.2.7)$$

berechnet. Wird in den quantisierten Feldern (3.2.1) und (3.2.6) zunächst nur der Summand der Resonatormode  $\xi = \xi_l$ , betrachtet, ergibt (3.2.7) die Gesamtenergie der Resonatormode

$$H_L = \hbar \omega_{\xi_l} b_{\xi_l}^{\dagger} b_{\xi_l}. \quad (3.2.8)$$

Dabei ist  $\omega_{\xi_l}$  die Frequenz der Resonatormode. Der Ausdruck (3.2.8) ist der Hamiltonoperator der lokalisierten Resonatormode in zweiter Quantisierung.

#### 3.2.2. Licht-Materie Wechselwirkung

Zur Herleitung der Licht-Materie Wechselwirkung wird zunächst der Hamiltonoperator der minimalen Kopplung [70]

$$H = H_L + \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2m_i} (\mathbf{p}_i - q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t))^2 + U(\mathbf{r}_i) \right] \quad (3.2.9)$$

eines Systems, bestehend aus  $N$  geladenen Partikeln mit den Ladungen  $q_i$  an den Orten  $\mathbf{r}_i$  in der Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes, repräsentiert durch das Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , angesetzt. Dabei ist  $U(\mathbf{r}_i)$  ein effektives Potential, welches auf die Elektronen im Quantenfilm wirkt. Dieses wird in Kapitel 3.2.3 detaillierter diskutiert.

#### Unitäre Transformation (Translation im Impulsraum)

Der Hamiltonoperator (3.2.9) erweist sich auf Grund der Verschiebung des Impulsoperators  $\mathbf{p}_i$  um den elektromagnetischen Impuls  $q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$  als recht kompliziert in die Darstellung der zweiten Quantisierung zu bringen. Eine Methode, um diese quadratische Abhängigkeit des Hamiltonoperators vom Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$  zu umgehen, ist die der unitären Transformation [43]

$$H' = T H T^\dagger, \quad (3.2.10)$$

wobei der unitäre Operator

$$T(t) = \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t) \right) = \left( T^\dagger(t) \right)^{-1} = \left( T^{-1}(t) \right)^\dagger \quad (3.2.11)$$

nichts anderes ist, als der Translationsoperator im Impulsraum um den elektromagnetischen Impuls  $q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$ . Dies lässt sich auch durch die Anwendung von  $T(t)$  auf eine Funktion  $f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  zeigen, indem man den Ortsoperator in Impulsdarstellung  $\mathbf{r}_i = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i}$  schreibt. Es gilt  $T(t) f(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = f(\mathbf{p}_1 + q_1 \mathbf{A}(\mathbf{r}_1, t), \dots, \mathbf{p}_N + q_N \mathbf{A}(\mathbf{r}_N, t))$ . Dies gilt jedoch nur exakt, wenn das Vektorpotential keine räumliche Abhängigkeit, das heißt die Eigenschaft  $\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, \forall i = 1, \dots, N$ , besitzt. Diese Näherungsannahme wird als Dipolnäherung bezeichnet [43] und ist im Raumgebiet einer Einheitszelle des Quantenfilm-Festkörpers gerechtfertigt, wie man an Abb. 3.6 erkennen kann. Es ist zu sehen, dass sich die lokalisierte Resonatormode über einen wesentlich größeren Raumbereich erstreckt als Einheitszellen eines typischen Festkörpers mit einem Gitterabstand von  $a_g \approx 0,1 \text{ nm}$ . Auf Längenskalen von  $a_g$  sind die Felder  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  näherungsweise konstant.

Führt man die unitäre Transformation (3.2.10) durch, so ist es von Vorteil auszunutzen, dass sich  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  und  $U(\mathbf{r})$  aus Potenzreihen des Ortsoperators darstellen lassen und daher mit diesem kommutieren. Weiterhin ist der Impulsoperator in Ortsdarstellung gegeben durch  $\mathbf{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ . So findet man die Transformationsvorschriften:

$$\mathbf{p}'_i = \mathbf{p}_i + q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + q_i T \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} T^\dagger \approx \mathbf{p}_i + q_i \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (3.2.12)$$

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i, \quad (3.2.13)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (3.2.14)$$

$$U'(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}), \quad (3.2.15)$$

$$b'_\xi(t) = b_\xi(t) + \frac{i}{\hbar} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \omega_\xi^{-1} E_\xi \mathbf{U}_\xi^*(\mathbf{r}_i), \quad (3.2.16)$$

mit  $\mathbf{U}_\xi(\mathbf{r}) = \frac{u_\xi(z)}{\sqrt{d_\xi}} \frac{u_\xi(\rho)}{\sqrt{A_\xi}}$ . Der transformierte Hamiltonoperator  $H'$  ist

$$H' = H_L + H_M + H_{LM} \quad (3.2.17)$$

mit

$$H_M = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\mathbf{p}_i}{2m_i} + U(\mathbf{r}_i) \right) \quad (3.2.18)$$

als Hamiltonoperator der Elektronenenergien und

$$H_{LM} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \mathbf{D}(\mathbf{r}_i, t) - \frac{1}{2\varepsilon_0} \sum_{i,j,\xi} [q_i \mathbf{r}_i \mathbf{U}_\xi(\mathbf{r}_i)] [q_j \mathbf{r}_j \mathbf{U}_\xi^*(\mathbf{r}_j)] \quad (3.2.19)$$

als Licht-Materie Wechselwirkungsoperator.

### Der Dipol Hamiltonoperator

Der erste Term des Licht-Materie Wechselwirkungsbeitrags ist der Dipoloperator

$$H_D = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i \mathbf{D}(\mathbf{r}_i, t). \quad (3.2.20)$$

Er stellt den zentralen Wechselwirkungsbeitrag zwischen Licht und Materie dar, der in dieser Arbeit untersucht wird. Der letzte Term aus Gl. (3.2.19) wird als Dipol-Dipol Wechselwirkungsoperator bezeichnet [43] und beschreibt die Wechselwirkung zweier an den Orten  $\mathbf{r}_i$  und  $\mathbf{r}_j$  durch elektromagnetische Feldamplituden  $\mathbf{U}_\xi(\mathbf{r}_i)$  und  $\mathbf{U}_\xi(\mathbf{r}_j)$  induzierten Dipolen untereinander. Dieser Wechselwirkungsbeitrag wird hier vernachlässigt. Die physikalische Annahme dabei ist, dass das elektrische Feld der Resonantormode aus Abbildung 3.6 wesentlich stärker an einem Ort im Quantenfilm ist als durch elektrische Dipole induzierte elektrische Felder. Die Vernachlässigung der Dipol-Dipol Wechselwirkung begründet sich auch dadurch, dass die elektrische Feldstärke eines Dipolfeldes mit der dritten Potenz des Abstandes zum Dipolzentrum abfällt [70].

### 3.2.3. Elektronen im Quantenfilm und Bloch-Theorem

Die Atomkerne des Quantenfilm-Festkörpers werden in dieser Arbeit als starres und periodisches Kristallgitter betrachtet. Als an der Systemdynamik aktiv beteiligt, werden nur die Valenzelektronen der Gitteratome/kerne angenommen, was physikalisch nicht vollständig korrekt ist. Jedoch lässt sich die Separation der Bewegungsdynamik der Valenzelektronen von der Bewegungsdynamik der Atomkerne auf Grund des großen Massenunterschieds durch die Born-Oppenheimer Näherung begründen [38]. Trotz dieser Näherungsannahme handelt es sich bei der Beschreibung der Elektronen im Kristallgitter des Festkörpers weiterhin um ein Vielteilchen-Problem, welches auf Grund der Elektron-Elektron Wechselwirkung nicht analytisch gelöst werden kann. Eine Möglichkeit das Problem analytisch zu lösen, ist das Einführen eines effektiven Potentials  $U(\mathbf{r})$ . Dabei wird ein repräsentatives Elektron mit der Einteilchen-Wellenfunktion  $\varphi_\lambda$  im gemittelten Potential  $U(\mathbf{r})$  aller anderen Elektronen und Kerne betrachtet. Man erhält somit die folgende effektive Einteilchen-Schrödingergleichung [37]

$$\left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right) \varphi_\lambda(\mathbf{r}) = \epsilon_\lambda \varphi_\lambda(\mathbf{r}) \quad (3.2.21)$$

mit dem Bandindex<sup>9</sup>  $\lambda$ . Der in (3.2.21) zu sehende Einteilchen-Hamiltonoperator ist dabei einer der Summanden des Hamiltonoperators der Elektronen (3.2.18). Der angenommenen Kristallperiodizität des Quantenfilm-Festkörpers wegen, wird für das effektive Einteilchen-Potential die Translationsinvarianz

$$U(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = U(\mathbf{r}) \quad (3.2.22)$$

postuliert, wobei sich  $\mathbf{R} = \sum_i^2 n_i \mathbf{a}_i$  aus den Basisvektoren  $\mathbf{a}_i$  zusammensetzt, welche die Einheitszelle des Quantenfilm-Festkörpers aufspannen. Dabei ist  $n_i \in \mathbb{N}$ . Die Lösungen der effektiven Einteilchen-Schrödingergleichung (3.2.22) in Ortsdarstellung sind die Bloch-Funktionen<sup>10</sup>

$$\varphi_{\lambda, \mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\lambda, \mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (3.2.23)$$

wobei

$$u_{\lambda, \mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{\lambda, \mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (3.2.24)$$

gitterperiodische Bloch-Faktoren sind, die durch die Einhüllende  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  moduliert werden. Gleichung (3.2.23) und (3.2.24) gelten zusammen als Bloch-Theorem [38]. Basisunabhängig lassen sich die Bloch-Zustände  $|\lambda, \mathbf{k}\rangle$  also durch den Bandindex  $\lambda$  und einen Elektronen-Impuls festlegenden Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}$ , welcher an dieser Stelle auch die Information über den Elektronenspin  $s$  enthält, charakterisieren. In zweiter Quantisierung kann der Einteilchen-Zustand mit den Feldoperatoren [37]

$$\Psi^{(\dagger)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} a_{\lambda, \mathbf{k}}^{(\dagger)}(t) \varphi_{\lambda, \mathbf{k}}^{(*)}(\mathbf{r}) \quad (3.2.25)$$

als Superposition der Elemente der vollständigen Bloch-Basis  $\{\varphi_{\lambda, \mathbf{k}}(\mathbf{r})\}$  geschrieben werden [37]. Die  $a_{\lambda, \mathbf{k}}^{(\dagger)}(t)$  sind fermionische Erzeugungs bzw. Vernichtungsoperatoren, welche den Antikommutatorrelationen zu gleichen Zeiten [37, 38]

$$\begin{aligned} \left[ a_{\lambda, \mathbf{k}}(t), a_{\lambda', \mathbf{k}'}^\dagger(t) \right]_+ &= \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'}, \\ \left[ a_{\lambda, \mathbf{k}}^\dagger(t), a_{\lambda', \mathbf{k}'}^\dagger(t) \right]_+ &= \left[ a_{\lambda, \mathbf{k}}(t), a_{\lambda', \mathbf{k}'}(t) \right]_+ = 0 \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

genügen. Die auf das Kristall Volumen  $V$  normierten Bloch-Funktionen in Gl. (3.2.25) sind gegeben durch [38]

$$\varphi_{\lambda, \mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_{\lambda, \mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (3.2.27)$$

Speziell für einen Quantenfilm wird für die elektronischen Feldoperatoren mit dem Spin  $s$  der Ansatz [43]

$$\Psi_s^{(\dagger)}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} a_{\lambda, s, \mathbf{k}}^{(\dagger)}(t) \left( \varphi_{\lambda, s, \mathbf{k}}^{QW}(\mathbf{r}) \right)^{(*)}, \quad (3.2.28)$$

gemacht, wobei  $\mathbf{k}$  hier nicht mehr den Elektronenspin  $s$  enthält und

$$\varphi_{\lambda, s, \mathbf{k}}^{QW}(\mathbf{r}) = \frac{\xi_{\lambda, s, k_z}(z)}{\sqrt{d_{QW}}} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel}\boldsymbol{\rho}}}{\sqrt{A_{QW}}} u_{\lambda, s, \mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (3.2.29)$$

---

<sup>9</sup>In einem Festkörper periodischer Gitterstruktur stellen die Bandindizes gute Quantenzahlen dar und nicht die atomaren Quantenzahlen der Elektronen [37, 38].

<sup>10</sup>Diese bilden ein vollständiges orthonormal System (VONS) [38].

die Bloch-Funktionen sind. Die zur Quantenfilm-Ebene vertikale, elektronische Einschlussfunktion ist  $\xi_{\lambda,s,k_z}(z)$ . Diese ist dimensionslos und stellt hier die Lösung des in Abb. 3.4 gezeigten Potentialtopfes der Höhe  $V_0$  und der Breite  $d$  dar. In der Quantenfilm-Ebene werden ebene Wellen  $e^{i\mathbf{k}_{\parallel}\boldsymbol{\rho}}$  als Einhüllende angenommen. Dabei wird die Notation  $\mathbf{k} = \{\mathbf{k}_{\parallel}, k_z\}$  und  $\mathbf{r} = \{\boldsymbol{\rho}, z\}$  verwendet. Die gitterperiodischen Bloch-Faktoren sind  $u_{\lambda,s,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ . Die Quantenfilmdicke und -fläche sind  $d_{QW}$  und  $A_{QW}$ . In unserer Betrachtung des Quantenfilms setzen wir die Translationsinvarianz (3.2.22) lediglich in der Quantenfilm-Ebene voraus, welche durch die beiden Gittervektoren  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  aufgespannt sei.

### Elektronisches Zustandskontinuum

In unserem Modell betrachten wir den Quantenfilm als einen endlich ausgedehnten Festkörper. Damit die Bloch-Funktionen (3.2.29) die Eigenzustände der Elektronen im Quantenfilm-Festkörper sind, muss das Bloch-Theorem in der gesamten Quantenfilm-Ebene gültig sein. Um die Gültigkeit des Bloch-Theorems (3.2.23) und (3.2.24) in der gesamten Quantenfilm-Ebene zu gewährleisten, werden periodische Randbedingungen nach Born von Karmann über [37]

$$\varphi_{\lambda,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \varphi_{\lambda,\mathbf{k}}(\mathbf{r} + N_i \mathbf{a}_i), \quad i = 1, 2 \quad (3.2.30)$$

festlegt. Die Idee dabei ist, dass der Quantenfilm  $N_i$  Einheitszellen entlang des elementaren Gittervektors  $\mathbf{a}_i$  ausgedehnt ist und sich danach wiederholt aneinanderreihet. Dadurch kann in der gesamten Quantenfilm-Ebene eine Translationsinvarianz postuliert werden, welche die Grundannahme für das Bloch-Theorem ist [37]. Eine Folge aus dem Bloch Theorem (3.2.23) und (3.2.24) und den Born von Karmanschen Randbedingungen (3.2.30) ist, dass die reziproken In-Plane Elektronenimpulse festgelegt werden zu [37]:

$$\mathbf{k}_{\parallel} = \sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{b}_i \quad \text{mit} \quad m_i = \frac{n_i}{N_i}, \quad n_i \in \mathbb{N}. \quad (3.2.31)$$

Gleichung (3.2.31) lässt sich ansehen, dass die In-Plane Wellenzahlvektoren  $\mathbf{k}_{\parallel}$  umso dichter aneinander liegen, je weiter der Quantenfilm in der Ebene ausgedehnt ist. Im Limes eines in der Ebene unendlich ausgedehnten Quantenfilms ( $N_i \rightarrow \infty$ ,  $i = 1, 2$ ) liegen die elektronischen Zustände unendlich nahe beieinander. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einem Quasikontinuum [38]. Die Quantenfilmfläche  $A_{QW} = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| N_1 N_2$  wird in unserem Model als eine endliche, jedoch so große Größe aufgefasst, sodass die Impulszustände  $\mathbf{k}_{\parallel}$  so nahe beieinander liegen, dass alle in dieser Arbeit auftretenden Summen über den In-Plane Wellenzahlvektor  $\mathbf{k}_{\parallel}$  in guter Näherung durch Integrale gemäß [36, 37, 71]

$$\sum_{\mathbf{k}'_{\parallel}} \longrightarrow \lim_{\Delta \mathbf{k}'_{\parallel} \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}'_{\parallel}} \frac{\Delta k'}{\Delta k'} \approx \frac{A_{QW}}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}'_{\parallel} \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{k}'_{\parallel} = \frac{(2\pi)^2}{A_{QW}}, \quad (3.2.32)$$

approximiert werden können. Die Überführung von  $\mathbf{k}_{\parallel}$ -Summen in Integrale (3.2.32) wird in Kapitel 3.2.5 zur numerischen Auswertung der Nanobeam-Lasergleichungen verwendet.

#### 3.2.4. Hamiltonoperator in der Blochbasis

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie die Anteile des Hamiltonoperators (3.2.17)  $H_M$  und  $H_{LM}$  in die Form der zweiten Quantisierung gebracht werden, indem die elektronischen Wellenfunktionen mit fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in der Blochbasis dargestellt werden.

#### Freier Hamiltonoperator der Elektronen

Der Einteilchen-Operator aus Gleichung (3.2.21) ist in zweiter Quantisierung

$$H_M = \sum_s \int d^3r \Psi_s(\mathbf{r}, t) \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right) \Psi_s^\dagger(\mathbf{r}, t). \quad (3.2.33)$$

Dabei wird das elektronische Einteilchen-Eigenwertproblem nach Gl. (3.2.21) als implizit gelöst angenommen. Die Energieeigenwerte des Einteilchen-Operators in den runden Klammern von Gl. (3.2.33) sind  $\varepsilon_{\lambda,s,\mathbf{k}}$ . Unter Abwesenheit von externen magnetischen Feldern kann davon ausgegangen werden, dass die freien Elektronenenergien im Spin  $s$  entartet sind und wir definieren  $\varepsilon_{\lambda,\mathbf{k}} = \varepsilon_{\lambda,s,\mathbf{k}}/2$ . Auch hier werden Wellenzahlvektor und Spin separiert voneinander betrachtet. Durch Einsetzen der Wellenfunktion (3.2.28) in (3.2.33) und unter Ausnutzung der Eigenwertgleichung (3.2.21) und der Vollständigkeit und der Orthogonalität der Bloch-Funktionen (3.2.29), erhält man den Ausdruck

$$H_M = \sum_{\lambda,\mathbf{k}} \varepsilon_{\lambda,\mathbf{k}} a_{\lambda,\mathbf{k}}^\dagger a_{\lambda,\mathbf{k}}, \quad (3.2.34)$$

wobei wir von der Annahme Gebrauch gemacht haben, dass die Elektronen im Quantenfilm in allen ihren Eigenschaften entartet im Spin sind, sodass wir den Spin-Index in (3.2.34) nicht mehr an die elektronischen Operatoren geschrieben haben. Der Bandindex  $\lambda = c, v$  beschränkt sich bei unserem Zweibandmodell aus Abb. 3.5 auf das Leitungsband ( $c$ ) und das Valenzband ( $v$ ). Da der vertikale Elektronenimpuls  $k_z$  parametrisch durch das Quantentopf-Problem festgelegt ist, hängen alle Größen nur noch vom In-Plane Elektronenimpuls  $\mathbf{k}_\parallel$  ab. Daher können wir Gl. (3.2.34) schreiben als

$$H_M = \sum_{\mathbf{k}_\parallel} \varepsilon_{c,\mathbf{k}_\parallel} c_{\mathbf{k}_\parallel}^\dagger c_{\mathbf{k}_\parallel} + \varepsilon_{v,\mathbf{k}_\parallel} v_{\mathbf{k}_\parallel}^\dagger v_{\mathbf{k}_\parallel}, \quad (3.2.35)$$

wobei wir die Notation  $c_{\mathbf{k}_\parallel}^{(\dagger)} = a_{c,\mathbf{k}_\parallel}^{(\dagger)} \equiv a_{c,\mathbf{k}}^{(\dagger)}$  und  $v_{\mathbf{k}_\parallel}^{(\dagger)} = a_{v,\mathbf{k}_\parallel}^{(\dagger)} \equiv a_{v,\mathbf{k}}^{(\dagger)}$  verwendet haben. In der Näherung isotroper, parabolischer Bänder lassen sich die Eigenenergien schreiben als [36, 68]

$$\varepsilon_{c,\mathbf{k}_\parallel} = E_g + \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}_\parallel|^2}{2m_c} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{v,\mathbf{k}_\parallel} = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}_\parallel|^2}{2m_v} \quad (3.2.36)$$

mit den effektiven Massen des Leitungs- und Valenzbandes  $m_c$  und  $m_v$ .  $E_g$  ist die Bandlücke des Quantenfilms. Die isotropen Paraboliden (3.2.36) sind in Abb. 3.5 dargestellt. Das Valenzband in Abb. 3.5 ist nach unten hin geöffnet, da nicht die Elektronenenergie  $\varepsilon_{v,\mathbf{k}_\parallel}$  dargestellt ist, sondern die Energie der Löcher  $\varepsilon_{h,\mathbf{k}_\parallel} = -\varepsilon_{v,\mathbf{k}_\parallel}$  im Valenzband.

#### Dipoloperator in der Blochbasis

Der Dipoloperator wird in zweiter Quantisierung als [43]

$$H_D = \sum_s \int d^3r \Psi_s^\dagger(\mathbf{r}, t) (-e\mathbf{r} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})) \Psi_s(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.37)$$

geschrieben. Das Einsetzen der Wellenfunktion (3.2.28) führt zu

$$H_D = - \sum_{s,\lambda,\lambda',\mathbf{k},\mathbf{k}'} a_{\lambda',s,\mathbf{k}'}^\dagger a_{\lambda,s,\mathbf{k}} \int d^3r \frac{e^{i(\mathbf{k}_\parallel - \mathbf{k}'_\parallel) \cdot \mathbf{r}}}{A_{QW}} \frac{g_{\lambda\lambda'}(z)}{d_{QW}} u_{\lambda',s,\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \left( \frac{e\mathbf{r} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \right) u_{\lambda,s,\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (3.2.38)$$

mit  $g_{\lambda\lambda'}(z) = \xi_{\lambda,s,k_z}(z)\xi_{\lambda',s,k'_z}^*(z)$  als vertikale Einschlussfunktion der Elektronen im Quantenfilm. In einem weiteren Schritt wird das Raumintegral aus (3.2.38) in eine Summe über die  $N_{QW}$  identischen Einheitszellen des Quantenfilms mit dem Einheitszellen-Volumen  $\Omega_i$  zerlegt, sodass

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_{QW}} \int_{\Omega_i} d^3r_0 f(\mathbf{r}_0 + \mathbf{R}_i) \quad (3.2.39)$$

geschrieben werden kann, wobei  $\mathbf{R}_i = \{\rho_i, Z_i\} = \{X_i, Y_i, Z_i\}$  ein Gittervektor im Realraum des Quantenfilm-Festkörpers ist und  $f(\mathbf{r})$  den Integranden des Raumintegrals aus Gl. (3.2.38) darstellt. Zusätzlich werden die folgenden Annahmen ausgenutzt: Da nur  $\mathbf{k}_{\parallel}$ -Zustände nahe der Bandkante des Quantenfilms beim  $\Gamma$ -Punkt betrachtet werden, kann der oszillierende Anteil  $e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel})\rho}$  aus  $f(\mathbf{r})$  als langsam variierende Funktion aus dem Integral über eine Einheitszelle (3.2.39) herausgezogen werden. Weiterhin wird die Einschlussfunktion  $g_{\lambda\lambda'}(z)$  über eine Einheitszelle in  $z$ -Richtung als konstant über diese angenommen. In Kapitel 3.2.2 wurde die Konstanz des elektrischen Verschiebungsfeldes  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$  über eine Einheitszelle (Dipolnäherung) begründet. Mit dem Einheitszellen-Volumen  $\Omega_i = \Omega_{QW} = V_{QW}/N_{QW} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$  kann das Integral aus Formel (3.2.38) unter diesen Näherungsannahmen als

$$\int d^3r f(\mathbf{r}) = \mathbf{d}_{\lambda\lambda'}^{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{1}{N_{QW}} \sum_{i=1}^{N_{QW}} e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel})\rho_i} g_{\lambda\lambda'}(Z_i) \frac{\mathbf{D}(\mathbf{R}_i)}{\epsilon_0} \quad (3.2.40)$$

geschrieben werden, wobei

$$\mathbf{d}_{\lambda\lambda'}^{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} d^3r_0 u_{\lambda',s,\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}_0) (\mathbf{r}_0 + \mathbf{R}_i) u_{\lambda,s,\mathbf{k}}(\mathbf{r}_0) \quad (3.2.41)$$

als Dipolmatrixelement bezeichnet wird und die Gitterperiodizität der Bloch-Faktoren  $u_{\lambda,s,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  nach Gleichung (3.2.24) ausgenutzt wurde, sodass es nicht notwendig ist, den Gittervektor  $\mathbf{R}_i$  in den Argumenten der Bloch-Faktoren  $u_{\lambda,s,\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  in (3.2.41) mitzuführen. An dieser Stelle wenden wir die Einhüllenden-Näherung [68] an, deren wesentliche Annahme ist, dass bei der Entwicklung der elektronischen Wellenfunktionen (3.2.28) nach Bloch-Funktionen alle Bloch-Faktoren durch den Bloch-Faktor  $u_{\lambda,s,\mathbf{k}=0}(\mathbf{r})$  bei  $\mathbf{k} = 0$  ersetzt werden. Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn hinreichend kleine  $\mathbf{k}$  betrachtet werden [36, 38]. Dies setzen wir bei unserer Betrachtung der Quantenfilm-Bandstruktur in der Nähe des  $\Gamma$ -Punktes als gewährleistet voraus. In der Einhüllenden-Näherung [68] entfällt hier<sup>11</sup> die Impulsabhängigkeit des Dipolmomentes. Für jede Einheitszelle gilt universell

$$\mathbf{d}_{\lambda\lambda'} = \frac{1}{\Omega_{QW}} \int_{\Omega_{QW}} d^3r_0 u_{\lambda',s,\mathbf{k}=0}^*(\mathbf{r}_0) e\mathbf{r}_0 u_{\lambda,s,\mathbf{k}=0}(\mathbf{r}_0). \quad (3.2.42)$$

Inbesondere gilt auf Grund der ungeraden Symmetrie des Integranden aus (3.2.41)

$$\mathbf{d}_{\lambda\lambda'} = 0 \quad \text{für } \lambda = \lambda'. \quad (3.2.43)$$

Physikalisch kann (3.2.43) als Auswahlregel interpretiert werden, dass die Dipol-Wechselwirkung keine Übergänge innerhalb eines Bandes zulässt. An dieser Stelle wird wieder Gleichung (3.2.40) betrachtet. Zur weiteren Auswertung wird die darin auftretende Summe wieder in ein Raumintegral gemäß der Vorschrift [37]

$$\sum_{i=1}^{N_{QW}} \longrightarrow \lim_{\Delta R \rightarrow \Omega_{QW}} \sum_{i=1}^{N_{QW}} \frac{\Delta R}{\Delta R} \approx \frac{1}{\Omega_{QW}} \int d^3r \quad (3.2.44)$$

<sup>11</sup>Im Allgemeinen ist das Dipolmoment auch in der Einhüllenden Näherung abhängig vom Wellenzahlvektor [36]. Da hier der langsam oszillierende Anteil  $e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel})\rho}$  jedoch nicht in die Berechnung des Dipolmomentes (3.2.41) eingeht, entfällt die Impulsabhängigkeit an dieser Stelle.

überführt mit dem Argument, dass alle unter der Summe (3.2.40) befindlichen Größen in guter Näherung über eine Einheitszelle, also im Raumgebiet  $\Delta R = \Omega_{QW}$ , konstant sind. Sukzessives Einsetzen des Verschiebungsfeldes (3.2.1) in (3.2.40) und (3.2.38) führt zum Licht-Materie Wechselwirkungsoperator

$$H_D = -i \sum_{\xi} \sum_{s, \lambda, \lambda', \mathbf{k}, \mathbf{k}'} a_{\lambda', s, \mathbf{k}'}^{\dagger} a_{\lambda, s, \mathbf{k}} \mathbf{d}_{\lambda \lambda'} \frac{E_{\xi}}{\sqrt{V_{\xi}}} \left[ \tilde{\mathbf{u}}_{\xi}(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel}) \times \Gamma_{\lambda \lambda'}^{\xi} b_{\xi} - h.c. \right] \quad (3.2.45)$$

mit der Fouriertransformierten der In-Plane Modenfunktion

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\xi}(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel}) = \frac{1}{A_{QW}} \int d^2 \rho e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel}) \cdot \rho} \mathbf{u}_{\xi}(\rho) \quad (3.2.46)$$

und dem vertikalen Einschlussfaktor (*engl.*: Confinement Factor)

$$\Gamma_{\lambda \lambda'}^{\xi} = \frac{1}{d_{QW}} \int dz g_{\lambda \lambda'}(z) u_{\xi}(z), \quad (3.2.47)$$

welcher den räumlichen Überlapp der  $\xi$ -ten Lichtfeldmode mit der elektronischen Aufenthaltswahrscheinlichkeit<sup>12</sup> in  $z$ -Richtung darstellt. An dieser Stelle wird nur noch die Wechselwirkung des Gewinnmaterials mit der lokalisierten Resonatormode  $\xi_l$  betrachtet. Die Wechselwirkung des Quantenfilms mit allen anderen Moden wird im nachfolgenden Kapitel im Rahmen einer System-Bad Kopplung als dissipativer Prozess über Lindblad-Terme beschrieben. Setzt man die Modenfunktion (3.2.3) in den Ausdruck (3.2.46) ein, so erhält man durch die  $\Theta$ -Funktion

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\xi_l}(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel}) = \hat{\mathbf{e}}_{\xi_l} \frac{1}{A_{QW}} \int_{A_{\emptyset}} d^2 \rho e^{i(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{k}'_{\parallel} + \mathbf{q}_{\xi_l}) \cdot \rho} \overset{(\mathbf{q}_{\xi_l} \parallel \approx 0)}{\hat{\mathbf{e}}_{\xi_l}} \frac{A_{\emptyset}}{A_{QW}} \delta_{\mathbf{q}_{\parallel} 0} \quad (3.2.48)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass der In-Plane Photonenimpuls  $\mathbf{q}_{\xi_l}$  gegenüber der In-Plane Elektronenimpulse  $\mathbf{k}_{\parallel}$  vernachlässigbar klein ist [36–38]. Im letzten Schritt von (3.2.48) wurde die Notation  $\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}'_{\parallel} - \mathbf{k}_{\parallel}$  verwendet. Das letzte Gleichheitszeichen von (3.2.48) gilt exakt, wenn der Rand der optisch aktiven Quantenfilmfläche  $A_{\emptyset}$  genau an den Rändern von Einheitszellen des Quantenfilms verläuft. Da  $A_{\emptyset}$  jedoch viel größer ist als die zur Quantenfilm-Ebene parallele Querschnittsfläche einer Einheitszelle, gilt das letzte Gleichheitszeichen aus Gl. (3.2.48) immer in sehr guter Näherung. Der Einheitsvektor der Polarisationsrichtung der lokalisierten Mode, das Dipol-Matrixelement, das Feld pro Photon und der Confinement Faktor  $\Gamma_{vc}^{\xi_l} A_{\emptyset} / A_{QW}$  werden zur Licht-Materie Kopplungskonstante

$$g_{\xi_l}^{vc} = \hbar^{-1} \hat{\mathbf{e}}_{\xi_l} \cdot \mathbf{d}_{vc} \frac{E_{\xi_l}}{\sqrt{V_{\xi_l}}} \Gamma_{vc}^{\xi_l} \frac{A_{\emptyset}}{A_{QW}} \quad (3.2.49)$$

zwischen der Resonatormode und dem Quantenfilm zusammengefasst. Auf diese Weise erhält man den Dipol-Wechselwirkungsoperator in zweiter Quantisierung

$$H_D = -i\hbar \sum_{\mathbf{k}_{\parallel}, s} \left( g_{\xi_l}^{vc} b_{\xi} c_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger} v_{\mathbf{k}_{\parallel}} - h.c. \right), \quad (3.2.50)$$

wobei eine Rotating-Wave-Approximation (RWA) Näherung durchgeführt wurde. In dem hier betrachteten Fall ist die Näherungsannahme der RWA-Näherung die Vernachlässigung von Termen, welche die Energieerhaltung verletzen [24]. Dazu zählt der Term  $b_{\xi}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger} v_{\mathbf{k}_{\parallel}}$ , der den Übergang eines Elektrons vom Valenzband in das energetisch höher gelegene Leitungsband unter Emission eines Photons in die Resonatormode beschreibt und der umgekehrte Prozess  $\left( b_{\xi}^{\dagger} c_{\mathbf{k}_{\parallel}}^{\dagger} v_{\mathbf{k}_{\parallel}} \right)^{\dagger}$ ,

---

<sup>12</sup>Wird die vertikale, elektronische Einschlussfunktion für Elektronen und Löcher als gleich angenommen ( $\xi_{c,s,k_z}(z) = \xi_{v,s,k_z}(z)$ ), stellt  $g_{cv}(z)$  die elektronische Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Ladungsträgern in vertikaler Richtung im Quantenfilm dar.



welcher die Absorbtion eines Photons der Resonatormode durch den Übergang eines Elektrons vom Leitungsband in das energetisch tiefer gelegene Valenzband beschreibt. Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen des Nanobeam-Lasers im nächsten Abschnitt (Kapitel 3.2.5) wird die vereinfachende Notation  $\mathbf{k}_{\parallel} = k$  und  $g_{\xi_l}^{vc} = g_{\xi_l}/2$  verwendet. Die Summation über die Spinausrichtungen  $s = \uparrow, \downarrow$  wird in Gl. (3.2.50) durch den Faktor 2 ersetzt.

### 3.2.5. Nanobeam Lasergleichungen

Auf der Grundlage des Hamiltonoperators des gesamten Licht-Materie Systems

$$H = H_M + H_L + H_D \quad (3.2.51)$$

$$\text{mit } H_M = \sum_k \left( \varepsilon_{c,k} c_k^\dagger c_k + \varepsilon_{v,k} v_k^\dagger v_k \right), \quad (3.2.52)$$

$$H_L = \hbar \omega_{\xi_l} b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} \quad (3.2.53)$$

$$\text{und } H_D = -i\hbar \sum_k \left( g_{\xi_l} b_{\xi_l} c_k^\dagger v_k - h.c. \right), \quad (3.2.54)$$

werden über die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für Erwartungswerte (2.4.1) die Dynamiken der Erwartungswerte der Elektronenbesetzung des Leitungsbands

$$\langle c_k^\dagger c_k \rangle = f_k^e, \quad (3.2.55)$$

der Lochbesetzung im Valenzband

$$\langle v_k v_k^\dagger \rangle = 1 - \langle v_k^\dagger v_k \rangle = f_k^h, \quad (3.2.56)$$

und der mittleren Photonenzahl der lokalisierten Resonatormode

$$\langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} \rangle = n_{p,\xi_l}, \quad (3.2.57)$$

berechnet, welche an den Erwartungswert der photonenassistierten Polarisation

$$p_{\xi_l,k} = \langle b_{\xi_l}^\dagger v_k^\dagger c_k \rangle. \quad (3.2.58)$$

koppeln. Dabei werden die Lindblad-Terme in (2.4.1) zunächst nicht berücksichtigt. Der Hamiltonoperator (3.2.54) hat genau die gleiche Gestalt, wie ein Hamiltonoperator zur Beschreibung eines Ensembles aus diskreten Lichtemitter in Wechselwirkung mit einer Resonatormode [8, 22], mit dem Unterschied, dass  $k$  in (3.2.54) nicht den Emitterindex, sondern einen elektronischen Impulsvektor bezeichnet. Bei der Herleitung der Nanobeam-Lasergleichungen wenden wir die Clusterentwicklung auf Quadruplett-Niveau an, welche bereits im zweiten Kapitel der Arbeit angewandt wurde. Nähere Details zur Cluesterentwicklung sind in den Ref. [22] und [35] zu finden. An dieser Stelle sei lediglich darauf verwiesen, dass alle Faktorisierungen in der Clusterentwicklung zur Herleitung der Nanobeam-Lasergleichungen analog wie in der Betrachtung diskreter Lichtemitter durchgeführt wurden. Der Impulsvektor-Index  $k$  wurde dabei behandelt wie der Emitterindex bei einem Lasersmodell aus diskreten Emitttern. In Ref. [8] sind die Quadruplett-Lasergleichungen für ein Quantenpunkt-Ensemble im Elektron-Loch Bild zu finden. Abgesehen von der Bedeutung des Emitterindex und den dissipativen Termen haben die in der genannten Ref. aufgeführten Quadruplett-Lasergleichungen genau die selbe Gestalt, wie unsere Nanobeam-Lasergleichungen. Im Folgenden werden noch dissipative Prozesse im System diskutiert.

#### Externe Anregung (Pumpprozess)

Die GaN-Matrix der Nanobeam-Proben wird optisch kontinuierlich angeregt. Die angeregten Ladungsträger relaxieren vom Volumenmaterial in das Valenz- und Leitungsband des Quantenfilms (siehe Abb. 3.4). Dadurch werden Ladungsträger in die Quantenfilm-Bandstruktur der Abb. 3.5 gebracht. Die Ladungsträgerzufuhr wird als Pumpprozess

$$\left. \frac{d}{dt} f_k^\alpha \right|_{\text{Pump}} = P f_k^{\alpha, \text{ext}} (1 - f_k^\alpha) \quad (3.2.59)$$

modelliert, wobei  $\alpha = e, h$  und  $f_k^{\alpha, \text{ext}}$  eine Gewichtungsfunktion ist, die bestimmt, in welche Zustände mehr bzw. weniger Ladungsträger aus dem GaN-Volumenmaterial in die Zustände des Quantenfilms relaxieren. Um sicherzustellen, dass die Besetzung eines elektronischen Zustandes im Valenz- bzw. Leitungsband  $|v_k\rangle$  bzw.  $|c_k\rangle$  nicht größer als eins wird (Pauli-Prinzip), wird der Pumpprozess um den Pauli-Blocking Term  $(1 - f_k^\alpha)$  ergänzt. Als Maß für die Eingangsleistung wird die Pumprate  $P$  verwendet. Der Pumpprozess ist schematisch in Abb. 3.5 eingezeichnet.

#### Nicht-radiative Verluste

Weitere dissipative Prozesse stellen nicht-radiative Verluste nach Shockley-Read-Hall (SRH) dar. Ladungsträger streuen in energetisch diskrete Zustände außerhalb der kontinuierlichen Bandstruktur des optisch aktiven Quantenfilm-Gewinnmaterials. Diese Zustände können durch Fehlstellen und Verunreinigungen in der Gitterstruktur des aktiven Mediums auftreten. Die durch diesen Prozess frei werdende Energie wird nicht in einem Photon, sondern in einem Phonon abgegeben [36]. Insbesondere ist die Defektdichte der Gitterstruktur bei Nitriden, wie dem hier betrachteten GaN/InGaN-Materialsystem besonders hoch [4, 76], weshalb nicht-radiative Prozesse in diesem System explizit berücksichtigt werden sollten. Modelliert werden die nicht-radiativen Verluste mit der Rate  $\gamma_{nr}$  über die phänomenologische Einführung des Terms [36]

$$\left. \frac{d}{dt} f_k^\alpha \right|_{\text{nr}} = -\gamma_{nr} f_k^\alpha \quad (3.2.60)$$

in der Bewegungsgleichung der Ladungsträgerbesetzungen. Dieser Prozess ist zur Übersichtlichkeit nicht in Abb. 3.5 eingezeichnet.

#### Relaxation von Ladungsträgern

Eine wichtige Konsequenz der in dieser Arbeit nur oberflächlich behandelten Coulombwechselwirkung zwischen den Ladungsträgern im Quantenfilm ist die Streuung von Ladungsträgern zwischen verschiedenen  $k$ -Zuständen, welche zu einer Relaxation der Ladungsträgerverteilungen in Fermiverteilungen führt [36]. Die durch die Coulombwechselwirkung vermittelte Intraband-Relaxation von Ladungsträgern wird durch [36]

$$\left. \frac{d}{dt} f_k^\alpha \right|_{\text{rel}} = -\gamma_{\text{rel}} (f_k^\alpha - f_k^{\alpha, 0}) \quad (3.2.61)$$

modelliert. Dabei ist die Relaxationsrate  $\gamma_{\text{rel}}$  und

$$f_k^{\alpha, 0} = \frac{1}{1 + e^{\beta(\varepsilon_{\alpha, k} - \mu_\alpha)}}, \quad (3.2.62)$$

ist die entsprechende Fermiverteilung von Elektronen bzw. Löchern in Leitungs- und Valenzband. Das chemische Potential  $\mu_\alpha$  der Ladungsträger wird durch die Forderung der Teilchenzahlerhaltung

$$\sum_k f_k^\alpha(t) = \sum_k f_k^{\alpha, 0}(t), \quad \alpha = e, h \quad (3.2.63)$$

des Relaxationsprozesses festgelegt. Hier ist  $\beta = (k_B T)^{-1}$  mit  $T$  als Temperatur des Quantenfilm-Festkörpergitters und  $k_B$  ist die Boltzmann-Konstante.

### Modellierung von Resonatorverlusten und radiativen Verlusten durch Lindblad-Terme

Über eine Kopplung der Resonatormode  $\xi_l$  an ein Wärmebad, wird die Auskopplung von Photonen aus dem Nanobeam-Resonator (Resonatorverluste) modelliert. Die Anwendung des Lindblad-Terms der Kavitätsverluste aus Gl. (2.4.1) mit der Rate  $\kappa/2 = \kappa_{\xi_l}$  wirkt so, dass die Dynamik eines jeden bosonischen Operators in den Nanobeam-Lasergleichungen um den Dämpfungsterm  $\kappa_{\xi_l}$  ergänzt wird gemäß

$$\frac{d}{dt} b_{\xi_l}^{(\dagger)} \longrightarrow \left( \frac{d}{dt} + \kappa_{\xi_l} \right) b_{\xi_l}^{(\dagger)}. \quad (3.2.64)$$

Durch die Anwendung des zweiten Lindblad-Terms aus Gleichung (2.4.1) mit der Rate  $\gamma = \tau_{nl}^{-1}$  auf die Besetzungen  $f_k^\alpha$  erhält man die Terme der spontanen Emission in Verlustmoden

$$\left. \frac{d}{dt} f_k^\alpha \right|_{nl} = - \frac{\langle c_k^\dagger v_k v_k^\dagger c_k \rangle}{\tau_{nl}} = - \frac{f_k^e f_k^h}{\tau_{nl}}. \quad (3.2.65)$$

Dabei wurde von der Annahme Gebrauch gemacht, dass Ladungsträger in unterschiedlichen Bändern unkorreliert sind und deshalb  $\delta \langle c_k^\dagger c_k v_k v_k^\dagger \rangle = 0$  bzw.  $\langle c_k^\dagger v_k v_k^\dagger c_k \rangle = f_k^e f_k^h$  gilt [77]. Die spontane Emission des Gewinnmaterials in Verlustmoden resultiert aus der Wechselwirkung des Quantenfilm-Gewinnmaterials mit dem Wärmereservoir/bad aller anderen Lichtfeldmoden  $\xi \neq \xi_l$ , welche nicht der lokalisierten Resonatormode entsprechen.

### Phänomenologische Einführung der Dephasierung

Aus der Coulombwechselwirkung lässt sich neben der Intraband-Relaxation von Ladungsträgern auch die Dephasierung der Polarisierung berechnen [36]. Diese wird hier phänomenologisch eingeführt, indem die Dynamik der paarweise auftretenden fermionischen Operatoren  $v_k^\dagger c_k$  in den Nanobeam-Lasergleichungen um einen Dephasierungsterm gemäß

$$\frac{d}{dt} v_k^\dagger c_k \longrightarrow \left( \frac{d}{dt} + \Gamma \right) v_k^\dagger c_k. \quad (3.2.66)$$

ergänzt wird.

### Nanobeam-Lasergleichungen

Unter Berücksichtigung der im letzten Abschnitt diskutierten dissipativen Effekte ergibt sich aus der Clusterentwicklung auf Quadruplett-Niveau das geschlossene Bewegungsgleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_k^\alpha &= -2g_{\xi_l} \Re \{ p_{\xi_l, k} \} - \gamma_{rel} (f_k^\alpha - f_k^{\alpha, 0}) - \gamma_{nr} f_k^\alpha + P f_k^{\alpha, \text{ext}} (1 - f_k^\alpha) \\ &\quad - \frac{f_k^e f_k^h}{\tau_{nl}}, \end{aligned} \quad (3.2.67)$$

$$\frac{d}{dt} n_{p, \xi_l} = +2g_{\xi_l} \sum_{k'} \Re \{ p_{\xi_l, k'} \} - 2\kappa_{\xi_l} n_{p, \xi_l}, \quad (3.2.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_{\xi_l, k} &= (i\delta_k + \kappa_{\xi_l} + \Gamma) p_{\xi_l, k} + g_{\xi_l} \left[ f_k^e f_k^h + n_{p, \xi_l} (f_k^e + f_k^h - 1) \right] \\ &\quad + g_{\xi_l} \left( \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} c_k^\dagger c_k \rangle - \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} v_k^\dagger v_k \rangle \right), \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} c_k^\dagger c_k \rangle = & -2g_{\xi_l} \Re \left\{ \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} v_k^\dagger c_k \rangle + (n_{p,\xi_l} + f_k^e) p_{\xi_l,k} \right\} \\ & - 2\kappa_{\xi_l} \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} c_k^\dagger c_k \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} v_k^\dagger v_k \rangle = & +2g_{\xi_l} \Re \left\{ \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} v_k^\dagger c_k \rangle + (n_{p,\xi_l} + f_k^h) p_{\xi_l,k} \right\} \\ & - 2\kappa_{\xi_l} \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} v_k^\dagger v_k \rangle, \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

$$\frac{d}{dt} \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} b_{\xi_l} \rangle = +4g_{\xi_l} \sum_{k'} \Re \left\{ \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} v_{k'}^\dagger c_{k'} \rangle \right\} - 4\kappa_{\xi_l} \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} b_{\xi_l} \rangle, \quad (3.2.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} v_k^\dagger c_k \rangle = & (i\delta_k + 3\kappa_{\xi_l} + \Gamma) \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} v_k^\dagger c_k \rangle \\ & - 2g_{\xi_l} p_{\xi_l,k}^2 + g_{\xi_l} \left( f_k^e + f_k^h - 1 \right) \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} b_{\xi_l} \rangle \\ & + 2g_{\xi_l} \left[ \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} c_k^\dagger c_k \rangle \left( f_k^h + n_{p,\xi_l} \right) - \delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} v_k^\dagger v_k \rangle \left( f_k^e + n_{p,\xi_l} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

mit  $\alpha = e, h$ . Dabei ist  $\hbar\delta_k = \hbar\omega_{\xi_l} - (\varepsilon_{c,k} - \varepsilon_{v,k})$  die Verstimmung der elektronischen Impulszustände gegenüber der Resonatormode. In dem oben zu sehenden Gleichungssystem wurden, wie im zweiten Kapitel der Arbeit, Korrelationen zwischen Ladungsträgern vernachlässigt, welche sub- und superradiante Effekte beschreiben. Die Licht-Materie Kopplungskonstante  $g_{\xi_l}$  ist eine reelle Größe<sup>13</sup>. In den oben zu sehenden Quadruplett-Lasergleichungen treten Summen über den Impulsvektor  $k$  auf. Diese werden in der numerischen Auswertung der Bewegungsgleichungen durch Integrale gemäß (3.2.32) approximiert. Es ist anzumerken, dass die Überführung der  $k$ -Summen in Integrale nach (3.2.32) dazu führt, dass die Laserintensität  $n_{p,\xi_l}$  in Gleichung (3.2.68) wegen  $g_{\xi_l} \propto A_{QW}^{-1}$  nicht von der Fläche des gesamten Quantenfilms  $A_{QW}$  abhängt, sondern lediglich mit dem optisch aktiven Anteil der Quantenfilmfläche  $A_\emptyset$  aus Abb. 3.8 skaliert. Dies ist physikalisch sinnvoll, da der Anteil des Quantenfilm-Gewinnmaterials, welcher nicht  $A_\emptyset$  zugehörig ist, nicht im Lasingprozess involviert ist und somit nicht dazu beiträgt Photonen in die Resonatormode zu emittieren.

Weiterhin kann die am Lasing beteiligte Ladungsträgeranzahl von Elektronen bzw. Löchern  $N^\alpha$  für das hier betrachtete System mit kontinuierlicher, elektronischer Zustandsdichte aus dem Produkt der am Lasing beteiligten Quantenfilmfläche  $A_\emptyset$  und den Ladungsträgerdichten  $\eta^\alpha$ ,  $\alpha = e, h$  für Elektronen bzw. Löchern berechnet werden gemäß

$$N^\alpha = A_\emptyset \eta^\alpha \quad \text{mit} \quad \eta^\alpha = \frac{1}{A_{QW}} \sum_k f_k^\alpha. \quad (3.2.74)$$

Formel (3.2.74) wird in Kapitel 3.4 dazu verwendet, um die Anzahl der am Lasing beteiligten Ladungsträger  $N$  abzuschätzen, die in das Lasermode mit homogenen und diskreten Lichtemittern aus dem zweiten Kapitel der Arbeit eingehen muss, um die Kohärenzeigenschaften eines Nanobeam-Lasers abzubilden.

Analog zur Gl. (2.4.12) aus dem zweiten Kapitel der Arbeit für Systeme mit diskreter elektronischer Zustandsdichte können wir den idealen Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion zu gleichen Zeiten für den Quantenfilm-Laser über

$$g^2(0) = \frac{\langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} \rangle}{n_{p,\xi_l}^2} = 2 + \frac{\delta \langle b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l}^\dagger b_{\xi_l} b_{\xi_l} \rangle}{n_{p,\xi_l}^2} \quad (3.2.75)$$

berechnen.

---

<sup>13</sup>Dies ist i.A. nicht so. Jedoch kann durch eine Reskalierung der bosonischen Operatoren  $b_{\xi_l}^{(\dagger)}$  die Licht-Materie Kopplungskonstante immer zu einer reellen Größe transformiert werden ohne die Kommutatorrelation (3.2.5) zu verletzen [44].

### 3.2.6. Berechnung des $\beta$ -Faktors

Der  $\beta$ -Faktor spielt eine fundamentale Rolle in Ratengleichungstheorien. Der Anteil der spontanen Emission, der als radiative Verluste aus dem System verloren geht, wird in dieser Theorie durch  $(1 - \beta)$  abgebildet. Während der  $\beta$ -Faktor in Ratengleichungsmodellen als Parameter vorgegeben werden kann, der den betrachteten Laser charakterisiert, ist es in unserem komplexeren, mikroskopischen Lasermode nicht mehr möglich die radiativen Verluste durch einen einzigen Parameter abzubilden. Trotzdem können wir in unserer Theorie einen Parameter

$$\beta = \frac{\sum_k 2|g_{\xi_l}|^2 \Re\{p_{\xi_l,k}^{sp}\}}{\sum_k \left(2|g_{\xi_l}|^2 \Re\{p_{\xi_l,k}^{sp}\} + \tau_{nl}^{-1} f_k^e f_k^h\right)} \quad (3.2.76)$$

mit der selben physikalischen Bedeutung als das Verhältnis der durch das Gewinnmaterial in die Resonatormode spontan emittierten Photonen zur gesamten Anzahl der spontan emittierten Photonen definieren, wobei

$$\frac{d}{dt} p_{\xi_l,k}^{sp} = (i\delta_k + \kappa_{\xi_l} + \Gamma) p_{\xi_l,k}^{sp} + f_k^e f_k^h \quad (3.2.77)$$

zusammen mit den Quadruplett-Lasergleichungen in der Zeit aufintegriert wird<sup>14</sup> [8]. Setzt man die stationäre Lösung der Gleichung (3.2.77) in (3.2.76) ein, erhält man

$$\beta = \frac{\sum_k \frac{2|g_{\xi_l}|^2}{\Gamma + \kappa_{\xi_l}} L(k) f_k^e f_k^h}{\sum_k \left( \frac{2|g_{\xi_l}|^2}{\Gamma + \kappa_{\xi_l}} L(k) f_k^e f_k^h + \tau_{nl}^{-1} f_k^e f_k^h \right)} \quad \text{mit} \quad L(k) = \frac{(\Gamma + \kappa_{\xi_l})^2}{\delta_k^2 + (\Gamma + \kappa_{\xi_l})^2} \quad (3.2.78)$$

als Lorentzfunktion, welche die spontane Emission in die Lasermode von stark gegenüber der Resonatormode verstimmt  $k$ -Übergängen unterdrückt. Betrachtet man lediglich den  $k$ -Übergang an der Resonanz  $k_r$  mit  $\delta_{k_r} = 0$  und  $L(k_r) = 1$  lässt sich für den  $\beta$ -Faktor eine obere Schranke

$$\beta = \frac{\frac{2|g_{\xi_l}|^2}{\Gamma + \kappa_{\xi_l}}}{\frac{2|g_{\xi_l}|^2}{\Gamma + \kappa_{\xi_l}} + \tau_{nl}^{-1}} \quad (3.2.79)$$

definieren, welche nicht dynamisch aus den Bewegungsgleichungen bestimmt werden muss, sondern sich aus den Systemparametern berechnen lässt. In Kapitel 3.3, wählen wir die Parameter  $g_{\xi_l}$  und  $\tau_{nl}^{-1}$  so, dass sich für die modellierten Nanobeam-Kavitäten nach Formel (3.2.79)  $\beta = 0,7$  als obere Schranke für den  $\beta$ -Faktor ergibt.

## 3.3. Theorie und Experiment im Vergleich

In Zusammenarbeit mit der TU Berlin wurde Lasing an Nanobeam-Kavitäten mit InGaN-Quantenfilmen als Gewinnmaterial untersucht. Zur Interpretation der experimentellen Ergebnisse und um den Nachweis von Lasing zu erhärten, wurde die in Kapitel 3.2 eingeführte Theorie zu Rate gezogen. Die hier präsentierten Ergebnisse befinden sich gegenwärtig in der Begutachtung [51].

Zum experimentellen Nachweis von Lasing wurden zwei Nanobeam-Resonator Proben aus GaN mit einem eingewachsenen  $\text{In}_{0,15}\text{Ga}_{0,85}\text{N}$ -Quantenfilm als optisch aktives Medium, wie sie in Abb. 3.3 zu sehen sind, auf ihre Emissionseigenschaften bei Raumtemperatur ( $T=300\text{ K}$ ) untersucht. Die GaN-Matrix der Proben wurde optisch kontinuierlich (cw excitation) durch einen

<sup>14</sup>Gleichung (3.2.77) gleicht der Dynamik (3.2.68) der photonenassistierten Polarisation  $p_{\xi_l,k}$ , wobei in (3.2.68) lediglich der Term der spontanen Emission  $f_k^e f_k^h$  berücksichtigt wurde.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$E_g$	1,73 eV	$\gamma_{rel}$	1 ps <sup>-1</sup>
$m_e$	0,071 $m_0$	$\gamma_{nr}$	$5 \cdot 10^{-5}$ ps <sup>-1</sup>
$m_h$	0,167 $m_0$	$T$	300 K
$\Gamma$	20 ps <sup>-1</sup>	$\hbar\delta = \hbar\omega_{\xi_l} - E_g$	30 meV
$g_{\xi_l}$	0,041 ps <sup>-1</sup>	$A_{\emptyset}$	0,31 $\mu\text{m}^2$
$\tau_{sp}$	5 ns	$\tau_{nl}^{-1}$	$6 \cdot 10^{-5}$ ps <sup>-1</sup>
$\beta$	0,7		

Tabelle 2: Die Tabelle zeigt die in den Nanobeam-Lasergleichungen (3.2.67) - (3.2.73) verwendeten Parameter, um die Emissionseigenschaften der untersuchten Nanobeam-Proben zu simulieren. Die Parameter zur Beschreibung der beiden Proben gleichen sich. Die Proben unterscheiden sich lediglich in ihrer Resonatorgüte  $Q$  (siehe Haupttext).  $m_0$  bezeichnet die Elektronenmasse. Die spontane Emissionszeit des Quantenfilm-Gewinnmaterials haben wir zu  $\tau_{sp} = 5$  ns abgeschätzt [74]. Der  $\beta$ -Faktor wurde von den Experimentatoren auf der Basis eines Ratengleichungsmodells aus Ref. [4] zu  $\beta = 0,7$  abgeschätzt. Aus dem  $\beta$ -Faktor und der spontanen Emissionszeit  $\tau_{sp}$  wurde die Rate der radiativen Verluste  $\tau_{nl}^{-1} = (1 - \beta)\tau_{sp}^{-1}$  berechnet. Die Licht-Materie Kopplungskonstante  $g_{\xi_l}$  wurde aus dem Zusammenhang (3.2.79) mit den in der Tabelle angegebenen Werten von  $\beta$  und  $\tau_{nl}^{-1}$  berechnet. Die optisch aktive Quantenfilmfläche  $A_{\emptyset}$  wurde aus der unteren Grafik der Abb. 3.6 abgeschätzt

He-Cd-Laser mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 325$  nm angeregt. Angeregte Ladungsträger relaxieren in die Quantenfilmzustände und rekombinieren in diesen unter Emission von Licht (siehe Abb. 3.3 und 3.5). Als Maß für die Laserintensität bzw. die Ausgangsleistung der Proben wurde über einen konventionellen, elektrischen Photodetektor die Anzahl der Photonen gemessen, die auf diesen während eines definierten Zeitintervalls auftreffen. Dazu ist zu sagen, dass nicht das direkt entlang der Längsachse ( $y$ -Achse der Abb. 3.6) des Resonators emittierte Licht gemessen wurde, sondern das nach oben (entlang der  $z$ -Achse) gestreute Licht, da der eindimensionale photonische Kristall zu beiden Enden hin in ein GaN-Volumenmaterial eingewachsen ist (siehe Abb. 3.3 (d)). In Abhängigkeit der Eingangsleistung wurde so die Emissionsintensität der Proben gemessen. Über eine Versuchsanordnung nach Hanbury Brown und Twiss (HBT) [73] wurden die statistischen Emissionseigenschaften der Nanobeam-Proben durch die Messung der photonischen Autokorrelationsfunktion bestimmt.

In Abb. 3.9 vergleichen wir die Emissionscharakteristik der beiden Nanobeam-Proben bei Raumtemperatur. Die Proben unterscheiden sich hauptsächlich in ihrer Resonatorgüte  $Q$ . Bei der ersten Probe ist  $Q \approx 2200$ . Der Nanobeam-Resonator der zweiten Probe (Referenzprobe) besitzt einen  $Q$ -Faktor von  $Q \approx 1800$ . Diese Abschätzungen basieren auf Messungen im Bereich der Transparenz des Quantenfilm-Gewinnmaterials. Aus der Resonatorgüte ergibt sich die Rate der Resonatorverluste der ersten Probe zu  $2\kappa_{\xi_l} = \omega_{\xi_l} Q^{-1} = 1,88$  ps<sup>-1</sup>. Für die Referenzprobe ergibt sich  $2\kappa_{\xi_l} = 2,30$  ps<sup>-1</sup>. Die anderen Parameter zur theoretischen Modellierung der beiden Proben sind ansonsten gleich und können Tabelle 2 entnommen werden.

In Abb. 3.9 (a) ist die Kennlinie der ersten Nanobeam-Probe zu sehen. Die roten Kugeln sind experimentelle Messdaten und die schwarze Linie ist die stationäre Lösung der mittleren Photonenzahl  $n_{p,\xi_l}$  unseres Lasersmodells aus Kapitel 3.2. Es ist zu erkennen, dass die Kennlinie eine (durch die blauen Referenzgeraden hervorgehobene) leichte Nichtlinearität aufweist. In der theoretischen Modellierung stellt sich heraus, dass diese hauptsächlich durch die nicht-radiativen Verluste im System verursacht wird. Radiative Verluste haben einen kaum vorhandenen Einfluss

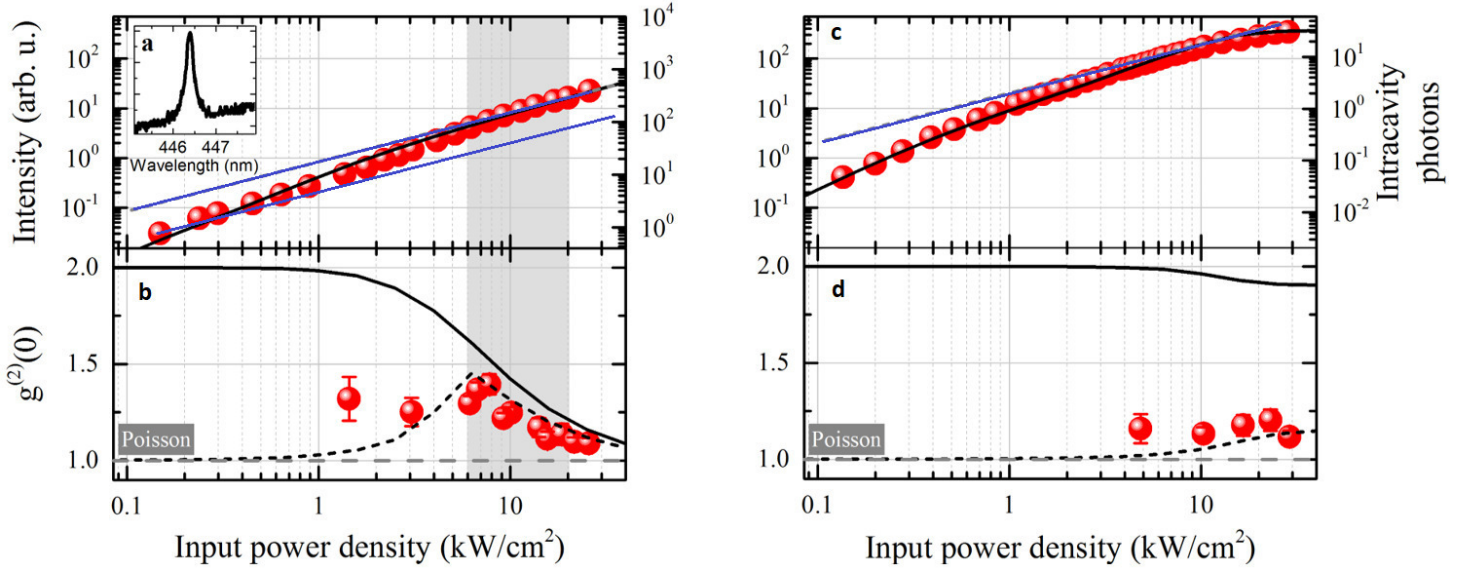


Abbildung 3.9: **Quantenoptische Charakterisierung der lasenden (links) und der nicht-lasenden (rechts) Nanobeam-Probe:** Die roten Kugeln sind die experimentellen Messwerte aus Abb. 3.1. Die durchgezogenen schwarzen Linien sind die stationären Lösungen der Quadruplett-Lasergleichungen (3.2.67) bis (3.2.73) für die mittlere Photonenzahl  $n_{p,\xi_l}$  und für den idealen Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$ . (a,c): Kennlinien der beiden Nanobeam-Proben. In Abbildung (a) wurde zusätzlich das Emissionsspektrum der ersten Nanobeam-Probe eingefügt, wenn diese bei einer Eingangsleistung von  $P = 0,3 \text{ kW/cm}^2$  angeregt wird. Die blauen Linien sind Referenzgeraden der Steigung eins. (b,d): Verlauf der Autokorrelationsfunktion. Die schwarz-gestrichelten Linien sind die über Formel (H.1) berechneten Werte der gemessenen Autokorrelationsfunktion  $g_{\text{exp}}^2(0)$ . Die grau-gestrichelten Linien markieren das Poisson-Limit  $g^2(0) = 1$ . Der grau unterlegte Bereich in den Grafiken (a) und (b) markiert den Übergang in die kohärente Emission der ersten Nanobeam-Probe. Zur Berechnung der theoretischen Daten wurden die Parameter aus Tabelle 2 verwendet.

in diesem System. Dies reflektiert sich durch einen nach Gl. (3.2.79) berechneten  $\beta$ -Faktor von 0,7 in unserem theoretischen Model (siehe Tab. 2) und durch eine im Experiment gemessene, näherungsweise gerade Kennlinie.

In der Theorie bilden sich die in der Nanobeam-Geometrie stark reduzierten radiativen Verluste auch in Abb. 3.9 (b) ab. Zu sehen ist der anregungsabhängige Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion zu gleichen Zeiten. Die im Experiment gemessenen Werte sind durch rote Kugeln dargestellt und werden von uns mit  $g_{\text{exp}}^2(0)$  bezeichnet. Die schwarze Linie stellt die mit unserem mikroskopischen Lasermode berechneten Werte der idealen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  dar. Es ist zu erkennen, dass der theoretisch berechnete Wert  $g^2(0)$  mit zunehmender Eingangsleistung graduell von zwei auf eins abfällt und nicht abrupt, wie es bei Lasern mit deutlich höheren radiativen Verlusten bzw. einem deutlich niedrigeren  $\beta$ -Faktor der Fall wäre [7, 22].

Im Experiment ist zu beobachten, dass die gemessene photonische Autokorrelationsfunktion  $g_{\text{exp}}^2(0)$  einen deutlich anderen Verlauf in der Eingangsleistung hat als der von unserem Lasermode aus Kapitel 3.2 theoretisch vorhergesagte Verlauf von  $g^2(0)$ . Dies lässt sich dadurch erklären, dass die Photodetektoren im HBT-Versuchsaufbau eine endliche Zeitauflösung von

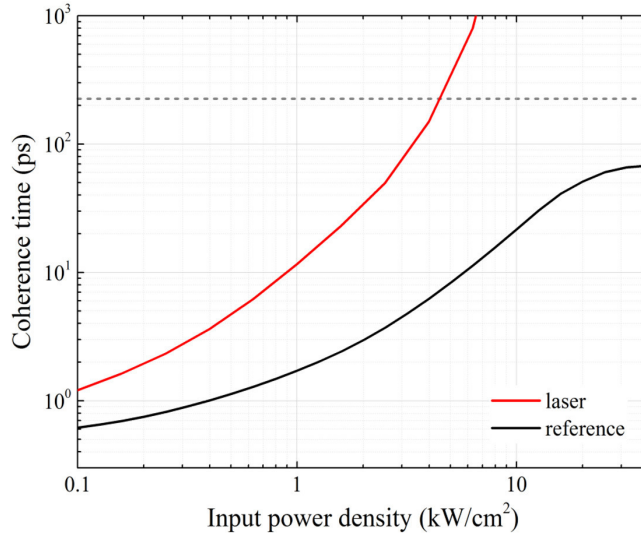


Abbildung 3.10: **Anregungsabhängige Kohärenzzeit  $\tau_{coh}$ :** Die rote Linie ist der ersten Nanobeam-Probe zuzuordnen, die schwarze Linie der nicht-lasenden Referenzprobe. Die horizontal verlaufende, gestrichelte Linie markiert die zeitliche Auflösung der Photodetektoren der HBT-Versuchsanordnung  $\tau_{res} = 225$  ps im Experiment. Die Kohärenzzeit der nicht-lasenden Referenzprobe ist für alle Anregungen kleiner als  $\tau_{coh} < 100$  ps und damit wesentlich kleiner als die Detektorauflösung. Die Kohärenzzeit der ersten Nanobeam-Probe erreicht den Nanosekundenbereich. Dies ist ein deutlicher Hinweis auf Lasing der ersten Probe. Die Kohärenzzeiten wurden über das Gleichungssystem (H.6) und (H.7) mit den Parametern aus Tabelle 2 berechnet.

$\tau_{res} \approx 225$  ps haben. Der ideale Wert  $g^2(0)$  kann im Experiment nur aufgelöst werden, wenn die Kohärenzzeit des Lichtfeldes  $\tau_{coh}$  in der Größenordnung der Detektorauflösung liegt oder größer als diese ist [12] (siehe Anhang H für genauere Details). Die mit unserem Lasermodell berechneten Kohärenzzeiten sind in Abb. 3.10 für die beiden Proben in Abhängigkeit der Eingangsleistung dargestellt. Wie im Anhang H genauer erläutert ist, kann unter Berücksichtigung der Detektorauflösung und der Kohärenzzeit der Wert der im Experiment gemessenen Autokorrelationsfunktion zu gleichen Zeiten  $g_{exp}^2(0)$  über Gl. (H.1) berechnet werden. Daraus ergibt sich die gestrichelte, schwarze Linie der Abb. 3.9 (b), welche mit den Messdaten in guter Näherung übereinstimmt.

Der grau unterlegte Bereich in Abb. 3.9 (a) und (b) markiert den Übergang ins Lasing der ersten Nanobeam-Probe. In diesem Anregungsbereich fällt bei zunehmender Eingangsleistung der Wert der im Experiment gemessenen photonischen Autokorrelationsfunktion  $g_{exp}^2(0)$  nach einem vorherigen Anstieg wieder ab. Wir möchten hervorheben, dass der im Experiment nachgewiesene Auf- und Abstieg der Autokorrelationsfunktion zu gleichen Zeiten  $g_{exp}^2(0)$  ein deutlicher Indikator für den Übergang ins Lasing ist. Durch den Anstieg von  $g_{exp}^2(0)$  mit zunehmender Anregung wird nachgewiesen, dass die Kohärenzzeit  $\tau_{coh}$  wächst und sich der im Experiment gemessene Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion dem tatsächlichen Wert  $g^2(0) > 1$  nach Gl. (H.1) annähert. Fällt der Wert  $g_{exp}^2(0)$  anschließend mit zunehmender Eingangsleistung wieder ab, kann davon ausgegangen werden, dass die Kohärenzzeit so groß ist, dass der Abfall des theoretisch idealen Wertes  $g^2(0)$  im Experiment aufgelöst werden kann und nach Gl. (H.1)  $g_{exp}^2(0) \approx g^2(0)$  gilt. Durch die gute Übereinstimmung der experimentell gemessenen Autokorrelationsfunktion mit den theoretischen Daten wird der Nachweis von kohärenter Emission der ersten Nanobeam-Probe signifikant verstärkt.



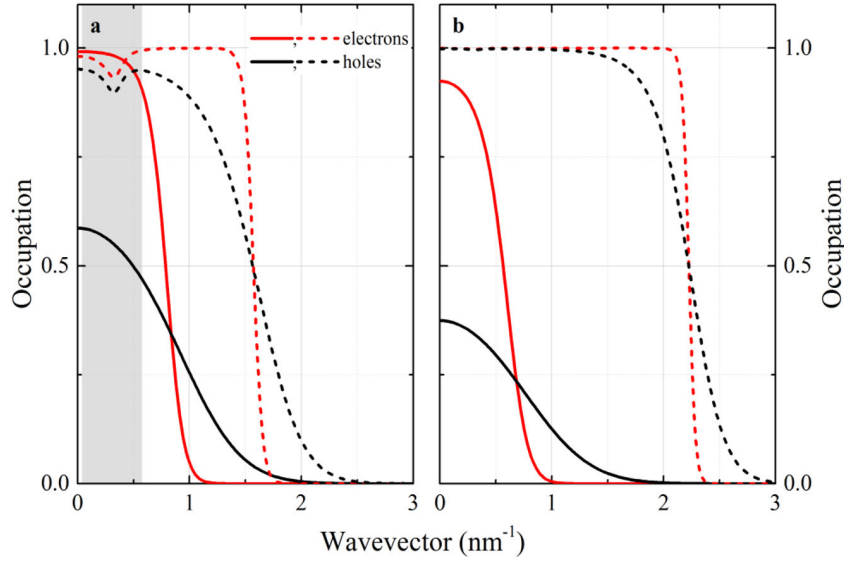


Abbildung 3.11: **Lochbrennen (hole-burning)**: Grafik (a) ist der lasenden Probe zuzuordnen und (b) der Referenzprobe. Die durchgezogenen Linien sind die elektronischen Besetzungen  $f_k^e$  und  $f_k^h$  der Nanobeam-Proben bei schwacher Anregung ( $P = 0,5 \text{ kW/cm}^2$ ). Die gestrichelten Linien stellen die Ladungsträgerbesetzungen bei starker Anregung des Gewinnmaterials dar ( $P = 20 \text{ kW/cm}^2$ ). Der grau unterlegte Bereich in Grafik (a) zeigt den Bereich im reziproken Raum, in dem das spektrale hole-burning stattfindet. An der Resonanz mit der Resonatormode  $\hbar\omega_{\xi_l}$  werden die elektronischen Besetzungen durch die Wechselwirkung mit dem Lichtfeld abgebaut und es entstehen Vertiefungen („Löcher“) in den Ladungsträgerverteilungen. Bei der lasenden Nanobeamprobe in (a) ist die Intensität der Resonatormode bei starker Anregung so hoch, dass der Effekt zu erkennen ist. Die Intensität der Resonatormode der Referenzprobe reicht nicht aus, um einen Ladungsträgerabbau durch stimulierte Prozesse nachzuweisen. Die Ladungsträgerdichte der lasenden Nanobeam-Probe bei starker Anregung wurde über Formel (3.2.74) zu  $\eta^e = \eta^h = \eta \approx 10^{13} \text{ cm}^{-2}$  berechnet. Damit ergibt sich die am Lasing beteiligte Ladungsträgerzahl der lasenden Nanobeam-Probe zu  $N = A_{\varnothing} \eta \approx 3,1 \cdot 10^4$ .

Der Nachweis von kohärenter Emission bzw. Lasing der ersten Nanobeam-Probe erhärtet sich weiter im Kontrast zu den Emissionseigenschaften der zweiten Nanobeam-Probe, welche in Abb. 3.9 (c) und (d) dargestellt sind. Auch in diesen Abbildungen sind die roten Kugeln Messwerte und die durchgezogenen schwarzen Linien sind die mit unserem Lasermode berechneten Werte für die mittlere Photonenzahl  $n_{p,\xi_l}$  und für den Wert der idealen photonischen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$ . Die schwarz-gestrichelte Linie in Abb. 3.9 (d) ist der über Gl. (H.1) berechnete Wert der im Experiment gemessenen photonischen Autokorrelationsfunktion  $g_{\text{exp}}^2(0)$ . In Abb. 3.9 (c) ist zu sehen, dass die berechnete und gemessene Laserintensität bei schwacher Anregung zunächst überproportional mit der Eingangsleistung steigt. Dieser nicht-lineare Verlauf ist, wie auch bei der ersten Probe, auf die nicht-radiativen Verluste zurückzuführen. Mit stärker werdender Anregung konvergiert die Steigung der Kennlinie zu eins. Unter starker Anregung ( $P = 20 \text{ kW/cm}^2$ ) sättigt die Laserintensität der zweiten Probe bei einer mittleren Photonenzahl von  $n_{p,\xi_l} \approx 30$  bevor es zum Aufbau von Kohärenz kommt. Der ausbleibende Übergang ins Lasing lässt sich in Abb. 3.9 (d) daran erkennen, dass der theoretisch berechnete Wert der Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  nur schwach unter den Wert zwei sinkt. Im Experiment wird ein Wert von  $g_{\text{exp}}^2(0) \approx 1,2$  gemessen, da die Kohärenzzeit der Referenzprobe für alle Anregungen

deutlich kleiner ist als die Detektorauflösung (siehe Abb. 3.10). Der im Vergleich zur lasenden Nanobeam-Probe etwas geringere  $Q$ -Faktor ( $Q = 1800$ ) führt dazu, dass der optische Gewinn der Referenzprobe nicht ausreichend ist, um eine Lichtintensität im Nanobeam-Resonator zu erreichen, welche groß genug ist, sodass stimulierte Prozesse die Systemdynamik dominieren und sich Kohärenz aufbauen kann. An dieser Stelle möchten wir darauf hinweisen, dass obwohl bereits  $n_{p,\xi_l} \approx 30$  Photonen im Mittel im Resonator der Referenzprobe bei starker Anregung enthalten sind, es nicht zum Lasing kommt. Im Resonator der lasenden Nanobeam-Probe sind weit über hundert Photonen im Mittel im Resonator enthalten bevor es zum Aufbau von Kohärenz mit  $g^2(0) \approx 1$  kommt. Wir stellen daher fest, dass das häufiger verwendete Lasingkriterium, dass sich Kohärenz in einem Laser aufbaut, wenn die mittlere Photonenzahl im Laserresonator eins ist [9, 26, 27], für die von uns modellierten Nanobeam-Kavitäten scheinbar nicht anwendbar ist. Dies deutet auch darauf hin, dass die spontane Emission in diesen Systemen eine wichtigere Rolle spielt als bei Lasern, in denen stimulierte Prozesse die Systemdynamik bereits dominieren, wenn ein Photon im Mittel im Resonator enthalten ist [8].

Ein weiterer rechnerischer Nachweis von Lasing der ersten Nanobeam-Probe ist das spektrale Lochbrennen (*engl.*: hole-burning), welches bei der lasenden Nanobeam-Probe auftritt, jedoch nicht bei der Referenzprobe. Das Lochbrennen ist in Abb. 3.11 zu sehen und wird in der Bildunterschrift erklärt.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die im experimentellen und theoretischen Ergebnisse darauf hinweisen, dass eine der Nanobeam-Proben kohärentes Licht emittiert und als Laser eingesetzt werden kann. Dieser Laser zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass radiative Verluste stark reduziert sind, weshalb dessen Laserintensität in einem näherungsweise linearen Zusammenhang zur Eingangsleistung steht. Insbesondere der Auf- und Abstieg der im Experiment gemessenen, gleichzeitigen photonischen Autokorrelationsfunktion  $g_{\text{exp}}^2(0)$  deutet auf Lasing hin. Mit unserer in Kapitel 3.2 eingeführten Lasertheorie für Quantenfilm-Nanobeam-Kavitäten konnten wir mit den in Tab. 2 eingetragenen Parametern die experimentellen Messergebnisse, rekonstruieren, erklären und interpretieren. Wir konnten rechnerisch nachweisen, dass eine der Nanobeam-Proben das Lasingregime erreicht, in welchem der Wert der idealen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  näherungsweise eins ist, sich die Kohärenzzeit im Nanosekundenbereich befindet und hole-burning stattfindet.

#### 3.4. Modellierung durch diskrete Emittter

In diesem Abschnitt stellen wir vor, wie wir die Systemparameter der lasenden Nanobeam-Probe auf das im zweiten Kapitel der Arbeit betrachtete Lasermodell eines homogenen Emittterensembles übertragen. Die Resonatorverluste und die Licht-Materie Kopplung werden gleich gewählt, wie die des Quantenfilm-Lasers ( $\kappa = 2\kappa_{\xi_l} = 1,88 \text{ ps}^{-1}$  und  $g = g_{\xi_l} = 0,041 \text{ ps}^{-1}$ ). Die Menge der am Lasing beteiligten, diskreten Lichtemitter bzw. Ladungsträger wird zu  $N = 3,1 \cdot 10^4$  abgeschätzt. Diese Abschätzung beruht auf dem Ergebnis der am Lasingprozess beteiligten Ladungsträgeranzahl  $N^\alpha \approx 3,1 \cdot 10^4$ ,  $\alpha = e, h$  der lasenden Nanobeam-Probe unter starker Anregung (siehe Bildunterschrift der Abb. 3.11). Sind alle anderen Systemparameter gewählt, legt die Rate der radiativen Verluste  $\gamma$  den  $\beta$ -Faktor im Lasermodell homogener Emittter fest. Die Rate  $\gamma$  wird so gewählt, dass der  $\beta$ -Faktor dem Wert 0,7 der lasenden Nanobeam-Probe aus Tab. 2 entspricht.

Das auf diese Weise durch diskrete Lichtemitter modellierte System entspricht dem QW-Laser aus Kapitel 2.6.3. Zwar stellt der Nanobeam-Laser mit einem ausgedehnten Gewinnmaterial ein grundsätzlich anderes Lasersystem dar, als diskrete und räumlich lokalisierte Lichtemitter, wie Atome oder Quantenpunkte in einem Resonator, jedoch lassen sich zwei wesentliche Kohärenzeigenschaften der lasenden Nanobeam-Probe im Lasersystem QW wiedererkennen. Dies ist zum einen eine mittlere Photonenzahl im Laserresonator beim Übergang in die kohärente

Emission, welche viel größer als eins ist und zum anderen der Übergang in die kohärente Emission oberhalb der Nichtlinearität in der Laserkennlinie.

Betrachtet man den grau unterlegten Bereich der Abb. 3.9 (a) und (b), in dem die lasende Nanobeam-Probe in die kohärente Emission übergeht, stellt man fest, dass sich bereits mehrere hundert Photonen im Mittel im Laserresonator befinden, bevor der Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion auf eins abfällt. Ebenfalls können wir in Abb. 3.9 (a) und (b) sehen, dass die Intensität der lasenden Nanobeam-Probe linear in der Eingangsleistung steigt beim Übergang ins Lasing und die Nichtlinearität in der Kennlinie bei einer deutlich geringeren Eingangsleistung liegt, als die Anregungsstärke, bei der sich das System näherungsweise in der kohärenten Emission mit  $g^2(0) \leq 1,1$  befindet. In diesen beiden Eigenschaften gleicht sich die lasende Nanobeam-Probe mit dem QW-Laser (vgl. Abb. 2.7).

Der Vorteil der Modellierung der lasenden Nanobeam-Probe durch den QW-Laser mit diskreten Emitttern ist, dass wir bei diesem einfacheren Lasermodell den Einsatz der stimulierten Prozesse, der zur nicht-linearen Selbstverstärkung der Laserintensität führt, analytisch bestimmen können. In der Diskussion in Kapitel 2.6.3 stellen wir fest, dass stimulierte Prozesse bereits bei wesentlich geringeren Eingangsleistungen einsetzen, bevor sich Kohärenz aufbaut und der Wert  $g^2(0)$  auf eins abfällt (siehe Abb. 2.7). Dies führen wir auf eine besonders stark ausgeprägte Dominanz der spontanen Emission im System QW zurück, welche ihre Ursache in der hohen Anzahl der am Lasingprozess beteiligten, optisch aktiven Ladungsträger hat. In dem von uns modellierten Nanobeam-Laser sind radiative Verluste stark reduziert und es nehmen ebenfalls mehrere zehntausend optisch aktive Ladungsträger am Lasingprozess teil. Es ist naheliegend, dass der spontanen Emission in einem solchen System eine wesentliche Bedeutung zukommt, auch neben stimulierten Prozessen. Gefestigt wird diese Vermutung durch eine weitere Gemeinsamkeit der lasenden Nanobeam-Probe mit dem QW-Laser aus Kapitel 2.6.3. Diese besteht darin, dass die Erhöhung des  $\beta$ -Faktors in beiden Systemen keinen Einfluss auf die Eingangsleistung hat, die erbracht werden muss, damit sich Kohärenz im System mit  $g^2(0) \approx 1$  aufbaut.

Vernachlässigt man radiative und nicht-radiative Verluste ( $\tau_{nl}^{-1} = \gamma_{nr} = 0$ ) und führt die Berechnung der lasenden Nanobeam-Probe mit den ansonsten selben Parametern aus Tabelle 2 durch, betrachtet man ein System mit einer idealen Einkopplung der spontanen Emission in die Lasermode mit  $\beta = 1$ . Die resultierende Laserkennlinie verläuft in diesem Fall entlang der oberen, blauen Referenzgeraden in Abb. 3.9 (a). Jedoch verändert sich der Kurvenverlauf der berechneten, idealen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  in Abb. 3.9 (b) nicht erkennbar. Dies bedeutet, dass auch im Fall  $\beta = 1$  mehrere hundert Photonen in der Resonatormode enthalten sein müssen, um das Lasingregime zu erreichen. Auch die Eingangsleistung  $P_{coh} \approx 30 \text{ kW/cm}^2$ , um die kohärente Emission mit  $g^2(0) \leq 1,1$  zu erreichen, verändert sich durch die Erhöhung des  $\beta$ -Faktors nicht. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine Erhöhung des  $\beta$ -Faktors durch die Verminderung der Raten der radiativen und nicht-radiativen Verluste  $\tau_{nl}^{-1}$  und  $\gamma_{nr}$  die Emissionscharakteristik des Nanobeams im grau unterlegten Bereich, in dem der Lasingübergang stattfindet, nicht verändert. Die selbe Eigenschaft zeigt sich auch beim QW-Laser, wenn der  $\beta$ -Faktor auf  $\beta \rightarrow 1$  erhöht wird. Die entsprechende Diskussion findet in Kapitel 2.6.3 anhand der Ergebnisse aus Abb. 2.8 statt. Die Unabhängigkeit der Eingangsleistung, mit der eine Lichtquelle angeregt werden muss, um in die kohärente Emission überzugehen, vom  $\beta$ -Faktor ist ein Indiz dafür, dass die spontane Emission auch neben stimulierten Prozessen eine wichtige Rolle in dem betrachteten System spielt.

Abschließend möchten wir auf die Unentbehrlichkeit der Untersuchung der statistischen Emissionseigenschaften der in dieser Arbeit untersuchten Nanobeam-Proben zum eindeutigen Nachweis von Lasing hinweisen. Wie in Abb. 3.9 (a) und (c) zu sehen ist, hat sowohl die Kennlinie der

lasenden Nanobeam-Probe als auch die der nicht-lasenden Referenzprobe einen nicht-linearen Verlauf. Nichtlinearitäten in Kennlinien werden häufig mit dem Übergang ins Lasing verbunden oder gleichgesetzt [7, 17, 78], da sie ein Indiz darauf sind, dass stimulierte Prozesse in einem Laser Kohärenz aufbauen. Jedoch können Nichtlinearitäten in Kennlinien von Lichtquellen verschiedene Ursachen haben und sind daher kein geeigneter Indikator für Lasing. Sie können ihren Ursprung in radiativen Verlusten [7], aber auch in nicht-radiativen Verlustprozessen, wie z.B. trap filling [42] oder SHR- oder Auger-Prozessen haben [36]. Auch können excitonische Effekte die Ursache für die Ausbildung von Nichtlinearitäten in Kennlinien sein [49, 79]. Obwohl die Kennlinie der nicht-lasenden Nanobeam-Probe im größten Teil über der Anregungsleistung nicht-linear verläuft, kommt es nicht zum Lasing. Insbesondere die lasende Nanobeam-Probe ist ein gutes Beispiel dafür, dass ein nicht-linearer Zusammenhang zwischen der Laserintensität und der Eingangsleistung keinen zuverlässigen Indikator für Lasing darstellt, da es in diesem System erst oberhalb der Nichtlinearität in der Kennlinie zur kohärenten Emission mit  $g^2(0) \leq 1,1$  kommt (siehe Abb. 3.9 (a) und (b)). Sogar wenn die Nichtlinearität in der Kennlinie der lasenden Nanobeam-Probe in Abb. 3.9 (a) auf den Einsatz und die Zunahme stimulierter Prozesse zurückzuführen sein sollte, ist nicht sichergestellt, dass dies zum Aufbau von Kohärenz führt. Zu dieser Erkenntnis kommen wir, da die in Kapitel 2.6.3 anhand des QW-Lasers gewonnenen Einsichten deutlich machen, dass der Einsatz stimulierter Prozesse nicht gleichzusetzen ist mit dem Übergang ins Lasing bzw. in die kohärente Emission mit  $g^2(0) = 1$ . Daher ist die Messung der photonischen Autokorrelation unverzichtbar, um einen deutlichen Nachweis von Lasing der untersuchten Nanobeam-Proben zu erbringen. Die alleinige Messung der Lumineszenz würde nicht ausreichen oder noch schlimmer, zu einem fälschlichen Lasingnachweis führen.

#### 3.5. Zusammenfassung

Im dritten Kapitel dieser Arbeit haben wir im Rahmen einer Experiment/Theorie-Kooperation mit den Arbeitsgruppen von Prof. Dr. Reitzenstein von der TU Berlin und Prof. Dr. Grandjean vom EPFL in der Schweiz Lasing an Nanobeam-Kavitäten mit einem InGaN-Quantenfilm als Gewinnmaterial untersucht. Motiviert wurde die Forschungsarbeit dadurch, dass Nanobeam-Quantenfilm Laser als vielversprechende Kandidaten gelten, um in der Zukunft als energieeffiziente Laser in vielen Anwendungsgebieten, wie zum Beispiel des hochfrequenten Datenaustausches [63] oder der optischen Datenspeicherung [55] zum Einsatz zu kommen.

Zur Interpretation der experimentellen Ergebnisse und um den Nachweis von Lasing bei Nanobeam-Kavitäten zu erhärten haben wir eine vollständig quantenmechanische, mikroskopische Lasertheorie für dieses System aufgestellt. Dazu haben wir die räumlich lokalisierte Resonatormode, die sich in der Nanobeam-Geometrie ausbildet, vereinfacht als eine monochromatische, ebene Welle in einem „kasten-förmigen“ Modenvolumen quantisiert. In der Beschreibung der Ladungsträgerdynamik haben wir eine Dimension des Problems abgespalten, indem wir das Quantenfilm-Gewinnmaterial als eindimensionalen Quantentopf beschrieben haben. Die Beschreibung der Ladungsträger in der Quantenfilm-Ebene erfolgte in parabolischen Bändern. Im Heisenbergbild haben wir Bewegungsgleichungen für die Ladungsträgerverteilungen und die mittlere Photonenzahl im Nanobeam-Resonator hergeleitet und sind dabei über die Ratengleichungstheorie hinaus gegangen, indem wir Korrelationen zwischen Ladungsträgern und Photonen und zwischen Photonen untereinander im System berücksichtigt haben. Auf diese Weise konnten wir die photonische Autokorrelationsfunktion zu gleichen Zeiten  $g^2(0)$  berechnen und damit die statistischen Emissionseigenschaften des Systems in unserem Theoriemodell abbilden.

Im Experiment wurden an zwei Nanobeam-Proben Messungen zur Lumineszenz und zu den statistischen Emissionseigenschaften durch die Messung der photonischen Autokorrelationsfunktion zu gleichen Zeiten  $g^2(0)$  durchgeführt. Die mit unserem Theoriemodell durchgeführten Berechnungen haben die im Experiment erhobene Vermutung bestätigt, dass eine der beiden Pro-

ben das Lasingregime erreicht. Die wichtigsten Indizien auf die kohärente Emission waren zum einen der im Experiment nachgewiesene und in der Theorie bestätigte Anstieg und anschließende Abfall der photonischen Autokorrelationsfunktion als Funktion der Eingangsleistung. Der Anstieg der im Experiment gemessenen Autokorrelationsfunktion deutet darauf hin, dass die Kohärenzzeit des Laserlichtfeldes steigt und der anschließende Abfall ist ein Indikator dafür, dass der Abfall der idealen Autokorrelationsfunktion beim Aufbau von Kohärenz im Experiment aufgelöst werden kann, weil die Kohärenzzeit die Detektorauflösung des HBT-Versuchsaufbaus übersteigt. Der direkte Vergleich zu den Emissionseigenschaften der anderen, nicht-lasenden Nanobeam-Kavität verstärkte den Lasingnachweis. Diese unterschied sich vom Nanobeam-Laser lediglich durch eine um 18% geringere Resonatorqualität  $Q$  und war ansonsten baugleich. Auf Grund der niedrigeren Resonatorgüte erreichte die nicht-lasende Referenzprobe das Lasingregime nicht, was sich in der theoretischen Berechnung dadurch zeigte, dass der ideale Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  kaum unter den Wert zwei gesunken ist. Auch die Messdaten der nicht-lasenden Referenzprobe lagen in sehr guter Übereinstimmung mit den theoretischen Berechnungen.

Im Rahmen der theoretischen Modellierung stellte sich heraus, dass die von uns modellierte, lasende Nanobeam-Probe das Lasingregime erst erreicht, wenn mehrere hundert Photonen im Mittel im Laserresonator enthalten sind und dass sich der Lasingübergang erst oberhalb der Nichtlinearität in der Laserkennlinie vollzieht, wenn die Aus- und Eingangsleistung des Systems bereits wieder in einem linearen Zusammenhang zueinander stehen. Dies deutet darauf hin, dass die spontane Emission in diesem System, sogar neben stimulierten Prozessen, eine wichtige Rolle spielt. Diese Vermutung wurde durch die Ergebnisse in Kapitel 2.6.3 der Arbeit bestätigt, in welchem wir die lasende Nanobeam-Probe mit unserem Lasermodell eines homogenen Emittersensembles aus Kapitel 2 abgebildet haben. Die analytischen Berechnungen in Kapitel 2.6.3 haben gezeigt, dass die so modellierte, lasende Nanobeam-Probe erst deutlich nach dem Einsatz<sup>15</sup> stimulierter Prozesse Kohärenz aufbaut.

Wir halten fest, dass die Ergebnisse dieser Arbeit in Zusammenhang mit den experimentellen Befunden die Vermutung unterstützen, dass Nanobeam-Kavitäten ein hohes Potential besitzen, um in der Zukunft als mikroskopische und energieeffiziente Quellen kohärenten Lichtes in vielen Anwendungsgebieten in der Praxis zum Einsatz zu kommen und deshalb weiterhin ein interessantes Forschungsfeld darstellen.

---

<sup>15</sup>Hier und im Folgenden meinen wir mit dem Einsatz stimulierter Prozesse den Einsatz der Selbstverstärkung des Laserlichtfeldes durch stimulierte Prozesse, welcher sich in der Laserkennlinie durch eine Nichtlinearität bemerkbar macht. Stimulierte Prozesse setzten in dem Sinne nicht in einem Laser ein, sondern sind zu allen Zeiten vorhanden.

## 4. Positionierung, Zusammenfassung und Ausblick

Von der Realisierung des ersten Lasers 1960 [82, 83] bis hin zur aktuellen Entwicklung von Halbleiter-Mikroresonatoren, welche die Grenzen der Kontrollierbarkeit der spontanen Emission ausloten, indem sie radiative Verluste nahezu vollständig unterdrücken, hat sich die Art und Weise Laser zu charakterisieren fortlaufend verändert und weiterentwickelt. Eine der größten Veränderungen in der theoretischen und experimentellen Beschreibung und in der Methodik zur Charakterisierung von Lasern vollzog sich mit den Fortschritten in der Herstellung von Laserresonatoren aus Halbleitermaterialien mit räumlichen Abmessungen im Mikrometerbereich, in denen die Gesetze der Quantenmechanik das Geschehen bestimmen und die Natur des Lichtes als Teilchen relevant wird.

Die vorliegende Arbeit positioniert sich im Bereich der quantenmechanischen Lasertheorie, welche sowohl das optische Gewinnmaterial eines Lasers als auch das damit in Wechselwirkung stehende Lichtfeld quantenmechanisch beschreibt und dadurch die semiklassische Lasertheorie, welche ausschließlich stimulierte Prozesse in einem Laser berücksichtigt, um den Einfluss der spontanen Emission vervollständigt. Im Fokus der Arbeit stand die Untersuchung des Zusammenspiels der stimulierten und spontanen Emission in Lasern während des Aufbaus von Kohärenz. Dabei sind wir über die Ratengleichungstheorie hinausgegangen und haben über die Methode der Clusterentwicklung die statistischen Emissionseigenschaften der von uns beschriebenen Lasersysteme in unseren Theoriemodellen abgebildet. Auf dieser Basis haben wir die Kohärenzeigenschaften von räumlich lokalisierten und räumlich ausgedehnten Gewinnmaterialien untersucht und miteinander verglichen.

Die zentralen Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit sind, dass die Art und die Menge des Gewinnmaterials in einem Laser das Verhältnis der stimulierten Prozesse zur spontanen Emission so beeinflusst, dass die spontane Emission eine dominantere Rolle in Lasern mit mehr Gewinnmaterial spielt. Dies bedeutet, dass eine höhere Laserintensität bzw. mittlere Photonenzahl im Resonator erreicht werden muss, damit sich Kohärenz aufbaut, je mehr Gewinnmaterial an der Laserdynamik beteiligt ist. Damit zusammenhängend sind die Unterschiede zwischen den Kohärenzeigenschaften von räumlich lokalisierten und räumlich ausgedehnten Gewinnmaterialien. In Lasern mit ausgedehnten Gewinnmaterialien, wie dem von uns im dritten Kapitel der Arbeit untersuchten Nanobeam-Quantenfilm-Laser, sind wesentlich mehr optisch aktive Ladungsträger an der Laserdynamik beteiligt als in Lasern mit lokalisierten Gewinnmaterialien, wie Quantenpunktlasern. Während in Quantenpunktlasern Kohärenz mit dem Einsatz stimulierter Prozesse aufgebaut wird, spielt die spontane Emission in dem von uns modellierten Quantenfilm-Laser auf Grund der hohen Anzahl an optisch aktiven Ladungsträgern eine so dominante Rolle, sodass sie sogar neben stimulierten Prozessen einen nicht zu vernachlässigenden Beitrag an der Laserdynamik hat, sodass sich Kohärenz erst deutlich nach dem Einsatz<sup>16</sup> stimulierter Prozesse aufbaut. Da davon auszugehen ist, dass Laser mit hohen  $\beta$ -Faktoren weiterhin eine wichtige Rolle spielen werden bei der Erforschung des Zusammenspiels der stimulierten und spontanen Emission, möchten wir hervorheben, dass die vollständig quantenmechanische Beschreibung von Licht und Materie auch in der Zukunft eine überaus wichtige Grundlage zur theoretischen Beschreibung der Dynamik von Lasern und insbesondere von PCC-Lasern mit ausgedehnten Gewinnmaterialien darstellen wird. Eine semiklassische Beschreibung würde den wichtigen Einfluss der spontanen Emission in diesen Systemen nicht abbilden.

Da ausgedehnte Gewinnmaterialien, wie Nanodrähte [80, 81] und Quantenfilme [45–48], immer mehr in das wissenschaftliche Interesse rücken, stellt die in dieser Arbeit für ein ausgedehntes

---

<sup>16</sup>Auch hier ist mit „Einsatz stimulierter Prozesse“ der Einsatz der nicht-linearen Selbstverstärkung der Laserintensität durch stimulierte Prozesse gemeint.

---

Quantenfilm-Gewinnmaterial konzipierte Lasertheorie auch eine Grundlage für künftige Arbeiten auf diesem Gebiet dar. Insbesondere Gewinnmaterialien bestehend aus TMDC<sup>17</sup>-Monolagen sind aktuell Gegenstand steigender Forschungsaktivität. TMDC-Monolagen sind atomar dünne Halbleiter mit einer direkten Bandlücke deren Höhe lediglich der Höhe einer einzigen Elementarzelle des verwendeten Materialsystems (z.B. MoS<sub>2</sub> oder WSe<sub>2</sub>) entspricht. Sie sind unter vielen Gründen mehr deshalb so interessant, da sie zum einen relativ einfach und kostengünstig hergestellt werden können [84, 85] und zum anderen sehr leicht mit einem zweidimensionalen photonischen Kristall zu einem Lasersystem mit einem hohen  $\beta$ -Faktor nahe eins kombiniert werden können, indem die ein-atomaren Quantenfilme lediglich auf die Oberfläche des photonischen Kristalls gelegt werden [46] und nicht, wie es beim Nanobeam-Laser der Fall ist, in den photonischen Kristall eingewachsen werden müssen. Auf Grund der geringen vertikalen Ausdehnung der Monolagen, von weniger als einem Nanometer, ist die Coulomb-Abschirmung in diesen Systemen stark reduziert. Dies hat u.a. zur Folge, dass die Bandstruktur der Monolagen stark von der Ladungsträgerdynamik abhängig ist. Dies geht soweit, dass die direkte Bandlücke dieser Systeme abhängig von der Ladungsträgerdichte indirekt wird und dass Ladungsträger im Leitungsband-Minimum der direkten Bandlücke in andere, lokale Leitungsband-Minima streuen können und so schwächer zur Licht-Materie Wechselwirkung beitragen [86]. In der theoretischen Beschreibung von TMDC-Quantenfilm-Lasern sollte daher über die Näherung der Bandstruktur um die direkte Bandlücke herum durch parabolische und statische Bänder hinausgegangen werden, indem die anregungsabhängige Dynamik der Bandstruktur in den Berechnungen berücksichtigt wird.

Letztlich möchten wir hervorheben, dass die Untersuchung der statistischen Emissionseigenschaften durch die Berechnung der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  in dieser Arbeit unverzichtbare Ergebnisse zum eindeutigen Nachweis von Lasing bei Nanobeam-Kavitäten beigetragen hat. Die Intensität ist in diesen Systemen keine geeignete Größe zum Nachweis von Lasing, da radiative Verluste stark reduziert und der  $\beta$ -Faktor sehr nahe an eins liegt, weshalb es nicht bzw. kaum zur überproportionalen Intensitätszunahme kommt [7]. Auch in der Zukunft wird es notwendig sein nicht nur Nanobeam-Kavitäten, sondern allgemein Laser mit hohen  $\beta$ -Faktoren, darunter auch TMDC-Gewinnmaterialien in oder auf photonischen Kristallen, mit einer quantenoptischen Lasertheorie zu beschreiben, die über die Ratengleichungstheorie hinaus geht.

---

<sup>17</sup>Transition metal dichalcogenide (TMDC)

# Anhang

## A. Berechnung von Erwartungswerten im Dichtematrixformalismus

Zunächst seien die Teilchenzahloperatoren für Elektronen im Leitungsbandzustand  $|c\rangle$   $\hat{f}_{c,i} = c_i^\dagger c_i$  und im Valenzbandzustand  $|v\rangle$   $\hat{f}_{v,i} = v_i^\dagger v_i$  sowie für die Photonenzahl im Resonator  $\hat{n} = b^\dagger b$  definiert. Auf Grund der Homogenität der Emitter sind alle Erwartungswerte, vom Emitterindex  $i$  unabhängig [17]. Das heißt insbesondere, dass wir  $f_c = \langle \hat{f}_{c,i} \rangle$  und  $f_v = \langle \hat{f}_{v,i} \rangle \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$  schreiben können. Der Erwartungswert eines beliebigen Operators wird im Dichtematrixformalismus durch die Spurbildung  $\langle A \rangle = \text{Tr}\{A\rho\}$  berechnet [24]. Beispielsweise kann der Erwartungswert des Teilchenzahloperators  $\hat{n}$  der Photonenzahl gemäß

$$\langle \hat{n} \rangle = n = \sum_{m, N'_e} \langle m, N'_e | \hat{n} \rho | m, N'_e \rangle \quad (\text{A.1})$$

berechnet werden. Die Wirkung des Teilchenzahloperators  $\hat{n}$  auf einen Basiszustand  $|n, N_e\rangle$  ist  $\hat{n} |n, N_e\rangle = n |n, N_e\rangle$ . Daher ergibt sich

$$n = \sum_{m, N'_e} m \langle m, N'_e | \rho | m, N'_e \rangle = \sum_{m, N'_e} m \rho_{m, N'_e} \quad (\text{A.2})$$

$$= \sum_{m, N'_e} m p_{m, N'_e} = \sum_m m p_m, \quad (\text{A.3})$$

wobei  $p_{n, N_e} = \rho_{n, N_e}$  die Diagonalelemente der Dichtematrix aus Gleichung (2.2.4) darstellen und wir die Notation  $p_n = \sum_{N_e} p_{n, N_e}$  verwendet haben. Ist es Ziel die Besetzungsinversion  $f_c - f_v = \langle \hat{f}_c - \hat{f}_v \rangle$  zu berechnen, wird die Spur mit dem Dichteoperator und dem Teilchenzahloperator der im System angeregten bzw. unangeregten Ladungsträger  $\hat{N}_e = N \hat{f}_c$  bzw.  $\hat{N}_g = N \hat{f}_v$  gebildet. Die Wirkung dieser Operatoren auf einen Zustand ist  $\hat{N}_e |n, N_e\rangle = N_e |n, N_e\rangle$  bzw.  $\hat{N}_g |n, N_e\rangle = (N - N_e) |n, N_e\rangle$ . Somit lässt sich die Besetzungsinversion pro Emitter durch

$$f_c - f_v = \sum_{m, N'_e} m \langle m, N'_e | \frac{1}{N} (\hat{N}_e - \hat{N}_g) \rho | m, N'_e \rangle \quad (\text{A.4})$$

$$= \sum_{N'_e} \frac{N_e - N_g}{N} p_{N'_e} = \sum_{N'_e} \frac{2N_e - N}{N} p_{N'_e} \quad (\text{A.5})$$

berechnen, wobei wir die Notation  $p_{N_e} = \sum_n p_{n, N_e}$  verwendet haben.

## B. Herleitungsskizze der Mastergleichung

Die sukzessive Berechnung der Bewegungsgleichungen der Diagonalmatrixelemente  $p_{n, N_e}$  des Dichteoperators (2.2.4) über die von Neumann-Lindblad Gleichung (2.2.5) führt darauf, dass die Bewegungsgleichungen der Diagonalmatrixelemente an Matrixelemente der Nebendiagonalen des Dichteoperators mit der Gestalt  $\Psi_{n, N_e} = \langle n, N_e | \rho | n+1, N_e-1 \rangle$  koppeln. Die Bewegungsgleichungen der Nebendiagonalelemente  $\Psi_{n, N_e}$  koppeln wiederum an Diagonalmatrixelemente der Form  $p_{n+1, N_e-1}$ . Durch adiabatische Elimination der Nebendiagonalelemente  $\Psi_{n, N_e}$  [17] erhält man das rekursiv definierte Differentialgleichungssystem (2.3.1), in dem lediglich die Diagonalelemente (2.2.4) der Dichtematrix  $p_{n, N_e}$  aneinander koppeln. Die adiabatische Elimination der  $\Psi_{n, N_e}$  über den Schritt  $\frac{d}{dt} \Psi_{n, N_e} = 0$  (vgl. Ref. [17]) ist dabei eine Näherungsannahme in der Beschreibung der Zeitentwicklung des Systems. Wenn sich in dem  $N$ -Emitter Lasersystem



jedoch ein Gleichgewichtszustand einstellt, befinden sich alle zeitlich veränderlichen Größen in einem stationären Zustand mit  $\frac{d}{dt}p_{n,N_e} = 0 \forall n \in \mathbb{N}, N_e \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Im Gleichgewicht ist die adiabatische Elimination der Nebendiagonalelemente  $\Psi_{n,N_e}$  des Dichteoperators also exakt, weshalb die Mastergleichung (2.3.1) das System im Gleichgewicht ohne Näherungsannahmen beschreibt. In diesem Zusammenhang wird auch häufig von einer exakten Beschreibung bzw. Lösung des Problems durch die Mastergleichung gesprochen [7, 17]. Die stationäre Lösung der Mastergleichung (2.3.1) für einen Emitter mit  $N = 1$  aus Abb. 2.4 (b) ist identisch mit der stationären Lösung der von Neumann-Lindblad Gleichung aus Ref. [87], welche das System zu allen Zeiten, also nicht nur im Gleichgewicht, exakt beschreibt.

## C. Numerische Implementation der Mastergleichung

Die Dimension des Mastergleichungsproblems steigt mit der Anzahl von am Lasingprozess beteiligten Teilchen (Photonen und Emittern) und kann numerisch nur für eine endliche Menge an involvierten Teilchen gelöst werden. Daher wird die Mastergleichung in der numerischen Berechnung bis hin zu einer maximalen Photonenzahl  $m$  gelöst. Um physikalisch sinnvolle Ergebnisse zu erwarten, sollte  $m$  so groß gewählt werden, dass sich der photonische Teil des Systems zu allen Zeiten deutlich unterhalb dieser Grenze abspielt, es also höchst unwahrscheinlich ist, dass sich  $m$  oder mehr Photonen im Resonator befinden. Mathematisch kann diese Bedingung auch durch  $p_{n,N_e} \approx 0 \forall n \geq m, N_e \in \{1, 2, \dots, N\}$  formuliert werden.

Weiterhin zu beachten sind die Randbedingungen bei der numerischen Lösung der Mastergleichung. Bei der Berechnung der zeitlichen Entwicklung endlich vieler Elemente  $p_{n,N_e}$ ,  $n \in [0, m]$ ,  $N_e \in [0, N]$  muss darauf geachtet werden, dass die Gesamtwahrscheinlichkeit  $\sum_{n,N_e}^{m,N} p_{n,N_e} = 1$  zu allen Zeiten erhalten bleibt, da das System ansonsten numerisch instabil wird. Dazu muss sichergestellt werden, dass keine Übergangsraten am Rand der  $(m+1) \times (N_e+1)$ -Matrix  $p_{n,N_e}$  bei  $n = 0$  oder  $n = m$  oder  $N_e = 0$  oder  $N_e = N$  dazu führen können, dass die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit verletzt wird. Mit anderen Worten muss darauf geachtet werden, dass keine Teilchen über den Rand der Dichtematrix verloren gehen oder fälschlicher Weise dem System hinzugefügt werden. Beispielsweise darf der Term der spontanen Emission in die Lasermode aus der zweiten Zeile der Mastergleichung (2.3.1) nicht dazu führen, dass die Photonenzahl im endlichen System nach diesem Prozess größer als  $m$  ist. Deswegen muss in der zweiten Zeile von (2.3.1) der Term  $-N_e p_{n,N_e}$  für  $n = m$  Null gesetzt werden in der numerischen Implementation. Betrachtet man jedoch den Pumpprozess (vorletzte Zeile aus (2.3.1)), tritt dort ebenfalls der Term  $N_e p_{n,N_e}$  auf. An dieser Stelle darf dieser Term jedoch nicht vernachlässigt werden für  $n = m$ , da der Pumpprozess lediglich die Anzahl der angeregten Ladungsträger erhöht, nicht aber die Photonenzahl  $n$ . Daher ist es notwendig die elementaren physikalischen Prozesse, aus denen sich die Mastergleichung zusammensetzt, zu kennen, um diese korrekt implementieren zu können. Die Randbedingungen ließen sich nicht mehr korrekt implementieren, wenn man alle Terme in (2.3.1) so weit wie möglich zusammenfassen würde und dadurch die physikalische Anschauung der Mastergleichung verloren ginge. In Ref. [17] wurden die Terme der Mastergleichung teilweise zusammengefasst. Dort wurde die Gleichung jedoch im Grenzfall des thermodynamischen Limes ausgewertet, was die Berücksichtigung der Randbedingungen hinfällig macht (siehe Quelle [17]), da das System in diesem Fall weder in  $n$  noch in  $N_e$  beschränkt ist.

## D. Berechnung von Autokorrelationsfunktionen

Nutzt man die Kommutatorrelation (2.2.3) aus, so lässt sich  $g^2(0)$  schreiben als [17]

$$\begin{aligned} g^2(0) &= \frac{\langle b^\dagger b^\dagger b b \rangle}{\langle b^\dagger b \rangle^2} = \frac{\langle \hat{n}(\hat{n} - 1) \rangle}{\langle \hat{n} \rangle^2} \\ &= \frac{\sum_n n(n-1)p_n}{(\sum_n n p_n)^2}, \quad \text{mit } \hat{n} = b^\dagger b \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

Der letzte Schritt in (D.1) wurde durch die Ausführung der Erwartungswerte über Spurbildung im Dichtematrixformalismus durchgeführt. Die Berechnung von Erwartungswerten im Dichtematrixformalismus ist im Anhang A erläutert. Setzt man für die Photonenstatistik  $p_n$  in (D.1) eine Poissonverteilung gemäß (2.3.6) ein, ergibt sich der Wert  $g^2(0) = 1$  und für eine thermische Verteilung, wie (2.3.5), ein Wert von  $g^2(0) = 2$ . Der Wert der Autokorrelationsfunktionen höherer Ordnung kann ebenfalls durch die Ausnutzung der Kommutatorrelationen (2.2.3) aus der Photonenstatistik berechnet werden. Es ergibt sich

$$g^x(0) = \frac{\sum_n \prod_{k=0}^{x-1} k p_n}{(\sum_n n p_n)^x}. \quad (\text{D.2})$$

## E. Vollständige analytische Lösung der Ratengleichungen für die stationäre Photonenzahl

Die stationären Lösungen der Ratengleichungen (2.6.1) und (2.6.2) bilden einen Satz nichtlinearer Gleichungen. Die Lösung nach der Photonenzahl  $n$  lässt sich dabei auf die Lösung einer quadratischen Gleichung reduzieren. Die positive Lösung dieser Gleichung lautet

$$\begin{aligned} n = -\frac{(1-\beta)(\beta N + \lambda)}{4\beta\lambda} &\left[ 1 - \frac{P}{P_{th}} + \frac{\beta\lambda}{(1-\beta)(\beta N + \lambda)} \right. \\ &\left. - \sqrt{\left( 1 - \frac{P}{P_{th}} + \frac{\beta\lambda}{(1-\beta)(\beta N + \lambda)} \right)^2 + \frac{P}{P_{th}} \frac{8\beta^2\lambda N}{(1-\beta)(\beta^2 N^2 - \lambda^2)}} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

wobei hier die auf die Rate der spontanen gesamten Emission in alle Moden  $\gamma_{sp}$  normierten Größen  $\lambda = \kappa/\gamma_{sp}$  und  $\beta = R_c/\gamma_{sp}$  verwendet wurden. Die Eingangsleistung an der Laserschwelle ist  $P_{th}$  aus Gl. (2.6.7). Aus Gleichung (2.6.7) lässt sich die auf die totale Rate der spontanen Emission normierte Eingangsleistung an der Laserschwelle

$$\tilde{P}_{th} = \frac{P_{th}}{\gamma_{sp}} = (1-\beta) \frac{\beta N + \lambda}{\beta N - \lambda} \quad (\text{E.2})$$

Gleichung (E.1) reproduziert für  $P = P_{th}$  gerade die Photonenzahl an der Laserschwelle  $n_{th}$  aus Gl. (2.6.8).

## F. Definition der Laserschwelle über die Photonendichte $\eta$

Wie in Abb. 2.5 (b) zu erkennen ist, nähert sich die Photonendichte  $\eta$  zum TL hin einem Parabelbogen an, welcher als schwarze Linie in der Grafik eingezeichnet wurde. An den Nullstellen dieses Parabelbogens findet ein abrupter Wechsel des Verhaltens der Photonendichte statt. Außerhalb des durch die Nullstellen der Parabel aufgespannten Intervalls nähert sich die Photonendichte dem Wert Null an. Somit markierten die Nullstellen der Parabel den Phasenwechsel des Systems und damit die Laserschwelle und den Ausschaltspunkt. Indem die Besetzung  $f$  aus

Gleichung (2.6.2) in Gleichung (2.6.1) eingesetzt wird und dabei alle Terme, die  $N$  im Nenner enthalten, vernachlässigt<sup>18</sup> werden, wegen  $N \rightarrow \infty$  im TL, erhält man für die Photonendichte im TL die Parabel in der Pumprate  $P$

$$\eta_{TL} = \frac{P - \gamma}{2\kappa} - \frac{(P + \gamma)(P + \gamma + \kappa)}{8g^2N}, \quad (\text{F.1})$$

deren Nullstellen gerade die Lösungen  $P_{th}$  und  $P_{qu}$  aus (2.6.7) sind. Somit ergeben sowohl die Berechnung über die Besetzung (2.6.7) als auch über die Photonendichte (F.1) die selben Ergebnisse für die Laserschwelle und den Ausschaltpunkt  $P_{th}$  und  $P_{qu}$  des Zwei Niveau Systems mit  $N$  identischen und voneinander unabhängigen Emitttern.

## G. Nicht-klassisches Licht

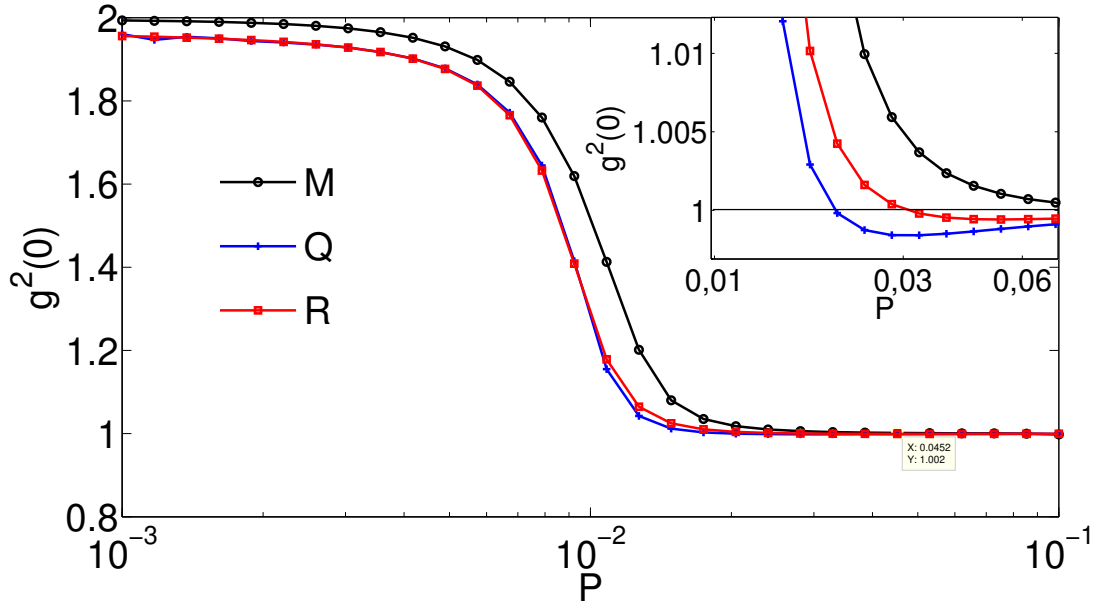


Abbildung G.1: Anregungsabhängiger Verlauf von  $g^2(0)$  für ein homogenes Emittersen-semble mit  $N = 10$  Emitttern. Die schwarze Linie ist die stationäre Lösung der Mastergleichung (2.3.1), die blaue Linie wurde mit den Quadruplett-Lasergleichungen (2.4.2), (2.4.3), (2.4.8)-(2.4.11) und (2.4.13) berechnet. Die rote Linie wurde aus den Ergebnissen der Ratengleichungen (2.4.6) und (2.4.7) mit Formel (2.5.10) berechnet. Die Einheit der Anregungsstärke ist  $[P] = \text{ps}^{-1}$ . Die Parameter sind  $g = \kappa = 10\gamma = 0,1 \text{ps}^{-1}$ . Damit gilt  $R_c < \kappa \forall P$  und deswegen sinkt die rote Linie nach Gl. 2.6.9 unter den Wert  $g^2(0) = 1$ , wie in der Vergrößerung rechts oben in der Grafik zu erkennen ist. Es ist zu erkennen, dass die Mastergleichung ein Ergebnis von  $g^2(0) < 1$  vermeidet.

Die Berechnung der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  mit Formel (2.5.10) über die Ergebnisse der Ratengleichungen (2.4.6) und (2.4.7) kann nach Gleichung (2.6.9) Werte von  $g^2(0) < 1$  ergeben. Die Bedingung dafür ist, dass eine positive und endliche Photonenzahl  $n_{g^2(0)=1}$  existiert, bei der perfekte Kohärenz im System vorliegt. Eine notwendige Bedingung dafür ist, dass die rechte Seite von Gl. (2.6.10) einen positiven und endlichen Wert hat. Dies ist erfüllt für  $R_c - \kappa(1 - 2N^{-1}) > 0$ . Für  $N \gg 2$  kann bei der Auswertung von Formel (2.5.10)

<sup>18</sup>Terme in denen  $g^2N$  auftreten, werden nicht vernachlässigt, da  $g^2N = \text{const.}$  ist.

daher erwartet werden, dass sich Signaturen von nicht-klassischem Licht mit  $g^2(0) < 1$  ergeben können, wenn die Rate der spontanen Emission in die Lasermode  $R_c$  größer ist als die Resonatorverluste  $\kappa$ . In diesem Fall ( $R_c > \kappa$ ) weist der von den Quadruplettgleichungen (2.4.2), (2.4.3), (2.4.8)-(2.4.11) und (2.4.13) und der über Formel (2.5.10) berechnete Verlauf der Autokorrelationsfunktion  $g^2(0)$  einen „Dipp“ beim Lasingübergang auf und  $g^2(0)$  sinkt unter den Wert eins, wie man in Abb. G.1 erkennen kann (blaue und rote Linie). Das Auftreten von nicht klassischem Licht bzw. Anti-Photon-Bunching beim Übergang ins Lasing mit  $g^2(0) < 1$  in Form eines solchen „Dipps“ wurde bereits häufiger bei der Auswertung der Quadruplettgleichungen für diskrete Emittoren dokumentiert [8, 12, 22]. Auch wurde dieses Phänomen bereits im Experiment beobachtet [23]. Vergleichen wir jedoch die Ergebnisse der Quadruplett-Lasergleichungen und die der Formel (2.5.10) für  $g^2(0)$  mit der Mastergleichung (2.3.1), stellen wir fest, dass die Mastergleichung das Auftreten von Anti-Photon Bunching mit  $g^2(0) < 1$  vermeidet. Da die Mastergleichung das im zweiten Kapitel der Arbeit betrachtete Lasermode im Gegensatz zu den anderen beiden Methoden ohne Approximationen beschreibt, vermuten wir, dass das Auftreten von nicht-klassischem Licht im Gleichgewichtszustand eines Lasers nicht aus der Licht-Materie Wechselwirkung, wie sie durch Jaynes-Cummings beschrieben wird, resultiert, sondern einen anderen Ursprung hat. Dies ist aus theoretischer Sicht eine interessante Fragestellung, die einen Ausblick dieser Arbeit darstellt. An dieser Stelle sei lediglich noch die Vermutung geäußert, dass der sub-radiante Effekt des photon trappings [28, 58] die Emissionstatistik eines Lasers so verändern könnte, dass Photonen bevorzugt einzeln emittiert werden. Dies ist das Anti-Photon Bunching, welches durch Werte von  $g^2(0) < 1$  reflektiert wird [24].

## H. Ideale und gemessene photonische Autokorrelation

Bei den in Abb. 3.1 (b) und (d) gezeigten Werten von  $g_{\text{exp}}^2(0)$  handelt es sich um Messwerte, die nicht dem tatsächlichen (idealen) Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion zu gleichen Zeiten  $g^2(0)$  entsprechen. Auf Grund der endlichen Auflösung von  $\tau_{\text{res}} \approx 225$  ps der Photodetektoren der HBT-Anordnung ist der experimentell gemessene Wert  $g_{\text{exp}}^2(\tau)$  eine zeitliche Mittelung des idealen Wertes der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g^2(\tau)$  auf Zeitskalen der Detektorauflösung  $\tau_{\text{res}}$ . Mathematisch kann der im Experiment gemessene Wert der photonischen Autokorrelationsfunktion  $g_{\text{exp}}^2(\tau)$  als eine Faltung

$$g_{\text{exp}}^2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' g^2(\tau - \tau') d(\tau') \quad (\text{H.1})$$

aus der idealen Autokorrelationsfunktion  $g^2(\tau)$  und der Detektorfunktion  $d(\tau)$  beschrieben werden. Dabei wird die Detektorfunktion als Gaußfunktion in der Zeit

$$d(\tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{\tau_{\text{res}}}{2} \sqrt{2\ln(2)} \quad (\text{H.2})$$

modelliert<sup>19</sup>. Um den zeitlichen Verlauf der idealen, gleichzeitigen Autokorrelationsfunktion zu bestimmen, verwenden wir die Gleichung

$$g^2(\tau) = 1 + (g^2(0) - 1) e^{-\frac{|\tau|}{\tau_{\text{coh}}}}, \quad (\text{H.3})$$

welche den Abfall von  $g^2(\tau)$  auf den Wert eins auf Zeitskalen der Kohärenzzeit  $\tau_{\text{coh}}$  des Lichtfeldes beschreibt. Gleichung (H.3) ist für ein thermisches Lichtfeld mit  $g^2(0) = 2$  exakt [24]. Gleichung (H.1) und (H.3) lässt sich ansehen, dass wenn die Kohärenzzeit wesentlich kleiner ist als die Detektorauflösung ( $\tau_{\text{coh}} \ll \tau_{\text{res}}$ ), sich unabhängig vom Wert  $g^2(0)$  der gemessene Wert  $g_{\text{exp}}^2(0) \approx$

<sup>19</sup>Die Wahl der Detektorfunktion ist nicht universell. Hier wurde eine Gaußfunktion benutzt. Ebenfalls denkbar wäre  $d(\tau) = (2\tau_{\text{res}})^{-1} \Theta(\tau - \tau_{\text{res}}) \Theta(\tau_{\text{res}} - \tau)$ .

1 ergibt. Für  $\tau_{coh} \gg \tau_{res}$  gilt nach Gl. (H.1)  $g_{exp}^2(0) \approx g^2(0)$ . Die Kohärenzzeit berechnen wir gemäß [12]

$$\tau_{coh} = \int_{-\infty}^{\infty} |g^1(\tau)|^2 d\tau, \quad (H.4)$$

wobei

$$g^1(\tau) = \frac{\langle b_{\xi_l}^\dagger(t) b_{\xi_l}(t + \tau) \rangle}{\langle b_{\xi_l}^\dagger(t) b_{\xi_l}(t) \rangle} \quad (H.5)$$

die photonische Autokorrelationsfunktion erster Ordnung ist. Die Autokorrelationsfunktion erster Ordnung ist eine zweizeitige Größe und kann nach dem Quantenregressionstheorem über die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen in der Verzögerung  $\tau$  berechnet werden, insofern in den resultierenden Bewegungsgleichungen  $\tau$ -abhängige Größen höchstens linear und nicht als Produkte auftreten [72]. Dies ist in der Clusterentwicklung auf Duplett-Niveau gewährleistet und man erhält die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{d\tau} G(\tau) = \sum_k |g_{\xi_l}|^2 P_k(\tau) - \kappa_{\xi_l} \quad (H.6)$$

$$\frac{d}{d\tau} P_k(\tau) = (f_k^e + f_k^h - 1)G(\tau) + (\Gamma + i\delta_k)P_k(\tau) \quad (H.7)$$

mit

$$G(\tau) = e^{i\omega_{\xi_l}\tau} \langle b_{\xi_l}^\dagger(t) b_{\xi_l}(t + \tau) \rangle \quad \text{und} \quad P_k(\tau) = e^{i\omega_{\xi_l}\tau} \langle b_{\xi_l}^\dagger(t) v_k^\dagger(t + \tau) c_k(t + \tau) \rangle. \quad (H.8)$$

Um das Gleichungssystem (H.6) und (H.7) zu lösen, werden die stationären Lösungen der Besetzungen  $f_k^\alpha$  aus den Quadruplettgleichungen (3.2.67) - (3.2.73) in Gleichung (H.7) eingesetzt. Als Anfangswerte werden für  $G(\tau)$  die stationäre Photonenzahl  $n_{p,\xi_l}(t = \infty) = G(0)$  und für  $P_k(\tau)$  die stationäre Lösung der mikroskopischen Polarisation  $p_{\xi_l,k}(t = \infty) = P_k(0)$  verwendet.

## Literatur

- [1] E.A. Hinds,  
*Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics.*  
Academic Press, Boston 1990; Vol. 28, pp 237-289
- [2] E. Purcell, Phys Rev. 69, 681 (1946)
- [3] Yongzhuo Li, Kaiyu Cui, Xue Feng, Yidong Huang, Da Wang, Zhilei Huang, Wei Zhang.  
*Photonic Crystal Nanobeam Cavity With Stagger Holes for Ultrafast Directly Modulated Nano-Light-Emitting Diodes* IEEE doi: 10.1109/JPHOT.2013.2240289 (2013)
- [4] N. Vico Triviño, R. Butté, J.F. Carlin, & N Grandjean,  
*Continous Wave Blue Lasing in III-Nitride Nanobeam Cavity on Silicon*  
Nano Lett. 15, 1259-1263(2015)
- [5] F.T. Arecchi, G.S. Rodari A. Sona,  
*Statistics of the laser radiation at threshold.*  
Physics Letters A Volume 25, Issue 1, 17 July 1967, Pages 59-60
- [6] H. Yokoyama ,  
*Physics and Device Applications of Optical Microcavities.*  
Science, New Series, Vol. 256, No. 5053 (Apr. 3, 1992), pp. 66-70
- [7] P. Rice, H. Carmichael ,  
*Photon statistics of a cavity-QED laser: A comment on the laser-phase-transition analogy.*  
Physical Review A (1994)
- [8] Weng W Chow, Frank Jahnke and Christopher Gies,  
*Emission properties of nanolasers during the transition to lasing.*  
Light: Science & Applications (2014) 3, e201; doi:10.1038/lssa.2014.82
- [9] Y. Yamamoto, S. Machida, and G. Bjork,  
*Quantum Electron.* IEEE 24, S215 (1992)
- [10] C. S. L. McCall, A. F. J. Levi, R. E. Slusher, S. J. Pearton and R. A. Logan,  
*Whispering-gallery mode microdisk lasers.*  
Appl. Phys. Lett. 60, 289 (1992); doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.106688>
- [11] S. Reitzenstein, A. Bazhenov, A. Gorbunov, C. Hofmann, S. Münch  
*Lasing in high-Q quantum-dot micropillar cavities.*  
Appl. Phys. Lett. 89, 051107 (2006); doi: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2266231>
- [12] S. M. Ulrich, C. Gies, S. Ates, J. Wiersig, S. Reitzenstein, C. Hofmann, A. Löffler,  
A. Forchel, F. Jahnke, and P. Michler, *Photon Statistics of Semiconductor Microcavity Lasers.* PRL 98, 043906 (2007);
- [13] S. Strauf, K. Hennessy, M. T. Rakher, Y.-S. Choi, A. Badolato, L. C. Andreani, E. L. Hu,  
P. M. Petroff, and D. Bouwmeester, *Self-Tuned Quantum Dot Gain in Photonic Crystal Lasers.* Phys. Rev. Lett. 96, 127404 – Published 31 March 2006
- [14] M. Khajavikhan, A. Simic, M. Katz, J. H. Lee, B. Slutsky, A. Mizrahi, V. Lomakin & Y. Fainman,  
*Thresholdless nanoscale coaxial lasers.* Nature 482, 204–207 (09 February 2012)
- [15] F. De Martini, G.R. Jacobovitz,  
*Anomalous spontaneous-stimulated-decay phase transition and zero-threshold laser action in a microscopic cavity.*  
Phys Rev Lett. 1988 Apr 25;60(17):1711-1714.

- 
- [16] Roy J. Glauber,  
*Optical Coherence and Photon Statistics, in Quantum Theory of Optical Coherence.*  
KGA, Weinheim, Germany. doi: 10.1002/9783527610075.ch2 (2006)
  - [17] P. Gartner and C. M. Halati ,  
*Laser transition in the thermodynamic limit for identical emitters in a cavity.*  
textPhys. Rev. A 93, 013817 – Published 13 January 2016
  - [18] P. Gartner,  
*Two-level laser: Analytical results and the laser transition.*  
textPhys. Rev. A 84, 053804 – Published 2 November 2011
  - [19] G. P. Puccioni and G. L. Lippi ,  
*Stochastic Simulator for modeling the transition to lasing .*  
Optics Express Vol. 23, Issue 3, pp. 2369-2374 (2015)
  - [20] M. Lorke, T. Suhr, N. Gregersen, J. Mork ,  
*Modulation response of quantum dot nanolight-emitting-diodes exploiting purcell-enhanced spontaneous emission.*  
Applied Physics Letters 98, 211109 (2011); doi: 10.1063/1.3592571
  - [21] H. Leymann, A. M. Foerster, J. Wiersig,  
*Expectation value based cluster expansion.*  
Phys. Status Solidi C, 10: 1242–1245. doi:10.1002/pssc.201200711
  - [22] Christopher Gies, Jan Wiersig, Michael Lorke, and Frank Jahnke  
*Semiconductor model for quantum-dot-based microcavity lasers.*  
Phys. Rev. A 75, 013803 – Published 8 January 2007
  - [23] J. Wiersig , C. Gies , F. Jahnke , M. Aßmann , T. Berstermann , M. Bayer , C. Kistner,  
S. Reitzenstein , C. Schneider ,S.Höfling , A. Forchel , C. Kruse , J. Kalden & D. Hommel,  
*Direct observation of correlations between individual photon emission events of a microcavity laser,* Phys. Rev. Lett. 108, 183601 (2012)
  - [24] H. Carmichael,  
*Statistical Methods in Quantum Optics.* Springer, Berlin Heidelberg New York, 1999
  - [25] F. De Martini and G. R. Jacobovitz, Phys. Rev. Lett. 60, 1711 (1988)
  - [26] G. Bjork and Y. Yamamoto,  
*Quantum Electron.* IEEE 3. QE-27 2386 (1991)
  - [27] Y. Yamamoto and R. E. Slusher, Phys. Today 4B (6), 66 (1993).
  - [28] Sören Kreinberg, Weng W. Chow, Janik Wolters, Christian Schneider, Christopher Gies,  
Frank Jahnke, Sven Höfling, Martin Kamp and Stephan Reitzenstein ,  
*Emission from quantum-dot high- $\beta$  microcavities: transition from spontaneous emission to lasing and the effects of superradiant emitter coupling*  
Light: Science & Applications (2017) 6, e17030; doi: 10.1038/lsa.2017.30
  - [29] M. Gross and S. Haroche,  
Frank Jahnke, Sven Höfling, Martin Kamp and Stephan Reitzenstein,  
*Superradiance: an essay on the theory of collective spontaneous emission*  
Phys. Rep. 93, 301 (1982)

- [30] R. Dicke,  
*Coherence in spontaneous emission processes.*  
*Superradiance: an essay on the theory of collective spontaneous emission*  
Physical Review. 93 (1): 99–110 (1954)
- [31] F. Jahnke, C. Gies et al.,  
*Sub- and Superradiance in nanolasers.*  
Phys. Rev. Appl. 4, 044018 (2015)
- [32] Frank Jahnke, Christopher Gies, Marc Aßmann, Manfred Bayer, H. A. M. Leymann,  
Alexander Foerster, Jan Wiersig, Christian Schneider, Martin Kamp, and Sven Höfling,  
*Giant photon bunching, superradiant pulse emission and excitation trapping in quantum-dot nanolasers,*  
Nat Commun. 7: 11540, (2016)
- [33] Yi Mu and C. M. Savage, *One-atom lasers.* Phys. Rev. A 46, 5944 – Published 1 November 1992
- [34] Bruce W. Shore & Peter L. Knight,  
*The Jaynes-Cummings Model.*  
Journal of Modern Optics Volume 40, 1993 - Issue 7
- [35] K. Baumann G.C. Hegerfeldt,  
*A Nonkommutative Marcinkiewicz Theorem.*  
Publ. RIMS Kyoto Univ. 21(1985) 191–204, Kyoto, 1985
- [36] W. Chow and S. Koch,  
*Semiconductor Laser Fundamentals- Physics of the Gain Materials*  
Springer, 1999
- [37] Ibach H. and Lüth H.,  
*Einführung in die Festkörperphysik.*  
Springer, Berlin, 2002
- [38] N.W. Ashcroft and D.N. Mermin,  
*Festkörperphysik.*  
Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, München, 2007
- [39] Oliver Benson and Yoshihisa Yamamoto,  
*Master-equation model of a single-quantum-dot microsphere laser.*  
Phys. Rev. A June 1999 Vol. 59, No. 6
- [40] W. Chow and F. Jahnke,  
*Review On the physics of semiconductor Quantum dots for applications of laser quantum dot optics.*  
Progress in Quantum Electronics, 37(2013)109-184.
- [41] Yasutomo Ota, Masahiro Kakuda, Katsuyuki Watanabe, Satoshi Iwamoto, and Yasuhiko Arakawa,  
*Thresholdless quantum dot nanolaser.*  
Opt. Express 25, 19981-19994 (2017)
- [42] Coldren, *What is a Diode Laser Oscillator.*  
IEEE J.Sel Top. Quantum Electron (2006); 19, 1503503
- [43] M. Kira, F. Jahnke, W. Hoyer, S.W. Koch  
*Quantum theory of spontaneous emission and coherent effects in semiconductor microstructures.*  
Progress in Quantum Electronics, 1999 a



- 
- [44] Roy Barzel,  
*Einfluss quantenmechanischer und nicht-Markovscher Effekte auf die Modulationsantwort von Quantenpunktsystemen mit geringer Emitterzahl.*  
Bachelorarbeit, Universität Bremen, 2015
  - [45] Yu Ye, Zi Jing Wong, Xiufang Lu, Xingjie Ni, Yuan Wang & Xiang Zhang,  
*Monolayer excitonic laser.*  
Nature Photonics 9, 733–737 (2015)
  - [46] Sanfeng Wu, Sonia Buckley, John R. Schaibley, Liefeng Feng, Jiaqiang Yan,  
David G. Mandrus, Fariba Hatami, Wang Yao, Jelena Vučković, Arka Majumdar &  
Xiaodong Xu  
*Monolayer semiconductor nanocavity lasers with ultralow thresholds.*  
Nature, London 520.7545 (Apr 2, 2015): 69-72D.
  - [47] Omid Salehzadeh, Mehrdad Djavid, Nhung Hong Tran, Ishiang Shih, and Zetian Mi,  
*Optically Pumped Two-Dimensional MoS<sub>2</sub> Lasers Operating at Room Temperature.*  
Nano Lett. 2015, 15, 5302–5306
  - [48] Yasutomo Ota, Masahiro Kakuda, Katsuyuki Watanabe, Satoshi Iwamoto,  
and Yasuhiko Arakawa ,  
*Thresholdless quantum dot nanolaser.*  
Opt. Express 25, 19981-19994 (2017)
  - [49] S. Strauf, F. Jahnke  
*Single quantum dot nanolaser.*  
Laser Photonics Rev. 5, No. 5, 607–633 (2011) / DOI 10.1002/lpor.201000039
  - [50] Nan Niu, Alexander Woolf, Danqing Wang, Tongtong Zhu, Qimin Quan, Rachel A.  
Oliver, and Evelyn L. Hu ,  
*Ultra-low threshold gallium nitride photonic crystal nanobeam laser.*  
Appl. Phys. Lett. 106, 231104 (2015); <https://doi.org/10.1063/1.4922211>
  - [51] Stefan T. Jagsch, Noelia Vico Triviño, Frederik Lohof, Gordon Callsen, Stefan Kalinowski,  
Ian M. Rousseau, Roy Barzel, Jean-François Carlin, Frank Jahnke, Raphaël Butté,  
Christopher Gies, Axel Hoffmann, Nicolas Grandjean and Stephan Reitzenstein,  
*On thresholdless lasing features in high- $\beta$  nitride nanobeam cavities: a quantum optical study.*  
arXiv:1603.06447
  - [52] D. Miller,  
*Device Requirements for Optical Interconnects to Silicon Chips.*  
Proceedings of the IEEE: Volume: 97 Issue: 7 DOI: 10.1109/ JPROC.2009.2014298. (2009)
  - [53] T. Tanabe, M. Notomi, S. Mitsugi, A. Shinya, E. Kuramochi,  
Appl. Phys. Lett. 2005 , 87 , 151112 DOI: 10.1063/1.2089185.
  - [54] T. Tanabe, M. Notomi, S. Mitsugi, A. Shinya, E. Kuramochi,  
*All-optical switches on a silicon chip realized using photonic crystal nanocavities.*  
Appl. Phys. Lett. (2005), 87 (15) 87 151112/1-151112/3 CODEN: APPLAB ISSN: 0003-6951

- [55] E. Kuramochi, K. Nozaki, A. Shinya, K. Takeda, T. Sato, S. Matsuo, H. Taniyama, H. Sumikura & M. Notomi,  
*Large-scale integration of wavelength-addressable all-optical memories on a photonic crystal chip.*  
Nat. Photonics 2014 , 8 , 474 481 DOI: 10.1038/nphoton.2014.93.
- [56] A.D. Falco, L. O ' Faolain and T.F. Krauss  
Appl. Phys. Lett. 2009 , 94 , 063503 DOI: 10.1063/1.3079671.
- [57] M. Nomura, S. Iwamoto, N. Kumagai and Y. Arakawa  
Phys. Rev. B 2007 , 75 , 195313 DOI: 10.1103/PhysRevB.75.195313.
- [58] Igor Protsenko, Emil C. André, Alexander Uskov, Jesper Mørk and Martijn Wubs  
*Collective Effects in Nanolasers Explained by Generalized Rate Equations.*  
arXiv:1709.08200 .
- [59] F. Deborah, A. Tate Eric, Finkelstein Olga Khavjou and Alison Gustafson,  
*Cost Effectiveness of Internet Interventions: Review and Recommendations.*  
Springer, 2009
- [60] Kwang-Yong Jeong, You-Shin No, Yongsop Hwang, Ki Soo Kim, Min-Kyo Seo, Hong-Gyu Park & Yong-Hee Lee.  
*Electrically driven nanobeam laser*  
Nature Communications 4, 2822 (2013)
- [61] <https://www.google.de/search?q=photonic+crystalsource=lnmstbm>
- [62] F. Jahnke  
*Quantum Optics with Semiconductor Nanostructures.*  
Woodhead Publishing, 2012
- [63] O. Painter, R. K. Lee1, A. Scherer, A. Yariv, J. D. O'Brien, P. D. Dapkus, I. Kim, and Yasuhiko Arakawa,  
*Two-Dimensional Photonic Band-Gap Defect Mode Laser.*  
Science 11 Jun 1999: Vol. 284, Issue 5421, pp. 1819-1821
- [64] Philip St J Russell, *Photonic band gaps.* Physics World, Volume 5, Number 8 , 1992
- [65] T. Baba, D. Sano, K. Nozaki, K. Inoshita, Y. Kuroki, and F. Koyama,  
Appl. Phys. Lett. 85 , 3989 2004 .
- [66] F. Qian, Y. Li, S. Gradec ak, H.G. Park, Y. Dong, Y. Ding, Z.L. Wang and C.M. Lieber,  
Nat. Mater. , 7 , 701 706 DOI: 10.1038/nmat2253 (2008)
- [67] Qimin Quan and Marko Loncar  
*Deterministic design of wavelength scale, ultra-high Q photonic crystal nanobeam cavities,*  
Opt. Express 19, 18529-18542 (2011)
- [68] G. Bastard,  
*Wave mechanics applied to semiconductor heterostructures.*  
Les Ulis Cedex : Les Editions de Physique, 1996
- [69] W. Vogel, D.G. Welsch *Lectures on Quantum Optics.* Akademie Verlag, 1994
- [70] W. Demtroeder, *Experimentalphysik 2.* Springer, 5. Auflage, New York, 2005
- [71] G. Czycholl, *Theoretische Festkörperphysik.* Springer, 3. Auflage, Universität Bremen, 2012

- 
- [72] Y. Yamamoto, A Imamoglu ,  
*Mesoscopic Quantum Optics*. Jhon Wiley & Sons, Inc., 1999
  - [73] R. H. Brown and R. Twiss.  
*Correlation between photons in two coherent beams of light*.  
Nature, 177:27–29, 1956.
  - [74] Rossbach, G., et al,  
*High-temperature Mott-transition in wide band-gap semiconductor quantum wells*.  
Phys. Rev. B 90, 201308 (2014). Supplementary Material.
  - [75] Yiyang Gong, Bryan Ellis, Gary Shambat, Tomas Sarmiento, James S. Harris and Jelena Vučković ,  
*Nanobeam photonic crystal cavity quantum dot laser*.  
Optics Express Vol. 18, Issue 9, pp. 8781-8789 (2010)
  - [76] J. Piprek  
*Nitride Semiconductor Devices, Principles and Simulation*.  
Wiley-VCH, 2007
  - [77] N. Baer, C. Gies, J. Wiersig and F. Jahnke,  
*Luminescence of a Semiconductor Quantum Dot System*.  
Eur. Phys. J. B, 50:411, 2006.
  - [78] C. Z. Ning,  
*What is Laser Threshold?*  
IEEE Journal of selected topics in quantum electronics, vol. 19, no. 4, July/August 2013
  - [79] S. Ritter , P. Gartner , , C. Gies , F. Jahnke,  
*Emission properties and photon statistics of a single quantum dot laser*.  
IEEE Journal of selected topics in quantum electronics, vol. 19, no. 4, July/August 2013
  - [80] Samuel W. Eaton, Anthony Fu, Andrew B. Wong, Cun-Zheng Ning & Peidong Yang  
*Nanowire lasers*.  
Nature Reviews Materials 1, Article number: 16028 (2016) doi:10.1038/natrevmats.2016.28
  - [81] Xiangfeng Duan, Yu Huang, Ritesh Agarwal & Charles M. Lieber,  
*Single-nanowire electrically driven lasers*.  
Nature 421, 241–245 (16 January 2003) doi:10.1038/nature01353
  - [82] F. K. Kneubühl, M. W. Sigrist: Laser. 3. Auflage. Teubner, 1991, S. 4.
  - [83] T. H. Maiman *Stimulated Optical Radiation in Ruby*.  
Nature. 187, 4736, 1960, S. 493–494
  - [84] N. Alem, R. Erni, C. Kisielowski, M.D. Rossell, W. Gannett, and A. Zettl,  
*Atomically thin hexagonal boron nitride probed by ultrahigh-resolution transmission electron microscopy*.  
Physical Review B , 80 (15), 155425.
  - [85] Mak, K. F., Lee, C., Hone, J., Shan, J., und Heinz, T. F., *Atomically thin MoS<sub>2</sub> :a new direct-gap semiconductor*.  
Physical Review Letters , 105 (13), 136805.(2010)
  - [86] A. Steinhoff, J.-H. Kim, F. Jahnke, M. Rösner, D.-S. Kim, C. Lee, G. H. Han, M. S. Jeong, T. O. Wehling, and C. Gies,  
*Efficient Excitonic Photoluminescence in Direct and Indirect Band Gap Monolayer MoS<sub>2</sub>*.  
Nano Lett., 2015, 15 (10), pp 6841–6847 DOI: 10.1021/acs.nanolett.5b02719

- [87] Alexander Steinhoff,  
*Photonenstatistik des Ein-Atom-Lasers.*  
Bachlorarbeit, Universität Bremen, 2009

## Danksagung

Bedanken möchte ich mich als erstes bei Herrn Prof. Dr. Frank Jahnke, welcher mir die Möglichkeit gegeben hat, meine Masterarbeit im Institut für Theoretische Physik zu schreiben. Gleichauf möchte ich Herrn Dr. Christopher Gies meinen Dank aussprechen für die Erstbegutachtung meiner Masterarbeit, die Unterstützung und für die zahlreichen und intensiven inhaltlichen Diskussionen zu diesem interessanten Thema.

Besonderer Dank gilt Frederik Lohof für die unzähligen inhaltlichen Diskussionen, für die wertvollen und hilfreichen Vergleichsrechnungen und vor allem für seine Mühe diese Arbeit kritisch zu kommentieren.

Einen herzlichen Dank möchte ich Paul Gartner aussprechen, dessen interessante Arbeiten zum Lasingübergang mich zusätzlich motiviert haben in diesem Feld aktiv zu werden und für seinen Enthusiasmus beim Rechnen und beim Diskutieren von wissenschaftlichen Inhalten.

Weiterhin möchte ich meiner Zweitgutachterin Frau Dr. Kathrin Sebald danken, dass Sie die Mühe auf sich genommen hat, sich mit dieser Arbeit auseinanderzusetzen und ein Zweitgutachten anzufertigen.

Bei Mawussey Segnon und Marian Cepok möchte ich mich dafür bedanken, dass sie diese Arbeit korrekturgelesen haben.

Bedanken möchte ich mich auch bei allen weiteren Mitarbeitern des Instituts für die anregenden physikalischen Diskussionen, Ideen und auch für die Gespräche abseits der Physik.

Einen besonderen Dank möchte ich zuletzt noch an meine Familie und meine Freundin Imke richten, welche stets an meiner Seite waren und mich weit über diese Arbeit und das Studium hinaus unterstützt haben.

Diese Erklärungen sind in jedes Exemplar der Bachelor- bzw. Masterarbeit mit einzubinden.

Name: \_\_\_\_\_ Matrikelnr.: \_\_\_\_\_

### Urheberrechtliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Alle Stellen, die ich wörtlich oder sinngemäß aus anderen Werken entnommen habe, habe ich unter Angabe der Quellen als solche kenntlich gemacht.

\_\_\_\_\_  
Datum

\_\_\_\_\_  
Unterschrift

### Erklärung zur Veröffentlichung von Abschlussarbeiten

Die Abschlussarbeit wird zwei Jahre nach Studienabschluss dem Archiv der Universität Bremen zur dauerhaften Archivierung angeboten.

Archiviert werden:

- 1) Masterarbeiten mit lokalem oder regionalem Bezug sowie pro Studienfach und Studienjahr 10 % aller Abschlussarbeiten
- 2) Bachelorarbeiten des jeweils der ersten und letzten Bachelorabschlusses pro Studienfach und Jahr.

☐ Ich bin damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.

☐ Ich bin damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit nach 30 Jahren (gem. §7 Abs. 2 BremArchivG) im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.

☐ Ich bin nicht damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.

\_\_\_\_\_  
Datum

\_\_\_\_\_  
Unterschrift