A

1. Dokážte, že keď $f(x) = \Theta(g(x))$ & $g(x) = \Theta(h(x))$, potom $f(x) = \Theta(h(x))$.

Riešenie:

$f(x) = \Theta(g(x)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2, n_0 > 0$: $\forall n > n_0$ $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \Leftrightarrow \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n)$, $n > n_0$

$g(x) = \Theta(h(x)) \Leftrightarrow \exists c_3, c_4, n_1 > 0$: $\forall n > n_0$ $c_3 h(n) \leq g(n) \leq c_4 h(n) \Leftrightarrow \frac{1}{c_4} g(n) \leq h(n) \leq \frac{1}{c_3} g(n)$, $n > n_1$

Teda $\frac{1}{c_2 c_4} f(n) \leq h(n) \leq \frac{1}{c_1 c_3} f(n)$ pre $n > \max\{n_0, n_1\} \Leftrightarrow c_1 c_3 h(n) \leq f(n) \leq c_2 c_4 h(n)$ pre $n > \max\{n_0, n_1\} \Leftrightarrow f(x) = \Theta(h(x))$.

2. Vyjadrite asymptotické chovanie funkcií (najlepšie prostredníctvom ekvivalencie $\sim$ alebo vyjadrením cez O, o, Θ, Ω s čo najjednoduchšou funkciou):

a) $(3x^2 - 91x - 1)^4$, b) $\sqrt{\frac{|\log x - x^6|}{x^2 + 12x - 7}}$

Riešenie:

$(3x^2 - 91x - 1)^4 \sim (3x^2)^4 \sim 81x^8$, $\sqrt{\frac{|\log x - x^6|}{x^2 + 12x - 7}} \sim \sqrt{\frac{x^6}{x^2}} \sim x^2$

3. Určte asymptotické chovanie funkcie

$$h(x) = \sum_{j \leq x} \left(\frac{1}{j^2} + \frac{1}{j^3} \right)$$

Riešenie:

$\int_1^{n+1} (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3})\, \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i^2} + \frac{2}{i^3}\right) \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3}\right)_{n=1} + \int_1^n (\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3})$

$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + C$

$2 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq h(n) \leq 5 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$

$$h(n) \sim \Theta(1)$$

4. Nájdite súčet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 2n - 3}{n!}$$

Riešenie:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+2n-3}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+2n-3}{n!} - \left(\frac{2n^2+2n-3}{n!}\right)_{n=0} =$

$= \left[2\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) - 3\right] (e^x)_{x=1} + 3 = V$

$(e^x)_{x=1} = e$

$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(e^x) = x \cdot e^x$, $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(e^x)_{x=1} = e$

$\left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2(e^x) = \left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)(xe^x) = x(e^x + xe^x)$, $\left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2(e^x)_{x=1} = 2e$
$V = 3 + 4e + 2e - 3e = 3(1+e)$.

5. Nájdite riešenie rovnice:

$$x_{n+1} = 2x_n - n - 1, x_0 = 0, n \geq 0$$

Riešenie:

$x_{n+1} = 2x_n - n - 1$, $x_0 = 0$, $n \geq 0$
Substitúcia: $x_n = 2^n y_n$, $y_0 = x_0$
$2^{n+1}y_{n+1} = 2 \cdot 2^n y_n - n - 1$
$y_{n+1} = y_n - \frac{n+1}{2^{n+1}}$, $y_0 = 0$
$y_1 = y_0 - \left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)_{n=0}$
$y_2 = y_1 - \left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)_{n=1}$
$\dots$
$y_k = y_{k-1} - \left(\frac{n+1}{2^{n+1}}\right)_{n=k-1}$
$y_n = y_0 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n+1}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n+1}{2^n} = -\frac{1}{2}\left[\left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + 1\right]\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{n=\frac{1}{2}}$
$\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{2}} = 2(1 - 2^{-n})$
$\left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = x \cdot \frac{-nx^{n-1}(1-x)-(1-x^n)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = x \cdot \frac{-nx^{n-1}(1-x)+1-x^n}{(1-x)^2}$
$\left(x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-n2^{-n+1} \cdot \frac{1}{2} + 1 - 2^{-n}) = 2(-(n+1)2^{-n} + 1)$
$y_n = -\frac{1}{2}(2(1 - 2^{-n} + 1 - (n+1)2^{-n}) = (n+2)2^{-n} - 2$
$x_n = 2^n y_n = n + 2 - 2^{n+1}$

6. Zoraďte funkcie podľa asymptotického rastu a zdôvodnite (napíšte príslušné limity): n^{300}, $n^{\log n}$, $\sqrt{n!}$, $0{,}1^n$

Riešenie:

$0{,}1^n \prec n^{300} \prec n^{\log n} \prec \sqrt{n!}$
$\lim 0{,}1^n = \lim \frac{0{,}1^n}{n^{300}} = 0$
$\lim \frac{n^{300}}{n^{\log n}} = \lim \frac{e^{300 \ln n}}{e^{\ln^2 n}} = \lim e^{300 \ln n - \ln^2 n} = \lim e^{\ln n (300 - \ln n)} = 0$
Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, preto
$\sqrt{n!} \sim (\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}} = C(n) \cdot e^{\frac{n \ln n}{2} - \frac{n}{2}}$
$\lim \frac{n^{\ln n}}{\sqrt{n!}} = \lim \frac{e^{\ln^2 n}}{C(n) \cdot e^{\frac{1}{2}(n \ln n - n)}} = \lim \frac{1}{C(n)} \cdot e^{\ln^2 n - \frac{n \ln n - n}{2}} =$
$= \lim \frac{1}{C(n)} \cdot e^{\ln n(\ln n - \frac{n}{4}) + \frac{n}{2}(1 - \frac{\ln n}{2})} = 0$, keďže exponent ide v limite k $-\infty$ a $\frac{1}{C(n)} = \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{4}}}$ k 0.

7. Napíšte všeobecný vzorec pre prvky matice inverznej diskrétnej Fourierovej transformácie. Vypočítajte inverznú Fourierovu transformáciu vektora: $(2i, 2i, -i, 3)$

Riešenie:

InvDFT$(\vec{x}) = \frac{1}{n} H' \cdot \vec{x}$, kde $H'_{kl} = \omega^{-(k-1)(l-1)} = (\omega^{-1})^{(k-1)(l-1)}$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, pre $\dim \vec{x} = n$

Pre $n = 4$ je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $\omega^{-1} = -i$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \\ -i \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2i + 2i - i + 3 \\ 2i + 2 + i + 3i \\ 2i - 2i - i - 3 \\ 2i - 2 + i - 3i \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 + 3i \\ 2 + 6i \\ -3 - i \\ -2 \end{pmatrix}$$

8. Určte rády všetkých prvkov v grupe všetkých riešení rovnice $x^9 - 1 = 0$ v poli komplexných čísel. (Rád prvku α je $\mathrm{ord}(\alpha) = \min\{i \in \mathbb{N} : i > 0, \alpha^i = 1\}$.)

Riešenie:

$\mathrm{ord}(\omega^j) = \frac{9}{(9,j)}$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ord(i)	1	9	9	3	9	9	3	9	9

B

---

1. Dokážte, že keď $f(x) \sim g(x)$ & $g(x) \sim h(x)$, potom $f(x) \sim h(x)$.

Riešenie:

$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$g(x) \sim h(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$

Potom z vety o limite súčinu funkcií dostávame:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \cdot 1 = 1,$$

preto $f(x) \sim h(x)$.

2. Vyjadrite asymptotické chovanie funkcií (najlepšie prostredníctvom ekvivalencie $\sim$ alebo vyjadrením cez symboly O, o, Θ, Ω s čo najjednoduchšou funkciou):

a) $(2x^2 - x - 10^{51})^6$, b) $\sqrt{\frac{|\log x - x^{12}|}{x^3 - 2x + 10^{32}}}$

Riešenie:

$(2x^2 - x + 10^{51})^6 \sim (2x^2)^6 = 64x^{12}$, $\sqrt{\frac{|\log x - x^{12}|}{x^3 - 2x + 10^{32}}} \sim \sqrt{\frac{x^{12}}{x^3 - 2x + 10^{32}}} \sim \sqrt{x^9} \sim x^{\frac{9}{2}}$

$\int_1^{n+1} \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x \le \sum_{j=1}^{n} \frac{5}{j} \le \left(\frac{5}{j}\right)_{j=1} + \int_1^n \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x$

3. Určte asymptotické chovanie funkcie

$$h(x) = \sum_{j \le x} \left(\frac{5}{j}\right)$$

Riešenie:

$\int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x = 5\ln x + C$, čiže

$5\ln(n+1) \le h(n) \le 5 + 5\ln n$

$5\ln(n+1) \sim 5 + 5\ln n \sim 5\ln n$, preto asymptotický rast danej sumy je

$$5\ln n.$$

4. Určte súčet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n-7}{3^n}$$

Riešenie:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n-7}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(3n^2+n-7)\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(3n^2+n-7)\frac{1}{3^n} - \left(\frac{3n^2+n-7}{3^n}\right)_{n=0} =$

$7 + \left[3\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) - 7\right]\left(\frac{1}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}} = V$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$, $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$V = 7 + 3\cdot\frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{21}{2} = \frac{7}{4}$.

5. Nájdite riešenie rovnice:

$$x_{n+1} = 3x_n + n + 2, x_0 = 0, n \ge 0$$

Riešenie:

$x_{n+1} = 3x_n + n + 2$, $x_0 = 0$, $n \ge 0$

substitúcia $x_n = 3^n y_n$, $y_0 = x_0 = 0$

$3^{n+1}y_{n+1} = 3\cdot 3^n y_n + n + 2 = 3^{n+1}y_n + n + 2$, teda

$y_{n+1} = y_n + \frac{n+2}{3^{n+1}}$, $y_0 = 0$

$y_1 = y_0 + \left(\frac{n+2}{3^{n+1}}\right)_{n=0}$

$y_2 = y_1 + \left(\frac{n+2}{3^{n+1}}\right)_{n=1}$

...

$y_k = y_{k-1} + \left(\frac{n+2}{3^{n+1}}\right)_{n=k-1}$, teda

$y_k = y_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{i+2}{3^{i+1}} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{i+2}{3^{i+1}} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i+2}{3^i} = \frac{1}{3}\cdot\left[\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + 2\right]\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}}$

$\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(1-3^{-n})$

$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) = x\cdot\frac{-nx^{n-1}(1-x)-(1-x^n)\cdot(-1)}{(1-x)^2} = x\cdot\frac{-nx^{n-1}(1-x)+(1-x^n)}{(1-x)^2}$

$\left(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4}(-n\cdot 3^{-n+1}\cdot\frac{2}{3} + 1 - 3^{-n}) = \frac{3}{4}(-2n\cdot 3^{-n} + 1 - 3^{-n})$

$y_n = \frac{1}{4}(-2n\cdot 3^{-n} + 1 - 3^{-n} + 4 - 4\cdot 3^{-n}) = \frac{1}{4}((-2n-5)\cdot 3^{-n} + 5)$

$x_n = 3^n y_n = \frac{1}{4}(5 \cdot 3^n - 2n - 5)$.

6. Zoraďte funkcie podľa asymptotického rastu a dokážte:

$$n^{0,1}; \log n^{300}; \sqrt[4]{n!}, n^{\log n}$$

Riešenie:

$\log n^{300} \prec n^{0,1} \prec n^{\log n} \prec \sqrt[4]{n!}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^{300}}{n^{0,1}} = \lim \frac{300 \log n}{n^{0,1}} = \lim \frac{300}{0{,}1 \cdot n^{-0,9} \cdot n} = \lim \frac{3000}{n^{0,1}} = 0$

$\lim \frac{n^{0,1}}{n^{\log n}} = \lim \frac{e^{0,1 \cdot \ln n}}{e^{\ln^2 n}} = \lim e^{\ln n (0,1 - \ln n)} = 0$

Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, preto

$\sqrt[4]{n!} \sim \left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^{\frac{1}{4}} = (2\pi)^{\frac{1}{8}} \cdot n^{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{4}} = C(n) \cdot e^{\frac{1}{4}(n \ln n - n)}$

$\lim \frac{n^{\log n}}{\sqrt[4]{n!}} = \lim \frac{e^{\ln^2 n}}{C(n) e^{\frac{1}{4}(n \ln n - n)}} = \lim \frac{1}{C(n)} \cdot e^{\ln^2 n - \frac{n \ln n - n}{4}} = \lim \frac{1}{C(n)} \cdot e^{\ln n(\ln n - \frac{n}{8}) + \frac{n}{4} - \frac{n}{8}\ln n} =$ $\lim \frac{1}{C(n)} \cdot e^{\ln n(\ln n - \frac{n}{8}) + \frac{n}{4}(1 - \frac{\ln n}{2})} = 0$, keďže exponent sa v limite blíži k $-\infty$ a $\lim \frac{1}{C(n)} = \lim \frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{8}}} = 0$.

7. Napíšte všeobecný vzorec pre prvky matice diskrétnej Fourierovej transformácie. Vypočítajte diskrétnu Fourierovu transformáciu vektora: $(2, 3i, -5i, 2)$.

Riešenie:

$\mathrm{DFT}(\vec{x}) = H \cdot \vec{x}$, kde $H_{kl} = \omega^{(k-1)(l-1)}$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, pre $\dim \vec{x} = n$

Pre $n = 4$ je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ -5i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i-5i+2 \\ 2-3+5i-2i \\ 2-3i-5i-2 \\ 2+3+5i+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2i \\ -1+3i \\ -8i \\ 5+7i \end{pmatrix}$$

8. Určte rády všetkých prvkov v grupe všetkých riešení rovnice $x^{12} - 1 = 0$ v poli komplexných čísel. (Rád prvku α je $\mathrm{ord}(\alpha) = \min\{i \in \mathbb{N} : i > 0, \alpha^i = 1\}$.)

Riešenie:

$\mathrm{ord}(\omega^j) = \frac{12}{(12,j)}$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathrm{ord}(i)$	1	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6	12