



Universidad
Nacional
de Córdoba



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación

El método adaptativo para la valoración de opciones barrera

Bas Peralta Benjamín, Fada Santiago

4 de noviembre de 2024

1. Introducción

La valoración en forma analítica solo es posible para un grupo limitado de derivados financieros, por lo que la mayoría requiere de técnicas numéricas para aproximar su valor. El problema de ellas es que la convergencia con la que se aproximan a valores teóricos de modelos continuos normalmente es no monótona y en algunos casos requiere de mucho cómputo para una precisión aceptable. Esto se debe principalmente a que existen áreas en donde el valor de la opción es no lineal con respecto al subyacente y los modelos discretos no logran capturar de forma precisa este comportamiento. De aquí nace el Modelo de Malla Adaptativa (MMA) que presentaremos en este informe y el cual se basa en el árbol trinomial, pero optimiza la convergencia ajustando su fineza en secciones clave, mejorando la eficiencia computacional y reduciendo el error de no linealidad en áreas críticas. Nos concentraremos en particular en el MMA aplicado a opciones barrera y, siguiendo lo presentado en [1], usaremos opciones call barrera down-and-out para presentar el desarrollo. Cabe aclarar que para medir el desempeño de los modelos, tomaremos como referencia la fórmula analítica para este tipo de opciones obtenida por Merton en 1973.

Notación. Utilizaremos a lo largo del ensayo S_0 para denotar el precio inicial del activo, H para la barrera, K para el strike, T para la madurez, σ para la volatilidad, r para la tasa anual libre de riesgo, N para la cantidad de pasos de tiempo hasta la madurez, h para la magnitud del “salto” de precio, $k = T/N$ para la longitud del paso del tiempo, y $\alpha = r - \sigma^2/2$ para la tendencia.

2. El modelo trinomial para opciones barrera

El árbol trinomial a partir del cual se construye el MMA sigue la misma idea del visto en clase, pero con algunas modificaciones. En lugar de modelar el precio del activo $S(t)$, se modela su logaritmo: $X(t) = \ln(S(t))$. Este cambio permite que el árbol conserve una estructura simétrica, donde en cada paso el precio puede subir o bajar en una magnitud fija h , o permanecer constante, lo cual facilita la convergencia del modelo.

Para obtener las ya conocidas probabilidades neutrales al riesgo p_u , p_d y p_m , que corresponden a los movimientos hacia arriba, abajo y neutro, respectivamente, se imponen condiciones

para que la esperanza y la varianza del proceso en el árbol de precios coincidan con la distribución neutral al riesgo, obteniendo de esta manera fórmulas cerradas en función de h y de k :

$$p_u(h, k) = \frac{1}{2} \left(\sigma^2 \frac{k}{h^2} + \alpha^2 \frac{k^2}{h^2} + \alpha \frac{k}{h} \right), \quad p_d(h, k) = \frac{1}{2} \left(\sigma^2 \frac{k}{h^2} + \alpha^2 \frac{k^2}{h^2} - \alpha \frac{k}{h} \right),$$

$$p_m(h, k) = 1 - p_u(h, k) - p_d(h, k)$$

El parámetro libre que queda en la configuración del árbol es h , para el cual usaremos $\sigma\sqrt{3k}$, valor que asegura una buena convergencia y probabilidades no negativas según [1].

2.1. Problemas del modelo trinomial para valorar opciones barrera

Como explicamos en la introducción, la aproximación obtenida por este modelo presenta un error de “no linealidad”, el cual ocurre cuando el valor de la opción no cambia proporcionalmente a cómo cambia el precio del activo entre dos nodos. En las opciones barrera particularmente, este problema se presenta no solamente en el vencimiento de la opción al calcular el payoff, sino también en cada momento en que el precio del activo se acerca a la barrera. La solución más directa para este problema consiste en aumentar la cantidad de pasos en el modelo. Sin embargo, veremos que hacer esto trae problemas.

Tomamos una opción call barrera down-and-out con $S_0 = 100$, $H = 90$, $K = 100$, $r = 0.1$, $T = 1$, $\sigma = 0.25$, y utilizamos el modelo trinomial para valorarla variando el valor de N . Los resultados obtenidos se visualizan en la figura 1.

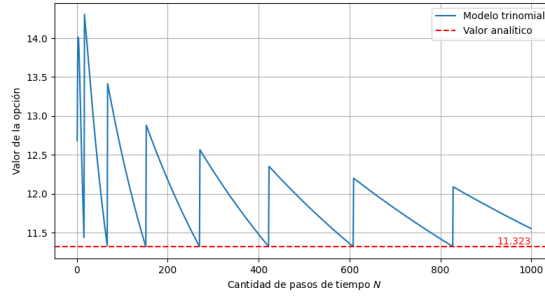


Figura 1: Caso con S_0 alejado de H .

Lo que podemos notar es que, si bien se necesita un relativamente bajo valor de N para alcanzar por primera vez un error pequeño respecto al valor teórico, a medida que incrementamos la cantidad de pasos discretos, la aproximación obtenida presenta un comportamiento inesperado, en el que de a momentos se acerca al valor teórico y de repente tiene un salto, alejándose del mismo. Esto ilustra la convergencia no monótona mencionada anteriormente. Analicemos por qué ocurre este fenómeno.

Definiremos como barrera real (diferenciándola de la barrera de la opción) a la primera fila de nodos del árbol que está por debajo de $\ln(H)$, la barrera de la opción; y usaremos m para denotar la cantidad de pasos de precio descendentes necesaria para llegar a la barrera real. Por ejemplo, en la figura 2, la barrera real está en $\ln(S_0) - 2h$ y tenemos $m = 2$, y en la figura 3, está en $\ln(S_0) - 3h$ y tenemos $m = 3$. En general, para un valor de N para el que se calcula h , la barrera real estará dada por $\ln(S_0) - mh$.

Teniendo en cuenta esta definición, lo que se puede observar en la figura 4 es que a medida que N incrementa, el valor de h se hace cada vez más chico. Esto provoca, como lo muestra la figura 5, que al realizar m pasos de precio descendentes desde el precio inicial del activo y obtener $\ln(S_0) - mh$, este valor se vaya aproximando cada vez más al de la barrera de la opción,

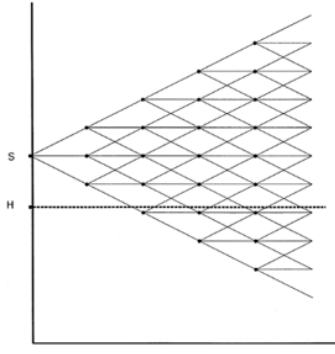


Figura 2: Árbol trinomial con barrera real a dos saltos de precio descendentes.

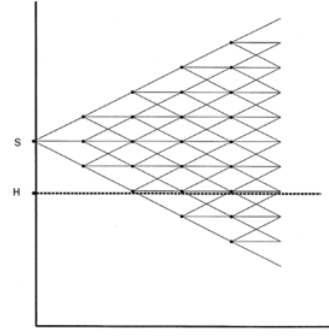


Figura 3: Árbol trinomial con barrera real a tres saltos de precio descendentes.

haciendo a la vez que el valor de la opción calculado por el modelo se acerque cada vez más al valor analítico. Sin embargo, hay puntos en los que incrementar N en una unidad produce que h sea lo suficientemente pequeño como para requerir un paso de precio para abajo extra para activar la barrera, pasando de m a $m + 1$, lo cual trae como consecuencia que la barrera real vuelva a alejarse de la barrera de la opción y la prima calculada se aleje de la prima teórica. Notar que en las figuras 1 y 5, el valor de la opción calculado por el modelo y la barrera real tienen el mismo comportamiento a lo largo de los diferentes N .

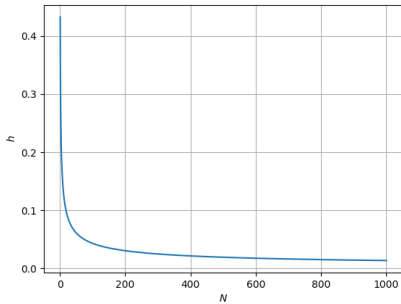


Figura 4: Valor del paso de precio (h) en función de la cantidad de pasos (N).

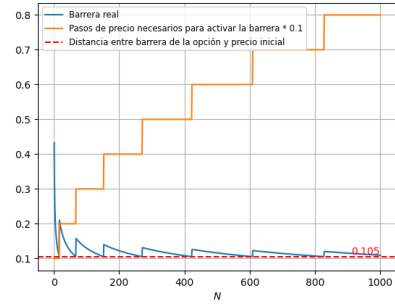


Figura 5: Barrera real y cantidad de pasos necesaria para activar la barrera de la opción en función de la cantidad de pasos (N).

Otro caso interesante para comprobar los problemas que tiene utilizar este modelo para valorar opciones barrera surge al colocar el precio inicial del activo cerca de la barrera. Para verlo, tomamos la misma opción de antes, pero cambiando $S_0 = 91$. El comportamiento que se exhibe en este caso es el siguiente:

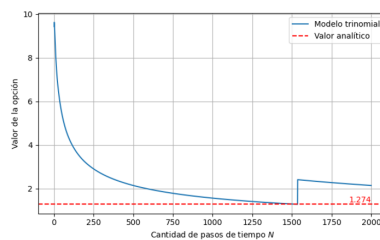


Figura 6: Caso con S_0 próximo a H .

Lo que ocurre aquí es que se necesita un N muy alto para acercarse al valor real de la opción, lo cual requiere de tiempo y cómputo. Esto se debe a que la cantidad de pasos no es lo suficientemente alta como para que h sea lo suficientemente pequeño para que la barrera real se aproxime a la de la opción.

3. El Modelo de Malla Adaptativa (MMA)

El MMA se presenta como una solución a los problemas del árbol trinomial. La idea principal consiste en construir niveles más finos de malla en lugares en donde la precisión es crítica, como en valores cercanos a la barrera, y en el resto de las regiones usar una menos refinada cuyo cómputo es más rápido.

En la siguiente figura se ve gráficamente como luciría el árbol con 1 nivel de refinamiento, dado por los nodos etiquetados con B . Para explicar el algoritmo, tomaremos esta imagen como referencia.

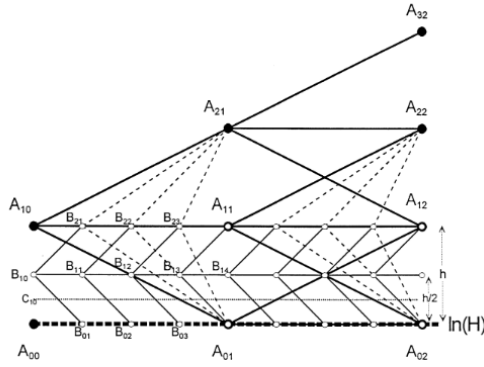


Figura 7: Modelo de malla adaptativa para una opción barrera con un nivel de refinamiento.

Lo que queremos será obtener el valor de la opción en el nodo B_{10} , que se encuentra a una distancia $h/2$ de la barrera de knock-out, es decir en $\ln(H) + h/2$. Dicho esto, el primer paso del algoritmo es construir el árbol trinomial clásico, que será la malla gruesa (los nodos etiquetados con A en la figura 7), y computar los valores de la opción en todos sus nodos. Luego, utilizando esta malla, tomaremos pasos de tiempo cuatro veces más chicos que los anteriores, es decir $k/4$, y al hacer esto, también se divide el paso del precio por dos, obteniendo $h/2$. De esta forma se construye una nueva malla más fina de tres filas (B en la figura), de las cuales la inferior coincide con la barrera (o sea, a altura $\ln(H)$), y la superior con la fila del medio de la malla anterior (en este caso, a altura $\ln(H) + h$). De esta forma, utilizando la malla anterior, se computan los valores en $\ln(H)$ y $\ln(H) + h$, que son los que “anclan” ambas mallas. Finalmente, se calculan los nodos restantes de la malla fina en $\ln(H) + h/2$ en intervalos de tiempo de $k/4$ obteniendo en $t = 0$ el valor de la opción. A continuación, describimos cada paso.

La configuración del primer árbol tiene sus detalles. Como queremos calcular el valor de la opción en B_{10} , necesitamos que este nodo corresponda al precio inicial del activo, es decir $\ln(S_0) = \ln(H) + h/2$. De aquí se desprende que para este árbol inicial necesitamos $h = 2(\ln(S_0) - \ln(H))$, y así el precio inicial del activo para este es $\ln(H) + 2(\ln(S_0) - \ln(H))$. Otra condición que se necesita para esta malla es que $N = T/k$ sea un entero - notar que N ya no es más un parámetro del modelo -, para lo cual en [1] se propone $k = T/\text{int}[(3\sigma^2/h^2)T]$.

Una vez que ya tenemos los valores de la opción en todos los nodos del primer árbol, podemos computarlos en los puntos en donde la malla fina se conecta con la gruesa (fila superior e inferior de la malla fina). Como los nodos de la fila inferior están exactamente sobre la barrera (B_{0j}), todos estos tienen valor 0. Por otro lado, en la fila superior hay nodos que coinciden

exactamente con los de la malla anterior, pero hay otros que no. Sin embargo, estos últimos se calculan a partir de los nodos más cercanos de A en el paso de tiempo más próximo, evaluando las expresiones de p_u , p_m y p_d descritas anteriormente con un paso de precio h y descontando por el tiempo correspondiente ($k/4$, $k/2$ y $3k/4$).

Finalmente, cuando las filas superior e inferior fueron calculadas por completo, se computa la fila del medio, usando las otras dos, y descontando normalmente con p_u , p_m y p_d pero ahora con $k/4$ y $h/2$. Y de esta manera obtenemos el valor de la opción en B_{10} .

En esta descripción del algoritmo, se ha aplicado solo un nivel de malla fina. Sin embargo, es posible aplicar iterativamente hasta M niveles de refinamiento. El procedimiento es análogo, con la diferencia de que el paso de precio en el primer árbol se define como $h = 2^M(\ln(S_0) - \ln(H))$. Es importante señalar que no es posible refinar la malla indefinidamente, ya que estamos limitados por la condición $k = T/\text{int}[(3\sigma^2)/h^2]T$.

Nuestra implementación de este modelo y con el que llevamos a cabo los experimentos descritos en la siguiente sección se puede encontrar en este repositorio.

4. Resultados

Siguiendo el desarrollo del artículo, el cual se concentra en opciones call barrera down-and-out, nuestros experimentos fueron realizados sobre este tipo de opciones. Consideramos entonces un strike $K = 1000$, una barrera $H = 950$, vencimiento $T = 1$, tasa $r = 0.05$, y volatilidad $\sigma = 0.35$. En los distintos ensayos, variamos el precio inicial del activo, empezando con valores que se encuentran más lejos de la barrera, y acercándonos poco a poco.

Los resultados que obtuvimos se ven reflejados en la siguiente tabla. En el modelo trinomial, tomamos como cota superior $N = 2000$, y colocamos el N que da la aproximación más cercana al valor analítico encontrada hasta dicho punto (N óptimo), junto con el valor de la aproximación y el tiempo que tarda llegar hasta ella probando cada valor anterior de N . Con respecto al modelo adaptativo, tomamos desde el mínimo valor de M posible para el S_0 en consideración, y registramos el M que da los mejores resultados en cuanto a aproximación al valor real y el tiempo de cómputo requerido (M óptimo), junto con el valor de la aproximación y el tiempo que tarda llegar hasta ella probando cada valor anterior de M .

S_0	Valor analítico	Modelo Trinomial				Modelo Adaptativo			
		N óptimo	Nodos óptimo	Tiempo	Valor	M óptimo	Nodos óptimo	Tiempo	Valor
1000	54.451	558	312481	35.63	54.479	0	19600	0.01	54.441
980	32.914	380	145161	11.79	32.922	1	10359	0.1	32.915
965	16.555	1497	2244004	748.15	16.557	1	145116	1.52	16.556
958	8.855	2000	4004001	1714.84	14.107	2	126495	18.61	8.855
955	5.541	2000	4004001	1758.59	13.976	2	745542	134.04	5.541
952	2.219	2000	4004001	1751.74	13.844	4	436117	311.95	2.219
951	1.11	2000	4004001	1745.92	13.8	6	1333522	302.14	1.11
950.5	0.555	2000	4004001	1750.01	13.779	7	5314837	311.6	0.555

Cuadro 1: Valores obtenidos con los modelos trinomial y adaptativo comparados con el valor analítico y métricas, variando S_0 .

5. Conclusiones

Los experimentos realizados muestran que ajustar la cantidad M de niveles de refinamiento en el modelo adaptativo es significativamente más rápido en comparación con probar diferentes valores de N en el modelo trinomial. Al utilizar el valor óptimo de M , se computan menos nodos que en el modelo trinomial con su N óptimo, reduciendo en consecuencia el tiempo de cómputo; y se obtiene en general un menor error, destacándose así el AMM en precisión y eficiencia.

Asimismo, se observa que a medida que el precio inicial del activo se acerca a la barrera, el modelo adaptativo requiere un mayor refinamiento, mientras que en el trinomial se necesita una altísima cantidad de pasos de tiempo, para mantener la precisión deseada. En estos casos, las diferencias de desempeño entre ambos modelos se vuelven aún más notorias, favoreciendo al modelo adaptativo, reforzando la ventaja de este en escenarios complejos, donde se requiere un control fino del error en zonas críticas del modelo.

En conclusión, los resultados obtenidos demuestran que el modelo adaptativo es una herramienta potente para la valoración de opciones barrera, especialmente en contextos donde la precisión es crítica, como cuando el precio inicial del activo se sitúa cerca de la barrera. La capacidad del modelo adaptativo para ajustar el refinamiento en zonas clave le otorga una ventaja significativa sobre el modelo trinomial, tanto en términos de velocidad como de precisión.

Referencias

- [1] Figlewski, S., Gao, B.: The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing. *Journal of Financial Economics* **53**(3), 313–351 (1999).
[https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0304-405X\(99\)00024-0](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0304-405X(99)00024-0), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304405X99000240>