Counting

$P(A) = \dfrac{|A|}{\underbrace{|S|}}$ } equally likely outcome → Örnepin bir zar attığınızda veya yazı tura attığınızda bu olayların eşit derecede olası sonuçları olduğunu söylüyoruz

the number of elements " | | " (cardinality) → elementlerin sayısını sayarak buluruz

Coffe example S M L

Filter — S —, M —, L —
Decaf — S —, M —, L —
light — S —, M —, L —

8 ways

in how many ways can you order your coffee?

127 drinks, 4 sizes, ____, (ama mesela opsiyonları böyle verseydi napardık yukarda sayarak hallettik ama bunu sayamayız)

3 types x 3 size = 9//

Bu multiplication principle'dır (Bu yüzden multiplication principle kullanırız)

Multiplication principle

Suppose that we perform r experiments

Suppose that we perform r experiments.
there are n possible outcomes for each experiments

$1 \leq k \leq r$

$1 \rightarrow n_1$
$2 \rightarrow n_2$
$\vdots$
$k \rightarrow n_k$

There are a total of

$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r$

possible outcomes

---

coffe

Kahve örneğinde burda 2 experimentimiz var

1 coffe type $\rightarrow n_1 = 3$
2 size $\rightarrow n_2 = 3$

$n_1 \times n_2$
$3 \times 3 = 8$
$\hookrightarrow$ multiplication principle

Example: Choosing a password

$\rightarrow$ begin with 2 lowercase letters followed by

$\rightarrow$ 1 capital letter followed by

$\rightarrow$ 4 digits

# of total passwords?

a c G 4 3 7 7 ✓

A e g 4 a 3 7 X

Multiplication principle

l l c d d d d

$= 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4$

Sampling

sampling from a set: randomly choosing an element from a set

Samplingde 2 yol vardır

her örneklemeden sonra örneklenen elemanı geri koyduk

(1) with replacement: put the sampled element back

her çizimden sonra her nesneyi geri koyarız

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 2 2

(mesela burda 2'yi seçtim sonra bunu

ürünü yerine koyuyorum ve sampling yaparak

(2) without replacement ; repetition is not allowed

(tekrar 2'yi seçebilirim)

Burda öğeyi geri koymuyoruz

Do not put the sampled obj. back

(2) → {1, 3, 4}

2'yi aldık mesela küme artık 2 içermicek

* Ordering = if ordering matters (order is very important)

$(a_1, a_2, a_3) \neq (a_3, a_2, a_1)$

→ not same in ordered sampling

→ $(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3)$

yani nesnelerin sıralaması aynı olmalı

* Unordered sampling = order is not important

$(a_1, a_2, a_3) = (a_3, a_1, a_2)$

→ unordered samplingte sıraları önemli değil

Sampling

types of sampling

Ordered

Unordered

with replacement
①

with out replacement
②

with replacement
④

with out replacement
③

1→ Ordered sampling with replacement

example: $A=\{1,2,3\}$ draw $k=2$ samples

in how many ways the sampling can be done?

1- (1,2)

2- (1,3)

3- (1,1) → ? ✓ (with replacement)

4- (2,1) → ? ✓

Yes, ordering

$(1,2) \neq (2,1)$

ordered samples

Bu ikisi farklı outcomelardır. order is important

5- (2,2) (with replacement)

6- (2,3)

$\boxed{\text{9 different ways}}$

7- (3,1)

7_ (3,1)

8_ (3,2)

9_ (3,3)

What is the number of possible lists?

n^k where k is number of sampling, n is the number of outcomes

$\{1,2,3\}$ Burdan 1'i aldım aldıktan sonra tekrar yerine koyuyorum çünkü with replacement demiş.

Number of subsets?

$A = \{ - - - \}$ n elements. What is the number of subsets for A?

(Bunu kullanabilir miyiz) → Multiplication principle?

$A = \{1,2\} \rightarrow \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$

↳ 4 different subsets

2^n

Ben burda multiplication principle kullanıyorum

$\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{3}$ - - - - $\underline{n}$

V X V X V X ... V X

$2 \cdot 2 \cdot 2 - - - - 2 = 2^n$

gördüğünüz gibi her eleman için 2 sonuç var

2 tane outcome'ı var alt kümede var ya da yok

n^k n

② Ordered sampling without replacement

* No repetition

ex: $A=\{1,2,3\} \to k=2 \to$ ordered sampling without replacement

$\cancel{(1,1)} \to \{1,2,3\}$ $k=1$ 1 $k=2 <^{2}_{3}$ (without replacement)

$(1,2) \to ✓$

$(1,3) \to ✓$

$(2,1) \to$ ordered $(1,2)$ ✓ $(2,1)$?

$(a_1,a_2) \neq (a_2,a_1)$ Ordered (order is matter)

$\cancel{(2,2)} \to$? without replacement

Bunların ikisi-de farklı

$(2,3) \to ✓$

$(3,1) \to ✓$

6 possible ways

$(3,2) \to ✓$

$\cancel{(3,3)}$

neden 1 tane azalttık çünkü bunlardan biri zaten birinci sırada seçil-miş

k draws n elements

$$\underbrace{n}_{1\,draw} \times \underbrace{(n-1)}_{2\,draw} \times \underbrace{(n-2)}_{3\,draw} \times \_\_\_\_\_ \times \underbrace{(n-k+1)}_{k\,draws} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

formül

k permutation of elements

Example: k people in a class. what is the probability that at least two of them have the same birthday?

minimum

yani

$n = 365$ days

1 person $= \frac{1}{365}$

A = event that 2 people have same birthday

A^c = No two people have the same birthday

Biz bunu hesaplarsak sonuca ulaşırız

$$P(A) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|}$$

$|\Omega| \rightarrow 365^k$

ikinci kişi birinci kişiyle aynı gün doğmamalı

$$\frac{1}{365} \quad \frac{2}{364} \quad \frac{3}{} \_\_\_\_\_ \frac{k^{th}\,person}{365-k+1} \Big\} \frac{n!}{(n-k)!}$$

(yukarda bir kişiyle aynı doğum gününe sahip olsun istemiyorum)

$$P(A) = 1 - \frac{|A^c|}{\Omega} \rightarrow \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k}$$ → Solution

$k > 365$? at least 2 of them are born at same day → Bunu garanti edebilirsin

k 365'ten büyükse bu ne anlama gelir

↓ peagenhole principle

$k = 10$ 10 kişi varmış sınıfta

$$\frac{\frac{365!}{355!}}{365^{10}} =$$

---

③ k-Combinatio : Unordered sampling without replacement

$$\hookrightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

④ Unordered Sampling with replacement

$A = \{1, 2, 3\}$

Bunların ikisi de aynı şey

(1,1) with replace (1,2) = (2,1)

ment

(1,2)

(1,3)

~~(2,1)~~

(2,2)

(2,3)

~~(3,1)~~

~~(3,2)~~ → (2,3) seçildi çünkü

(3,3)

6 possible lists

unordered sampling

$$\begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \end{array}$$

$(1,2,3) = X_1 + X_2 + X_3 = 2 + 0 + 0$

(1,1)

$1 + 1 + 0$

(1,2)

$1 + 0 + 1$

(1,3)

$0 + 2 + 0$

(2,2)

$0 + 1 + 1$

(2,3)

$0 + 0 + 2$

(3,3)

Bunlar seçilen öge sayısını gösteren degişkenlerdir

Buna tablo diyelim burda ne görüyorsun

Bu kaç defa seçileceğini gösterir

Burda olası listelerin sayısını buluyorum

Unordered without replacement

$\binom{n}{k}$

unordered with replacement

k-1 kez geri koymuşum yani

$\binom{n+k-1}{k}$

seçtiğim eleman sayısı

Bu değiştirdiğim elemanlar için

(yukardakinden farklı olarak burda tekrar seçebiliyoruz) seçebiliyorsun

Unordered Sampling with replacement

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Bu ikisi eşit olur

Example: ten passengers get on an airport shuttle, the shuttle route includes 5 hotels, each passenger gets off his hotel

The driver records how many passengers leave the shuttle at each hotel. how many different possible lists?

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

$$k+n-1 = k+n-1$$

$$\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$$

Bunların toplamı 8'e eşit o yüzden eşitler

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

$10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow 10$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & \longrightarrow & 10 \\ 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & \longrightarrow & 10 \end{array} \right.$$

Unordered Sampling with replacement

Bu değiştirilcek kişi sayısını gösterir

$$\binom{5 + 10 - 1}{10} \longrightarrow \text{Solution}$$

otel sayısı