Matris

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m. satır

1. sütun

$m,n \in \mathbb{Z}^+$

$m=n$ ise kare matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esas köşegen

Not: kare matris olmak zorunda.

$n \times n$'lik matris

Matrisin Transpozu

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transpozun Önemli Özellikleri:

1- $(A+B)^T = A^T + B^T$

2- $(kA)^T = k.A^T$

3- $(A^T)^T = A$

4- $(A.B)^T = B^T.A^T$

Matriste çarpma sırası önemlidir. Sonuç değişir.

İz

$iz\,A = a_{11} + a_{22} + a_{33} \ldots a_{nn}$

iz köşegenlerin toplamıdır.

iz → Tr ile de gösterilir.
(Trace)

İz Özellikleri

1 – $iz(A+B) = iz\,A + iz\,B$

2 – $iz(A^T) = iz\,A$ → $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

3 – $iz(k.A) = k.\,iz\,A$

4 – $iz(A.B) = iz(B.A)$!

Birim Matris:

$f(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + \ldots\ldots a_n x^n$

$f(A) = a_0 I + a_1.A + a_2.A^2 + \ldots\ldots a_n.A^n$

Ör:

$f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

$f(A) = 2A^2 - 3A + 5I$

$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad A^2\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix}$

Çözüm: $2.\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -9 & 22 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 16 & -18 \\ -27 & 61 \end{pmatrix}$

$A.B \neq B.A$

$A^0 = I$ → Birim matris

Invertible (non-singular) (tekil olmayan) Matris:

$AB = BA = I$ $\quad$ A bir kare matris

B matrisi bu durumda A matrisinin tersidir. A^{-1} ile gösterilir.

Skaler Matris:

Asal köşegen elemanları (a_{ii}) birbirine eşit olan köşegen matrise skaler matris denir.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ters matrisin özellikleri:

1- $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

2- $(k.A)^{-1} = \frac{1}{k}.A^{-1}$

3- $A^{-1} = \frac{1}{|A|} E.k.A$

4- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

5- $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$

Matrislerin Toplama ve Skaler Çarpım Özellikleri:

1- $A+B = B+A$

2- $A+(B+C) = (A+B)+C$

3- $k_1(A+B) = k_1.A + k_1.B$

4- $(k_1+k_2).A = k_1.A + k_2.A$

5- $(k_1.k_2).A = k_1.(k_2.A)$

Çarpım Özellikleri:

1- $AB = AC$ ise $B=C$ olması gerekmez

2- $AB=0$ ise $A=0$ ya da $B=0$ olması gerekmez

3- $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

4- $(A.B)^T = B^T.A^T$

Kare Matris Tipleri:

Periyodik Matris:

A bir kare matris

$A^{k+1} = A$ ise periyodik matristir.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$1+6-12$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = A^3 = A$

Not: Birim matris bir periyodik matristir.

k = periyot

İdempotent Matris:

A bir kare matris

$A = A^2$ ise idempotent.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ → A idempotenttir.

Not: Birim matris bir idempotent matristir.

Not: İdempotent matrisin rankı iz'ine eşittir.

Nilpotent Matris:

A bir kare matris

$A^2 = 0$ ise nilpotent

$A^2 = I$ ise involut (unipotent)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$A^2 = 0$

Involut Matris:

A bir kare matris

$A^2 = I$ ise involut

$A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Köşegen (Diagonal) Matris:

A bir kare matris köşegen hariç diğer elemanları sıfırsa köşegen matristir.

Determinantı köşegendeki elemanların çarpımına eşittir.

Üçgensel Matris:

A bir kare matris

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

Yine determinant köşegendeki elemanların çarpımına eşittir.

Simetrik Matris:

A bir kare matris

$A = A^T$ ise simetriktir.

Not: $-A = A^T$ ise skew simetrik.

Aynı zamanda hermisyen matristir.

$A = A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}$

Ortogonal Matris:

A bir kare matris

$A.A^T = A^T.A = I$ ise A ortogonal bir matristir.

$A^T = A^{-1}$

$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

Complex Matris:

$z = a + ib$ $\quad \bar{z} = a - ib$

$A = \begin{bmatrix} 2+8i & 5-3i & -4-7i \\ 6i & 1-4i & 3+2i \end{bmatrix}$

$A^H = \begin{bmatrix} 2-8i & -6i \\ 5+3i & 1+4i \\ -4+7i & 3-2i \end{bmatrix}$

Hermitian Matris:

A bir kare matris

$A = A^H$ $\quad A^H = \overline{A^T}$

Not: Simetrik tüm reel matrisler hermisyen matristir. Çünkü reel sayıların aldığımız bütün eşlenikleri kendileri olur.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \overline{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$A^H = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

1- $(A^H)^H = A$

2- $(A \pm B)^H = A^H \pm B^H$

3- $(k.A^H) = \bar{k}.A^H$

4- $(A.B)^H = B^H.A^H$ → sıra önemlidir!

Tüyo: Bir matrisin hermisyen olması için köşegeninde kalan tüm elemanların reel sayı olması lazım. Ve köşegenin iki tarafında kalanlarda birbirinin eşleniği olmalıdır.

Eşelon Form:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

1- İki satır değiştirilebilir (yer değiştirme)
2- Bir satırı bir sayıyla çarpabiliriz.
3- Bir satıra başka bir satırı ekleyebiliriz.

Eşelon Matris Olma Şartları:

- Tamamen 0'dan oluşan satır veya satırlar en aşağıda olmalıdır.
- Her satırın 0'dan farklı ilk elemanı 1 olmalıdır.
- Her satırda sıfırdan farklı 1 olan ilk elemanın altında kalan tüm elemanlar sıfır olmalıdır.
- 1'ler pivot olarak isimlendirilir.

İndirgenmiş Eşelon Matris Olma Şartları:

- Eşelon matristen tek farkı pivot olan 1'lerin üstü de 0 olmak zorunda.

Ör:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}3&3&6&-9\\2&3&0&-2\\0&0&1&2\end{array}\right)\qquad C=B_{\frac{1}{3}r_1\to r_1}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-3\\2&3&0&-2\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D=C_{-2r_1+r_2\to r_2}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-3\\0&1&-4&4\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

$$E=D_{\substack{4r_3+r_2\to r_2\\-2r_3+r_1\to r_1}}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-7\\0&1&0&12\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

$$F=E_{-r_2+r_1\to r_1}\quad\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-19\\0&1&0&12\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

Çarpma Şartı

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times k}=C_{m\times k}$$

Matrislerin Tersini Bulma:

$$[A \mid I]\longrightarrow[I \mid A^{-1}]$$

A: tersi alınacak matris
I: birim matris
I: birim matris yaparsak
A^{-1}: matrisin tersi oluşur.

* Sadece kare matrislerin tersi vardır.

* Her kare matrisin tersi olmayabilir. (Bir satır tamamen 000 olursa tersi olmaz.)

2x2 matrisin tersi

Soru: $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ tersini bulun.

0 olmalıdır!
3. olarak bu sıfır yapılmalı
1. olarak bu sıfır yapılmalı
2. olarak köşegenler 1 yapılmalı

1. Adım
$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-3r_1+r_2\to r_2}$$

2. Adım
$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right]$$

3. Adım $-\frac{1}{2}r_2\to r_2$
$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&3/2&-1/2\end{array}\right]$$

4. Adım $-2r_2+r_1\to r_1$
$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&3/2&-1/2\end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}}_{I}\quad\underbrace{\begin{matrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{matrix}}_{A^{-1}}$$

3x3 matrisin tersi:

Soru: $A=\begin{bmatrix}3&3&6\\2&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

1. olarak 0 yapılmalı (1. satır)
2. olarak 0 yapılmalı (2. satır)
3. olarak köşegendekiler 1 yapılmalı
4. olarak 0 yapılmalı (3. satır)
5. olarak 0 yapılmalı (2. satır)

1. Adım
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&6&1&0&0\\2&3&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-2r_1+3r_2\to r_2}$$

2. Adım
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}3&3&6&1&0&0\\0&3&-12&-2&3&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

3. Adım $r_1/3\to r_1$, $r_2/3\to r_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&2&1/3&0&0\\0&1&-4&-2/3&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

4. Adım $4r_3+r_2\to r_2$, $-2r_3+r_1\to r_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1/3&0&-2\\0&1&0&-2/3&1&4\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

5. Adım $r_1-r_2\to r_1$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-1&-6\\0&1&0&-2/3&1&4\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

A^{-1}

Determinant:

* Sadece kare matrislerde hesaplanan sabit bir değerdir.

* Determinant bir sayıya eşit çıkar.

* Denklem sistemlerinin çözülüp çözülemeyeceği bilgisini verir.

* Tersinin varlığı hakkında bilgi verir.

$$\det(A)=|A|$$

1x1 matrisin determinantı:

kendisine eşittir.

Ör: $A=[5]$ ise $\det A=5$

2x2 matrisin determinantı:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\qquad\boxed{\det A=ad-bc}$$

3x3 matrisin determinantı:

Sarrus Yöntemi:

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{bmatrix}\longrightarrow\det\quad\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}$$

$$(a.e.k+d.h.c+g.b.f)-(c.e.g+f.h.a+k.b.d)$$

Not: Bir matrisin det'i 0 ise tersi yoktur!

4x4, 5x5, 6x6 .... kare matrislerin determinantı:

Kofaktörler ile determinant hesaplama:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&-2&1\\4&5&6\end{bmatrix}$$

$A_{3x3}\to$ matris

$A_{21}\to a_{21}$ elemanının kofaktörü (2. satır, 1. sütun)

A_{21} = 2. satır 1. sütundaki elemanın kofaktörü

$$\boxed{A_{mn}=(-1)^{m+n}\cdot\left|\begin{matrix}\text{m. satır}\\\text{n. sütun}\\\text{atıldıktan}\\\text{sonra}\\\text{kalan kısım}\end{matrix}\right|}$$

→ Minör

Ör: $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&-2&1\\4&5&6\end{bmatrix}$ ise $A_{31}=?$

$$(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&3\\-2&1\end{vmatrix}=1.(2)-(-6)$$
$$=8$$

- İstenilen satır veya sütun seçilir.
- İşlem kolaylığı açısından bol sıfırlı olanlar seçilmeli.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\Rightarrow$$

Kofaktör ile det hesaplama formülü:

$$\boxed{\det=a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+a_{13}.A_{13}}$$

Ör: $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&-3&2\\0&1&4\end{bmatrix}$ $\det A=?$

$$\det=1.A_{11}+1.A_{21}+0$$
$$\quad\;\; -14 \quad\;\; -8 \;=-22$$

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-3&2\\1&4\end{vmatrix}=1.((-12)-(2))=-14$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&0\\1&4\end{vmatrix}=-1.((8)-0)=-8$$

Bir Matrisin Tersinin Varolma Şartları

1- Matris kare matris olmalıdır.
2- Determinantı sıfırdan farklı olmalıdır.

$\det A=0$ ise singular yani tekil matristir.
$\det A\neq 0$ ise non-singular yani tekil olmayan matristir.

$$\begin{bmatrix}5&0&0\\0&3&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

Bir köşegen matriste köşegen üzerindeki elemanlar aynı ise skaler matris denir.

Not: Bir matrisin tersi varsa tektir.

Matrisin Rankı:

Tanım: Eşelon formda iken pivot sayısı o matrisin rankını verir.

* rank=3
- satır uzayının bazının boyutu=3
- sütun uzayının bazının boyutu=3

Determinant Özellikleri:

1- Herhangi satır veya sütun sıfırsa determinant sıfırdır.

2- Bir determinantın bir satırındaki veya sütunundaki elemanlar k ile çarpılırsa determinant k ile çarpılmış olur.

3- Determinantta satır veya sütun yer değiştirirse determinant işaret değiştirmiş olur.

4*- Bir determinantın herhangi bir satır ya da sütunu k ile çarpılıp başka bir satır ya da sütuna (satırsa satıra, sütunsa sütuna) eklenirse determinantın değeri değişmez.

$$\left|\begin{matrix} 2010 & 2011 \\ 2012 & 2013 \end{matrix}\right| \overset{H_{2,1}(-1)}{=} \left|\begin{matrix} 2010 & 2011 \\ 2 & 2 \end{matrix}\right|$$

Determinant değişmedi.

5- Bir determinantın herhangi iki satırı ya da sütunu birbirine eşitse veya katı ise determinantın değeri sıfırdır. !

6- Bir determinantın herhangi bir satır ya da sütun elemanlarının başka bir satır ya da sütun elemanlarının eş çarpımlarıyla çarpılarak elde edilen terimlerinin toplamı sıfırdır.

$$a_{t_1} A_{r_1} + a_{t_2} A_{r_2} + \ldots\ldots + a_{t_n} A_{r_n} = 0$$

7- $|A| = |A^T|$ 8- $|A.B| = |A|.|B|$

9- Köşegen matris, alt üçgen matris ve üst üçgen matriste determinant köşegendeki elemanların çarpımına eşittir.

10- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ 11- $\det(A^n) = (\det A)^n$ 12- $\det(k.A) = k^{\text{satır sayısı}}.\det A$

Elementer Matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad S_1 \Longleftrightarrow S_2 \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1.A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Satır işlemlerini birim matrislere uyguladığımızda ortaya çıkan matrisler elementer matrislerdir.

Elementer Matrislerin Tersini Bulma

1. tip: 2 satırın yer değiştirmesi ile oluşan elementer matrisin tersi kendisidir.

2. tip: Bir satırın bir sayı ile çarpılmasıyla oluşan elementer matrisin tersi çarpılmış satırdaki elemanın çarpmaya göre tersidir.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow E_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. tip: Bir satırı bir sayı ile çarpıp diğer bir satıra eklenmesiyle oluşan elementer matrisin tersi işlem yapılmış satırdaki yeni elemanın ters işaretlisidir.

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} a+x & b & c \\ d+y & e & f \\ g+z & h & k \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix} x & b & c \\ y & e & f \\ z & h & k \end{matrix}\right|$$

kullanışlı bir determinant özelliği

Soru: $\det A = 3$ $\quad \det B = 5$

$A \Rightarrow 3\times3$

$B \Rightarrow 3\times3$

a) $\det(A.B) = ? \longrightarrow 3.5 = 15$

b) $\det(A^{-1}) = ? \longrightarrow \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{3}$

c) $\det(B^T) = ? \rightarrow \det B = 5$

d) $\det(A^4) = ? \rightarrow (\det A)^4 = 81$

e) $\det(2A) = ? \rightarrow 2^3.3 = 24$

Ek Matrisler (Adjoint Matris):

Ek Matris Yardımıyla Ters Matris Bulma:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\text{Ek}(A)$$

* Sadece kare matrislerin ek matrisi vardır.

* Kofaktörlerin oluşturduğu matrisin transpozu (devriği) ek matrisi verir.

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ \vdots & & \\ \vdots & \cdots & \end{bmatrix} \qquad \text{Ek}(A) = [\text{cof}(A)]^T$$

$\text{Adj}(A) =$ "

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{Ek}A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Bilgi: Minör, kofaktör hesaplanırken $(-1)^n$'in olmadığı kısımdır. M_{ij} ile gösterilir.

Bilgi2: Bir matrisin determinantı 0 çıkarsa o matrisin tersi yoktur.

Ek Matrislere Ait Özellikler:

A matrisi $n\times n$ bir matris olsun.

1. $A.\text{Ek}(A) = \text{Ek}(A).A = \det A.I_{n\times n}$ $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.\text{Ek}A$
2. $\det(\text{Ek}(A)) = (\det A)^{n-1}$ → Ek matristen orijinal matrisi bulma formülleri
3. $\text{Ek}(\text{Ek}(A)) = (\det A)^{n-2}.A$
4. $\text{Ek}(A.B) = \text{Ek}(B).\text{Ek}(A)$

Lineer Denklem Sistemleri ve Matrisler ile Gösterimi

– Bütün bilinmeyenler 1. dereceden olmalı ve birbirleriyle çarpım durumunda olmamalıdır.

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ x + 4y &= 8 \end{aligned} \Longrightarrow \overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}} \cdot \overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix}} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

Katsayılar matrisi · Bilinmeyenler matrisi · Sonuçlar matrisi

$\boxed{\text{pivot sayısı} = \text{gerçek denklem sayısı}}$

Homojen Lineer Denklem Sistemleri

$\boxed{Ax=0}$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Sonuçlarda 0 harici bir şey olması onu homojen olmayan denklem sistemi yapar.

* Homojen lineer denklem sistemlerinde her zaman çözüm vardır. Bu nedenle tutarlıdır.
* Homojen lineer denklem sistemleri her zaman için sıfır çözümüne sahiptir. Yani eğer tek çözümü var ise o sıfırlı çözümdür (trivial solution). Bu nedenle h.l.d.s'nin çözümsüz olması mümkün değildir.
* Sonsuz çözüme sahipse 0'ın dışında ek çözümleri de var demektir.

Sıfır çözüm = aşikar çözüm

* Denklem sayısı = n
  Bilinmeyen sayısı = m

1-) m>n ise kesinlikle sonsuz çözüm vardır.

2-) m=n ise sonsuz çözüm ya da tek çözüm ikisi de olasıdır.

3-) m<n ise sonsuz çözüm ya da tek çözüm ikisi de olasıdır.

1) Tek çözüm çıkması durumu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \cdot & \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{array}\right]$$

Sıfır harici her sayı olur. Herşey olabilir.

Tutarlı denklem sistemleri

2) Sonsuz çözüm

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

En alt satırın hepsi 0 ise sonsuz çözüm vardır.

3) Çözüm yok → tutarlı olmayan denklem sistemleri

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Bu bölüm 0 → 0 olmaması gerekir.

Not: Pivot bulunan sütunlar temel değişkeni, bulunmayan sütunlar serbest değişkeni ifade eder.

Not2: Her sütunda pivot varsa tek çözüm vardır.

Denklem sayısı ≠ bilinmeyen sayısı

1. yöntem: Satırca eşelon form yardımıyla
2. yöntem: Satırca indirgenmiş eşelon formla

Denklem sayısı = bilinmeyen sayısı

1. yöntem: Gauss Yok Etme methodu
2. yöntem: Gauss Jordan Yok Etme methodu
3. yöntem: Cramer Methodu
4. yöntem: A^{-1} yardımıyla çözme methodu
5. yöntem: Satırca eşelon formla
6. yöntem: Satırca indirgenmiş eşelon formla

Gauss Yok Etme Metodu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \diagdown & a & b & x_1 \\ 0 & \diagdown & c & x_2 \\ 0 & 0 & \diagdown & x_3 \end{array}\right]$$

Gauss Jordan Yok Etme Metodu

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

Konuyu anlama sorusu

Soru:
$$ax+by=0$$
$$cx+dy=0$$
$$ex+fy=0$$
şeklinde homojen lineer denklem sistemi veriliyor. Bu denklem sisteminin;

a) Sadece sıfır çözümü (trivial solution) olması için a,b,c,d,e,f arasında nasıl bir ilişki bulunmalıdır?

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (e ve f herşey olabilir)

$\frac{a}{e} \neq \frac{b}{f}$ (c ve d her şey olabilir)

$\frac{c}{e} \neq \frac{d}{f}$ (a ve b her şey olabilir)

En az 2 denklem farklı olsun ki iki sütunda da bir pivot olsun.

b) Sıfır olmayan çözüme (nontrivial solution) sahip olması için a,b,c,d,e,f arasında nasıl bir ilişki bulunmalıdır?

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ olursa sonsuz çözüm olur yani sadece bir pivot var ve tek denklem var.

Soru: A, B ve C matrisleri 4x4 boyutlarına sahip kare matrisler ve $\det A = -2$, $\det B = 2$, $\det C = -1$ dir. Buna göre $\det\left(-(B^T)^2 . A^3 . (B^{-1})^2 . A^{-1} . (C^{-1})^T\right)$ bulunuz.

katsayı

satır sayısı

$$= (-1)^4 . B^2 . A^3 . B^{-2} . A^{-1} . C^{-1}$$

$$= 1 . \cancel{4} . -\cancel{8}^{4} . \frac{1}{\cancel{4}} . \frac{-1}{\cancel{2}} . -1 = -4$$

Cramer Metodu

* Bilinmeyen sayısı = denklem sayısı olduğunda uygulanabilir.

1. Adım $A.x = b$ formatında yazmalıyız.

$$x - 3y = 5$$
$$x + y = 6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Adım

$$x = \frac{|\Delta x|}{|A|} \qquad y = \frac{|\Delta y|}{|A|}$$

Deltalar bilinmeyenin sütununa sonuçların yazılıp det hesaplanmasıyla bulunur.

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Ters Matris Yardımıyla Lineer Denklem Sistemlerini Çözme

* Denklem sayısı = bilinmeyen sayısı olduğunda uygulanabilir.

1. Adım $A . x = b$ formatında yazılır.

2. Adım A^{-1} bulunur.

3. Adım $A^{-1} . A . x = A^{-1} . B$

$\boxed{x = A^{-1} . B}$ bulunur.

Soru: $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ olduğuna göre, $A^4 + 4A^3 = A^2 . B . A$ eşitliğini sağlayan A matrisi nedir?

önce soldan çarptık

$$A^{-2} A^4 + 4 A^{-2} A^3 = A^{-2} A^2 . B . A \longrightarrow I_2 . A^2 + 4 . I_2 . A = I^2 . B . A$$

Sağdan çarptık

$$A^2 A^{-1} + 4 A A^{-1} = B . A A^{-1}$$

$$A + 4I = B$$

$$A = B - 4I \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soru: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ A'dan B'ye ulaşmak için gerekli elementer matrisi bulunuz.

$H_{21}(-2)$ işlemi uygulanmıştır. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olur.

Soru: A ortagonal bir matris olmak üzere, A'nın det'inin 1 veya -1 olması gerektiğini hesaplayınız.

$A . A^T = I \qquad \det(A . A^T) = \det I \qquad \det A . \det A^T = \det I$

$(\det A)^2 = 1 \qquad \det A = 1 \qquad \det A = -1$

Not: Bir homojen lineer denklem sisteminde sonsuz çözüm çıkması için determinantının 0 çıkması lazım. Yani rankı az çıkacak!