VEKTÖRLER ve UYGULAMALARI

Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

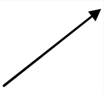
M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Vektör

Skaler denilince, yön ifade etmeyen fiziksel büyüklükler anlaşılır. Uzunluk, alan, hacim, zaman, sıcaklık gibi bir çok fiziksel değeri, sadece bir sayı ile ifade edebiliriz. Fakat, vektör denilince büyüklüğün yanında, yön de anlaşılır. Bu bölümde vektör kavramı üzerinde duracağız.

Tanım

Vektör en basit tanımıyla, doğrultuları, yönleri ve uzunlukları aynı olan, yönlü doğru parçalarını temsil eden bir yönlü doğru parçasına verilen isimdir. En genel anlamda ise, bir vektör uzayının her elemanına bir **vektör** denir. Bu tanımı daha iyi anlayabilmek için, **vektör uzayı** tanımına ihtiyacımız var. Bu tanıma göre bir matrise, hatta bir fonksiyona dahi bir vektör olarak bakılabilir. Bu tanımı sayfa 100'de vereceğiz. Fakat üzerinde fazla durmayacağız, bu kitapta, daha çok klasik vektör tanımı kullanılacaktır.



Bir Vektörün Uzunluğu (Normu)

Tanım

Başlangıç noktası A ve bitiş noktası B olan bir vektörü, $\overrightarrow{AB}$ biçiminde yazarız. $|AB|$ ise A ile B arasındaki uzaklığı göstersin. $|AB|$ değerine de, $\overrightarrow{AB}$ **vektörünün uzunluğu** denir. Özel olarak, başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yönlü doğru parçalarını temsil eden vektöre **sıfır vektörü** denir ve $\overrightarrow{\mathbf{0}}$ ile gösterilir. Vektörleri, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ şeklinde başlangıç ve bitiş noktasını belirtilerek gösterdiğimiz gibi, kısaca $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}$, $\overrightarrow{\mathbf{w}}$ şeklinde harflerle de gösterebiliriz. Bir $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasını temsil eden vektör $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün uzunluğu

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|$$

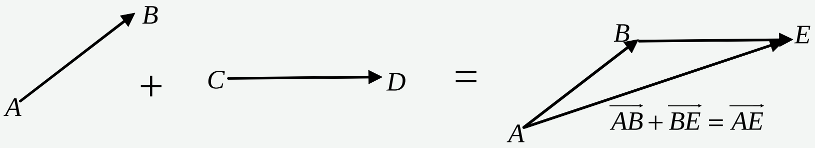
ile gösterilir ve bu uzunluğa $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ **vektörünün normu** denilir. Vektörlerde uzunluk $\|...\|$ simgesiyle gösterilir.

Vektörlerde İşlemler : İki Vektörün Toplamı

Bir vektör uzayı denilince, öncelikle iki işleme ihtiyacımız var. Birincisi, vektörlerde toplama işlemi, diğeri ise, bir vektörün bir skalerle çarpımı işlemi. Bu iki işlemin, vektörlerde koordinat ekseninden bağımsız olarak nasıl yapıldığını kısaca hatırlayalım.

Tanım

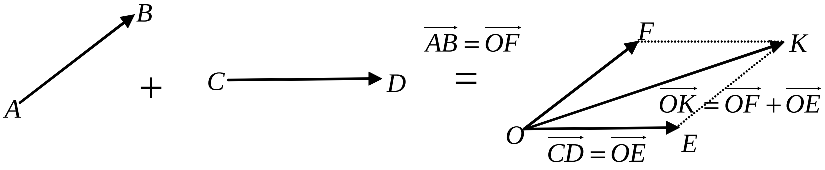
(I) İki vektörün toplanması : İki $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörü verilsin. $\overrightarrow{CD}$ ye eş olan başlangıç noktası B olan bir vektör $\overrightarrow{BE}$ ise, $\overrightarrow{AE}$ vektörüne $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ **vektörlerinin toplamı** denir.



ki Vektrn Toplanması

Paralelkenar Yöntemi

Verilen iki $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörünü, paralelkenar yöntemi olarak adlandırdığımız aşağıdaki yöntemle de toplayabiliriz. Bunun için, sabit bir O noktası alıp, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörlerine eş olacak şekilde, başlangıç noktaları O olan vektörler çizeriz. Bu iki vektörü, paralelkenara tamamlayarak, O noktasından geçen köşegen vektörü çizerek, $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ vektörlerinin toplamını buluruz. Bu yönteme, **paralelkenar yöntemi** denir.



Paralelkenar Yntemiyle ki Vektrn Toplanması

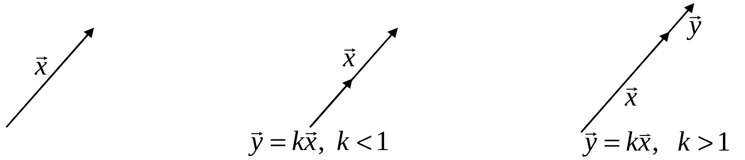
Bir Vektörün Bir Reel Sayıyla Çarpılması

Tanım

(II) Bir vektörün bir reel sayı ile çarpılması : $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ bir vektör ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. $k\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü, taşıyıcısı $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü ile aynı, yönü ise k 'nın işaretine göre $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ile aynı veya zıt yönde olan bir vektör belirtir. $k\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün uzunluğu da $|k| \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|$'dır. Bir $\overrightarrow{AB}$ vektörü için,

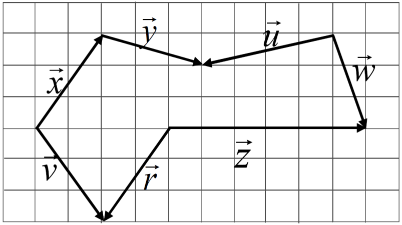
$$0 \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{0}}, \quad 1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \quad ve \quad (-1)\,\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

şeklindedir.



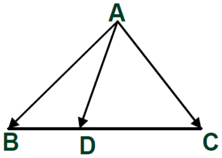
Örnek

Aşağıdaki şekilde 7 vektörün arasında bir işlem verilmiştir. Bu vektörler arasında nasıl bir ilişki vardır?



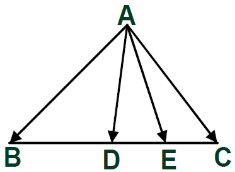
Örnek

Bir ABC üçgeninde, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ ve $5\,|BD| = 4\,|DC|$ ise $\overrightarrow{AD}$ vektörünün $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{v}$ cisinden ifadesini bulunuz.



Örnek

Bir ABC üçgeninde, $|BD| = 2\,|DE| = 2\,|EC|$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{y}$ ise $\overrightarrow{BC}$ vektörünü $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ cinsinden bulunuz.



Problem

ABC üçgeninin kenarları üzerinde, $|AE| = 3|EC|$, $|CF| = 3|FB|$ *ve* $|BD| = 3|DA|$ *olacak şekilde,* F, E, D *noktaları alınıyor. Üçgenin bulunduğu düzlemdeki herhangi bir nokta P olsun,* $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ise* $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}$ *toplamını* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörü cinsinden bulunuz.*

Vektörlerde toplama işleminin aşağıdaki özellikleri vardır.

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleri için,

VT1) Kapalılık özelliği vardır. (İki vektörün toplamı da bir vektördür.)

VT2) Birleşme özelliği vardır. $(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} + (\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}})$.

VT3) $\vec{\mathbf{0}}$ vektörü etkisiz elemandır. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$.

VT4) Her $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün tersi vardır ve tersi $-\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörüdür.

VT5) Değişme özelliği vardır. $\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}$.

Bu işlemlere göre, vektörler kümesi toplama işlemine göre bir değişmeli grup[1] oluştur.

Bir vektörün bir Skalerle Çarpılması işleminin aşağıdaki özellikleri vardır.

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektör ve $k, m \in \mathbb{R}$ olsun.

SÇ1) $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektör ise, $k\overrightarrow{\mathbf{x}}$ yine bir vektördür.

SÇ2) $k(\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}) = k\overrightarrow{\mathbf{x}} + k\overrightarrow{\mathbf{y}}$

SÇ3) $(k+m)\overrightarrow{\mathbf{x}} = k\overrightarrow{\mathbf{x}} + m\overrightarrow{\mathbf{x}}$

SÇ4) $k(m\overrightarrow{\mathbf{x}}) = (km)\overrightarrow{\mathbf{x}}$

SÇ5) $1 \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}}$

[1]**Grup :** Bir G kümesi üzerinde tanımlı olan bir "*" ikili işleminin, birleşme özelliği varsa, G kümesi birim elemana sahipse ve G kümesinde her elemanın tersi bulunuyorsa, G kümesine, bu ikili işlemle birlikte bir grup denir. (G,*) grubu olarak ifade edilir. Ayrıca, değişme özelliği de sağlanıyorsa değişmeli grup olur.

Vektör Uzayı

Tanım

Bir $\mathbb{V}$ kümesi üzerinde, $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ için, $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ şeklinde gösterilen bir **Toplama** işlemi ile, $a \in \mathbb{R}$ için $a\overrightarrow{\mathbf{u}}$ şeklinde **Skalerle Çarpma** işlemleri tanımlanmış olsun. $\mathbb{V}$ kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorlarsa, bu işlemlerle birlikte $\mathbb{V}$ uzayına bir **reel vektör uzayı** denir.

VT1. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ için, $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ (Kapalılık Özelliği)

VT2. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}$ için, $(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}) + \overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + (\overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}})$ (Birleşme Özelliği)

VT3. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ için $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}$ olacak şekilde bir $\vec{\mathbf{0}} \in \mathbb{V}$ vardır. (Birim Eleman)

VT4. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ için $\overrightarrow{\mathbf{u}} + (-\overrightarrow{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$ olacak biçimde $-\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ vardır. (Ters Eleman)

VT5. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ için, $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{u}}$ eşitliği sağlanır. (Değişme Özelliği)

SÇ1. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ ve $c \in \mathbb{R}$ için, $c\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$. (Skalerle Çarpmaya Göre Kapalılık)

SÇ2. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ ve $c \in \mathbb{R}$ için, $c(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}) = c\overrightarrow{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\overrightarrow{\mathbf{v}}$. (Dağılma Özelliği 1)

SÇ3. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için, $(a + b)\overrightarrow{\mathbf{u}} = a\overrightarrow{\mathbf{u}} + b\overrightarrow{\mathbf{u}}$. (Dağılma Özelliği 2)

SÇ4. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için, $(ab)\overrightarrow{\mathbf{u}} = a(b\overrightarrow{\mathbf{u}})$. (Skalerlerin Çarpımı)

SÇ5. Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ için, $1\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{u}}$. (Skalerle Çarpma İşlemine Göre Birim Eleman)

Bu özellikleri sağlayan $\mathbb{V}$ kümesinin elemanlarına **vektör**, $\mathbb{R}$ kümesinin elemanlarına da **skaler** denir.

Vektör Uzayı Örnekleri

Örnek

Yukarıda tanımladığımız, $\mathbb{R}^n$ uzayındaki yönlü oklarla gösterilen vektör kümesi, üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpım işlemine göre en aşikar vektör uzayıdır.

Örnek

Komleks Sayı Uzayı :

$\mathbb{C} = \{\mathbf{z} = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ kompleks sayılar kümesi, üzerinde tanımlanan

i. Toplama : $\mathbf{z} = a + ib$ ve $\mathbf{w} = c + id$ için,

$\mathbf{z} + \mathbf{w} = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$,

ii. Skalerle çarpma : $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{z} = a + ib$ için, $\lambda\mathbf{z} = \lambda + \lambda bi$,

işlemleriyle birlikte $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır. Yukarıdaki, 10 özelliğin sağladığı kolayca görülebilir. Buna göre, vektör uzayının elemanlarına vektör dediğimiz için, her kompleks sayı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar vektör uzayındaki bir vektör olarak düşünülebilir.

Vektör Uzayı Örnekleri : Matris Uzayı

Örnek

Matris Uzaylarına Bir Örnek :

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

matris kümesini göz önüne alalım. Bu küme üzerinde tanımlanan, matrislerde toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte, $\mathbb{M}_{2\times 2}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya, $\mathbb{R}$ üzerinde 2×2 türünden reeel matrisler uzayı denir. Buna göre, her 2×2 reel matris, bu vektör uzayında bir vektördür. Diğer yandan,

$$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{C} \right\}$$

kümesi de, yine bir vektör uzayıdır. Bu uzaya da, $\mathbb{C}$ sayılar kümesi üzerinde 2×2 matris uzayı denilir.

Vektör Uzayı Örnekleri : Polinom Uzayı

Örnek

Polinom Uzaylarına Bir Örnek :
$\mathbb{P}_3 = \{P(x) : \ \mathit{der}P(x) \leq 3\}$ biçiminde tanımlanan, derecesi en fazla 3 olan polinomların kümesi, polinomlarda toplama ve bir polinomun skalerle çarpımı işlemlerine göre, yukarıdaki 10 özelliği sağladığından, bir vektör uzayıdır. Bu uzaya, üçüncü dereceden polinomlar uzayı denir. Bu uzayın vektörleri de,

$$P(x) = x^3 - 2x^2 \qquad \text{ve} \qquad Q(x) = x^2 - 5x + 1$$

gibi polinomlardır.

$$R(x) = x^4 + x + 1$$

bu uzayın bir elemanı olmadığından, bu uzayın bir vektörü değildir.

Örnek

Fonksiyon Uzaylarına Bir Örnek :

$\mathbb{V}$ bir $\mathcal{F}$ kümesi üzerinde bir vektör uzayı olsun, A herhangi bir küme olmak üzere,

$$g : A \to \mathbb{V}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar kümesini $\mathbb{F}$ ile gösterelim. $h, g \in \mathbb{F}$, $x \in A$ ve $c \in \mathcal{F}$ olmak üzere, $\mathbb{F}$ kümesi üzerinde tanımlanan

$$(h+g)(x) = h(x) + g(x),$$
$$(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$$

toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle birlikte $\mathcal{F}$ kümesi üzerinde bir vektör uzayıdır.

Tanım

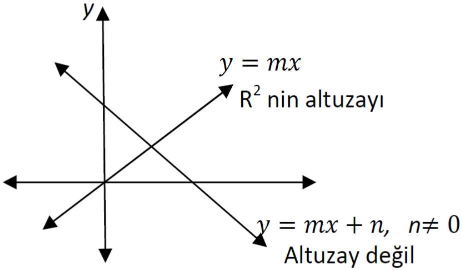
Alt Vektör Uzayı

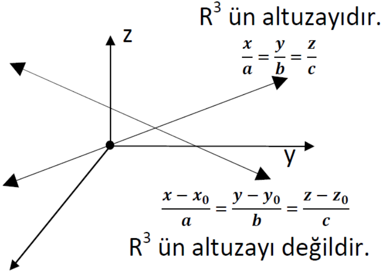
$\mathbb{V}$ bir reel vektör uzayı olmak üzere, $\mathbb{V}$ kümesinin boş kümeden farklı bir $\mathbb{W}$ altkümesi verilsin. $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{W}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

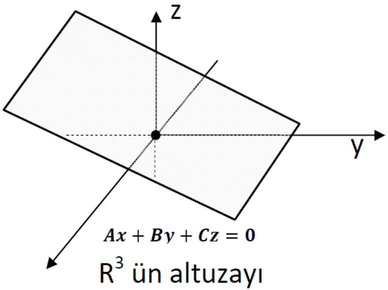
$$\overrightarrow{\mathbf{u}} + c\,\overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{W}$$

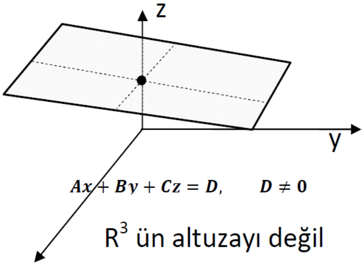
ise, $\mathbb{W}$ kümesine, $\mathbb{V}$ uzayının bir alt uzayı denir. Bu tanıma göre, $\mathbb{V}$ uzayının etkisiz elemanı olan $\vec{0}$ vektörü de, $\mathbb{W}$ uzayının bir elemanı olmalıdır.

- Orjinden geçen tüm doğrular, $\mathbb{R}^2$ uzayının birer altuzayıdır.
- Orjinden geçmeyen doğrular, $\mathbb{R}^2$ uzayının altuzayı değildir.
- Orjinden geçen tüm doğrular, $\mathbb{R}^3$ uzayının birer altuzayıdır.
- Orjinden geçen tüm düzlemler, $\mathbb{R}^3$ uzayının birer altuzayıdır.
- Orjinden geçmeyen doğrular ve düzlemler, $\mathbb{R}^3$ uzayının altuzayı olamaz.
- $\mathbb{R}^2$ uzayı, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir altuzayı değildir. Çünkü, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ kümesinin bir altkümesi değildir.
- n bilinmeyenli, $AX = 0$ homojen denklem sisteminin çözüm kümesi, daima $\mathbb{R}^n$ uzayının bir altuzayıdır.
- n bilinmeyenli, $AX = B$ lineer denklem sisteminin çözüm kümesi, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir altuzayı


y
$y = mx$
R^2 nin altuzayı
$y = mx + n, \quad n \neq 0$
Altuzay değil


R^3 ün altuzayıdır.
z
$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$
y
$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$
R^3 ün altuzayı değildir.


z
y
$Ax + By + Cz = 0$
R^3 ün altuzayı


z
y
$Ax + By + Cz = D, \qquad D \neq 0$
R^3 ün altuzayı değil

Örnek

a)

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) : 2x + 3y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

$\mathbb{R}^3$ **uzayının bir altuzayıdır.**

b)

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) : 2x + 3y + z = 3,\ x, y, z \in \mathbb{R}\},$$

$\mathbb{R}^3$ **uzayının bir altuzayı değildir.**

c)

$$\mathbb{W} = \{(x, y) : 2x + 3y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\},$$

$\mathbb{R}^2$ **uzayının bir altuzayıdır.**

d)

$$\mathbb{W} = \left\{(x, y, z) : \frac{x}{2} = y = z,\ \ x, y, z \in \mathbb{R}\right\},$$

$\mathbb{R}^3$ **uzayının bir altuzayıdır.**

Örnek

$\mathbb{W} = \{(x, y) : x - 3y = 0,\ x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesinin, $\mathbb{R}^2$ uzayının bir altuzayı olduğunu gösteriniz.

Örnek

$\mathbb{W} = \{(3t+2, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ **kümesinin,** $\mathbb{R}^2$ **uzayının bir alt vektör uzayı olmadığını gösteriniz.**

Örnek

$\mathbb{W}=\left\{\begin{bmatrix}3k & 0\\ t & 2t\end{bmatrix} : t,k\in\mathbb{R}\right\}$ **kümesinin** $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ **matris uzayının bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.**

Çözüm

$A = \begin{bmatrix} 3k_1 & 0 \\ t_1 & 2t_1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3k_2 & 0 \\ t_2 & 2t_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $A + cB \in \mathbb{W}$ olduğunu göstereceğiz.

$$A + cB = \begin{bmatrix} 3k_1 & 0 \\ t_1 & 2t_1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3k_2 & 0 \\ t_2 & 2t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k_1 + 3ck_2 & 0 \\ t_1 + ct_2 & 2t_1 + 2ct_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğinde, $t_1 + ct_2 = t$ ve $k_1 + ck_2 = k$ denilirse,

$$A + cB = \begin{bmatrix} 3k & 0 \\ t & 2t \end{bmatrix} \in \mathbb{W}$$

elde edilir.

Problem

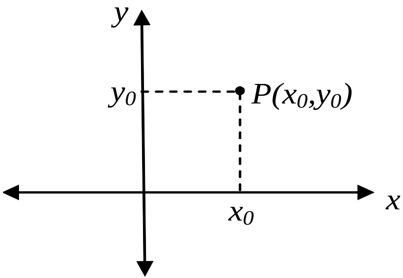
$\mathbb{W} = \{(3t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ *kümesinin,* $\mathbb{R}^2$ *vektör uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.*

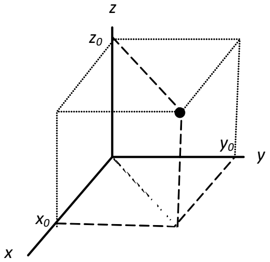
Problem

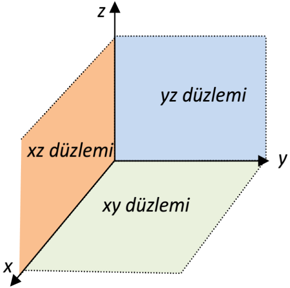
$\mathbb{W} = \left\{ \begin{bmatrix} s & t \\ t & s \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$ kümesinin, $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ vektör uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Ek Bilgi : Dik Koordinat Sistemi

Dik koordinat sistemi, yani kartezyen koordinat sistemi, Descartes tarafından 1637 yılında geliştirilmiştir. **Düzlemde dik koordinat sistemi**, yatay doğruya *x-ekseni* ve düşey doğruya da *y-ekseni* denilen iki dik doğrudan oluşur. Bu kesişen iki dik doğrunun kesişme noktasına **orjin** denir ve O ile gösterilir. Dik koordinat sistemi, en çok kullanılan ve en kullanışlı koordinat sistemidir. Geometrik şekillerin cebirsel denklemleri bu koordinat sisteminde kolayca ifade edilebilir. Örneğin, $x^2 + y^2 = 4$ denklemi, dik koordinat sisteminde yarıçapı 2 olan ve merkezi $(0, 0)$ olan bir çemberi ifade eder. Yani, $x^2 + y^2 = 4$ denklemi, dik koordinat sistemiyle anlam kazanır. Aynı çemberi başka koordinat sistemlerinde farklı denklemler ile ifade etmek mümkündür. Bir geometrik şeklin denklemi, kartezyen koordinat sistemi kullanılarak yazılmış ise, bu denkleme bu şekilin **kartezyen denklemi** denir. Örneğin, $x^2 + y^2 = 4$, $(0, 0)$ merkezli, 2 yarıçaplı çemberin kartezyen denklemidir.







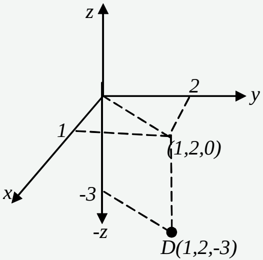
Uzayda dik koordinat sistemi için ise, üç boyutlu uzayda birbirine dik olan üç doğru alalım. Bu doğruların herbirini yine sayı doğrusu gibi düşünerek bir koordinat sistemi elde ederiz. Bu dooğrulara koordinat eksenleri denir. Uzayda verilen bir P noktasının koordinatlarını bulmak için, bu noktadan eksenlere paralel doğrular ve bu paralel doğruların koordinat düzlemlerini kestiği noktalardan da eksenlere dikmeler çizeriz. Bu dikmelerin belirttiği değerler sırayla x_0, y_0 ve z_0 olmak üzere, P noktasının koordinatları, (x_0, y_0, z_0) şeklinde ifade edilir. Buna göre, üç boyutlu uzayın noktaları ile, $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ kümesinin elemanları arasında birebir, örten bir eşleme kurulmuş olur.

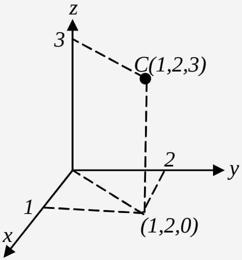
Örnek

C $(1,2,3)$, D $(1,2,-3)$ noktalarını dik koordinat sisteminde gösteriniz.

Çözüm

C ve D noktaları ise uzayda verilmiştir. Buna göre, şekillerdeki gibi gösterebiliriz.





Problem

Uzayda, $P(2,3,4)$, $P(-2,3,4)$ *noktalarını, koordinat sisteminde çizerek gösteriniz.*

İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Dik koordinat sisteminde verilen iki nokta arasındaki uzaklığın hesaplama yöntemini önce düzlemde, sonra uzayda kanıtlayarak verelim.

Teorem

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık $|AB|$ olmak üzere,

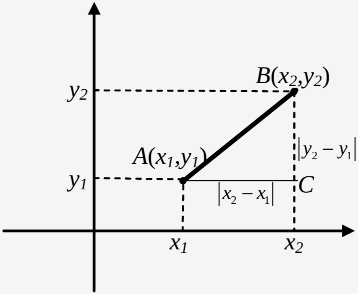
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

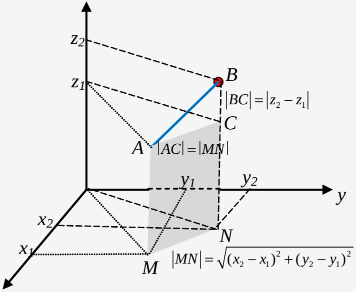
ile bulunur. Uzayda ise, $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık,

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ile bulunur.

Kanıt.





Şekile göre, $|AC| = |x_2 - x_1|$ ve $|CB| = |y_2 - y_1|$ dir. ABC dik üçgeninde Pisagor teo'den,

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

elde edilir. Üç boyutta ise, ikinci şekilden izlenirse, *xoy* düzlemindeki $|MN|$ uzunluğunun, $|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ olduğu görülür. $|AC| = |MN|$ olduğu gözönüne alınırsa, Pisagor teoreminden,

Örnek

A $(1,2)$ ve B $(3,5)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Örnek

Uzayda A $(1, 2, 3)$ ve B $(-2, 3, 5)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

n Boyutlu Uzayda İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Teorem

$A(x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $B(y_1, y_2, ..., y_n)$ noktaları arasındaki uzaklık $|AB|$ olmak üzere,

$$|AB| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

ile bulunur.

Problem

Uzayda, $P\left(2,3,4\right)$ *ve* $Q\left(1,3,5\right)$ *noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.*

Problem

$\mathbb{R}^5$ 'de $P\left(1,1,2,3,4\right)$ ve $Q\left(2,0,1,3,5\right)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Konum Vektörü

Tanım

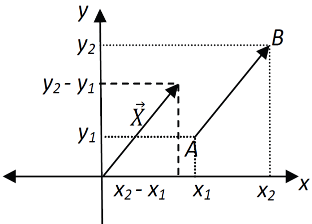
Verilen bir $\overrightarrow{AB}$ vektörüne eş olup, başlangıç noktası orjin olan, sadece bir $\overrightarrow{OX}$ vektörü çizilebilir ve bu vektör kısaca $\vec{\mathbf{X}}$ ile gösterilir. Bu vektöre, $\overrightarrow{AB}$ vektörünün **konum vektörü** denir.

Konum vektörü yardımıyla vektörlerde işlemler daha kolay hale gelir. Bir $\vec{\mathbf{X}}$ konum vektörünü, uzayın boyutuna göre bileşenleriyle göstermek mümkündür. Böylece, vektörlerle yapılan işlemlerde şekillerle uğraşma yerine, koordinatları kullanırız. Örneğin, düzlemde dik koordinat sisteminde, bir konum vektörünü $\vec{\mathbf{X}} = (x, y)$ şeklinde göstermek mümkündür.

i) Düzlemde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarını birleştiren $\overrightarrow{AB}$ vektörünü, konum vektörü ile

$$\vec{\mathbf{X}} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

şeklinde gösterebiliriz.



ii) Uzayda dik koordinat sisteminde ise, $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ noktalarını birleştiren $\overrightarrow{AB}$ vektörünü, konum vektörü ile

$$\vec{\mathbf{X}} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

şeklinde gösterebiliriz. (Siz de, üç boyutta, bir vektörün konum vektörünün koordinatlarının nasıl bulunacağını çizerek görmeye çalışınız.)

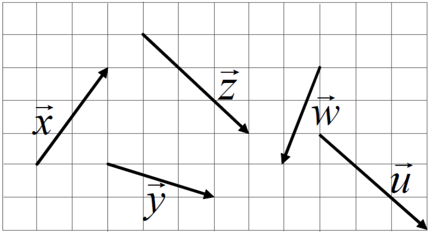
iii) En genel halde n boyutlu bir uzayda, $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ ve $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ noktalarını birleştiren $\overrightarrow{AB}$ vektörünü, konum vektörü ile

$$\vec{\mathbf{X}} = B - A = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$$

şeklinde gösterebiliriz.

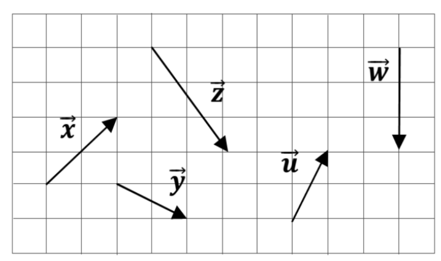
Örnek

Yandaki kareli düzlemde $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{w}$ vektörleri verilmiştir. Buna göre, $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}+\overrightarrow{z}-\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$ vektörünün konum vektörünü bulunuz.



Problem

Aşağıdaki vektörler için, $\overrightarrow{\mathbf{x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{w}} - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}$ *vektörünün konum vektörünü bulunuz.*



Örnek

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+2\,\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD}$ **toplamını hesaplayabilmek için hangi iki noktanın koordinatının verilmesi yeterlidir.**

Dik Koordinat Sistemiyle Vektörlerde Toplama ve Skalerle Çarpma

Tanım

$\mathbb{V}$ kümesi n boyutlu vektörlerin kümesi olsun. $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ ise, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ şeklinde olacaktır. Buna göre, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörlerinin toplamı

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

şeklinde tanımlanır.Bir vektörün skalerle çarpımı da $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda \overrightarrow{\mathbf{x}} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \in \mathbb{V}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek

Bir ABCD paralelkenarında, $[AD]$ üzerinde, $|ED| = 3\,|AE|$ olacak şekilde bir E noktası, $[CD]$ üzerinde de $|DF| = 3\,|CF|$ olacak şekilde bir F noktası alınıyor. $B(2,3,4,5)$ ve $D(6,7,4,13)$ olduğuna göre, $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$ vektörlerinin toplamını bulunuz.

Problem

Bir ABCD paralel kenarında, $[AD]$ *üzerinde,* $|ED| = 2\,|AE|$ *olacak şekilde bir E noktası,* $[CD]$ *üzerinde de* $|DF| = 2\,|CF|$ *olacak şekilde bir F noktası alınıyor.* $B\,(1,2,3,4,1)$ *ve* $D\,(4,2,9,4,4)$ *olduğuna göre,* $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$ *vektörlerinin toplamını bulunuz.*

Vektörün Normu - Birim Vektör

Tanım

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektörünün uzunluğu, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|$ ile gösterilir ve bu uzunluğa $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ **vektörünün normu** denir.

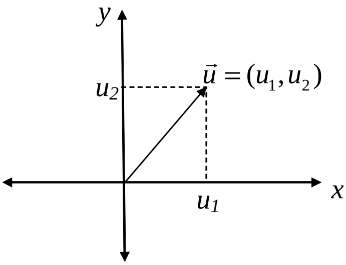
$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$$

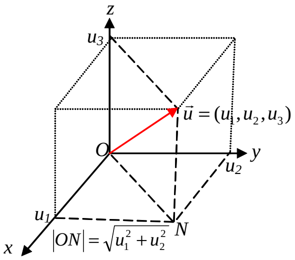
şeklindedir. Uzunluğu 1 br olan vektöre **birim vektör** denir. Yani, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün birim vektör olması için gerek ve yeter şart $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = 1$ olmasıdır. Sıfır vektöründen farklı her vektör uzunluğuna bölünerek bir birim vektör elde edilebilir. $\overrightarrow{\mathbf{u}} \neq \vec{0}$ birim vektör değilse,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_b = \frac{\overrightarrow{\mathbf{u}}}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|}$$

vektörü birim vektördür. $\mathbb{R}^2$ deki $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1, 0)$ ve $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0, 1)$ vektörlerine **standart birim vektörler** denir. $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 1)$ bir birim vektör değildir. Çünkü, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = 2$'dir. Fakat,

$\overrightarrow{\mathbf{u}}_b = \dfrac{\overrightarrow{\mathbf{u}}}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \right)$ vektörü bir birim vektördür.





Düzlemde bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ vektörünün uzunluğunun, $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, ve üç boyutlu uzayda bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ vektörünün uzunluğunun ise, $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ olduğu pisagor teoreminden kolayca görülebilir. Başlangıç noktası $A\,(a_1, a_2, ..., a_n)$ ve bitiş noktası $B\,(b_1, b_2, ..., b_n)$ olan bir $\overrightarrow{AB}$ vektörünün normu da

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + ... + (b_n - a_n)^2}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek

$\mathbb{R}^5$ 'de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (2, 3, 4, 1, 2)$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.

Çözüm

$\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| = \sqrt{2^2+3^2+4^2+1^2+2^2} = \sqrt{34}.$

Problem

$\mathbb{R}^5$ *uzayında verilen* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, k, \frac{2}{5}\right)$ *vektörü bir birim ise* k *kaçtır?*

Bir Vektörün Lineer Bileşimi

Tanım

Bir vektör kümesinde, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} = \lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$$

vektörüne, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ vektörlerinin bir **lineer bileşimi** denir. Kısaca, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörünün, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ vektörleri cinsinden yazılışına, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörünün $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılması denir.

Örneğin, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 3, 4)$ vektörünü standart birim vektörlerin lineer bileşimi olarak

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} = 1\vec{\mathbf{e}}_1 + 3\vec{\mathbf{e}}_2 + 4\vec{\mathbf{e}}_3$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazılış çoğu zaman

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} + 4\vec{\mathbf{k}}$$

şeklinde karşımıza çıkar.

Örnek

Düzlemde, $\overrightarrow{z} = (2,3)$ vektörünü, $\overrightarrow{x} = (1,2)$ ve $\overrightarrow{y} = (2,5)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.

Örnek

$\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ vektörünü, $\overrightarrow{x} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{y} = (2, 2, 0)$, $\overrightarrow{z} = (1, 0, 1)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazmak mümkün müdür?

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (\mathbf{2, 4, 6})$ **vektörünü** $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1, 2, 3})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{1, 3, 4})$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{2, 1, 0})$ **vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazalım.**

Çözüm : $\overrightarrow{\mathbf{u}} = 2\overrightarrow{\mathbf{x}} + 0\overrightarrow{\mathbf{y}} + 0\overrightarrow{\mathbf{z}}$ şeklinde yazılabilir. Burada açıktır ki, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörüne bağımlıdır.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (5, 4, 10)$ *vektörünü* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, 3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1, 2, 4)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (0, 1, 2)$ *vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,2,3)$ *vektörü,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,2,1)$ *vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir mi?*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, -1, 7)$ *vektörü,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, 3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1, 2, 1)$ *vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir mi?*

Örnek

$\mathbb{R}^4$ **uzayında** $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1,1,0,0})$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{0,1,2,1})$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{1,2,2,3})$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\mathbf{2,3,2,1})$ **vektörlerinden, biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak yazılamayacak şekilde maksimum sayıda vektör seçiniz.**

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,1,0,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (0,1,1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (2,1,-1,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,1,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,3,1,4)$ *vektörleri arasından, biri diğerlerinin lineer bileşimi olarak yazılamayacak şekilde, en fazla kaç vektör seçilebilir?*

Vektörlerin Uzayı Germesi

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör kümesi olsun. $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k \in \mathbb{V}$ olmak üzere, $\mathbb{V}$ kümesindeki her $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörleri cinsinden yazılabiliyorsa, yani, $\mathbb{V}$ uzayının her $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörü $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörlerinin lineer bileşimi ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörleri $\mathbb{V}$ **uzayını geriyor** denir ve

$$\mathbf{Sp}\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k\right\} = \mathbb{V}$$

biçiminde yazılır. (Not : Buradaki Sp ifadesi, ingilizce Span=Germe kelimesinin ilk iki harfini göstermektedir.)
Örneğin, $\mathbb{R}^2$ uzayındaki her vektör, $\vec{\mathbf{e}}_1 = (1,0)$ ve $\vec{\mathbf{e}}_2 = (0,1)$ vektörleri cinsinden

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (a, b) = a\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + b\overrightarrow{\mathbf{u}}_2$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre, $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2$ vektörleri $\mathbb{R}^2$ uzayını gererler, $\mathbf{Sp}\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\} = \mathbb{R}^2$.$\mathbb{R}^3$ uzayındaki her vektör, $\vec{\mathbf{i}} = (1,0,0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0,1,1)$ ve $\vec{\mathbf{k}} = (0,0,1)$ vektörleri cinsinden $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (a,b,c) = a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}$ şeklinde yazılabilir. Buna göre, $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ uzayını gererler. $\mathbf{Sp}\left\{\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\right\} = \mathbb{R}^3$.

NOT :

* $\mathbb{R}^2$ uzayını en az iki vektörle gerebiliriz.
* $\mathbb{R}^3$ uzayını en az üç vektörle gerebiliriz.
* $\mathbb{R}^n$ uzayını en az n vektörle gerebiliriz.

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1,1)$, $\overrightarrow{y} = (1,2)$ **ve** $\overrightarrow{z} = (2,1)$ **vektörlerinin** $\mathbb{R}^2$ **uzayını gerdiğini gösteriniz.**

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ **vektörlerinin** $\mathbb{R}^3$ **uzayını germediği gösteriniz.**

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$ *olduğundan, bu üç vektör aynı düzlemdedirler ve* $\mathbb{R}^3$ *uzayını germezler. Örneğin,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,1)$ *vektörünü, bu üç vektörün cinsinden yazmak mümkün değildir.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (0,1,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (1,1,1)$ *vektörlerinin* $\mathbb{R}^3$ *uzayını gerdiğini gösteriniz.*

NOT : $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen, biri diğerinin katı olmayan $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ gibi iki vektörün gerdiği uzay, bir düzlem belirtir. Bu düzlem üzerindeki her vektör, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir. Yani, $\overrightarrow{\mathbf{w}} \in Sp\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ ise, $a, b \in \mathbb{R}$ için $\overrightarrow{\mathbf{w}} = a\overrightarrow{\mathbf{u}} + b\overrightarrow{\mathbf{v}}$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda,

$$\det\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right) = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, a\overrightarrow{\mathbf{u}} + b\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, a\overrightarrow{\mathbf{u}}\right) + \det\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, b\overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = 0 + 0 = 0$$

olacaktır. Yani, $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen üç vektörün aynı düzlemde olması için, bu üç vektörle oluşturulan matrisin determinantı sıfır olmalıdır. Ayrıca, herhangi bir vektörün, $Sp\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ uzayında, yani $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ tarafından gerilen düzlemde olması için, düzlem denklemini sağlaması gerektiği de unutulmamalıdır. $\mathbb{R}^3$ uzayında, iki vektörle gerilen uzayın, yani düzlemin denklemi, mutlaka orjinden geçen bir düzlemdir ve $Ax + By + Cz = 0$ formundadır.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında, $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$ ve $\overrightarrow{v} = (2,1,4)$ vektörleri tarafından gerilen uzayın (düzlemin) denklemini bulunuz.

Örnek

$x + 2y + 3z = 0$ düzlemini geren iki vektör yazınız.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 1, 1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 2, 3)$ *vektörleri tarafından gerilen uzayı bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{w}} = (1, 14, -1)$ *vektörünün,* $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 5, 2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1, 2, 3)$ *vektörleri tarafından gerilen düzlemde olduğunu gösteriniz.*

Lineer Bağımsızlık ve Bağımlılık

Tanım

$\mathbb{R}^n$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ vektörleri ve $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ için,

$$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{u}}_n = \vec{0}$$

olması, ancak ve ancak

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

olmasıyla mümkün ise, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ vektörlerine $\mathbb{R}^n$ de **lineer bağımsız vektörler** denir. Diğer yandan,

$$\lambda_1 \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{\mathbf{u}}_n = \vec{\mathbf{0}}$$

olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sayılarından en az biri sıfırdan farklı olarak bulunabiliyorsa, $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_n$ vektörlerine $\mathbb{R}^n$ de **lineer bağımlı vektörler** denir.

Örnek

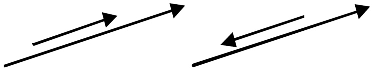
Örneğin :

★ $\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3,9)$ vektörleri lineer bağımlıdırlar. $\overrightarrow{\mathbf{y}} = 3\overrightarrow{\mathbf{x}}$ dir. $\overrightarrow{\mathbf{y}} - 3\overrightarrow{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ eşitliğinde, hem $\lambda_1 = 1$ hem de $\lambda_2 = -3$ sıfırdan farklıdır.

★ $\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,0)$ vektörleri için, $\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{y}} = \vec{0}$ eşitliğinin sağlanması, ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ durumunda mümkündür. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ lineer bağımsızdır.

★ $\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (2,3,4)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3,4,2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,2,6)$ vektörleri lineer bağımlıdırlar. Çünkü, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = 2\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}$ yani, $2\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{0}$ olduğundan, herhangi bir vektör diğerlerine bağlı olarak yazılabilir.

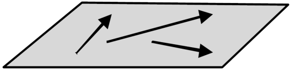
★ $\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,0,1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,0)$ vektörleri lineer bağımsızdırlar. Çünkü, bu vektörlerin herhangi birini, diğer ikisinden elde etmek hiç bir şekilde mümkün değildir. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ arasındaki, $\lambda_1\overrightarrow{\mathbf{x}} + \lambda_2\overrightarrow{\mathbf{y}} + \lambda_3\overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{0}$ eşitliğinin sağlanması için, ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olması gerekir.



$\mathbb{R}^2$ de aynı doğrultudaki iki vektör lineer bağımlıdır.

Problem

$\mathbb{R}^2$ de lineer bağımlı iki vektör yazınız.



$\mathbb{R}^3$ de aynı düzlemdeki üç vektör lineer bağımlıdır.

Problem

$\mathbb{R}^3$ de lineer bağımlı üç vektör yazınız.

Herhangi $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleriyle birlikte, üçüncü bir $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörü $\overrightarrow{\mathbf{z}} = a\overrightarrow{\mathbf{x}} + b\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $a, b \in \mathbb{R}$ alınırsa, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleri lineer bağımlı olur. Buna göre üç vektör yazınız.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{x} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{y} = (1, 1, 0)$ ve $\overrightarrow{z} = (-1, 0, 1)$ **vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.**

NOT : i) $\mathbb{R}^n$ uzayında k vektör verilsin. $k > n$ ise bu vektörler kesinlikle lineer bağımlıdırlar. Örneğin, $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen 4 vektör kesinlikle lineer bağımlıdır.
ii) $\mathbb{R}^n$ uzayında, k vektörle oluşturulan matrisin rankı, k'dan küçükse bu vektörler yine lineer bağımlıdırlar. Yani, verilen vektörler matrisin satırları gibi düşünülerek, matris formunda yazılıp, eşelon forma getirildiğinde, en altta tamamı sıfır olan satır varsa, bu vektörler kesinlikle lineer bağımlıdırlar. Fakat, rank tam k ise, lineer bağımsızdırlar.
iii) $\mathbb{R}^n$ uzayında verilen n vektörün oluşturduğu matrisin determinantının sıfır olması demek, bu determinantın herhangi bir satırının diğer satırlara bağımlı olduğunu, dolayısıyla bu vektörlerin lineer bağımlı olduklarını gösterir. Örneğin, $\mathbb{R}^3$ de verilen üç vektörün oluşturduğu 3×3 determinantı göz önüne alalım. Eğer, bu üç vektör lineer bağımlı ise, herhangi bir vektör, diğer vektörlere bağlı olarak yazılabileceğinden determinant sıfır olur. Örneğin, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $a\overrightarrow{\mathbf{x}} + b\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörlerini gözönüne alalım. Determinant özellikleri kullanılırsa,

$$\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, a\overrightarrow{\mathbf{x}} + b\overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = a\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) + b\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

olduğu görülebilir.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\overrightarrow{x} = (1,2,2)$, $\overrightarrow{y} = (2,2,3)$ ve $\overrightarrow{z} = (3,2,4)$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{x} = (1, k, 3)$, $\overrightarrow{y} = (2, 2, 3)$ ve $\overrightarrow{z} = (2, 1, 1)$ vektörleri lineer bağımlı ise k kaçtır?

Problem

$\mathbb{R}^3$ *de* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,4,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,k,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (2,1,1)$ *vektörleri lineer bağımlı ise* k *kaçtır?*

Problem

$\mathbb{R}^4$ *de* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (2,0,3,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,k,2,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (2,1,0,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (0,1,0,1)$ *vektörleri lineer bağımlı ise* k *kaçtır*?

Farklı Vektör Uzayları İçin Örnekler

Örnek

$\mathbb{F}$ reel fonksiyonlar uzayında tanımlanan $\mathbf{f_1} = \sin \mathbf{x}$ ve $f_2 = \cos \mathbf{x}$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Problem

$\{x, \cos x, \sin x\}$ *kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.*

Örnek

$\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ **polinomlar uzayında verilen** $\mathbf{R}(x) = 13x + 11$ **vektörünü,** $\mathbf{P}(x) = 2x + 1$ **ve** $\mathbf{Q}(x) = x + 2$ **vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.**

Örnek

$\mathbb{P}_2$ **polinomlar uzayında,** $\left\{x^2+1, x+1, x^2+x\right\}$ **kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.**

Problem

$\mathbb{P}_2$ polinomlar uzayında, $\{x^2+1, x-1, 3x^2-2x+5\}$ kümesinin lineer bağımlı olduğunu gösteriniz. $R(x) = 3x^2-2x+5$ vektörünü, $P(x) = x^2+1$ ve $Q(x) = x-1$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazınız.

Örnek

$\mathbb{F}$ reel fonksiyonlar uzayında, $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Örnek

$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, **$2 \times 2$ türünden reel matrislerin uzayı olsun.**

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

vektörü,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

matrislerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir mi?

Bir Uzayın Tabanı

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör kümesi olsun. Bu kümede verilen $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{u}}_n\right\}$ vektörleri hem lineer bağımsız ise, hem de $\mathbb{V}$ deki her vektör, bu vektörler cinsinden yazılabiliyorsa, yani $\mathbb{V}$ uzayını geriyorlarsa, $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{u}}_n\right\}$ vektörlerine $\mathbb{V}$ **uzayının bir tabanı** veya **bazı** denir.

Örneğin, $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ uzayının bir tabanıdır. Bu üç vektör hem lineer bağımsızdırlar, hem de $\mathbb{R}^3$ uzayını gererler Bu tabana, $\mathbb{R}^3$ uzayının standart tabanı denir. $\mathbb{R}^3$ uzayı için sonsuz sayıda taban bulunabilir. Örneğin, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, 0)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0, 1, 1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 0, 1)$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımsız olan ve $\mathbb{R}^3$'ü geren üç vektördür. Bu vektörler de, $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki n lineer bağımsız vektör, daima $\mathbb{R}^n$ uzayını gereceğinden, $\mathbb{R}^n$ uzayında alınan n vektörden oluşan her lineer bağımsız vektör kümesi, $\mathbb{R}^n$ uzayı için bir tabandır.

Problem

$\mathbb{R}^2$ *uzayının farklı iki tabanını yazınız.*

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayının farklı iki tabanını yazınız.*

Örnek

Bir vektör uzayında verilen vektörlerin lineer bağımsız olması, taban olması için yeterli midir? Bir tane örnek vererek açıklayınız.

Örnek

Bir vektör uzayında verilen vektörlerin, o uzayı germesi, taban olması için yeterli midir? Bir tane örnek vererek açıklayınız.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (1,2,3)$ *vektörleri* $\mathbb{R}^3$ *uzayının tabanı olabilir mi?*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0,0)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,1,0)$ *vektörleri* $\mathbb{R}^4$ *uzayının neden tabanı değildir?*

NOT : $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k$ vektörleri tarafından gerilen, $\mathbf{Sp}\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \cdots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k\right\} = \mathbb{V}$ uzayından, seçilecek maksimum sayıdaki lineer bağımsız vektör, $\mathbb{V}$ uzayının bir tabanı olur. $\mathbb{R}^n$ uzayından seçilen herhangi n tane lineer bağımsız vektör, $\mathbb{R}^n$ uzayının tabanıdır.

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı olsun. $\mathbb{V}$ uzayının tabanındaki vektör sayısına $\mathbb{V}$ **uzayının boyutu** denir ve *boy* $(\mathbb{V})$ ile gösterilir. *boy* $(\mathbb{R}^n) = n$ olduğu açıktır. n boyutlu bir uzaydan seçilen n vektör, bu uzayın bir tabanıdır.

Örnek

Sp$\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{1,0,1}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = (\mathbf{2,1,1}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = (\mathbf{1,1,0}), \overrightarrow{\mathbf{u}}_4 = (\mathbf{3,1,2})\} = \mathbb{V}$ **uzayının bir tabanını ve boyutunu bulunuz.**

Problem

$\mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,1,1)\ ,\ \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0,1)\}$ *uzayının boyutu kaçtır?*

Problem

$\mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{x}}=(1,0,1,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{y}}=(0,1,0,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{z}}=(1,1,1,0)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{w}}=(1,1,1,1)\}$
uzayının boyutu kaçtır?

Problem

$\mathbf{Sp}\{\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,0,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,0)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,1)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{w}} = (1,1,0)\}$ *uzayının boyutu kaçtır?*

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (1,1,0)$ **vektörlerinden** $\mathbb{R}^3$ **için bir taban seçilebilir mi?**

Bir Vektörün Bir Tabana Göre Koordinatları

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör uzayı ve $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n\}$ kümesi bu uzayın bir tabanı olsun. Bu durumda, her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = \beta_1 \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + \beta_2 \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \cdots + \beta_n \overrightarrow{\mathbf{v}}_n$$

biçiminde tek türlü yazılabilir. Yani, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ vektörünü, $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ reel sayılarıyla özdeşleştirebiliriz. Bu durumda,

$$[\overrightarrow{\mathbf{u}}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır ve bu kolon matrisine $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün $\mathcal{B}$ **tabanına göre koordinatları** denir.

Örnek

Örneğin,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}} = 5\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$$

vektörünün, $\mathbb{R}^3$ uzayının $\vec{\mathbf{i}} = (1, 0, 0)$, $\vec{\mathbf{j}} = (0, 1, 0)$, $\vec{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ standart tabanına göre koordinatları

$$(5, 4, 3)$$

olacaktır. Fakat,

$$\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = (1, 0, 1) \, , \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = (1, 1, 0) \, , \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 = (0, 1, 1)$$

tabanına göre koordinatları ise,

$$(5, 4, 3) = \overrightarrow{\mathbf{u}} = 2\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 + 3\overrightarrow{\mathbf{v}}_2 + \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 = 2(1, 0, 1) + 3(1, 1, 0) + (0, 1, 1)$$

olduğundan

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathcal{B}} = (2, 3, 1)_{\mathcal{B}}$$

bulunur.

Örnek

$\mathcal{B} = \{ \overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1,1,1}), \overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{0,1,1}), \overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{1,1,2}) \}$ **kümesi** $\mathbb{R}^3$ **uzayının bir tabanıdır. Buna göre,** $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\mathbf{1,1,0})$ **vektörünün bu tabana göre koordinatlarını bulunuz.**

Problem

$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1}), \overrightarrow{\mathbf{y}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), \overrightarrow{\mathbf{z}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})\}$ *kümesi* $\mathbb{R}^3$ *uzayının bir tabanıdır. Buna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (\mathbf{0}, \mathbf{5}, \mathbf{7})$ *vektörünün bu tabana göre koordinatlarını bulunuz.*

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de **standart koordinatlara göre verilen** $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,3,6)$ **vektörünün,**

$$\mathcal{B} = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = (1,1,1)\,, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = (2,0,1)\,, \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 \right\}$$

tabanına göre koordinatları $\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}\right]_{\mathcal{B}} = (1,1,2)$ **ise** $\overrightarrow{\mathbf{v}}_3$ **vektörünü bulunuz.**

Örnek

Tabanı $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,2,1), \overrightarrow{\mathbf{v}} = (2,1,1)\}$ olan $\mathbb{V}$ uzayını bulunuz. $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (7,-1,2)$ vektörü bu uzayın bir elemanı mıdır? Elemanıysa, bu tabana göre koordinatları nedir? Bu uzayın başka bir tabanını daha yazınız.

Örnek

$\mathbb{P}_2$ polinomlar uzayında, $\mathcal{B} = \{\mathbf{P}(x) = x^2 + 1,\ \mathbf{Q}(x) = x + 1,\ \mathbf{R}(x) = x^2 + x + 1\}$ tabanına göre $\mathbf{K}(x) = 3x^2 + 2x + 1$ polinomunun koordinatlarını bulunuz.

Vektörlerin Çarpımı

İki vektörün toplanmasını ve bir vektörün skalerle çarpılmasını gördük. Şimdi, ise iki vektörün çarpılmasını inceleyeceğiz. Vektörleri iki farklı şekilde çarpabiliriz. Birincisi bize sonuçta bir skaler değer veren, yani sonucun bir reel sayı olduğu çarpım ki, bu tür çarpımlara **skaler çarpım** veya **iç çarpım** diyeceğiz; ikincisi de, sonuçta bize, yeni bir vektör veren ve **vektörel çarpım** olarak adlandıracağımız çarpım.

Önce, skaler çarpımı inceleyeceğiz. Bu çarpımı en genel halde incelemek için, öncelikle iç çarpım fonksiyonu kavramını inceleyelim.

★ Skaler Çarpım ★
★. Vektörel Çarpım ★
★ Karma Çapım ★

İç Çarpım Fonksiyonu

Tanım

$\mathbb{V}$ bir vektör kümesi olsun.

$$f \ : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu :

İ1. (Pozitif Tanımlılık) Her $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{V}$ için, $f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) \geq 0$

İ2. (Kendisiyle Çarpımının Sıfıra Eşitliği Durumu) $f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$

İ3. (Simetri Özelliği) Her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in \mathbb{V}$ için, $f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$

İ4. (Bilineelik veya İki-lineerlik Özelliği) Her $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \in \mathbb{V}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$$f\left(\left(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{v}}\right), \overrightarrow{\mathbf{w}}\right) = f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right) + \lambda f\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}}\right)$$
$$f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \left(\lambda \overrightarrow{\mathbf{v}} + \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right) + f\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)$$

özelliklerini sağlıyorsa, f" işlemine bir **iç çarpımdır** veya **iç çarpım fonksiyonudur** denir.

Öklid İç Çarpımı

Tanım

$\mathbb{R}^2$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2)$ olmak üzere

$$g : \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \times \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}, \quad g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

biçiminde, $\mathbb{R}^3$ de $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$g : \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \times \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \to \mathbb{R}, \quad g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

biçiminde ve $\mathbb{R}^n$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vektörleri için

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonunu kullanacağız. Bu fonksiyonların, yukarıda tanımlanan iç çarpım fonksiyonu özelliklerini sağladığını görmek kolaydır. Bu tür iç çarpımlara **Öklid İç Çarpımı** denir. $\mathbb{R}^n$ uzayında, Öklid iç çarpımını genel olarak $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ şeklinde veya kısaca $\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}$ şeklinde gösteririz.

Örnek

$\mathbb{R}^4$ uzayında verilen $\overrightarrow{x} = (1, 2, 3, 4)$ ve $\overrightarrow{y} = (2, 1, -3, 1)$ vektörleri için $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle$ iç çarpımını hesaplayınız.

Çözüm

$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 1 = -1$ *bulunur.*

Problem

$\mathbb{R}^5$ *uzayında verilen* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0,1,2,3,4)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,1,-3,1,5)$ *vektörleri için* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle$ *iç çarpımını hesaplayınız.*

Örnek

$\mathbb{R}^3$ **uzayında verilen** $\overrightarrow{x} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{y} = (0,1,2)$, $\overrightarrow{z} = (2,4,-3)$ **vektörleri için aşağıdakileri hesaplayınız.**

a) $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = ?$ **b)** $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z} \rangle = ?$ **c)** $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} \rangle = ?$ **d)** $\langle \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z} \rangle = ?$ **e)** $\langle \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z} \rangle = ?$

Problem

$\mathbb{R}^4$ *uzayında verilen* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3,4)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,3,1,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,0,2,-1)$ *vektörleri için aşağıdakileri hesaplayınız*.

a) $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = ?$ **b)** $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = ?$ **c)** $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = ?$ **d)** $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} + 3\overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = ?$

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere

$$g : \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \times \mathbb{R}^{\mathbf{3}} \to \mathbb{R}, \ \ g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = 3x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.
Buna göre, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (4, 1, 5)$ için,

$$g\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = 3\,(1 \cdot 4) + 2 \cdot 1 + 2\,(3 \cdot 5) = 44$$

olur.

Örnek

$\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ polinomlar uzayında, $P(x), Q(x) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ için,

$$\langle P(x), Q(x) \rangle = \int_0^1 P(x) \cdot Q(x) \, \mathrm{d}x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Örneğin, $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de verilen

$$P(x) = x^2 + 1 \qquad \text{ve} \qquad Q(x) = x + 2$$

polinomlarının iç çarpımı :

$$\langle P(x), Q(x) \rangle = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)(x + 2) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x^3 + 2x^2 + x + 2\right) dx = \frac{41}{12}$$

elde edilir.

Öklid İç Çarpımı İle Bir Vektörün Uzunluğu Arasındaki İlişki

Daha önce $\mathbb{R}^n$ uzayında bir $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ vektörünün uzunluğunu

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

ile ifade etmiştik. Diğer taraftan, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörünün kendisiyle iç çarpımı da,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

olduğundan, $\left\| \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} \right\rangle}$ sonucuna ulaşırız.

Örnek

$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| = 5$, $\|\overrightarrow{x}\| = 1$ **ve** $\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| = 3$ **olduğuna göre,** $\overrightarrow{y}$ **vektörünün uzunluğunu bulunuz.**

Problem

$\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|=6$, $\left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|=2$ *ve* $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}-\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|=4$ *olduğuna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörünün uzunluğunu bulunuz.*

Problem

$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \dfrac{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2 - \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2}{4}$ *olduğunu kanıtlayınız.*

İki Vektör Arasındaki Açının Bulunması

Teorem

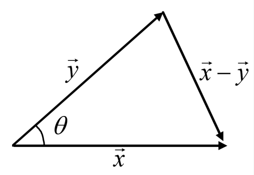
$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\mathbb{R}^n$ uzayında iki vektör olsun. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ arasındaki açı θ ise,

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle}{\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \| \, \| \overrightarrow{\mathbf{y}} \|}$$

'dir.

Kanıt.

$\mathbb{R}^n$ uzayında, aralarındaki açı θ olan $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörlerini alalım.
$\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleri şekildeki gibi bir üçgen oluştururlar ve bu üçgenin kenarları $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|$, $\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|$ ve $\|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\|$ uzunluğuna sahiptir. Şimdi, Kosinüs teoremini uygulayacağız. $\|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 - 2\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|\,\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|\cos\theta$ eşitliğinde, sol taraftaki $\|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2$ normunu,



$$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2$$

şeklinde yazarsak, $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 - 2\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|\,\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|\cos\theta$ eşitliğinde, sadeleştirmeler yapılarak, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|\,\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|\cos\theta$ elde edilir. □

Örnek

Sıfırdan farklı iki vektörün dik olmasıyla, iç çarpımları arasında nasıl bir bağıntı vardır?

Çözüm

Aralarındaki açı 90° *olan* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörlerini alalım.* $\cos 90^\circ = 0$ *olduğundan,*

$$\cos\theta = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|} = 0$$

eşitliğinden,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, iki vektörün iç çarpımı 0 ise, bu iki vektör birbirine dik olacaktır.

İki Vektörün Ortogonal Olması

$(\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ birbirine ortogonaldir$)$ $\overrightarrow{\mathbf{x}} \perp \overrightarrow{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = 0$

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (3, 4, 7)$ vektörüyle $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (5, -2, k)$ vektörü birbirine dik ise k nedir?

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1, 0, 3, 2)$ **ve** $\overrightarrow{y} = (1, 2, 0, 3)$ **vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.**

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 1, 2)$ *vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, -3, 2, -1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, k, 2, 1, 2)$ *vektörleri birbirine dik ise* $k = ?$

Problem

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 3)$ vektörüne dik olan 5 vektör yazınız.

Problem

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, k, 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, -1, m)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (n, 2, 2)$ vektörleri ikişer olarak birbirlerine dik olduklarına göre, m, n ve k değerlerini bulunuz.

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, k, 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, -1, m)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (n, 2, 1)$ *vektörleri ikişer olarak birbirlerine dik olduklarına göre, m, n ve k değerlerini bulunuz.* $\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) = ?$ *Bu vektörler doğrultusundaki birim vektörlerin oluşturduğu matrisin bir ortogonal matris olacağını gösteriniz.*

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 1, 2)$ *vektörlerinin her ikisine de dik olan bir vektör bulunuz.*

Ortogonal ve Ortonormal Taban

Tanım

Bir $\mathbb{V}$ vektör uzayının, tabanındaki tüm vektörler birbirine dik ise, bu tabana $\mathbb{V}$ uzayının **ortogonal tabanı** denir. Bu vektörlerin herbiri ayrıca birim vektör ise bu tabana **ortonormal taban** denir. Örneğin, $\mathbb{R}^2$ uzayında, $\left\{ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = (3,4)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = (4,-3) \right\}$ bir ortogonal tabandır. Bu vektörlerin herbirinin normuna bölünerek birim yapılırsa, elde edilen

$$\left\{ (3/5, 4/5)\,, (4/5, -3/5) \right\}$$

tabanı, bir ortonormal tabandır. $\mathbb{R}^3$ uzayında da,

$$\left\{ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = (1,2,2)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = (2,1,-2)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = (2,-2,1) \right\}$$

tabanı bir ortogonal taban,

$$\left\{ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = \frac{1}{3}(1,2,2)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{3}(2,1,-2)\,,\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = \frac{1}{3}(2,-2,1) \right\}$$

tabanı ise bir ortonormal tabandır.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ uzayının $\overrightarrow{u} = (5, 12)$ vektörünü içeren bir ortogonal tabanını bulunuz ve bu tabandan da bir ortonormal taban elde ediniz.

Örnek

$\mathbb{R}^2$ uzayında $\overrightarrow{x} = (3/5, 4/5)$ vektörünü içeren bir ortonormal taban bularak, bu tabandan bir ortogonal matris elde ediniz.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayının $\overrightarrow{u}=(3,2,6)$ ve $\overrightarrow{v}=(-6,3,2)$ vektörlerini içeren bir ortogonal tabanını bulunuz ve bu taban yardımıyla bir ortogonal matris elde ediniz.

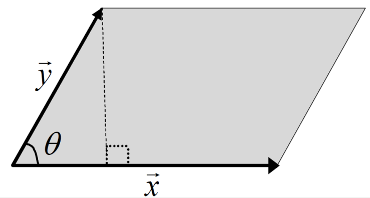
İki Vektörle Oluşturulan Paralelkenarın Alanı

Teorem

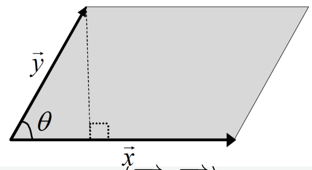
$\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\mathbb{R}^n$ uzayında iki vektör olsun. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ arasındaki açı θ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ile oluşturulan paralelkenarın alanı

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right)=\sqrt{\left\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\rangle\left\langle\overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle-\left\langle\overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle^2}$$

'dir.



Çözüm



Aralarındaki açı θ *olan,* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını*

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \sin\theta$$

ile bulabiliriz. $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ *yazalım. Diğer yandan,*

$\cos\theta = \dfrac{\left\langle\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|}$ *olduğunu da kullanırsak,*

$$Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \sqrt{1-\frac{\left\langle\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle^2}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2}} = \sqrt{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2 - \left\langle\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle^2}$$

$$= \sqrt{\left\langle\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right\rangle \left\langle\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle - \left\langle\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle^2}$$

elde edilir. Üçgenin alanı için bu değer 2'ye bölünür.

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1, 3, 2)$ **ve** $\overrightarrow{y} = (2, 3, 1)$ **vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.**

Örnek

Köşelerinin koordinatları A $(1,1,1)$, B $(4,1,3)$ ve C $(1,3,4)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

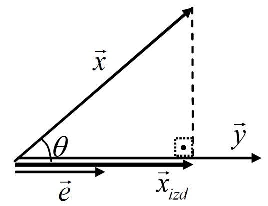
Bir Vektörün Başka Bir Vektör Üzerine Dik İzdüşümü

Teorem

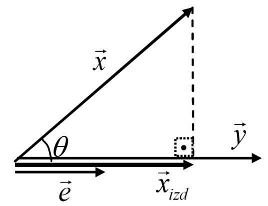
$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ *sıfırdan farklı vektörleri verilsin.* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörünün,* $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü ile bu vektörün uzunluğu*

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd\,\overrightarrow{\mathbf{y}}} = \mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{y}} \qquad ve \qquad \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd\,\overrightarrow{\mathbf{y}}} \right\| = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|}$$

ile bulunur.



Kanıt.



$\vec{\mathbf{e}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ doğrultusundaki birim vektör olsun. Buna göre,

$$\vec{\mathbf{e}} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{y}}}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|} = \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd}}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} \right\|}$$

yazılabilir. Bu eşitlikten, $\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \dfrac{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} \right\|}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|} \overrightarrow{\mathbf{y}}$ elde edilir. Diğer yandan,

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} \right\| = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \cos\theta = \left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\| \left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|} = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|}$$

olduğu kullanılırsa,

$$\overrightarrow{\mathbf{x}}_{izd} = \mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}} \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \right) = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{y}}$$

bulunur. $\square$

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1,1,3)$ vektörünün $\overrightarrow{y} = (2,3,1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.

Çözüm

Formül uygulanarak

$$\textbf{İzd}_{\overrightarrow{\mathbf{y}}}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)=\frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}},\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\rangle}\overrightarrow{\mathbf{y}}=\frac{8}{14}\overrightarrow{\mathbf{y}}=\frac{4}{7}(2,3,1)$$

elde edilir. Siz, formül uygulamak yerine, kanıtta kullandığımız yöntemle bulmaya çalışınız.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0,1,1,0,1)$ *vektörünün* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,1,1,1)$ *vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünün uzunluğunu bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (2,1,1)$ *vektörünün* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,1,3)$ *vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörünü bulunuz.*

Schwarz Eşitsizliği

Teorem

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ *vektörleri için,* $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|\,\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \geq |\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle|$ *eşitsizliği sağlanır.*

Kanıt.

Öklid iç çarpımı için, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|\,\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \cos\theta$ eşitliğinde $|\cos\theta| \leq 1$ olduğundan,

$$\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|\,\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \geq |\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle|$$

elde edilir. En genel anlamda, herhangi bir iç çarpım için, farklı şekilde kanıtlayabiliriz. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ veya $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörlerinin herhangi birinin sıfır olması durumunda eşitlik olur ve teorem doğrudur. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ sıfırdan farklı herhangi iki vektör olsunlar. Şimdi,

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}}{\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}} \overrightarrow{\mathbf{y}}$$

vektörünü gözönüne alalım. Bu vektör, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörüne dik sıfırdan farklı bir vektör belirtir. □

Kanıt.

İç çarpımın pozitif tanımlılık özelliğine göre, $\overrightarrow{\mathbf{z}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{z}} \geq 0$ olmalıdır. Buna göre,

$$\overrightarrow{\mathbf{z}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{z}} = \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}}{\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}} \overrightarrow{\mathbf{y}} \right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}}{\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}} \overrightarrow{\mathbf{y}} \right) \geq 0$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}} - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}})(\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}})}{\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}} - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}})(\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}})}{\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}} + \frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}})^2}{\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}} \geq 0$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}}) - \frac{(\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}})(\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}})}{\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}} \geq 0$$

$$(\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{x}})(\overrightarrow{\mathbf{y}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}}) \geq (\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}})^2$$

eşitsizliğinden $\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 \geq (\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}})^2$ ise

$$\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| \geq (\overrightarrow{\mathbf{x}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{y}})$$

elde edilir. □

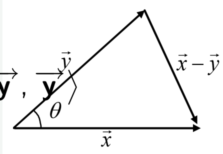
Üçgen Eşitsizliği

Teorem

Bir üçgende, herhangi bir kenar, diğer iki kenarın toplamından küçük, farkından büyüktür.

Kanıt.

Yandaki şekile göre, $\left|\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| - \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|\right| < \|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\| < \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|$ olduğunu göstereceğiz. i) $\|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\| < \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|$ olduğunu görelim.



$$
\begin{aligned}
\|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle + \langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle \\
&= \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 \\
&\leq \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + 2|\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 \quad \text{(Schwarz Eşitsizliğinden)} \\
&< \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|^2 + 2\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\|\,\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|^2 = (\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|)^2
\end{aligned}
$$

eşitsizliğinden, $\|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\| < \|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| + \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|$ olduğu görülür. **ii)** $\left|\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\| - \|\overrightarrow{\mathbf{y}}\|\right| < \|\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}\|$ olduğunu da siz gösteriniz. □

Gram - Schmidt Ortogonalleştirme Yöntemi

Gram - Schmidt ortogonalleştirme yöntemi, verilen bir lineer bağımsız vektör kümesinden, iç çarpım yardımıyla birbirine dik olan vektörler kümesi elde edilmesine verilen isimdir. Bu yöntem ismini, **J. Pedersen Gram** ve **Erhard Schmidt** isimli Danimarkalı ve Alman matematikçilerden almaktadır. Bu yöntem, daha önce farklı matematikçiler tarafından da kullanılmıştır. Bu yöntem sayesinde, $\mathbb{R}^n$ uzayında verilen

$$\left\{ \overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_k \right\}$$

lineer bağımsız vektör kümesini kullanarak,

$$\left\{ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{u}}_k \right\}$$

ortogonal vektör kümesi elde edeceğiz. Bu vektörleri de normlarına bölerek bir ortonormal vektör kümesi elde etmek de daima mümkündür. Şimdi bu yöntemin, nasıl uygulandığını görelim.

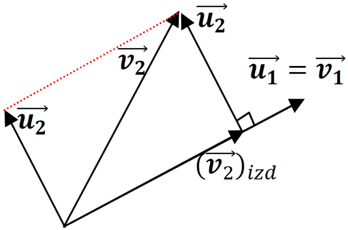
$\{\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, ..., \vec{\mathbf{v}}_k\}$ bir lineer bağımsız vektör kümesi verilsin.

1. Adım : $\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1$ alalım.

2. Adım : $\vec{\mathbf{u}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_2 - a\vec{\mathbf{u}}_1$ olsun. $\vec{\mathbf{u}}_2 \perp \vec{\mathbf{u}}_1$ olmasını istiyoruz. Yani, $\langle \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_1 \rangle = 0$ olmalı. Buna göre,

$$\langle \vec{\mathbf{u}}_2, \vec{\mathbf{u}}_1 \rangle = \langle \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_1 \rangle - a\langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_1 \rangle$$

$$\Rightarrow a = \frac{\langle \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_1 \rangle}{\langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_1 \rangle} = \mathbf{Izd}_{\vec{\mathbf{u}}_1}(\vec{\mathbf{v}}_2)$$



elde edilir. Buradan,

$$\vec{\mathbf{u}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_2 - \frac{\langle \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{u}}_1 \rangle}{\langle \vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_1 \rangle}\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_2 - \mathbf{Izd}_{\vec{\mathbf{u}}_1}(\vec{\mathbf{v}}_2)$$

bulunur. $\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{v}}_1$ vektörüne dik olan vektörün, $\vec{\mathbf{u}}_2 = \vec{\mathbf{v}}_2 - \mathbf{Izd}_{\vec{\mathbf{u}}_1}(\vec{\mathbf{v}}_2)$ olduğunu, şekilde de geometrik olarak görebilirsiniz. Böylece, $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2$ vektörlerinden, $\vec{\mathbf{u}}_1, \vec{\mathbf{u}}_2$ dik vektörleri elde ettik. Yönteme devam edelim.

3. Adım : $\overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 - a\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - b\overrightarrow{\mathbf{u}}_2$ diyelim. $\overrightarrow{\mathbf{u}}_3 \perp \overrightarrow{\mathbf{u}}_1$ ve $\overrightarrow{\mathbf{u}}_3 \perp \overrightarrow{\mathbf{u}}_2$ olmasını istiyoruz. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle = 0 &\Rightarrow \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle - a\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle - b\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle \\
&\Rightarrow a = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle} = \mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_3\right), \\
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle = 0 &\Rightarrow \left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle - a\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle - b\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle \\
&\Rightarrow b = \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle} = \mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}_2}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_3\right)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 - \mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_3\right) - \mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}_2}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_3\right)$$

olur. Bu şekilde devam edilirse, tümevarımdan,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_k = \overrightarrow{\mathbf{v}}_k - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_k, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_k, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 - \cdots - - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_k, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1}, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1}$$

yani,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_k = \overrightarrow{\mathbf{v}}_k - \mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_k\right) - \mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}_2}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_k\right) - \cdots - -\mathbf{Izd}_{\overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1}}\left(\overrightarrow{\mathbf{v}}_k\right)$$

bulunur. Buna göre, aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Gram - Schmidt Ortogonalleştirme Yöntemi

Teorem

$\mathbb{R}^n$ *uzayında,* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{v}}_k\right\}$ *lineer bağımsız vektör kümesi verilsin.*

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{v}}_1$$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_1$$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2$$

$$\cdots$$

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_k = \overrightarrow{\mathbf{v}}_k - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_k, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_k, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 - \cdots - \frac{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{v}}_k, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1} \right\rangle}{\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1}, \overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1} \right\rangle} \overrightarrow{\mathbf{u}}_{k-1}$$

eşitliklerinden elde edilen $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{u}}_k\right\}$ *vektör kümesindeki herhangi iki vektör birbirine diktir. Yani, bu vektör kümesi ortogonaldir. Ayrıca,* $\overrightarrow{\mathbf{u}}_i$ *vektörlerinin herbiri normuna bölünerek,* $\left\{\overrightarrow{\mathbf{e}}_1, \overrightarrow{\mathbf{e}}_2, ..., \overrightarrow{\mathbf{e}}_k\right\}$ *ortonormal kümesi elde edilir.*

Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında, verilen lineer bağımsız $\{(1,-1,1),(1,0,1),(1,1,2)\}$ vektör kümesini Gram - Schmidt yöntemiyle ortonormalleştiriniz.

Problem

$\mathbb{R}^2$ *uzayında verilen* $\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = (1,1), \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = (2,1)\}$ *tabanından, Gram - Schmidt yöntemiyle bir ortonormal taban elde ediniz.*

Vektörel Çarpım

Tanım

Skaler çarpımın sonucu bir skaler değerdir. İki vektörün vektörel çarpımı ise bir vektördür. Uzayda $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ gibi iki vektörün vektörel çarpımı;

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanıma göre, iki vektörün vektörel çarpımının sonucunda yeni bir **vektör** elde edilir.

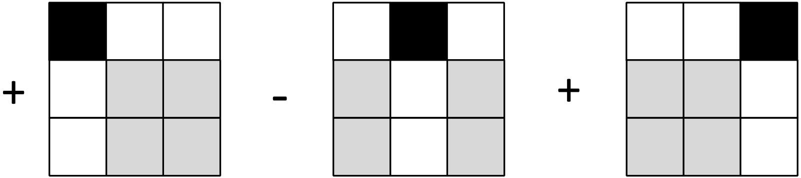
Örnek

$\overrightarrow{x} = (1, 2, 3)$ ve $\overrightarrow{y} = (0, 2, 1)$ olduğuna göre, $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ vektörünü bulunuz.

Not :

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

şeklinde hesaplanabilir.



Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,2,1)$ *olduğuna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörünü bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (-1, 2, 3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, -2, 1)$ *olduğuna göre,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *vektörünü bulunuz.*

VEKTÖREL ÇARPIMIN BAZI ÖZELLİKLERİ

$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörel çarpımını, determinant yardımıyla tanımlamıştık. Determinantın özelliklerini kullanarak, vektörel çarpımın aşağıdaki özelliklerini kolayca yazabiliriz.

1. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = -\overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}}$ (Vektörel çarpımın değişme özelliği yok)

Kanıt : Vektörel çarpımın determinantlı tanımının doğrudan sonucudur. Determinantta iki satırın yeri değişirse, determinant işaret değiştirir.

2. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ (Bir vektörün kendisiyle vektörel çarpımı 0 vektörüdür.)

Kanıt : Herhangi iki satırı aynı olan matrisin determinantının 0 olmasının sonucudur.

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $\left(\lambda \overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \lambda \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$

4. $\vec{\mathbf{0}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}}$

5. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ için $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{y}}$. (Yani, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ise vektörel çarpım 0 vektörüdür.)

6. $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \left(\overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}}\right)$.

Örnek

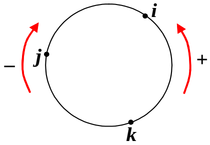
$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{2}, \mathbf{3})$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (-\mathbf{2}, \mathbf{4}, -\mathbf{6})$ **ise** $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = ?$

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{y}} = -2\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *olduğundan,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \parallel \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *olur ki,* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{0}}$ *olur.*

Örnek

$\mathbb{R}^3$ **uzayının** $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ **standart vektörleri için,** $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}, \ \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}}, \ \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{k}}$ **olduğunu gösteriniz.**



Not : Standart birim vektörlerin vektörel çarpımında yandaki şekil kullanılabilir.

$$\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}} \qquad \vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}} \qquad \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{j}} = -\vec{i}$$
$$\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}} \qquad \vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{k}} = -\vec{\mathbf{j}}$$

Örnek

Vektörel çarpım işleminin birleşme özelliği var mıdır?

Vektörel Çarpımla Elde Edilen Vektör, Çarpılan Vektörlere Diktir

Teorem

Uzayda verilen iki vektörün vektörel çarpımı, çarpılan **her iki vektöre de dik** *olan yeni bir vektör verir.*

Çözüm

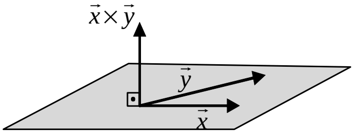
$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \perp \overrightarrow{\mathbf{x}}$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \perp \overrightarrow{\mathbf{y}}$ *olduğunu göstermek için,*
$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = 0$ *olduğunu göstermek yeterlidir.* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ *vektörleri için,*

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} = (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle &= x_2y_3x_1 - x_3y_2x_1 - x_1y_3x_2 + x_3y_1x_2 + x_1y_2x_3 - x_2y_1x_3 = 0, \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle &= x_2y_3y_1 - x_3y_2y_1 - x_1y_3y_2 + x_3y_1y_2 + x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3 = 0 \end{aligned}$$

olduğu görülebilir.



Örnek

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\overrightarrow{x} = (2,3,11)$ ve $\overrightarrow{y} = (-2,7,5)$ vektörlerinin her ikisine de dik olan bir vektör bulunuz.

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, -2)$ *olmak üzere,* $\mathbb{R}^3$ *uzayının* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörünü içeren bir ortogonal tabanını bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ *olmak üzere,* $\mathbb{R}^3$ *uzayının* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *vektörünü içeren bir ortonormal tabanını bulunuz.*

Üçlü Vektörel Çarpım

Teorem

$\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^3$ *vektörleri için*

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt.

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Eşitliğin her iki tarafı da, vektörel çarpım ve iç çarpım hesaplamaları yapılarak bulunursa, eşitliğin olduğu görülür. $\square$

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 3, 4)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 1, 3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 1, 1)$ *vektörleri için,*

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}}$$

eşitliğinin sağlandığını görünüz.

Vektörel Çarpımla Bir Vektörün İç Çarpımı (Karma Çarpıma Giriş)

Teorem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right)$ *şeklindedir.*

Kanıt.

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, y_3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle &= \left\langle \left(x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1\right), (z_1, z_2, z_3) \right\rangle \\
&= x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 + x_1y_2z_3 - x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

eşitliğinden, $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right)$ elde edilir. □

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,3,4)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,1,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,1)$ *vektörleri için* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \det(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$ *eşitliğinin sağlandığını görünüz.*

Örnek

$\mathbb{R}^3$ *uzayında* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle$ *eşitliğinin sağlandığını görünüz.*

Çözüm

$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \det(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$ *olduğunu görmüştük. Determinant özelliklerini kullanarak,*

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \det(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) &= -\det(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}) = \det(\overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}) \\ &= \langle \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında,* $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle$ *olduğunu kanıtlayınız.*

Lagrange Özdeşliği

Teorem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında,* $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \begin{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \end{vmatrix}$ *eşitliği sağlanır.*

Kanıt.

Bir önceki teoremi kullanırsak,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \left\langle \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle$$

yazılabilir. Şimdi de, $\left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}} = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}}$ eşitliğini kullanıp, iç çarpımın lineerliğini kulanırsak,

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle &= \left\langle \left(\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right) \times \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle = \left\langle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{y}} - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \right\rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında Lagrange özdeşliğini kullanarak*

$$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|^2$$

ifadesini iç çarpıma bağlı olarak bulunuz.

Vektörel Çarpım ve Alan

Teorem

$\mathbb{R}^3$ uzayında verilen $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleri arasındaki açı θ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı Alan $\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$ ise,

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \sin\theta = Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$$

eşitliği sağlanır.

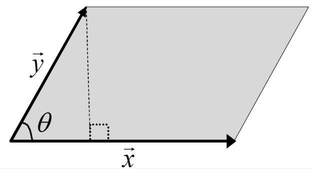
Kanıt.

$\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2 = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle$ şeklinde yazıp, Lagrange özdeşliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2 &= \begin{vmatrix} \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \\ \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle & \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle \end{vmatrix} = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2 \cos^2\theta = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2 \sin^2\theta\end{aligned}$$

elde edilir. □

Kanıt.



Diğer yandan, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı : $Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right) = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \sin\theta$ olduğundan,

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \sin\theta = Alan\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right)$$

bulunur. Sonuç olarak, $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen iki vektörün vektörel çarpımının normu, bu iki vektörler oluşturulan paralelkenarın alanını verir. (Bunun sadece $\mathbb{R}^3$ de geçerli olduğunu unutmayınız!) $\square$

Örnek

$\mathbb{R}^3$ de verilen $\overrightarrow{x} = (1, 2, 3)$ ve $\overrightarrow{y} = (3, 2, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

Problem

$\mathbb{R}^3$ *de verilen* $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,3)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,3,1)$ *vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.*

Karma Çarpım (Mixed Product)

Tanım

$\mathbb{R}^3$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörel çarpımıyla, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörünün iç çarpımına, $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin **karma çarpımı** denir. Yani, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle$ değerine $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin karma çarpımı denir ve $[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}]$ ile gösterilir. Yukarıda,

$$\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \det(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$$

olduğu göstermiştik. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin karma çarpımı,

$$[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}] = \det(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}})$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \times \overrightarrow{\mathbf{z}} \rangle$ eşitliğine göre, bir karma çarpımda önemli olan vektörlerin sırasıdır. Vektörel çarpım işlemi, ilk iki veya son iki vektör arasında olabilir ve her iki değer de bu üç vektörün karma çarpımını verir.

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3,2,4)$ **ve** $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,1,0)$ **olduğuna göre** $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = ?$

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 0, 3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0, 2, 1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 2, 0)$ *olduğuna göre* $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] =?$

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, k, 3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, 2, 1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 2, 0)$ *vektörlerinin karma çarpımı 0 ise k =?*

Karma Çarpımın Özellikleri

Teorem

Karma çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır.

1. *Vektörlerden ikisi eşit olan üç vektörün karma çarpımı 0'dır.*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}\right] = 0, \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = 0, \ \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}\right] = 0$$

2. $\lambda, k, m \in \mathbb{R}$ *için,*

$$\left[\lambda \overrightarrow{\mathbf{x}}, k \overrightarrow{\mathbf{y}}, m \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = \lambda km \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right]$$

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ *için,*

$$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} + \lambda \overrightarrow{\mathbf{w}}\right] = \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] + \lambda \left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right]$$

Örnek

$\left[\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right] = 3$ olduğuna göre, $\left[\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y}, 3\overrightarrow{x} + 4\overrightarrow{z}\right]$ karma çarpımını hesaplayınız.

Problem

$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = 3$ *olduğuna göre,* $\left[3\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + 3\overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = ?$

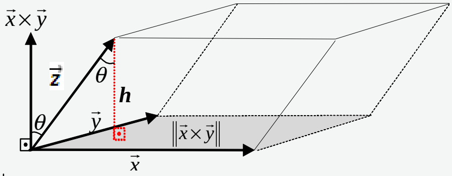
Karma Çarpım ve Hacim

Teorem

$\mathbb{R}^3$ uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$, $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin karma çarpımı, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini verir.

Kanıt.

$\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlüyü şekildeki gibi çizelim. Kanıtımızda vektörlerdeki üç önemli özelliğini kullanacağız. **i)** $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$, hem $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ hem $\overrightarrow{\mathbf{y}}$'ye diktir. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ paralelyüzlünün yüksekliği doğrultusundadır. **ii)** $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ile oluşturulan taban alanı $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|$'dir. **iii)** $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ arasındaki açı θ ise, $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{z}}\right\| \cos\theta$ 'dır.



Buna göre, V hacimi göstermek üzere, kanıtımızı

$$\begin{aligned} V &= \textit{Taban Alanı} \cdot \textit{Yükseklik} = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \cdot h = \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{z}}\right\| \cos\theta \\ &= \left|\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle\right| = \left|\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right]\right| \end{aligned}$$

Karma Çarpımın Geometrik Yorumunun Bazı Sonuçları

1. Üç vektörün karma çarpımının sıfır olması demek, hacim oluşmaması demektir. Yani, üç vektörün aynı düzlemde olması demektir.
2. Üç vektörün karma çarpımının sıfır olması demek, bu üç vektörün lineer bağımlı olması demektir.
3. Üç vektörün karma çarpımı sıfır ise, bu üç vektörün gerdiği uzayın boyutu 3'den kesinlikle küçüktür.
4. Üç vektörün karma çarpımı sıfır ise, bu üç vektörün oluşturduğu matrisin rankı 3'den kesinlikle küçüktür.
5. Üç vektörün karma çarpımı sıfırdan farklı ise, bu vektörler lineer bağımsızdır.
6. Karma çarpımı sıfırdan farklı olan üç vektör, $\mathbb{R}^3$ uzayını gererler.
7. Karma çarpımı sıfırdan farklı olan üç vektör, $\mathbb{R}^3$ uzayı için bir tabandır.

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1,2,1)$, $\overrightarrow{y} = (1,3,4)$ ve $\overrightarrow{z} = (2,3,1)$ **vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini bulunuz.**

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0, 2, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (5, 3, 4)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 3, 1)$ *vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini bulunuz.*

Örnek

$\overrightarrow{x} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{y} = (1,2,3)$ **ve** $\overrightarrow{z} = (2,3,k)$ **vektörleri lineer bağımlı ise k =?**

Örnek

A $(1,1,1)$ **,** **B** $(1,2,3)$, **C** $(2,3,4)$, **D** $(1,4,k)$ **noktaları aynı düzlemde ise k** $=$**?**

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, k)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1, 3, 1)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (k, 1, 3)$ *vektörleri aynı düzlemde ise* $k = ?$

Problem

$A\,(k,1,2)$, $B\,(1,0,3)$, $C\,(2,1,k)$ *ve* $D\,(1,1,1)$ *noktaları aynı düzlemde ise* $k=?$

Örnek

$A(x_1, x_2, x_3)$, $B(y_1, y_2, y_3)$ noktalarını birleştiren $[AB]$ doğru parçasını alalım. $C \in [AB]$ olmak üzere, C, $[AB]$'nin içinde ve $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{m}{n}$ ise C noktasının koordinatlarının

$$C = \frac{nA + mB}{n + m},$$

olduğunu kanıtlayınız.

Problem

Bir önceki Örneği kullanarak, C noktası $[AB]$'nin dışında ise, $C = \dfrac{nA - mB}{n - m}$ olduğunu görünüz.

Problem

Bir önceki Örneği kullanarak, $[AB]$ *doğru parçasının orta noktasının koordinatlarının* $(A+B)/2$ *olduğunu görünüz.*

Problem

Bir önceki Örneği kullanarak, $\mathbb{R}^3$ uzayında köşelerinin koordinatları A, B ve C olan üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarının

$$G = \frac{A+B+C}{3}$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek

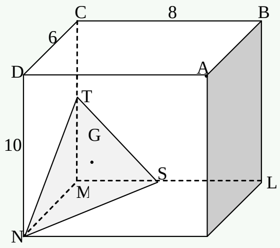
Düzlemde dik koordinatlarda köşeleri $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan bir üçgen veriliyor. $D \in [BC]$ ve $|BC| = 3\,|DC|$ ve $E \in [AD]$ olmak üzere $|AD| = 4\,|ED|$ olsun. O halde, E noktasının koordinatlarını bulunuz.

Problem

Düzlemde köşelerini koordinatları $A(3,0)$, $B(2,3)$ *ve* $C(7,8)$ *olan üçgenin,* $[BC]$ *kenarı üzerinde,* $2|BD| = 3|CD|$ *olacak şekilde bir* D *noktası ve* $[AC]$ *kenarı üzerinde de,* $|AE| = 3|CE|$ *olacak şekilde bir* E *noktası alınıyor.* $|ED|$ *kaçtır?*

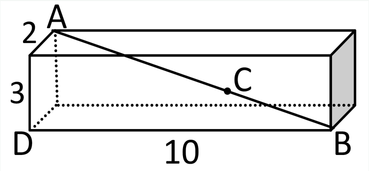
Örnek

Şekilde dikdörtgenler prizması şeklindeki bir odanın bir köşesine üçgensel bir karton ile şekildeki gibi bir bölme oluşturulmuştur. T noktası $[CM]$'nin, S noktası da $[ML]$'nin orta noktasıdır. A köşesinin bu üçgensel kartonun ağırlık merkezine uzaklığını bulunuz.



Problem

Şekildeki dikdörtgenler prizmasının A ve B köşelerini birleştiren doğru parçası üzerinde, $|AC| = 3\,|CB|$ olacak şekilde bir C noktası alınıyor. Buna göre C noktasının, D noktasına uzaklığını hesaplayınız.



NOT : Ortogonal bir matriste :

i) Tüm satır ve tüm sütun vektörleri birbirine diktir.

ii) Tüm satır ve sütun vektörlerinin uzunluğu 1'dir.

Örnek

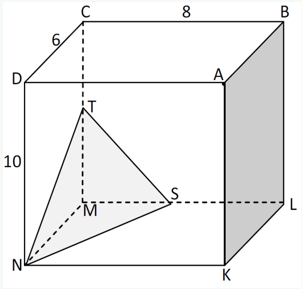
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & c \\ -1 & b & 1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 \end{bmatrix}$$ **matrisi bir ortogonal matris ise, a =?, b =?, c =?**

Problem

$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & a \\ -4 & b & 4 \\ 8 & -4 & c \end{bmatrix}$ *matrisi ortogonal olduğuna göre,* a, b, c *değerlerini bulunuz.*

Örnek

Şekildeki dikdörtgenler prizması şeklindeki odanın bir köşesinde bulunan üçgen duvarın odaya bakan yüzü boyanacaktır. T, [MC]'nin orta noktası, S ise [ML]'nin orta noktası olduğuna göre, bu yüzün alanını bulunuz.



Problem

Köşelerinin koordinatları $A(1,1,0)$, $B(2,3,3)$ *ve* $C(2,1,1)$ *olan üçgenin alanını bulunuz.*

Problem

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2)$ *ve* $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,1)$ *vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.*

Örnek

Uzayda köşelerinin koordinatları A $(1,1,1)$, B $(2,2,1)$ ve C $(1,3,3)$ olan üçgenin çevrel çemberinin alanını hesaplayınız.

Problem

$\mathbb{R}^4$ *uzayında köşelerinin koordinatları* $A\,(1,0,1,2)$, $B\,(1,2,3,4)$ *ve* $C\,(4,2,3,1)$ *olan üçgenin çevrel çemberinin alanını hesaplayınız.*

Örnek

Köşeleri A, B, C, D *olan,* $ABCD$ üçgensel piramidinin hacmi :

$$V = Hacim\,(ABCD) = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]$$

değerine eşittir. Gösteriniz.

Örnek

Köşelerinin koordinatları

$$\mathbf{A}\,(1,1,1)\,,\mathbf{B}\,(1,2,3)\,,\mathbf{C}\,(2,3,4)\,,\mathbf{D}\,(1,4,2)$$

olan üçgensel piramidin hacmini bulunuz.

Problem

Köşelerinin koordinatları

$$A\,(0,0,0)\,,\ \ B\,(1,2,3)\,,\ \ C\,(3,0,0)\,,\ \ D\,(0,0,5)$$

olan üçgensel piramidin hacmini bulunuz.

Örnek

$\mathbb{R}^3$ *uzayında, tepe noktası E* ve tabanının *köşeleri A, B, C, D olan, $ABCDE$* dörtgensel piramidinin hacmi :

$$V = Hacim\,(ABCDE) = \frac{1}{6}[\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}) + \det(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE})]$$

değerine eşittir. Gösteriniz.

Örnek

Uzayda köşelerinin koordinatları $A(1,2,1)$, $B(3,5,1)$, $C(0,2,7)$, $D(1,1,1)$ ve $E(4,5,-4)$ olan dörtgensel piramidin hacmini bulunuz.

,

Örnek

$\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ **kümesi,** $\mathbb{V}$ **vektör uzayı için bir taban ise,**

$$\{\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_2 + \overrightarrow{u}_3, \overrightarrow{u}_3 + \overrightarrow{u}_1\}$$

kümesinin de bir taban olduğunu gösteriniz.

Problem

$\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_3, \overrightarrow{\mathbf{u}}_4\}$ *kümesi,* $\mathbb{V}$ *vektör uzayı için bir taban ise,* $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 + \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_2, \overrightarrow{\mathbf{u}}_4 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 - 3\overrightarrow{\mathbf{u}}_1\}$ *kümesinin de* $\mathbb{V}$ *kümesinin bir tabanı olduğunu gösteriniz.*

Örnek

Verilen iki $\overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{y}$ vektörü için, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ ve $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{x} \rangle = \|\overrightarrow{x}\|$ eşitlikleri sağlandığına göre, $\|\overrightarrow{u}\|$ değerini, $\|\overrightarrow{x}\|$ ve $\|\overrightarrow{y}\|$ cinsinden belirleyiniz.

Çözüm

$\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ eşitliği, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörünün $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörüne dik olduğunu gösterir. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ birbirine dik değilse, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü için bir çözüm yoktur. O halde, $\overrightarrow{\mathbf{x}} \perp \overrightarrow{\mathbf{y}}$ için denklemin çözümünü yapalım. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ile $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ arasındaki açı θ olsun. Buna göre,

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \sin\theta \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \sin\theta$$
$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \cos\theta \Rightarrow \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\| \cos\theta$$

eşitliklerinin kareleri toplamından,

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2 \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$

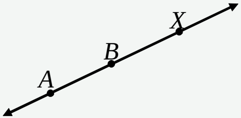
olur. Buradan, $\left\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\right\| = \sqrt{1 + \dfrac{\left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|^2}{\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}\right\|^2}}$ *elde edilir.*

Örnek

A $(1, 2)$ ve B $(2, 5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini vektörel yöntemi kullanarak bulunuz.

Çözüm

Şekli inceleyiniz. $X\left(x,y\right)$ *doğru üzerinde herhangi bir nokta olsun.*



Buna göre, $\overrightarrow{AX}=\lambda\overrightarrow{AB}$ *vektörel eşitliğinden,*

$$\left(x-1,y-2\right)=\lambda\left(2-1,5-2\right)$$

olur. Buradan, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\lambda$ *elde edilir.*

Örnek

A $(1, 2, 3)$ ve B $(2, 5, 7)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini vektörel yöntemi kullanarak bulunuz.

Problem

Düzlemde $A(2,0)$ ve $B(5,3)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

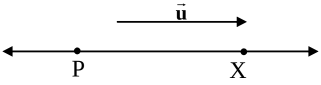
Problem

$\mathbb{R}^3$ *'de* $A\left(2,0,1\right)$ *ve* $B\left(4,3,4\right)$ *noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.*

Problem

$\mathbb{R}^3$ *'de* $A\,(2,0,1)$ *ve* $B\,(4,3,1)$ *noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.*

Doğru ve Doğrultman



Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi, doğrunun A ve B gibi iki noktası verilirse, doğrultu vektörünü $\overrightarrow{AB}$ ile ifade edebiliriz. Doğrunun doğrultusunu gösteren ve doğruya paralel olan vektöre, doğrunun **doğrultu vektörü** diyeceğiz. Bazen, doğrunun iki noktası verilmeden, bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ doğrultu vektörü verilebilir.
Vektörel yöntemi kullanarak, verilen herhangi bir $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörüne paralel olan ve verilen bir P noktasından geçen doğru denklemini, X değişken noktayı göstermek üzere,

$$\overrightarrow{PX} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow X - P = \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \Rightarrow X = P + \lambda \overrightarrow{\mathbf{u}}$$

eşitliğiyle bulabiliriz.

Örnek

Aşağıdaki doğruların denklemlerini bulunuz.

a) P $(1,2)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{u}=(3,4)$ vektörüne paralel olan doğru,.

b) P $(1,2,3)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{u}=(3,4,5)$ vektörüne paralel olan doğruyu bulunuz.

Problem

$P\,(1,2,3)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,3,5)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Problem

$P\,(1,2,3)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (0,3,4)$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Örnek

Öklid iç çarpımı yardımıyla, uzayda geçtiği bir noktası ve dik olduğu vektörü bilinen düzlem denklemini nasıl bulursunuz?

Örnek

P $(1, 2, 3)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{N} = (3, 5, 1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Problem

$P(1,0,1)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (0,2,1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Problem

$P(1,2,3)$ noktasından geçen ve $\overrightarrow{\mathbf{N}} = (0,0,1)$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Problem

$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$ *doğrusuna dik olan ve* $P(1,1,2)$ *noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.*

Örnek

$\overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{0}}$,

$$\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{z}}, \overrightarrow{\mathbf{z}} \right\rangle = 1$$

ise $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle$ **değerini hesaplayınız.**

Örnek

$\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ reel matris uzayında, $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ve $B=[b_{ij}]_{n\times n}\in\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrislerinin iç çarpımı :

$$\langle A,B\rangle=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanım matrisin karşılıklı elemanlarının çarpılıp toplanmasını ifade eder. Örneğin, $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uzayında, $A=\begin{bmatrix}2&3\\4&1\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1&6\\0&5\end{bmatrix}$ matrislerinin iç çarpımı :

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle&=\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{2}\left(a_{i1}b_{i1}+a_{i2}b_{i2}\right)\\&=\left(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}\right)+\left(a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}\right)\\&=(2\cdot 1)+(3\cdot 6)+(4\cdot 0)+(1\cdot 5)=25\end{aligned}$$

olur.

Örnek

Diğer yandan, bir matrisin normu da :

$$\|A\| = \langle A, A\rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij}\right)\right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin normu :

$$\|A\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{30}$$

elde edilir.

Örnek

$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ polinomlar uzayında, $P(x) = x^2 + 1$ polinomunun normunu bulunuz.

Problem

$\mathbb{V}_1 = \mathbf{Sp}\left\{(1,1,2),(2,1,1)\right\}$ *ile* $\mathbb{V}_2 = \mathbf{Sp}\left\{(1,0,-1),(0,1,3),(3,1,0)\right\}$ *uzaylarının aynı uzay olduğunu görünüz.*

Problem

$\mathbb{R}^4$ *uzayında verilen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 1, 1) \\ \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = (-1, 4, 4, -1) \\ \overrightarrow{\mathbf{v}}_3 = (4, -2, 2, 0) \end{array} \right\}$$

lineer bağımsız vektör kümesinden, Gram - Schmidt yöntemiyle bir ortonormal vektör kümesi elde ediniz.

Problem

$\mathbb{R}^3$ *uzayında verilen*

$$\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = (1,1,0), \overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = (2,2,3)\}$$

lineer bağımsız vektör kümesinden, Gram - Schmidt yöntemiyle bir ortonormal vektör kümesi elde ediniz.

Problem

$\mathbb{P}_2$ *polinomlar uzayında verilen*

$$\left\{\begin{array}{l} P(x) = 2x^2 + 3x + 1, \\ Q(x) = 2x^2 + x + 3, \\ R(x) = x^2 + 2x \end{array}\right\}$$

vektörlerinin (polinomlarının) lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Problem

$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *matris uzayında,*

$$\left\{A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

kümesinin taban olduğunu gösteriniz. $X=\begin{bmatrix}4&3\\2&1\end{bmatrix}$ *matrisinin bu tabana göre koordinatlarını bulunuz.*

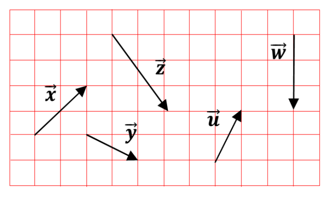
SORU

$A\,(1,2,4,2)$ ve $B\,(3,4,1,2)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

A) $\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{13}$ **C)** $\sqrt{14}$ **D)** $\sqrt{15}$ **E)** $\sqrt{17}$

SORU

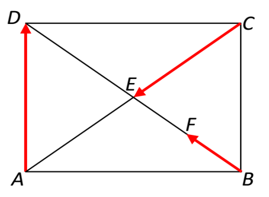
Aşağıdaki koordinat sisteminde verilen vektörlere göre, $2\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\mathbf{z}} + 2\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{w}}$ vektörünün konum vektörü nedir?



A) $(6,3)$ **B)** $(6,1)$ **C)** $(4,2)$ **D)** $(7,1)$ **E)** $(5,3)$

SORU

$ABCD$ bir dikdörtgen ve F, $[BE]$'nin orta noktası olmak üzere, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BF}$ toplamı aşağıdakilerden hangisine eşittir?



A) $\dfrac{\overrightarrow{BC}}{4}$ **B)** $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{FE}$ **C)** $3\overrightarrow{FB}$ **D)** $\dfrac{\overrightarrow{AE}}{2}$ **E)** $3\overrightarrow{FE}$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 1, 3, 2)$ vektörünün uzunluğu kaç birimdir?

A) $\sqrt{29}$ **B)** $\sqrt{13}$ **C)** $\sqrt{14}$ **D)** $\sqrt{19}$ **E)** $\sqrt{17}$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (a\cos t, a\sin t, b\sin 2t, b\cos 2t)$ vektörünün her $t \in \mathbb{R}$ için birim vektör olması için, aşağıdakilerden hangisi sağlanmalıdır?

A) $a^2 + b^2 = 1$ **B)** $a + b = 1$ **C)** $ab = 1$ **D)** $2a^2 + b^2 = 1$ **E)** $a^2 + 2b^2 = 1$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}^3$ uzayının bir altuzayıdır?

A) $x = 1$ **B)** $x + y + z = 1$ **C)** $y = 2x + 1$ **D)** $x + y = z$ **E)** $x = yz$

SORU

$A=(1,2)$ ve $B=(3,4)$ olmak üzere, $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{CB}$ ise C noktasının koordinatlarını bulunuz.
A) $(5/2,7/2)$ **B)** $(-4,-5)$ **C)** $(5,-4)$ **D)** $(5/2,-7/2)$ **E)** $(-5/2,-7/2)$

SORU

Köşelerinin koordinatları $A(3,4,5,6)$, $B(3,4,1,2)$ ve $C(1,2,2,1)$ olan üçgenin, $[AB]$ kenarı üzerinde, $|AD| = 3|BD|$ olacak şekilde, bir D noktası alınıyor. $[CD]$ noktasının orta noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(2,3,3,3)$ **B)** $(1,2,1,1)$ **C)** $(1,2,2,1)$ **D)** $(1,3,3,1)$ **E)** $(1,2,0,3)$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi birim vektördür?

A) $(1,1)$ **B)** $(1,0,1)$ **C)** $(0,1/2,0,0)$ **D)**$(1/3,0,2/3,2/3)$ **E)** $(1/2,0,1/2)$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = \frac{1}{3}(1,3,0,2,2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \frac{1}{3}(1,k,0,1,0)$ olmak üzere, $\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörü birim vektör ise, k'nın olabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

A) 4 **B)** -2 **C)** 6 **D)** 5 **E)** 1

SORU

$\mathbb{R}^3$ 'de $A(1,1,1)$ ve $B(4,3,2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

A) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=z-1$ **B)** $2x=3y=6z$ **C)** $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{2}$

D) $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-3}{2}=z-1$ **E)** $x-4=y-3=z-2$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (3,2,5)$ vektörünüm $\vec{\mathbf{a}} = (1,1,3)$, $\vec{\mathbf{b}} = (1,2,4)$, $\vec{\mathbf{c}} = (0,1,k)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilmesi için k ile ilgili aşağıdaki ifadelerden hangisi doğrudur?

A) $k = 1$ olursa, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü, $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ vektörleri cinsinden yazılamaz.

B) $k = 0$ olursa, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü, $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ vektörleri cinsinden yazılamaz.

C) $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ vektörü, k ne olursa olsun, $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ vektörleri cinsinden yazılabilir.

D) $k \neq 1$ durumunda, $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

E) $k = 1$ olursa, $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ ün tabanı olurlar.

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,0,3)$ vektörü $\vec{\mathbf{a}} = (1,1,3)$ ve $\vec{\mathbf{b}} = (1,2,k)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilmesi için k kaç olmalıdır?

A) 4 **B)** -2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 1

SORU

Aşağıdaki vektörlerden hangisi, $\vec{\mathbf{a}} = (1, 1, 3)$ ve $\vec{\mathbf{b}} = (1, 2, 1)$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılamaz?

A) $(2, 3, 4)$ **B)** $(0, 1, -2)$ **C)** $(1, 0, 5)$ **D)** $(1, 0, 2)$ **E)** $(1, 3, -1)$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, 3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 1, k)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, -2, 3)$ vektörleri lineer bağımlı ise k nedir?

A) 4 **B)** 6 **C)** -2 **D)** 5 **E)** 1

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, 3, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 1, k, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (k, 2, 1, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (0, 1, 2, 1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için $k =?$

A) 4 **B)** 6 **C)** -2 **D)** 5 **E)** 1

SORU

$\mathbb{R}^3$ uzayında verilen $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,2,3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1,2,1)$ vektörleri için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörleri lineer bağımlıdırlar.
B) $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanıdır.
C) $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörleri lineer bağımsızdırlar.
D) $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ ü germezler.
E) $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ ün tabanı değildirler.

SORU

Aşağıdakilerden hangisi lineer bağımsızlığın taban olma koşulu için tek başına yeterli olmadığına bir örnektir?

A) $\mathbb{R}^2$, $\{(1,2)\,;(2,1)\}$ **B)** $\mathbb{R}^3$, $\{(1,2,1)\,;(2,1,1)\}$ **C)** $\mathbb{R}^2$, $\{(1,2)\,;(0,0)\}$

D) $\mathbb{R}^2$,$\{(1,2)\,;(2,1)\,;(1,1)\}$ **E)** $\mathbb{R}^3$, $\{(1,0,0)\,,(2,0,0)\}$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi germe aksiyomunun taban olma koşulu için tek başına yeterli olmadığına bir örnektir?

A) $\mathbb{R}^2$; $\{(1,2)\,;(2,1)\}$ **B)** $\mathbb{R}^3$; $\{(1,2,1)\,;(2,1,1)\}$ **C)** $\mathbb{R}^2$ de $\{(1,2)\,;(0,0)\}$
D) $\mathbb{R}^2$; $\{(1,2)\,;(2,1)\,;(1,1)\}$ **E)** $\mathbb{R}^3$; $\{(1,0,0)\,,(2,0,0)\}$

SORU

Aşağıdaki vektörlerden hangisi $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, 3, 4)$ vektörleri tarafından gerilen uzaydadır?

A) $(2, 1, 1)$ **B)** $(1, 1, 1)$ **C)** $(2, 5, 1)$ **D)** $(2, 5, 4)$ **E)** $(1, 3, 1)$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}^3$ ün bir tabanıdır?

A) $\{\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}}\}$ **B)** $\{(1,1,1)\,;(1,-1,2)\,;(2,0,3)\}$ **C)** $\{(1,0,0)\,;(0,1,0)\,;(1,1,0)\}$

D) $\{(1,1,0)\,;(0,1,1)\}$ **E)** $\{(1,1,1)\,;(1,2,1)\,;(2,1,1)\}$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}^2$ nin bir ortogonal tabanıdır?

A) $\{(1,1)\,;(-1,1)\}$ **B)** $\{(1,1)\,;(1,2)\}$ **C)** $\{(1,0)\,;(1,1)\}$

D) $\{(1,1)\,;(0,1)\}$ **E)** $\{(1,1)\,;(2,2)\}$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\mathbb{R}^2$ nin bir ortonormal tabanıdır?

A) $\left\{\left(\frac{5}{13},\frac{12}{13}\right);\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\right\}$ **B)** $\{(1,1);(1,-1)\}$ **C)** $\{(1,0);(1,1)\}$

D) $\left\{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right);\left(\frac{4}{5},\frac{-3}{5}\right)\right\}$ **E)** $\{(1,1);(2,2)\}$

SORU

$\mathbb{R}^3$ uzayında verilen $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleri için, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $c_1\overrightarrow{\mathbf{x}} + c_2\overrightarrow{\mathbf{y}} + c_3\overrightarrow{\mathbf{z}} = \vec{\mathbf{0}}$ eşitliği ancak ve ancak, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ durumunda sağlanıyorsa aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ lineer bağımsız vektörlerdir.

B) $\det\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right) \neq 0$'dır.

C) $\left\{\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ için bir tabandır.

D) $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$, $\mathbb{R}^3$ uzayını gererler.

E) $\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörleri aynı düzlemdedir.

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1,2,3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (2,3,1)$ vektörleri tarafından gerilen düzlemin denklemi hangisidir?

A) $2y - x = z$ **B)** $z = 5y - 7x$ **C)** $x + y = z$

D) $z = 4y - 5y$ **E)** $x + y + z = 6$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (1, 1, 0)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (1, 3, 2)$ vektörleri tarafından gerilen uzayın boyutu kaçtır?

A) 2 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 0 **E)** 4

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3,1,4)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (1,0,3,1,2)$ vektörleri için, $\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \rangle =?$

A) 14 **B)** 16 **C)** 12 **D)** 19 **E)** 11

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 4, 2, -1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, k, 2, k-1, 5)$ vektörleri birbirine dik ise $k = ?$

A) 4 **B)** 6 **C)** -2 **D)** 5 **E)** -1

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 3, 0, 1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, 1, 2, 1, 0)$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

A) $\dfrac{14}{15}$ **B)** $\dfrac{11}{15}$ **C)** $\dfrac{13}{15}$ **D)** $\dfrac{11}{5}$ **E)** $\dfrac{-11}{13}$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (2, 1, 4)$ vektörüne dik değildir?

A) $(2, 0, -1)$ **B)** $(3, 2, -2)$ **C)** $(-3, 2, 1)$ **D)** $(1, 1, -2)$ **E)** $(1, 2, -1)$

SORU

$\mathbb{R}^3$ uzayında $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 1, k)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (m, -1, 3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (3, n, 1)$ vektörleri ikişer olarak birbirlerine dik olduklarına göre, k kaçtır?

A) $\frac{5}{8}$ **B)** $\frac{9}{8}$ **C)** $\frac{7}{8}$ **D)** $\frac{-7}{8}$ **E)** $\frac{-5}{8}$

SORU

$\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}+\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|=7$, $\left\|\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|=2$ ve $\left\|\overrightarrow{\mathbf{x}}-\overrightarrow{\mathbf{y}}\right\|=3$ olduğuna göre, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ vektörünün uzunluğunu bulunuz.

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 1

SORU

$\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} + \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = 5$ ve $\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\| = 3$ olduğuna göre, $\left\langle \overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\rangle$ değeri kaçtır?

A) 4 **B)** 3 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 1

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (0, 1, 2, 2, 2)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 2, 0, 2, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

A) $\sqrt{101}$ **B)** $5\sqrt{10}$ **C)** $3\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{105}$ **E)** 10

SORU

Köşelerinin koordinatları $A\,(1,1,1,1)$, $B\,(1,2,3,3)$ ve $C\,(1,2,1,3)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

A) $2\sqrt{5}$ **B)** $\sqrt{5}$ **C)** $2\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{10}$ **E)** 5

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (3, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanını bulunuz.

A) $2\sqrt{5}$ **B)** $2\sqrt{2}$ **C)** $\sqrt{10}$ **D)** $\sqrt{63}$ **E)** 8

SORU

Köşeleri $A\,(3,4,4)$, $B\,(1,2,3)$ ve $C\,(2,1,4)$ olan üçgenin B açısının kosinüsünü bulunuz.

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **B)** $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ **C)** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ **E)** $\dfrac{\sqrt{2}}{9}$

SORU

$\mathbb{V} = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$ ile verilen $\mathbb{R}^3$ uzayının alt uzayı için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) Boyutu 2'dir. **B)** Düzlem denklemidir. **C)** $\{(1, 0, -1) ; (0, 1, -1)\}$ bir tabanıdır.
D) $\text{Sp}\{(1, -1, 0) , (0, 1, -1) , (1, 0, -1)\}$ uzayına eşittir. **E)** En az 3 vektörle gerilir.

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3,4)$ vektörünün $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (0,1,1,1)$ vektörü üzerindeki dik izdüşüm vektörü hangisidir?

A) $3\overrightarrow{\mathbf{y}}$ **B)** $\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathbf{y}}$ **C)** $\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathbf{y}}$ **D)** $\frac{3}{10}\overrightarrow{\mathbf{y}}$ **E)** $\frac{9}{11}\overrightarrow{\mathbf{y}}$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,4,2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,3,-1)$ olmak üzere, aşağıdaki vektörlerden hangisi $\overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörüne paraleldir?

A) $(2,3,1)$ **B)** $(2,-1,1)$ **C)** $(1,0,5)$ **D)** $(2,1,-1)$ **E)** $(2,1,1)$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 3, 2)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 3, -1)$ ise $\left\| \overrightarrow{\mathbf{x}} \times \overrightarrow{\mathbf{y}} \right\|$ kaçtır?

A) $\sqrt{115}$ **B)** $3\sqrt{17}$ **C)** $3\sqrt{19}$ **D)** $\sqrt{119}$ **E)** $\sqrt{117}$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 3, 1)$ vektörleriyle oluşturulan paralelkenarın alanı kaçtır?

A) $2\sqrt{19}$ **B)** $5\sqrt{3}$ **C)** $3\sqrt{5}$ **D)** $\sqrt{19}$ **E)** $2\sqrt{17}$

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2, 3)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 3, 1)$ vektörlerinin her ikisine de diktir?

A) $(-5, 1, 1)$ **B)** $(7, -5, 1)$ **C)** $(3, 0, -1)$ **D)** $(7, 5, -1)$ **E)** $(7, 5, 1)$

SORU

Aşağıdaki vektör ikililerinden hangisi $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (3, -1, 4)$ vektörüyle aynı düzlemdedir ve birbirine diktir?

A) $(-5, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ **B)** $(1, 2, 3)$, $(-3, 0, 1)$ **C)** $(1, 1, 1)$, $(1, -3, 2)$
D) $(1, 2, 3)$, $(1, -2, 1)$ **E)** $(1, 2, 3)$, $(0, -3, 2)$

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2,3,1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (2,0,3)$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmini bulunuz.

A) 19 **B)** 17 **C)** 18 **D)** 16 **E)** 9

SORU

$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin karma çarpımını göstermek üzere, $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = 2$ ise $\left[3\overrightarrow{\mathbf{x}} + 2\overrightarrow{\mathbf{y}}, 3\overrightarrow{\mathbf{y}} + 2\overrightarrow{\mathbf{z}}, 2\overrightarrow{\mathbf{z}} + \overrightarrow{\mathbf{x}}\right] = ?$

A) 24 **B)** 28 **C)** 14 **D)** 44 **E)** 22

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = 3\vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{e}}_1 + 2\vec{\mathbf{e}}_2 - 3\vec{\mathbf{e}}_3$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = 2\vec{\mathbf{e}}_1 + \vec{\mathbf{e}}_3$ vektörleriyle oluşturulan paralelyüzlünün hacmi kaçtır?

A) 20 **B)** 30 **C)** 25 **D)** 15 **E)** 40

SORU

$\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right]$, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörlerinin karma çarpımını göstermek üzere, $\left[\overrightarrow{\mathbf{x}}, \overrightarrow{\mathbf{y}}, \overrightarrow{\mathbf{z}}\right] = 0$ ise aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri kesinlikle doğrudur?

I. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ lineer bağımsızdırlar.

II. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ aynı düzlemdedirler.

III. $\overrightarrow{\mathbf{x}}$, $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ hacim oluşturmazlar.

IV. $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörü $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ ve $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörlerinin lineer bileşimi olarak yazılabilir.

V. $\overrightarrow{\mathbf{z}}$ vektörü, $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ veya $\overrightarrow{\mathbf{y}}$ vektörlerinden birine paraleldir.

A) II,III ve IV **B)** Hepsi **C)** II,III,IV ve V **D)** II ve III **E)** II, III ve V

SORU

$A\,(1,0,1)$, $B\,(1,2,3)$, $C\,(2,1,3)$ ve $D\,(k,1,4)$ noktaları aynı düzlemde olduğuna göre k kaçtır?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 1 **E)** 0

SORU

$\overrightarrow{\mathbf{x}} = (-1, 2, 3)$, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = (2, 3, 1)$ ve $\overrightarrow{\mathbf{z}} = (k, 1, -3)$ vektörleri aynı düzlemde ise, $k =?$

A) 3 **B)** 1 **C)** 4 **D)** 5 **E)** -2

SORU

Aşağıdakilerden hangisi ya da hangileri yanlıştır?

I. $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \times \overrightarrow{\mathbf{w}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \rangle$

II. $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \rangle = 0$

III. $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} \perp \overrightarrow{\mathbf{u}}$

IV. $\overrightarrow{\mathbf{u}} // \overrightarrow{\mathbf{v}}$ ise $\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}} = 0$

V. $\langle \overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}} \rangle = \det\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right)$

VI. $\overrightarrow{\mathbf{u}} \neq 0$ iken $\dfrac{\overrightarrow{\mathbf{u}}}{\|\overrightarrow{\mathbf{u}}\|}$ daima birim vektördür.

A) Yalnız IV **B)** Yalnız II **C)** II ve IV **D)** II ve V **E)** Hiçbiri

SORU

$R = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -6 & -3 & b \\ -2 & a & c \end{bmatrix}$ matrisi ortogonal matris olduğuna göre, $a + b + c = ?$

A) 1 **B)** -5 **C)** -2 **D)** 3 **E)** -11

SORU

$A(1,1,1)$, $B(1,3,2)$, $C(2,1,2)$ ve $D(2,3,6)$ noktalarının oluşturduğu dörtyüzlünün hacmini bulunuz.

A) 6 **B)** 5 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 1

SORU

$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ polinomlar uzayında verilen x^2+2x, x^2+x-1 ve x^2+2+mx polinomları lineer bağımlı ise m kaçtır?

A) 4 **B)** 5 **C)** 8 **D)** -2 **E)** 2

SORU

$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ polinomlar uzayında $\overrightarrow{\mathbf{v}} = x^2 - 2$ vektörünü,

$$\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = x^2 - 1, \ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = x^2 + x, \ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = 2x + 1\right\}$$

tabanına göre yazınız.

A) $3\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_3$ **B)** $3\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \overrightarrow{\mathbf{u}}_3$ **C)** $2\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + 3\overrightarrow{\mathbf{u}}_3$
D) $3\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + 5\overrightarrow{\mathbf{u}}_3$ **E)** $4\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - 3\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_3$

SORU

$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matris uzayında,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} m & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

matrisleri bir taban değilse, m kaçtır?

A) 6 **B)** 5 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 1

SORU

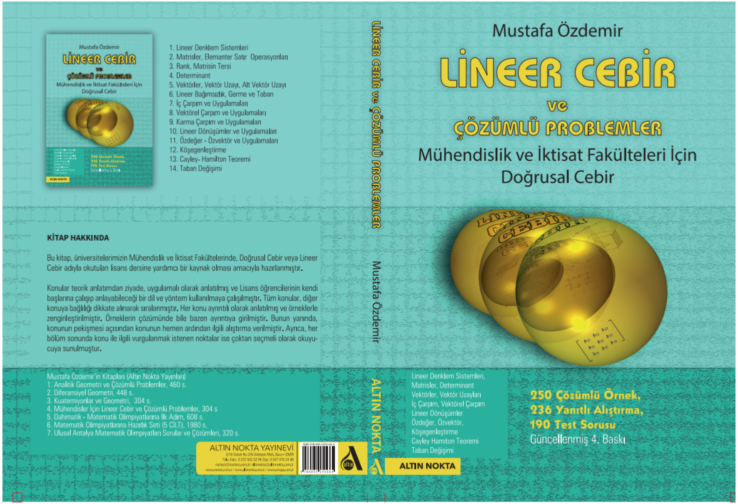
$\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matris uzayında, $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ vektörünü,

$$\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathbf{u}}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

tabanına göre yazınız.

A) $3\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_3 + 5\overrightarrow{\mathbf{u}}_4$ **B)** $\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + 3\overrightarrow{\mathbf{u}}_3 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_4$ **C)** $2\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + 3\overrightarrow{\mathbf{u}}_4$
D) $3\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 - 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_4$ **E)** $3\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 + 2\overrightarrow{\mathbf{u}}_2 + \overrightarrow{\mathbf{u}}_3 - \overrightarrow{\mathbf{u}}_4$

Kaynak : Mustafa Özdemir, Lineer Cebir ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınevi, 208 sayfa, İzmir, 2020.



https://www.altinnokta.com.tr/tr/162_mustafa-ozdemir