

Diferansiyel Denklemler Ödevi Çözümleri

Problem 1

$y(t)$, t anındaki duygusal durumun yoğunluğunu temsil etsin.

Problem 1.1.1

Verilen diferansiyel denklem:

$$\frac{dy}{dt} = -ky, \quad k > 0$$

Bu, ayrılabilir birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. Çözmek için y ve t değişkenlerini ayırırız:

$$\frac{1}{y} dy = -k dt$$

Her iki tarafın integralini alalım:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -k dt$$
$$\ln |y| = -kt + C_1$$

y 'yi çözmek için her iki tarafın üssünü alalım:

$$|y| = e^{-kt+C_1} = e^{C_1} e^{-kt}$$

$C = \pm e^{C_1}$ olsun. O halde genel çözüm:

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

burada $y_0 = y(0)$, duygusal durumun başlangıç yoğunluğudur.

Problem 1.1.2

Bu model genellikle karmaşık duygusal durumları tam olarak temsil etmekte yetersizdir.

- Sıfıra Sönümlenme: Model, duyguların zamanla üstel olarak sıfıra sönümlenmesine neden olur; kararlı, tekrarlayan veya büyüyen duygusal durumları göz ardı eder.
- Uyarıcı Eksikliği: Duyguları kapalı bir sistem olarak ele alır, onları sürdürebilecek dış tetikleyicileri ve içsel düzenlemeleri ihmal eder.

Problem 1.2

Açıkça bir zorlama terimi $F(t)$ olarak modellenmese bile, dış faktörler parametreleri değiştirerek sistemi etkileyebilir:

- Parametre Değişimi: Uyarıcılar sönümlenme oranı k 'yi değiştirebilir.
- Örtük Zorlama: Bu tür etkiler aslında homojen olmayan terimler gibi davranır, dolayısıyla $\frac{dy}{dt}$ sadece mevcut yoğunluk y 'ye bağlı olmaz.

Problem 2

Duygusal yoğunluk $y(t)$ 'nin sabit bir dış girdiden etkilendiğini varsayalım:

$$\frac{dy}{dt} = -ky + c, \quad k > 0, c > 0$$

Problem 2.1

Denge (kararlı durum) çözümü, değişim oranı sıfır olduğunda gerçekleşir ($\frac{dy}{dt} = 0$).

$$0 = -ky_{eq} + c$$

y_{eq} için çözüm:

$$ky_{eq} = c \implies y_{eq} = \frac{c}{k}$$

Problem 2.2

Denge değeri $y_{eq} = c/k$, nötr olma durumundan ziyade sürdürülen bir duygusal taban çizgisini temsil eder. Sabit bir girdi c , sönümlenme oranı k 'yi dengeler ve duygunun c ile orantılı ve k ile ters orantılı bir seviyede kalmasına neden olur.

Problem 2.3

Böyle bir c sabiti ile ilişkili girdi örnekleri:

- Sakin Manzara: Doğanın hoş, durağan bir görüntüsü (görsel), "huzur" veya "rahatlama" kararlı durumunu koruyabilecek sabit bir pozitif girdi sağlar.
- Ortam Gürültüsü: Sürekli bir alçak uğultu veya beyaz gürültü (işitsel), bağlama bağlı olarak düşük ama sıfır olmayan bir uyanıklık veya rahatsızlık seviyesini koruyabilir.
- Yavaş Tempolu Sesler: Sürekli yavaş enstrümantal müzik, bir hüznün veya melankoli taban çizgisini koruyabilir.

Problem 3

Lineer olmayan modeli ele alalım:

$$\frac{dy}{dt} = -ky + ay(1 - y), \quad k, a > 0$$

Problem 3.1

$\frac{dy}{dt} = 0$ olsun:

$$-ky + ay(1 - y) = 0$$

y parantezine alalım:

$$y(-k + a(1 - y)) = 0$$

Bu iki olasılık verir: 1. $y = 0$ 2. $-k + a - ay = 0 \implies ay = a - k \implies y = \frac{a-k}{a} = 1 - \frac{k}{a}$

Böylece denge noktaları:

$$y_1^* = 0, \quad y_2^* = 1 - \frac{k}{a}$$

Not: y_2^* sadece $a > k$ ise fiziksel olarak anlamlıdır (pozitiftir).

Problem 3.2

$f(y) = -ky + ay - ay^2$ olsun. y 'ye göre türev:

$$f'(y) = -k + a - 2ay$$

Kararlılık $f'(y^*)$ işareti ile belirlenir.

1. $y_1^* = 0$ noktasında:

$$f'(0) = -k + a = a - k$$

- Eğer $a < k$ ise, $f'(0) < 0$, bu yüzden $y = 0$ kararlıdır.

- Eğer $a > k$ ise, $f'(0) > 0$, bu yüzden $y = 0$ kararsızdır.

2. $y_2^* = 1 - \frac{k}{a}$ noktasında:

$$f'\left(1 - \frac{k}{a}\right) = -k + a - 2a\left(1 - \frac{k}{a}\right) = -k + a - 2a + 2k = k - a$$

- Eğer $a > k$ ise (ki bu y_2^* 'yi pozitif yapar), o halde $k - a < 0$, bu yüzden y_2^* kararlıdır.

- Eğer $a < k$ ise, o halde $k - a > 0$, bu yüzden y_2^* kararsızdır (gerçi bu durumda negatif olur).

Problem 3.3

$ay(1 - y)$ terimi lojistik büyüme mekanizmasını temsil eder.

- Lineer terim $+ay$ pekiştirmeyi temsil eder: duygu kendi kendini besler, başlangıçta yoğunluğun artmasına neden olur.
- Kuadratik terim $-ay^2$ doygunluğu veya düzenlemeyi temsil eder: yoğunluk çok yükseldiğinde, fiziksel veya psikolojik sınırlar (yorgunluk, başa çıkma mekanizmaları) büyümeyi sönümler.

Bu, duygusal düzenlemeyi modeller çünkü sistem basitçe sıfıra sönümlenmez; pekiştirme oranı a ile sönümlenme parametreleri arasındaki denge tarafından belirlenen belirli bir kapasitede (y_2^*) kendi kendini sürdürebilir.

Problem 4

Duygusal kategorilerin dengeleyici girdilerle eşleştirilmesi:

1. Mutluluk → Paylaşılan sosyal alanlar / Hareketli, ritmik müzik. Gerekçe: Mutluluk genellikle etkileşimle sürdürülür. Açık alanlar ve ritim aktiviteyi teşvik eder, duygunun çok çabuk sönmesini önleyip onu sürdürerek dengeyi sağlar.
2. Üzüntü → Yumuşak dokular, sıcak renkler / Yavaş, melodik tempo. Gerekçe: Üzüntü işlem süresi gerektirir. Yatıştırıcı bir ortam aşırı uyarılmayı önler ve dengeye (rahatlığa) kademeli bir dönüş sağlar.
3. Öfke → Soğuk renkler (maviler, yeşiller) / Sessizlik veya düzenli, düşük frekanslı sesler. Gerekçe: Öfke yüksek uyarımadır. Dengeyi yeniden sağlamak için fizyolojik uyarılmayı azaltan (yatıştırıcı) girdiler gerekir.
4. Korku → Kapalı, güvenli ortamlar / Ritmik nefes alma düzenleri. Gerekçe: Korku tehdide verilen bir tepkidir. Güvenlik ve öngörülebilirlik (yapı) sinyali veren girdiler korku tepkisini aşağı çekmeye yardımcı olur.

5. Yalnızlık → Kamusal ortamlar (kafeler, parklar) / Sesler veya diyalog ağırlıklı ses kayıtları. Gerekçe: Yalnızlık bağlantı eksikliğidir. Sosyal varlığı simüle eden veya sağlayan girdiler eksikliği giderir.
6. Suçluluk/Utanç → Özel, yargılayıcı olmayan alanlar / Yumuşak, güven verici tonlar. Gerekçe: Bu duygular öz yargılamayı içerir. "Güvenli" bir ortam, dış baskı olmadan iç gözleme izin vererek kendini affetmeye yardımcı olur.
7. Enerji Seviyesi (Yorgun) → Parlak, doğal ışık / Hızlı tempo, kesik (staccato) sesler. Gerekçe: Yorgunluk düşük uyarılımdır. Yüksek enerjili girdiler uyanıklığı geri getirmek için sinir sistemini uyarır.

Problem 5

Sistem:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= -cy\end{aligned}$$

$a, b, c > 0$ olmak üzere.

Problem 5.1

Önce, y için ayrılmış denklemi çözelim:

$$\frac{dy}{dt} = -cy \implies y(t) = y_0 e^{-ct}$$

$y(t)$ 'yi x denklemine yerleştirelim:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + b(y_0 e^{-ct}) \implies \frac{dx}{dt} + ax = by_0 e^{-ct}$$

Bu lineer birinci mertebeden bir diferansiyel denklemdir. İntegral çarpanı $I(t) = e^{\int a dt} = e^{at}$ kullanalım. Her iki tarafı e^{at} ile çarpalım:

$$e^{at} \frac{dx}{dt} + a e^{at} x = by_0 e^{(a-c)t}$$

$$\frac{d}{dt} [x e^{at}] = by_0 e^{(a-c)t}$$

Her iki tarafın integralini alalım. İki durumu göz önünde bulundurmalıyız.

Durum 1: $a \neq c$

$$x e^{at} = \int by_0 e^{(a-c)t} dt = \frac{by_0}{a-c} e^{(a-c)t} + C_1$$

e^{-at} ile çarpalım:

$$x(t) = \frac{by_0}{a-c} e^{-ct} + C_1 e^{-at}$$

$x(0) = x_0$ başlangıç koşulunu kullanarak:

$$x_0 = \frac{by_0}{a-c} + C_1 \implies C_1 = x_0 - \frac{by_0}{a-c}$$

Çözüm:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{by_0}{a-c}\right)e^{-at} + \frac{by_0}{a-c}e^{-ct}, \quad y(t) = y_0e^{-ct}$$

Durum 2: $a = c$

$$\frac{d}{dt}[xe^{at}] = by_0e^0 = by_0$$

$$xe^{at} = by_0t + C_1$$

$$x(t) = (by_0t + x_0)e^{-at}, \quad y(t) = y_0e^{-at}$$

Problem 5.2

x -denklemindeki $+by$ terimi, y duygusunun x duygusu üzerindeki etkisini temsil eder.

- x doğal olarak hızlı bir şekilde sönümlenecek olsa bile (büyük a), y 'nin varlığı bir kaynak terimi gibi davranır.
- Eğer y yavaş sönümlenirse (küçük c), x 'i "besler" ve x 'in kendi başına kalacağından daha uzun süre yüksek kalmasını sağlar.
- Bu, birincil bir duygunun (örneğin, üzüntü, y) ikincil bir duyguyu (örneğin, uyuşukluk, x) zaman içinde nasıl sürdürebileceğini ve genel duygusal dengeye dönüşü nasıl geciktirebileceğini modeller.

Problem 6

Açıklama: Matematiksel olarak, "duygusal denge" diferansiyel denklemlerde kararlılık kavramına karşılık gelir.

- Sınırlılık: Her t için $|y(t)| < M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa, $y(t)$ çözümü sınırlıdır. Bu, sağlıklı, yönetilebilir bir aralıkta kalan ve kontrolden çıkmayan bir duyguyu temsil eder.
- Asimptotik Kararlılık: Bu, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{eq}$ olduğunda gerçekleşir. Bu, duygusal sistemin bir bozulmadan (duygu sıçraması) kurtulma ve zamanla bir temel duruma (denge) dönme yeteneğini temsil eder.

Problem 7

Basit diferansiyel denklem modellerinin sınırlamaları:

1. Doğrusallık Varsayımı: $\frac{dy}{dt} = -ky$ gibi denklemler, değişim oranlarının mevcut durumlarla orantılı olduğunu varsayar. Gerçek duygular oldukça lineer olmayan yapıdadır; küçük tetikleyiciler büyük tepkilere (eşik etkileri) veya doygunluğa neden olabilir.
2. Hafıza/Histerezis: Basit birinci mertebeden ODE'ler sadece mevcut durum $y(t)$ 'ye bağlıdır. Gerçek duygusal tepkiler genellikle duygunun geçmişine (dün ne olduğuna) bağlıdır, bu da gecikmeli diferansiyel denklemler veya integral terimleri gerektirir.
3. Değişkenlerin Karmaşıklığı: Duygular nadiren tek değişkenlidir (y). Yüksek boyutlu sistemler tarafından daha iyi modellenen karmaşık fizyolojik ve psikolojik faktör ağlarını içerirler.
4. Stokastiklik: Basit ODE'ler deterministiktir. Duygusal süreçler genellikle rastgele, öngörülemez dış olaylardan etkilenir, bu da Stokastik Diferansiyel Denklemler (SDE'ler) gerektirir.

Problem 8

$\frac{dy}{dt} = -ky$ modelinde çözüm $y(t) = y_0 e^{-kt}$ şeklindedir. k parametresi sönümlenme oranı sabitidir. Zaman sabiti $\tau = 1/k$ 'dir.

- Büyük k (Hızlı Yakınsama): Eğer k büyükse, duygu çok hızlı sönümlenir. Bu, şaşkınlık veya belirli öfke anları (kızgınlık parlamaları) ya da korku (irkilme tepkisi) gibi geçici, yüksek uyarılmalı duyguları modeller; bu duygular uyarıcı ortadan kalktığında hızla yükselir ve dağılır.
- Küçük k (Yavaş Yakınsama): Eğer k küçükse, duygu uzun süre devam eder. Bu, dengeye dönüşün yavaş ve kademeli olduğu üzüntü, keder veya depresyon gibi ruh hallerini veya derinlemesine yerleşmiş durumları modeller.

Doğru k 'yi seçmek çok önemlidir. Üzüntüyü büyük bir k ile modellemek, kişinin "hemen kendine gelebileceğini" yanlış bir şekilde öne sürerken, şaşkınlığı küçük bir k ile modellemek, doğal olmayan bir şekilde uzun süren fizyolojik bir durumu ima eder.