

* 2016 yaz okulu sorusu

$f: [0,5]$ aralığında sürekli ve $(0,5)$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyon ve $f(0)=2$ olsun. Eğer $(0,5)$ aralığında $1 \leq f'(x) \leq 3$ ise, $f(5)$ in mümkün olan en küçük ve en büyük değerini bulunuz. (O.O.T. kullanın)

$f: [0,5]$ de sürekli, $(0,5)$ de türevli olduğunu den 0.O.T. şartlarını sağlar. O halde

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} \quad \text{olacak şekilde } c \in (0,5) \text{ vardır.}$$

$$1 \leq f'(c) = \frac{f(5) - 2}{5} \leq 3 \Rightarrow 5 \leq f(5) - 2 \leq 15$$

$7 \leq f(5) \leq 17$

* 2016, 2. vize sorusu

O.O.T'yi kullanarak her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$|\sin 2a - \sin 2b| \leq 2|a - b|$ olduğunu gösteriniz.

$f(x) = \sin 2x$ 'e $[a, b]$ de O.O.T. uygulayalım.

① $f(x) = \sin 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için dolayısıyla $[a, b]$ de sürekli.

② $f(x) = \sin 2x$, " " " (a, b) de türevli.

O halde, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır. $f'(x) = 2 \cos 2x$, $f(b) = \sin 2b$, $f(a) = \sin 2a$

$$\cos 2c = \frac{\sin 2b - \sin 2a}{2(b - a)} \quad |\cos 2c| \leq 1 \text{ olduğundan}$$

$$|\cos 2c| = \left| \frac{\sin 2b - \sin 2a}{2(b - a)} \right| \leq 1 \Rightarrow |\sin 2b - \sin 2a| \leq 2|b - a|$$

$$\textcircled{*} \quad I = \int_0^{\ln 2} 4e^x \cdot \sinh x \, dx = ? \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$I = \int_0^{\ln 2} 4e^x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) dx = 2 \int_0^{\ln 2} (e^{2x} - 1) dx = 2 \left(\frac{e^{2x}}{2} - x \Big|_0^{\ln 2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{e^{\ln 2^2}}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= 3 - \ln 4$$

$$\textcircled{*} \quad I = \int \sinh x \cdot \cos^4 x \, dx = ? \quad \sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$$

$$I = \int \frac{(\sinh x \cdot \cos x)^4 \, dx}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{1}{16} \int \sin^4 2x \, dx = \frac{1}{16} \int (\sin^2 2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int \left(\frac{1 - \cosh 4x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{16} \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cosh 4x}{2} + \frac{\cosh^2 4x}{4} \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{x}{4} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{1}{4} \int \frac{\cos 8x - 1}{2} \, dx \right)$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{8} + \frac{\sin 8x}{64} - \frac{x}{8} \right) + C$$

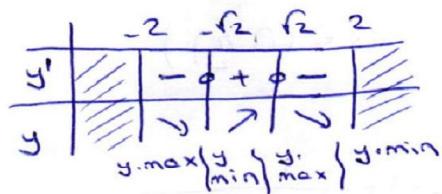
*) $y = x\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstra-numerlerini açıkların.

$$4-x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq x^2 \Rightarrow x \in [-2, 2] \text{ de tanımlı.}$$

$$D(f) = [-2, 2] \quad \boxed{x=2, x=-2 \text{ uç noktalar}}$$

$$y' = \sqrt{4-x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \rightarrow y'=0 \Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{2}} \text{ K.N.}$$

$$\rightarrow \boxed{x=\pm 2} \text{ K.N. } (f' \text{ tanımsız})$$



$$f(-2) = f(2) = 0$$

$$f(-\sqrt{2}) = 2 \rightarrow \text{mutlak max}$$

$$f(\sqrt{2}) = -2 \rightarrow \text{mutlak min}$$

$$x = -\sqrt{2}, x = 2 \rightarrow \text{yerel min.}$$

$$x = \sqrt{2}, x = -2 \rightarrow \text{yerel max}$$

$$x = \sqrt{2} \rightarrow \text{mutlak max}$$

$$x = -\sqrt{2} \rightarrow \text{mutlak min}$$

*) $x \geq 1$ olmak üzere $f(x) = \int_1^x (2t)^x dt \Rightarrow f''(1) = ?$

$$f'(x) = (2x)^x$$

↓

$$\ln f'(x) = x \ln 2x$$

↓ Türev

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \ln 2x + x \cdot \frac{2}{2x} \Rightarrow f''(x) = (2x)^x [\ln 2x + 1]$$

$$f''(1) = 2(\ln 2 + 1)$$

*) $f(x) = \cos x - \int_0^{\sin x} \frac{dt}{t^3+8} \Rightarrow F'(x) = ? \quad F(\pi) = ?$

$$F(x) = \cos x - \int_0^{\sin x} \frac{dt}{t^3+8} = -1$$

$$F'(x) = -\sin x - \cos x \cdot \frac{1}{\sin^3 x + 8}$$

$$F'(\pi) = -\frac{\sin \pi}{0} - \frac{\cos \pi}{-1} \cdot \frac{1}{\sin^3 \pi + 8}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$\textcircled{*} \quad I = \int_1^{e^{\pi/4}} \frac{dx}{x \cos^2(\ln x)} = ? \quad (2015-2. \text{ vize szavusa})$$

$$\begin{aligned} \ln x &= u & \frac{dx}{x} &= du \\ x &= e^{\pi/4} & \Rightarrow u &= \frac{\pi}{4} \\ x &= 1 & \Rightarrow u &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} I = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u \Big|_0^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = \underline{\underline{1}} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{*} \quad \int_0^{\cos x} f(t) dt = \arctan x \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = ? \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2}))$$

$\downarrow \text{T3rre}$

$$-\sin x, f(\cos x) - 0 = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f(\cos x) = \frac{1}{-\sin x \cdot (1+x^2)}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)} = \frac{-16\sqrt{2}}{\pi^2 + 16}$$

$$\textcircled{*} \quad \int \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = \arcsin \sqrt{x} + C$$

$$\sqrt{x} = u \rightarrow x = u^2$$

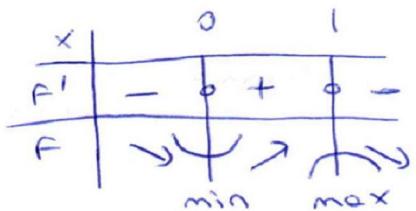
$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = du$$

$$\textcircled{*} \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt}{\tan x} = ? \quad \frac{0}{0} \quad \text{L'Hopital Kultendomot!}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}{\frac{\sec^2 x}{\sec x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x} \cdot \frac{\sec x}{\sec^2 x} = \underline{\underline{0}}$$

④ $f(x) = \int_0^x \frac{t-t^2}{1+t^4} dt$ fonksiyonunun max./min. bulunuz.

$$F'(x) = \frac{x-x^2}{1+x^4} = 0 \rightarrow x=0, x=1$$



⑤ $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ deki ortalaması değerini ve integraller için ortalaması değer teoremini sağlayıcı sayısını bulunuz.

$$F(c) = \tilde{F} = \frac{1}{\pi-0} \int_0^\pi \cos x dx = \frac{1}{\pi} \left[\sin x \right]_0^\pi = 0$$

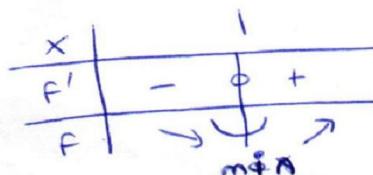
$$f(c)=0 \rightarrow \cos c=0 \rightarrow c=\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$$

⑥ $f(x) = x + \int_1^{2x-1} \frac{\cos(t-1)}{t^2+1} dt \Rightarrow F'(1) = ?$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{\cos(2x-1-1)}{(2x-1)^2+1} \cdot (2x-1)' \\ &= 1 + 2 \frac{\cos(2x-2)}{(2x-1)^2+1} \Rightarrow F'(1) = 1 + 2 \cdot \frac{\cos 0}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

⑦ $f(x) = \int_0^{x^2-2x} \frac{dt}{1+t^2}$ yerel max/min?

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2-2x)'} \cdot (x^2-2x)' = \frac{2x-2}{1+(x^2-2x)} = 0 \rightarrow x=1$$



$x=1 \rightarrow$ yerel min.
yerel max. yok!

③

Soru 3-a) Eğer f , integre edilebilen bir fonksiyon ve $\int_{-1}^1 f(x)dx = 1$ ise, $\int_1^2 f(2x-3)dx$ integralinin değerini bulunuz. (10 P)

$$\int_1^2 f(2x-3)dx = \int_{-1}^1 f(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} //$$

$$\begin{aligned} u &= 2x-3 \\ du &= 2dx \\ x_1 &= 1 \rightarrow u_1 = -1 \\ x_2 &= 2 \rightarrow u_2 = 1 \end{aligned}$$

Soru 3-b) $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \sin x dx$ integralini hesaplayınız. (10 P)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \sqrt{1-\sin^2 x} \sin x dx = \int_0^\pi |\cos x| \sin x dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x dx - \int_{\pi/2}^\pi \cos x \sin x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^\pi \sin 2x dx = -\frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_{\pi/2}^\pi \\ &= -\frac{1}{4}(1-1) + \frac{1}{4}(1+1) = 1 // \end{aligned}$$

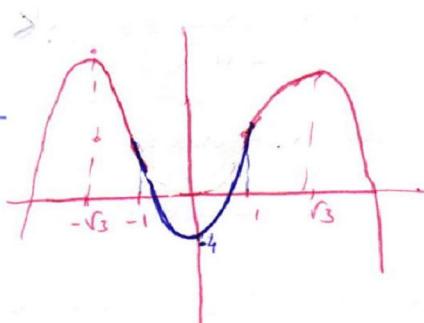
$$\begin{aligned} \int \sin x \cos x dx &= \int u du = \frac{1}{2} \sin^2 x + C \\ u &= \sin x \\ du &= \cos x dx \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos x \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C \\ \cos x = u \\ du = -\sin x dx \end{array} \right.$$

*) $f(x) = 6x^2 - x^4 - 4$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını ve büküm (dönüm) noktalarını araştırın.

$$f'(x) = 12x - 4x^3 = 0 \Rightarrow 4x(3 - x^2) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \quad \boxed{x=\sqrt{3}} \quad \boxed{x=-\sqrt{3}} \text{ K.N.}$$

$$f''(x) = 12 - 12x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=\pm 1}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	∞		
f'	+	0	-	-	0	+	+	0	-
f''	-	-	0	+	+	0	-	-	
f	A.K.	A.K.	Y.K.	Y.K.	A.K.	A.K.	A.K.	A.K.	
	↓	↓	↓	↓	↑	↑	↑	↓	
	Max	Büküm	Min	Büküm	Max				



$$x=0 \rightarrow f(0) = -4 \rightarrow (0, -4) \text{ yerel min. noktası}$$

$$x=1 \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow (1, 1) \text{ büküm noktası}$$

$$x=-1 \rightarrow f(-1) = 1 \rightarrow (-1, 1) \text{ " " " }$$

$$x=\sqrt{3} \rightarrow f(\sqrt{3}) = 5 \rightarrow (\sqrt{3}, 5) \text{ yerel max. noktası}$$

$$x=-\sqrt{3} \rightarrow f(-\sqrt{3}) = 5 \rightarrow (-\sqrt{3}, 5) \text{ " " " }$$

*) $f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 15x^3$ yerel ekstremumları?

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^3 + 45x^2 = 15x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \text{ G.K.K.}$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{x=3}$$

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
f'	+	0	+	-	0	+
f	↗	↗	↘	↗		

$x=3$ yerel min. noktası
 $x=1$ yerel max. noktası

④ $f(x) = x\sqrt{1-x}$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında 0.0.T. uygulayın.

① $f(x)$ $[0,1]$ de sürekli mi?

$f(x)$ $x \leq 1$ için süreklidir. Dolayısıyla $[0,1]$ de süreklidir.

② $f(x)$ $(0,1)$ de türevli mi?

$$f'(x) = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} \Rightarrow x \neq 1 \text{ için tanımlıdır. Dolayısıyla } f(x)$$

$(0,1)$ de türevlidir.

0.0.T. uygulanabilir.

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1-0} \text{ olacak şekilde } c \in (0,1) \text{ vardır.}$$

$$\sqrt{1-c} - \frac{c}{2\sqrt{1-c}} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-c} = \frac{c}{2\sqrt{1-c}}$$

$$\Rightarrow 2 - 2c^2 = c \Rightarrow 3c^2 + c - 2 = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{3} \in (0,1) \quad \checkmark$$

⑤ $y = \frac{x}{x-\sqrt{x^2-x}}$ fonksiyonunun yatay ve dikey asimptollarını bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+\sqrt{x^2-x})}{x(x-\sqrt{x^2-x})} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ dikey asimptot değil}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-\sqrt{x^2-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}} \text{ yatay asimptot}$$

④ $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-x}{x+2}$ fonksiyonu $[0,1]$ de Rolle Teoremi uygulanır.

① $f(x) = \frac{x^2-x}{x+2}$ fonksiyonu $x=2$ de sürekli değildir. $x=2 \notin [0,1]$ olduğundan $f(x)$ $[0,1]$ de süreklidir. ✓

$$② f'(x) = \frac{(2x-1)(x+2) - 1 \cdot (x^2-x)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-2}{(x+2)^2} \rightarrow x=2 \text{ tanımsız.}$$

$-2 \notin (0,1)$ olduğundan $f(x)$ $(0,1)$ de türevlidir. ✓

$$③ f(0)=f(1)=0 \quad \checkmark$$

①, ② ve ③ den dolayı $f(x)$ 'e $[0,1]$ de Rolle Tes. uygulanabilir. 0 zaman,

$$f'(c) = \frac{c^2+4c-2}{(c+2)^2} = 0 \text{ olacak şekilde } c \in (0,1) \text{ verdir.}$$

⇓

$$c^2+4c-2=0 \Rightarrow c_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

$$c_1 = -2 + \sqrt{6} \in (0,1) \quad \checkmark$$

$$c_2 = -2 - \sqrt{6} \notin (0,1) \times$$

⑤ f ve g türevlenebilir ve $f'(2)=3$, $g'(1)=2$, $g'(1)=1$ olsun.

$$h(x) = (f \circ g)(x^2)$$
 ise $h'(1) = ?$

$$h(x) = f(g(x^2)) \rightarrow h'(x) = f'(g(x^2)) \cdot g'(x^2) \cdot 2x$$

$$h'(1) = \underbrace{f'(g(1))}_{3} \cdot \underbrace{g'(1)}_{2} \cdot 2 = \underline{\underline{6}}$$

* $x > 0$ için $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$ olduğunu gösteriniz.

$f(x) = \sqrt{1+x}$ fonksiyonu $[0, x]$ de O.O.T. uygulayalım.

① $f(x) = \sqrt{1+x}$ $x \geq -1$ için sürekli dir, dolayısıyla $[0, x]$ de sürekli dir.

② $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $x \geq -1$ için tanımlıdır. Dolayısıyla $f(x)$ $(0, x)$ de türevlidir.

① ve ② den dolayı $f(x) \in [0, x]$ de O.O.T. uygulanabilir.

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{olarak şekilde } c \in (0, x) \text{ vardır.}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+c}} = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \quad c \in (0, x) \Rightarrow \begin{cases} c > 0 \\ c < x \end{cases}$$

$$c > 0 \text{ ise } \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} < \frac{x}{2} + 1 \quad \checkmark$$

*) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$ eğrisini çiziniz.

$$T.K = 0(f) = 1R - \{2\} \Rightarrow \boxed{x=2} \text{ O.A.}$$

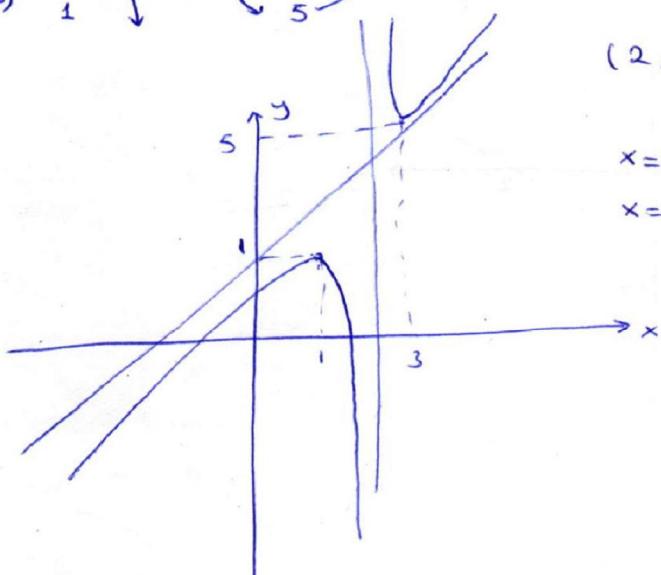
$$\begin{array}{r} x^2 - x - 1 \\ -x^2 - 2x \\ \hline x - 1 \end{array} \rightarrow \boxed{y = x+1} \text{ E.A.} \rightarrow (\text{Y.A. yok})$$

$$y' = \frac{(2x-1)(x-2) - (x^2-x-1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x-2)^2} \rightarrow x=2 \text{ S.K.K. (K.N. degi)}$$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x=1 \\ x=3 \end{matrix}} \text{ K.N.}$$

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2+4x+3)}{(x-2)^4} = \frac{2}{(x-2)^3} \rightarrow \boxed{x=2} \rightarrow (\text{B.N. olamaz})$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f''	-	-	0	+	
f	$-\infty$	\downarrow	\downarrow	\downarrow	$+\infty$
	1	2	3	5	



$(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ fonsk. ortan

$(1, 2) \cup (2, 3)$ fonsk. azalan

$(-\infty, 2) \rightarrow$ fonsk. $\overset{\text{degi}}{\text{konkav}}$

$(2, \infty) \rightarrow$ fonsk. $\overset{\text{yukarisi}}{\text{konkav}}$

$x=1 \rightarrow$ yerel max noktasi

$x=3 \rightarrow$ yerel min. noktasi

④ $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$ eğrisini çiziniz.

$T.x = D(f) = \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow \boxed{x = -1}$ Düzey Asimptot

$$\frac{x^2-4}{x^2+x} \underset{x \rightarrow -1}{\cancel{|}} \rightarrow \boxed{y = x-1} \text{ egrik asimptot} \Rightarrow \text{yatay asimptot } y=1$$

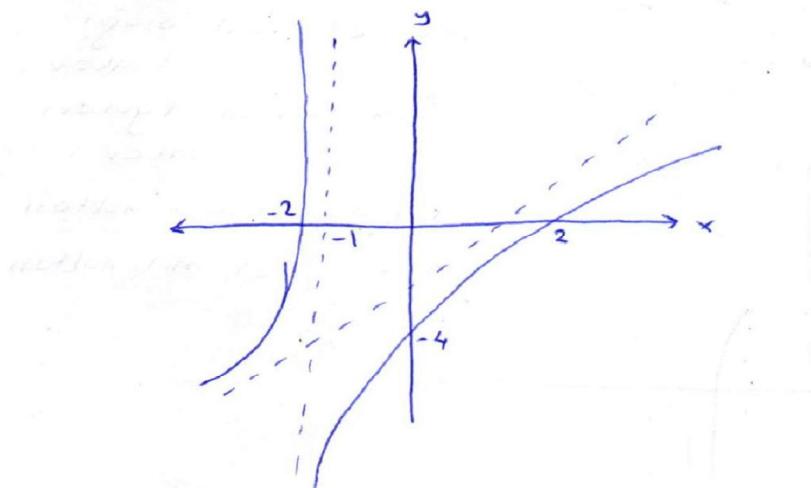
$$y' = \frac{2x(x+1) - (x^2-4)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4}{(x+1)^2} \quad x = -1 \text{ C.K.K (} f' \text{ yz tanimsiz ypar ancak K.N. degil)}$$

$$y'' = -\frac{6}{(x+1)^3} \quad \boxed{x = -1} \quad (f'' \text{ yz tanimsiz ypar ancak blikm notası olamaz})$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+	0	+
y''	+	0	-

$$x = 0 \rightarrow y = -4$$

$$y = 0 \rightarrow x = \mp 2$$



4. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ ile tanımlı f fonksiyonunun tanım kümesini ; artan ve azalan olduğu aralıkları ; varsa asimptotlarını ; varsa ekstremum değerlerini ; varsa büküm (dönüm) noktalarını bulunuz ve konkavlığını inceleyiniz. Tüm sonuçları tek bir tabloda göstererek f nin grafiğini çiziniz. (25 puan)

T.K. : $\mathbb{R} - \{2\}$

$x=2$ Düşey Asimptot ($\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$)

$$\begin{array}{c|cc} x^2 & | & x-2 \\ -x^2-2x & | & x+2 \\ \hline 2x & & \end{array} \Rightarrow y = x+2 \text{ eğik asimptot}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \quad \boxed{x=0, x=4} \text{ kritik nokta}$$

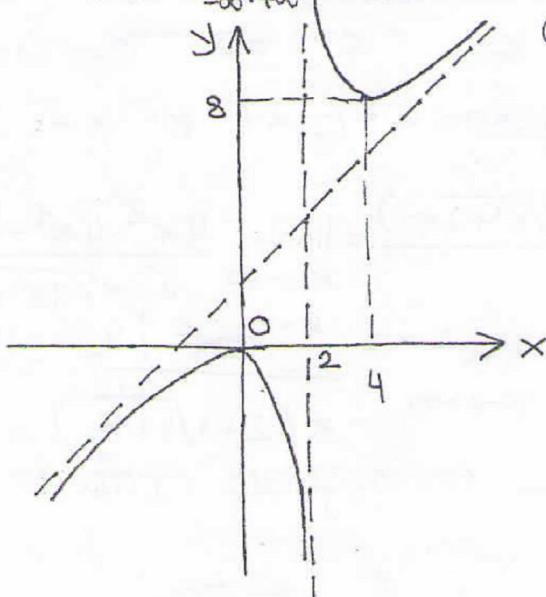
$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2 - 4x)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3} \quad \begin{matrix} \text{Büküm} \\ \text{noktası} \\ \text{yok} \end{matrix}$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y''	-	-	0	+	

⊗ (0,0) yerel maksimum
(4,8) yerel minimum

⊗ $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ artan
(0,2) \cup (2,4) azalan

⊗ $(-\infty, 2)$ aşağı konkav
(2, ∞) yukarı konkav



3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$ fonksiyonunun tanım kümesini, eksenleri kestiği noktaları, artan ve azalan olduğu aralıkları, asimptotlarını, eğer varsa yerel ve mutlak ekstremum noktalarını, varsa dönüm (büüküm) noktalarını bulunuz ve $y = f(x)$ eğrisinin konkavlığını inceleyiniz. Tüm sonuçları tek bir tabloda göstererek f 'nin grafiğini çiziniz.

$$\textcircled{1} \quad x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \mp 3 \quad D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\} \quad \textcircled{1}$$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$, $y = 0 \Rightarrow x = 0$ $\boxed{(0,0)}$ eksen kesim noktası $\textcircled{1}$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \quad \text{olduğundan} \quad \boxed{x=3} \quad \text{düşey asimptot} \quad \textcircled{1}$$

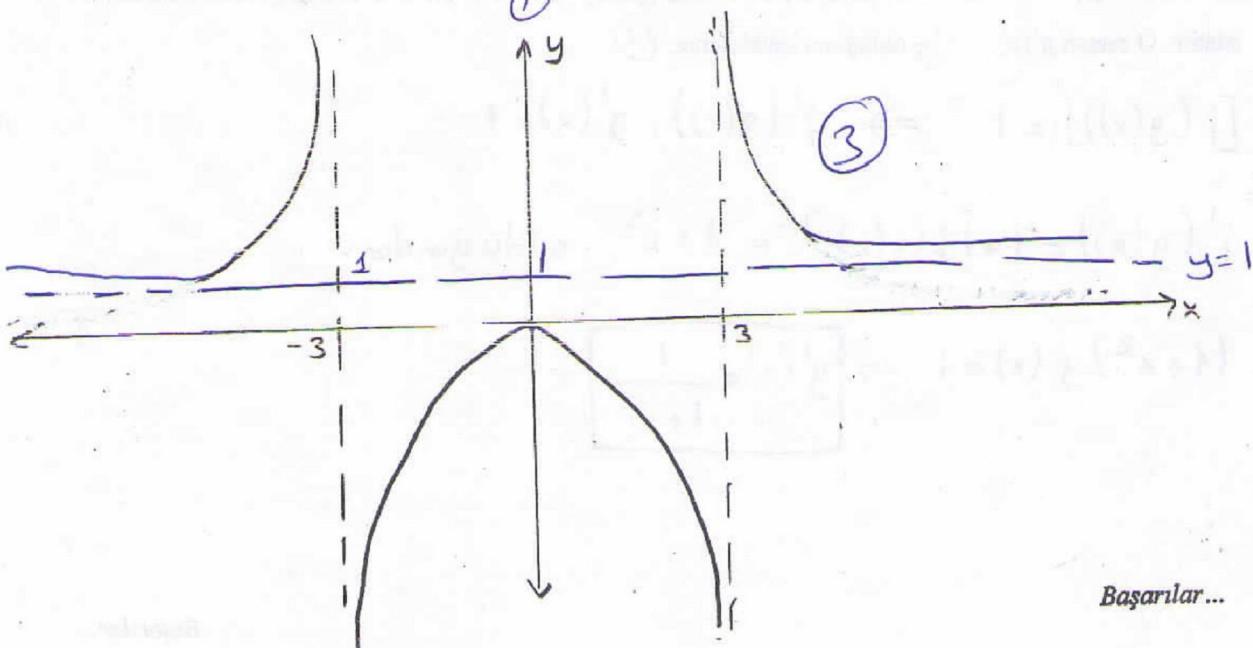
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \quad \text{olduğundan} \quad \boxed{x=-3} \quad \text{düşey asimptot} \quad \textcircled{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 1 \quad \text{olduğundan} \quad \boxed{y=1} \quad \text{yatay asimptot}$$

$$\textcircled{3} \quad f'(x) = \frac{2x(x^2 - 9) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} \quad \textcircled{2} \quad , \quad f''(x) = \frac{-18x}{(x^2 - 9)^2}, \quad f''(x) = \frac{-18(x^2 - 9)^2 + 18x \cdot 2 \cdot 2x(x^2 - 9)}{(x^2 - 9)^4} = \frac{54x^2 + 16}{(x^2 - 9)^3} \quad \textcircled{2}$$

$\boxed{x=0}$ tiritik noktası $\textcircled{1}$

	$-\infty$	-3	0	3	∞	$\textcircled{1}$	$\textcircled{1}$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$+$	$(-\infty, -3)$ ve $(3, \infty)$ da <u>artan</u>	
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$		$(0, 3)$ ve $(3, \infty)$ da <u>azalan</u>	
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$		$f(0) = 0$ <u>yerel maksimum</u>	$\textcircled{1}$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$		$(-\infty, -3)$ ve $(3, \infty)$ <u>yukarı konkav</u>	
		$\textcircled{4}$				$(-3, 3)$ <u>asagi konkav</u>	



Başarilar...

$$\textcircled{4} \quad \int \frac{x \, dx}{\cos^2 x} = ?$$

$$\begin{aligned} x &= u & \frac{dx}{\cos^2 x} &= dv \\ \downarrow & & \downarrow & \\ dx &= du & v &= \tan x \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x \, dx \\ = x \tan x + \ln |\cos x| + C \end{array} \right.$$

\textcircled{5} $\int (\ln x)^n dx$ integrali için bir indirgeme formülü bulup bu formül yardımıyla $\int \ln^3 x \, dx$ integralini hesaplayın.

$$I_n = \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int \frac{x (\ln x)^{n-1}}{x} dx = x (\ln x)^n - n \underbrace{\int (\ln x)^{n-1} dx}_{I_{n-1}}$$

$$(\ln x)^n = u \quad dx = dv$$

$$\frac{n (\ln x)^{n-1}}{x} dx = du \quad v = x$$

$$\boxed{I_n = x (\ln x)^n - n I_{n-1}}$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \ln^3 x \, dx = x (\ln x)^3 - 3 \cdot I_2 = x (\ln x)^3 - 3 \left[x (\ln x)^2 - 2 I_1 \right]$$

$$= x (\ln x)^3 - 3x (\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + C$$

$$\textcircled{6} \quad \int \tan^3 x \cdot \sec^4 x \, dx = \int \underbrace{\tan^3 x}_{u^3} \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{1+u^2} \cdot \underbrace{\sec^2 x \, dx}_{du} = \int (u^3 + u^5) \, du$$

$$u = \tan x \quad du = \sec^2 x \, dx$$

$$= \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} + C$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$= \frac{(\tan x)^4}{4} + \frac{(\tan x)^6}{6} + C$$

$$\textcircled{7} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{-15-8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+4)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$$

$$= \arcsin(x+4) + C$$

$$\begin{aligned} & -(x^2 + 8x + 15) \\ & = -((x+4)^2 - 1) \\ & = 1 - (x+4)^2 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} x+4=u \\ dx = du \end{array} \right.$$

*) $y = 1 + \frac{1}{x} \sin x^2$ fonksiyonunun yatay ve düşey asimptotlarını araştırınız.

$x=0$ paydası 0 yapıyor. Düşey asimptot mu?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x} \sin x^2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{0} \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} \right) = 1 \Rightarrow x=0 \text{ düşey asimptot değil}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \sin x^2 \right) = 1 \Rightarrow \boxed{y=1} \text{ Yatay Asimptot}$$

Sonuç: Düşey Asimptot yok

$y=1 \rightarrow$ Yatay Asimptot

*) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$ a) Artan/Azalan olduğu aralıkları, max/min değerleri?

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15$$

b) Konkavlığını ve büküm noktalarını inceleyin.

$$f''(x) = 6x + 12$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1 \quad x=-5} \text{ K.N.}$$

$$f''(x) = 6x + 12 \Rightarrow \boxed{x=-2}$$

x	$-\infty$	-5	-2	1	∞	
f'	+	0	-	-	0	+
f''	-	-	0	+	+	
f	↗	↘	↗	↘	↗	

max B.N. min

Sonuç
 $x = -2$ Büküm noktası

$x = -5 \Rightarrow f(-5) = 103$ max değer

$x = 1 \Rightarrow f(1) = -5 \rightarrow$ min değer

$(-\infty, -5) \cup (1, \infty) \rightarrow$ Artan

$(-5, 1) \rightarrow$ Azalon

$(-\infty, -2) \rightarrow$ Aşağı, Konkav

$(-2, \infty) \rightarrow$ Yukarı, Konkav

 YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi , Final Sınav Soru ve Cevap Kağıdı	Not Tablosu							
	1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.a	4.b
Adı Soyadı								
Numarası								
Bölümü		Grup No				Tarih	02.01.2017	
Dersin Adı	MAT1071 Matematik I			Süre	100 dk		Sınıf	
Öğretim Üyesi				İmza				

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan "Sinavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

1.a. $f(x) = \ln[\ln(\ln x)] + \sqrt{9 - x^2}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$$\begin{aligned}
 \ln(\ln x) > 0 &\quad , \quad \ln x > 0 &\quad , \quad x > 0 &\quad 9 - x^2 \geq 0 \\
 \ln x > 1 &\quad \underline{x > 1} &\quad -3 \leq x \leq 3 \\
 \underline{x > e} &\quad && \\
 x > e &\quad , \quad -3 \leq x \leq 3 \\
 D(f) = (e, 3] &\quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.b. \int \ln \sqrt{x+1} dx &\quad \text{integralini hesaplayınız.} \\
 \ln \sqrt{x+1} &= u \quad | \quad dx = dv \\
 \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx &= du \quad x = v \\
 &= x \cdot \ln \sqrt{x+1} - \int x \frac{1}{2(x+1)} dx \\
 &= x \ln \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{x+1} dx \\
 &= x \ln \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\
 &= x \ln \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln(x+1) + C \\
 &= x \ln \sqrt{x+1} + \ln \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} x + C \\
 &= (x+1) \ln \sqrt{x+1} - \frac{1}{2} x + C \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Başarılar...

$$\textcircled{4} \int \sin x \cdot \ln(\tan x) dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \ln(\tan x) = u \\ \sin x dx = dv \\ \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = du \\ \frac{1}{\sin x \cos x} dx = du \end{array} \right\} \begin{aligned} I &= -\cos x \cdot \ln(\tan x) + \int \frac{\cos x}{\sin x \cos x} \cdot dx \\ &= -\cos x \cdot \ln|\tan x| + \ln|\csc x + \cot x| + C \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \text{ ise } 2\sqrt{\alpha_1} < \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} < 2\sqrt{\alpha_2} \text{ olurken O.O.T.}$$

ile gösterin.

$$f(x) = f_x, [\alpha_1, \alpha_2] \text{ olsun.}$$

$$\textcircled{1} f(x), [\alpha_1, \alpha_2] \text{ de sürekli} \quad \textcircled{2} f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, [\alpha_1, \alpha_2] \text{ de tanımlı}$$

O.O.T. uygunluk.

$$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_1}} \Rightarrow 2\sqrt{c} = \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_1}$$

$$c \in (\alpha_1, \alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 < c < \alpha_2 \Rightarrow 2\sqrt{\alpha_1} < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{\alpha_2}$$

$\downarrow x'$ dan

$$2\sqrt{\alpha_1} < \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_2} < 2\sqrt{\alpha_2}$$

$$\textcircled{6} \text{ O.O.T. ile } a, b > 0 \text{ için } \left| \cos \frac{a}{3} - \cos \frac{b}{3} \right| \leq \frac{1}{3}|b-a| \text{ old. gösterin}$$

$$f(x) = \cos \frac{x}{3}, [\alpha, \beta]$$

$f(x), [\alpha, \beta]$ de sürekli, (α, β) de tıkırıldır.

$$f'(c) = -\frac{1}{3} \sin \frac{c}{3} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\cos \frac{\beta}{3} - \cos \frac{\alpha}{3}}{\beta - \alpha} \quad (\alpha < c < \beta)$$

\Downarrow

$$-\sin \frac{c}{3} = \frac{3}{\beta - \alpha} \cdot \left(\cos \frac{\beta}{3} - \cos \frac{\alpha}{3} \right)$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin \frac{c}{3} \leq 1 \Rightarrow \left| \sin \frac{c}{3} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{3}{\beta - \alpha} \cdot \left(\cos \frac{\beta}{3} - \cos \frac{\alpha}{3} \right) \right| \leq 1$$

$$\left| \cos \frac{\beta}{3} - \cos \frac{\alpha}{3} \right| \leq \frac{1}{3} |b-a|$$

$$\textcircled{*} \int e^{-x} \cdot \ln(1+e^x) dx = -e^{-x} \cdot \ln(1+e^x) + \int \frac{1}{1+e^x} dx$$

$\frac{1}{e^{-x}}$

$$\left. \begin{array}{l} \ln(1+e^x) = u \quad e^{-x} dx = du \\ \frac{e^x}{1+e^x} dx = du \quad -e^{-x} = v \end{array} \right\} = -e^{-x} \cdot \ln(1+e^x) + \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} dx$$

$1+e^{-x} = u$
 $-e^{-x} dx = du$

$$= -e^{-x} \ln(1+e^x) - \int \frac{du}{u} = -e^{-x} \ln(1+e^x) - \ln|1+e^x| + C$$

$$\textcircled{*} \int_1^e \frac{\arcsin(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 \arcsint dt = t \arcsint \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$\arcsint = u \quad dt = du$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = du \quad v = t \end{array} \right\} = \arcsint \Big|_{\frac{\pi}{2}}^1 + \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} + 1$$

$\ln x = t$
 $\frac{dx}{x} = dt$
 $x = e \rightarrow t = 1$
 $x = 1 \rightarrow t = 0$

$$\textcircled{*} \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \left(\frac{(1-\cos x)^{1/2}}{\sin x} - \frac{(\cos x)^{3/2}}{\sin x} \right) \frac{\sin x}{-\cos x} dx$$

$$= \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du$$

$$= \frac{2}{5} (\cos x)^{5/2} - \frac{2}{3} (\cos x)^{3/2} + C$$

$$\textcircled{*} \int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{9+(x+2)^2} = \int \frac{dx}{u^2+9} = \frac{1}{3} \operatorname{Arctan} \frac{u}{3} + C = \frac{1}{3} \operatorname{Arctan} \frac{x+2}{3} + C$$

$x+2 = u$
 $dx = du$

$$\textcircled{*} \int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int \frac{2u du}{(u^2+1) \cdot u} = \int \frac{2 du}{1+u^2} = 2 \operatorname{Arctan} u + C = 2 \operatorname{Arctan} \sqrt{x-1} + C$$

$x-1 = u^2$
 $dx = 2u du$

 YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi , II. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı	Not Tablosu							
	1.a	1.b	2.a	2.b	3.	4.a	4.b	Toplam
Adı Soyadı								
Numarası								
Bölümü		Gr No		Tarih			17.12.2016	
Dersin Adı	MAT1071 Matematik I			Süre	30 dk	Sınıf		
Öğretim Üyesi	CEVAP ANAHTARI			İmza				
YÖK nun 2547 sayılı Kanunun <i>Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin</i> 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.								

1.a. $x > -1$ ve $f(x) = \int_{-1}^x (t^2 + 9)^{\sin t} dt$ olmak üzere $f''(0)$ değerini bulunuz.

$$f'(x) = (x^2 + 9)^{\sin x}$$

$$\ln f'(x) = (\sin x) \cdot \ln(x^2 + 9)$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = (\cos x) \cdot \ln(x^2 + 9) + \frac{2x}{x^2 + 9} \cdot (\sin x)$$

$$f''(x) = (x^2 + 9)^{\sin x} \cdot \left[(\cos x) \cdot \ln(x^2 + 9) + \frac{2x}{x^2 + 9} \cdot (\sin x) \right]$$

$$f''(0) = \ln 9$$

1.b. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(3-e^{-\sqrt{x}})}$ integralini hesaplayınız.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = u \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du \end{aligned} \quad \int \frac{z du}{(3-e^{-u})} = \int \frac{ze^u du}{(3e^u - 1)} = \frac{2}{3} \ln(3e^u - 1) + c = \frac{2}{3} \ln(3e^{\sqrt{x}} - 1) + c$$

*) $f(x) = 2x+1$ fonksiyonunun $[-1, 1]$ aralığında ortalaması \bar{f} bulun. \int_0^1 yi sağlayan c sayısını bulun.

$$\bar{f} = \frac{1}{1-(-1)} \int_{-1}^1 (2x+1) dx = \frac{1}{2} (x^2 + x) \Big|_{-1}^1 = \boxed{1}$$

$$f(c) = 1 \rightarrow 2c+1 = 1 \rightarrow \boxed{c=0} \in [-1, 1]$$

*) $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olmak üzere $F(x) = \int \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos^2 x}} dt$

ise $F'(x) = ?$

Leibnitz formülünden

$$F'(x) = \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot (\sin x)' - \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot (\cos x)' \\ = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x = \boxed{1}$$

*) $F(x) = \frac{1}{x} \int_1^x [2t - F'(t)] dt$ olsun. Kullananak $F'(1) = ?$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \int_1^x (2t - F'(t)) dt + \frac{1}{x} [(2x - F'(x)) \cdot 1] \\ F'(1) \Rightarrow x=1 \Rightarrow F'(1) = -1 \cdot \underbrace{\int_1^1 (2t - F'(t)) dt}_{0} + 1 \cdot (2 - F'(1))$$

$$F'(1) = 2 - F'(1) \rightarrow \boxed{F'(1)=1}$$

$$\textcircled{*} \quad I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)((\arctan\sqrt{x})^2 + 9)}$$

$$\arctan\sqrt{x} = u$$

$$\frac{1}{\frac{2\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}} dx = du \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)} dx = du$$

$$I = 2 \int \frac{du}{u^2 + 9} = \frac{2}{3} \arctan \frac{u}{3} + C = \frac{2}{3} \arctan(\arctan\sqrt{x}) + C$$

$$\textcircled{*} \quad \int \frac{18 \tan^2 x \sec^2 x}{(2 + \tan^2 x)^2} dx = \int \frac{6}{u^2} du = -\frac{6}{u} + C$$

$$= -\frac{6}{(2 + \tan^2 x)} + C$$

$$2 + \tan^2 x = u$$

$$3 \tan^2 x \sec^2 x dx = du$$

$$\textcircled{*} \quad \int \frac{(2x-1) \cdot \cos \sqrt{3(2x-1)^2 + 6}}{\sqrt{3(2x-1)^2 + 6}} dx = \int \frac{\cos u}{6} du$$

$$= \frac{\sin u}{6} + C$$

$$= \frac{\sin \sqrt{3(2x-1)^2 + 6}}{6} + C$$

$$\sqrt{3(2x-1)^2 + 6} = u$$

$$\frac{3 \cdot 2(2x-1) \cdot 2}{2 \sqrt{3(2x-1)^2 + 6}} dx = du$$

$$\frac{6 \cdot (2x-1)}{\sqrt{3(2x-1)^2 + 6}} dx = du$$

$$\textcircled{*} \int \sin^4 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \underbrace{\sin^4 x}_{u^4} \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{1-u^2} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{du} = \int (u^4 - u^6) \, du$$

$u = \sin x$
 $du = \cos x \, dx$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C$$

$$= \frac{(\sin x)^5}{5} - \frac{(\sin x)^7}{7} + C$$

$$\textcircled{*} \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \underbrace{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}_{\left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2} \cdot \underbrace{\sin^2 x \, dx}_{\frac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x) \cdot \sin^2 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\underbrace{\sin^2 2x}_{\frac{1-\cos 4x}{2}} - \underbrace{\sin^2 2x \cdot \cos 2x}_{\sin 2x = u} \right) \, dx$$

$$2 \cos 2x = du$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx - \frac{1}{8} \int u^2 \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{16} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{8} \cdot \frac{(\sin 2x)^3}{6} + C$$

$$\textcircled{*} \int \sin 5x \cdot \cos 3x \, dx = \int \frac{1}{2} (\sin 8x + \sin 2x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\cos 8x}{8} - \frac{1}{2} \frac{\cos 2x}{2} + C$$

$$\textcircled{*} \int \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx = \int \frac{1}{2} (\cos 5x + \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 5x}{5} + \sin x \right) + C$$

$$\textcircled{*} \int x^3 \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int t \cdot \sin t \, dt = \frac{1}{2} \left[-t \cdot \cos t + \underbrace{\int \cos t \, dt}_{\sin t} \right]$$

$x^2 = t$
 $2x \, dx = dt$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = u \rightarrow dt = du \\ \sin t + dt = dv \rightarrow v = -\cos t \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left(-x^2 \cos x^2 + \sin x^2 \right) + C$$

$$\textcircled{2} \quad f(g(x)) = x, \quad f'(x) = 1 + (f(x))^2 \Rightarrow g'(x) = ?$$

$$f(g(x)) = x \Rightarrow f'(g(x)), \quad g'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{1 + (f(g(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

$f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 15x^3$

$\left. \begin{array}{l} \text{Gözüm} \\ f' = 15x^4 - 60x^3 + 45x^2 \\ \max - \min? \\ \text{Arter A=0'dan?} \end{array} \right\} \Rightarrow f' = 15x^2(x^2 - 4x^3 + 3) = 0$

$$x = 0 \text{ C.R.K}$$

$$x = 3$$

$$x = 1$$

x	0	1	3
f'	+ + - +		
f	\nearrow	\nearrow	\searrow

max min

$$x = 1 \text{ max}$$

$$x = 3 \text{ min}$$

$$\text{Arter: } (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$$

$$\text{Azalar: } (1, 3)$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = x^2 \sqrt{5-x} \quad \text{fonksiyonun ekstremumları?}$$

Tanım Kümesi: $(-\infty, 5]$

$$f'(x) = 2x \sqrt{5-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{5-x}} = \frac{5(4-x)}{2\sqrt{5-x}}$$

$$x = 0 \quad x = 4 \text{ (K.N.)}$$

$$x = 5 \quad (\cancel{\text{Uz/Nokta}})$$

x	$-\infty$	0	4	5
f'	- + -			
f	\searrow	\nearrow	\nearrow	\searrow

min max min

$$x = 0 \rightarrow \text{yerel min}$$

$$x = 4 \rightarrow \text{yerel max}$$

$$x = 5 \rightarrow \text{yerel min} \\ (\text{Uz/Nokta min}).$$