

MATRİSLER

Tanım: Elemanları sayılar, değişkenler veya fonksiyonlar olabilen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Şeklindeki düzenli tabloya m satır ve n sütunlu bir matris veya kısaca $m \times n$ matris denir.
 $m \times n$ 'e matrisin mertelesi denir.

Elemanları a_{ij} ler olan bir A matrisi $A = [a_{ij}]$ şeklinde gösterilir.

~~ÖR/~~ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$

$$D = \begin{bmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & 2i & i+5 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{birer matristir.}$$

Tanım: Bir tek satırdan oluşan matrise satır matris denir. Satır matrisin mertelesi $1 \times n$ dir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

Bir tek sütündan oluşan matrise sütun matris denir. Sütun matris $m \times 1$ mertebelidir.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Tanım; Her elemanı sıfır olan matrise sıfır matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım; Satır sayısı sütun sayısına eşit olan matrise kare matris denir. Kare matris $n \times n$ mertebelidir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Kare matrislerdir.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ mertebeli kare matris ise

$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına A'nın asal köşegen elemanları denir. Bir kare matrisin asal köşegen elemanlarının toplamına da kare matrisin iz'i denir.

Yani $\text{iz } A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ dir.

Tanım; $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir kare matriste asal köşegen dışındaki elemanlar sıfırsa matrise köşegen matris denir.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ köşegen matris örnekleridir.

Tanım; Bir köşegen matriste asal köşegen elemanları birbirine eşitse yani $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$ ise matrise skaler matris denir.

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ skaler matristir.

Tanım: Bir skaler matriste asal köşegen üzerindeki elemanlar 1 ise matrise birim matris denir. $n \times n$ mertebeden birim matris I_n ile gösterilir.

$$I_1 = [1], I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{dir.}$$

Tanım: Karşıtaklı elemanları eşit olan aynı mertebeden matrislere eşit matrisler denir. $m \times n$ mertebeden $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri eşit ise $A=B$ şeklinde yazılır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & z & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ x & -5 & y \end{bmatrix}$ matrislerinin eşit olması için $x=2, y=4, z=-5$ olmalıdır.

Tanım: Aynı mertebeden iki matrisin toplamı karşıtaklı elemanların toplamıyla elde edilen, aynı mertebeden bir matristir.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ ve } B = [b_{ij}]_{m \times n} \text{ ise } A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m \times n} \text{ dir.}$$

Farklı mertebeden matrisler toplanamazlar.

Tanım: A bir matris ve λ bir skaler olmak üzere, λA skaler çarpımı A nin her bir elemanının λ ile çarpılmasından elde edilen bir matristir.

$(-1)A$ çarpımı $-A$ ile gösterilir.

Bu iki matrisin farkı

$$A-B = A+(-B) = A+(-1)B \text{ dir.}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $3A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorem; A, B, C aynı mertebeden matrisler ve k, l birer skaler olmak üzere,

- | | |
|--------------------------------|-------------------------|
| 1) $A + B = B + A$ | 5) $k(A + B) = kA + kB$ |
| 2) $A + (B + C) = A + (B + C)$ | 6) $(k + l)A = kA + lA$ |
| 3) $A + 0 = A$ | 7) $(kl)A = k(lA)$ |
| 4) $A - A = 0$ | |

Tanım; $A = [a_{ij}]$ bir $m \times r$ matris ve $B = [b_{ij}]$ bir $r \times n$ matris ise bunların çarpımı $i = 1 \dots m$ $j = 1 \dots n$ için $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}$ olmak üzere $AB = [c_{ij}]$ $m \times n$ - matristir.

Herhangi iki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Teorem; A, $m \times n$ matris, B ve C, $n \times r$ matrisler, D, $r \times t$ matris ve λ bir skaler olmak üzere

- 1) $A(BD) = (AB)D$
- 2) $A(B+C) = AB + AC$
- 3) $(B+C)D = BD + CD$
- 4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- 5) $A0 = 0$
- 6) $A\mathbb{I} = \mathbb{I}A = A$
- 7) Genellikle $AB \neq BA$ dir. A ve B iki kare matris olmak üzere $AB = BA$ eşitliği sağlanıyorsa A ve B ye deşismelidir denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ olup } AB \neq BA \text{ dir.}$$

Tanım; A bir kare matris olsun. Anın n defa kendisiyle çarpımı sonucunda elde edilen matrise Anın n -kuveti denir. Yani

$$A \cdot A \cdots A = A^n \text{ dir.}$$

$$A^k \cdot A^l = A^{k+l} \text{ ve } (A^k)^l = A^{kl} \quad (k, l \in \mathbb{N}) \text{ dir.}$$

Tanım; Bir A matrisinin aynı numaralı satırlarıyla sütunlarının yer deşiftirmeyle elde edilen matrise Anın transpozesi denir ve A^t ile gösterilir.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ matrisi ise } A^t = [a_{ji}]_{n \times m} \text{ matrisidir.}$$

ÖR/

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C = [6] \quad C^t = [6] \text{ dir.}$$

Teorem; A ve B aynı mertebeden iki matris ve λ bir skaler olmak üzere

$$1) (A+B)^t = A^t + B^t \quad 3) (\lambda A)^t = \lambda A^t$$

$$2) (A^t)^t = A \quad 4) (AB)^t = B^t A^t \text{ dir.}$$

Tanım; $A^t = A$ olacak şekilde A kare matrisine simetrik matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ dir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix} \text{ bir simetrik matristir.}$$

Tanım; $A^t = -A$ olacak şekilde A kare matrisine ters-simetrik matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir ters-simetrik matris ise her i, j için $a_{ij} = -a_{ji}$ dir. Sü halde bir ters-simetrik matriste asal köşegen elementleri hep sıfırdır.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \text{ bir ters simetrik matristir.}$$

Tanım; $A_{n \times n}$ kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

Tanım; Bir A kare matrisi için $A^{p+1} = A$ olacak şekilde bir pozitif p tamsayısi varsa A matrisine periyodik matris denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayı p ye de A matrisinin periyodu denir.

$A^2 = A$ ise A matrisine idempotent matris denir.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ matrisi bir idempotent matristir.

Tanım; Bir A kare matrisi için $A^q = 0$ olacak şekilde bir pozitif q varsa A matrisine nilpotent matris denir. Bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayı q ye de nilpotent matrisin indeksi (derecesi) denir.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ üçüncü dereceden bir nilpotent matristir.

Tanım; $A^2 = I$ olacak şekilde A kare matrisine involut matris denir.

Tanım; Elemenları karmaşık sayılar olan bir A matrisinde her elementin yerine eslenipinin yazılmasıyla elde edilen matrise A matrisinin esleniği denir. \bar{A} ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2+i & 7i \\ 3-4i & i & 1+i \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & -7i \\ 3+4i & -i & 1-i \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Teorem; A ve B aynı mertebeden iki matris ve herhangi bir skaler olsun.

i) $\overline{\overline{A}} = A$

ii) $\overline{kA} = k\overline{A}$

iii) $(\overline{A+B}) = \overline{A} + \overline{B}$

iv) A ve B çarpılabilir iki matris olmak üzere $(\overline{AB}) = \overline{A}\overline{B}$

Tanım; $(\overline{A})^t = A$ olacak şekilde A kare matrisine Hermitian matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ kare matrisi Hermitian matris ise $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ dir. Bir hermitian matrisin köşegen elemanları reel sayılardır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & -5 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 3 \end{bmatrix} \text{ matrisi bir hermitian matrisdir.}$$

Tanım; $(\overline{A})^t = -A$ olacak şekilde A kare matrisine ters-hermitian matris denir. Eğer $A = [a_{ij}]$ kare matrisi ters-hermitian matris ise $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$ dir. Bir ters Hermitian matrisin köşegen elemanları 0 veya sanal sayılardır.

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix} \text{ matrisi bir ters hermitian matristir.}$$

Tanım; A, bir kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

Tanım: A , $n \times n$ mertebedesinden bir kare matris olmak üzere $AB = BA = I_n$ bağıntısına sağlayan (eğer varsa) B matrisine A matrisinin tersi veya inversi denir. A matrisinin inversi A^{-1} ile gösterilir. Her kare matrisin tersi yoktur.

ÖR/ $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$, $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$ (kER)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım: A , $n \times n$ mertebedesinden bir kare matris olmak üzere A nin tersi yoksa A ya singüler veya tekil matris denir.

* $n \times n$ mertebeden A kare matrisinin tersi varsa bu bir tanedir.

Elementer Satır ve Sütun İşlemleri:

- 1) Matriste herhangi i ve j numaralı satırların yerlerini değiştirmek, bu işlem H_{ij} ile gösterilir.
- 2) Matriste herhangi i ve j numaralı sütunların yerlerini değiştirmek Bu işlem K_{ij} ile gösterilir.
- 3) Matriste i numaralı satır elementlerini sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarpmak $H_i(k)$ ile gösterilir.
- 4) Matriste j numaralı sütun elementlerini sıfırdan farklı bir l sayısı ile çarpmak $K_j(l)$ ile gösterilir.

5) Matrisde herhangi bir i numaralı satır elementlerini sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarپip herhangi j numaralı satır elementlarına eklemek. $H_{ji}(k)$ ile gösterilir.

6) Matrisde herhangi bir i numaralı sütun elementlerini sıfırdan farklı bir k sayısı ile çarپip herhangi j numaralı sütun elementlarına eklemek $K_{ji}(k)$ ile gösterilir.

Tanım: (Derk matris)

Bir A matrisine ard arda elementer satır (veya sütun işlemleri) uygulayarak B matrisi elde edilirse A ve B matrislerine sırasıca (veya sütunca) derk matrisleri denir. $A \sim B$ ile gösterilir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine derk matris bulalım.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 15 & 9 \end{bmatrix} = B$$

$H_{12}(1)$ $H_{21}(1)$ $H_{31}(3)$

Tanım: Bir matris aşağıdaki gelüle ise satırca indirgermiş formdadır.

- 1) Matriste sıfır satırı (yani tamamı sıfırdan oluşan satır) varsa bu satır matrisin en altında olmalıdır.
- 2) Bir satırda sıfırdan farklı ilk eleman 1 olmalıdır.
- 3) Bu 1 ler bir önceki satırın 1 ine göre sağ ve alta konumlanmalıdır.
- 4) Bir sütunda 1 varsa o sütundaki diğer tüm elemanlar sıfır olmalıdır.

1, 2, 3 koşulunu sağlayan matris satırca indirgermiş formda 4 koşuluda sağlanırsa satırca indirgermiş eş olan formdadır.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ satırca indirgermiş formdadır.

$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ satırca indirgermiş formda deplidir.

$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ satırca indirgermiş formda deplidir. $E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ satırca indirgermiş formda deplidir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ satırca indirgermiş eş olan formdadır. $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ satırca indirgermiş eş olan formda deplidir.

Tanım: Bir matrisin Rangi

Satırca indirgermiş formdaki bir matrisin sıfırdan farklı satırlarının sayısına o matrisin rangı denir. r_A ile gösterilir.

Üz/

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad r_A = ?$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_A = 2$$

$H_{21}(-3)$ $H_2(\frac{1}{4})$

Üz/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad r_A = ?$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-3), H_{31}(-2), H_{41}(-5), H_{51}(-1), H_{42}(-1), H_3(-\frac{1}{5})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r_A = 3$$

$H_{45}, H_{23} \quad H_{32}(4), H_2(-1) \quad H_3(-1), H_3(-\frac{1}{2})$

Tanım: Bir matrisin elementer satır ve elementer sütün işlemleri uygulanarak matris hem satırca hem de sütunca indirgenmiş esolan forma getirilebilir.

Böylece matris aşağıdaki sekülerden birine denk olur.

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, I_k$$

Bir matrisi yukarıdaki formlardan herhangi biri şeklinde yazmaya matrisi normal sekle getirme denir. Matrisin rangı k olur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ matrisini normal forma getiriniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$H_{21}(-2)$ $H_{31}(1)$ H_{23}

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_{12}^{(1)}$, $H_{32}^{(2)}(-2)$ K_{23} $K_{31}^{(1)}(-3)$, $K_{41}^{(1)}(-2)$

$$\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$K_{42}^{(3)}$$

A matrisi

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

normal formuna
getirilmiştir.

$$r_A = 2 \text{ dir.}$$

Teorem; Bir A kare matrisinin tersinin bulunabilmesi için gerek ve yeter koşul bının matrise satırca denk olmalıdır. n-inci mertebede bir regüler

A matrisi için

$[A; I_n] \sim [I_n; A^{-1}]$ olacak şekilde bulunan A^{-1} matrisi A matrisinin tersidir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

$$[A; I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{N}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$H_{21}(-1), H_{31}(-1)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{H}_{12}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I_3; \bar{A}^{-1}]$$

$\underbrace{H_{13}^{I_3}(-3)}$ $\underbrace{A^{-1}}$

ÖR/ A ve B değişimeli iki kare matris ise A^n ve B^m matrislerinin de değişimeli olacağını gösteriniz.

Gözüm: A ve B değişimeli olduğundan $AB = BA$ dir. $A^n B^m$ çarpımında her seferinde AB yerine BA yazarak yani

$$A^n B^m = AA \dots \underbrace{A \cdot B \cdot B \dots B}_{BA}$$

$A^n B^m = BB \dots B \cdot A \cdot A \dots A = B^m A^n$ elde edilir. yani A^n ve B^m değişimlidir.

ÖR/ $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

Gözüm:

Tüm varım yöntemiyle $n=1$ için doğruluğu aşıktır.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$n-1$ için doğruluğunu kabul edip n için ispat yapalıım.

$$n-1 \text{ için } \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

n için

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

OR/ $(A-B)^t = A^t - B^t$ olduğunu gösteriniz.

Gözüm:

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

ve

$$(kA)^t = kA^t \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$\begin{aligned} (A-B)^t &= (A + (-1)B)^t = A^t + (-1)B^t \\ &= A^t - B^t \text{ dir.} \end{aligned}$$

OR/ A ve B matrisleri toplanabilir ve çarpılabilir iki kare matris olsun.

A ve B matrisleri değişmeli ise

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \text{ olacağını gösteriniz.}$$

Gözüm: A kare matrisi için

$$A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ tane}} \text{ olduğundan ve } AB = BA$$

verildiğinden

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - \cancel{AB} - \cancel{BA} + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

elde edilir.

ÖR/ $A + A^t$ nin simetrik matris olduğunu gösteriniz.

$(A + A^t)^t = A + A^t$ olduğu gösterilmeli
($A^t = A$ ise A matrisi simetrik matris)

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A \\ = A + A^t \text{ dir.}$$

İki özellik kullandık

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$A + B = B + A$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$ matrisi idempotent bir matris olduğuna göre k ne olmalıdır.

Gözümlü:

A matrisi idempotent ise $A^2 = A$ olmalı.

$$A \cdot A = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-k & 3k-12 & k^2-k-15 \\ 1 & -3 & 15-4k \\ 4-k & 3k-12 & k^2-k-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & k \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & k \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \text{ dan}$$

$$4-k = -1$$

$$k = 5 \text{ bulunur.}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisleri verilsin.

a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{bmatrix}$ ve

b) $B^n = \begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olduğunu gösteriniz.

a) $n=1$ için eşitlik sağlanır. $n-1$ için kabul edip n için ispatlayalım.

$$A^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)a & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (n-1)a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

b) Benzer şekilde

$n=1$ için eşitlik sağlanır. $n-1$ için

$$B^{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & (n-1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$B^n = B^{n-1}B = \begin{bmatrix} 1 & (n-1)b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^n = \begin{bmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & y \\ x & -2 & 7 \\ 8 & z & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin simetrik olması için x, y, z değerleri ne olmalıdır?

$A^t = A$ simetrik matris

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & x & 8 \\ 5 & -2 & z \\ y & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x & 8 \\ 5 & -2 & z \\ y & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & y \\ x & -2 & 7 \\ 8 & z & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = 5 \quad z = 7 \quad y = 8 \text{ olmalı}$$

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & 3 \\ 2+i & 0 & -i \\ 3 & i & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin Hermitian matris olduğunu gösteriniz.

$(\bar{A})^t = A$ A matrisi hermitian

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2+i & 3 \\ 2-i & 0 & i \\ 3 & -i & 7 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{A})^t = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & 3 \\ 2+i & 0 & -i \\ 3 & i & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2-i & 3 \\ 2+i & 0 & -i \\ 3 & i & 7 \end{bmatrix} \quad (\bar{A})^t = A$$

ÖR/ $A + A^t$ nin simetrik matris olduğunu göster.

$(A + A^t)^t = A + A^t$ olduğunu gösterilecek

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

* $(A+B)^t = A^t + B^t$
 * $(A^t)^t = A$

* $A + B = B + A$

} kullanıldı.

ÖR/ A ve B simetrik iki matris olmak üzere

$5A^7 + 7B^5$ matrisinde simetrik matris olduğunu gösteriniz.

A ve B simetrik matris ise $A^t = A$ dir.
 $B^t = B$

$(5A^7 + 7B^5)^t = 5A^7 + 7B^5$ olduğunu gösterilecek.

$$\begin{aligned}(5A^7 + 7B^5)^t &= (5A^7)^t + (7B^5)^t \\&= 5(A^7)^t + 7(B^5)^t \\&= 5(A^t)^7 + 7(B^t)^5 \\&= 5 \cdot A^7 + 7 \cdot B^5\end{aligned}$$

DETERMINANTLAR

Tanım: Bir A kare matrisinin determinantı $\det A$ veya $|A|$ ile gösterilir.

1) 1×1 mertebeli $A = [a]_{1 \times 1}$ determinantı
 $\det A = |A| = a$ dir.

2) 2×2 mertebelerde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ matrisinin determinantı
 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

3) 3×3 mertebeli $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ matrisin determinantı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

1. satırına göre açılmıştır, istediğimiz satır ve sütuna, göre açımı yapabiliyoruz.

Tanım: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ bir matris olsun ve M_{ij} , a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle A dan elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ mertebelerde matrisi gösterin. M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minoru denir. Ayrıca $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ de penne a_{ij} elemanının esgarpanı (kofaktör) denir.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ olsun.

$M_{23} \rightarrow a_{23}$ elemanının bulunupu satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen matrisdir.

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(8-25) = 17$$

Teoremi; $n \geq 2$ olmak üzere A , $n \times n$ mertebeli bir kare matris olsun. $i=1, 2, \dots, n$ ve $j=1, 2, \dots, n$ için

$$\det A = |A| = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n} \\ = a_{ij} A_{ij} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} \text{ dir} \quad \left. \right\} \text{Laplace Açılımı}$$

ÖR/ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = ?$

2. sütuna göre $a_{12} = -6$ $a_{22} = 0$ $a_{32} = 3$

$$|A| = a_{12} A_{12} + a_{22} A_{22} + a_{32} A_{32} = -6 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 = -12 + 15 = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = (-1)(-5) = 5$$

Determinantin Özellikleri

1) Bir determinantta herhangi bir satır (ya da sütun) elemanlarının hepsi 0 ise determinantın değeri 0'dır.

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2) Bir determinantın bir satırında (ya da sütunundaki) elemanlar bir k skaleri ile çarpılırsa determinant k ile çarpılmış olur.

ÖR

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot |A| \text{ dır.}$$

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \cdot 0 \\ -1 & 3 & 4 \cdot 2 \\ 0 & 1 & 4 \cdot 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

3) Determinantta herhangi iki satır (ya da sütun) yer değiştirirse determinant işaret değiştirir.

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

4) Bir determinantin herhangi bir satır (ya da sütun) elemanları bir k skaleni ile çarpılıp bir başka satırın (ya da sütunun) elemanlarına eklenirse determinant değeri değişmez.

~~ÖR~~ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$ Birinci sütuna göre determinantı azarsak

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 12 = -20 \text{ bulunur.}$

5) Bir determinantin herhangi iki satırı (ya da sütunu) birbirine eşit ise determinantın değeri 0 dir.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad 1 \text{ ve } 3 \text{ satır aynı}$

6) Bir determinantin herhangi iki satır (ya da sütun) elemanları orantılı ise determinantın değeri 0 dir

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad 1 \text{ ve } 2 \text{ sütün orantılı}$

7) Bir determinantin herhangi bir satır (ya da sütun) elemanları başka bir satır (ya da sütun) elemanlarının eşgarantiliyile çarpılarak elde edilen termlerin toplamı 0 dir.

OR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

1 satır elemanlarını 3üncü satır elemanlarının esaslar
ile karşılikli çarpıp toplayalım.

$$a_{31} = -1 \quad a_{32} = 4 \quad a_{33} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1 - 6) = -7$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 1 \cdot (-7) - 1(-1) + 3 \cdot 2 \\ = -7 + 1 + 6 = 0$$

8)

$$\begin{vmatrix} a & d+e & k \\ b & f+g & s \\ c & h+l & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & k \\ b & f & s \\ c & h & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e & k \\ b & g & s \\ c & l & t \end{vmatrix}$$

9) $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisi için $|A| = |A^t|$

10) $|AB| = |A| \cdot |B|$

11) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

12) $|A^k| = |A|^k \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$

13) $|kA| = k^n |A|$ dir. ($n \times n$ mertebe)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = t \text{ ise} \quad \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2 t \text{ dir.}$$

BİR MATRİSM TERİ;

Tanım; Bir kare matrism elementlerinin yerine, o elementlerin eş çarpanlarının alınmasıyla elde edilen matrisin transpozisine ilk matrisin ek matrisi (adjoint matrisi) denir. Ek A, Adj A ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ek matrisi}$$

$$\text{Ek } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{dir.}$$

ör/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Ek } A = ?$

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\text{Ek } A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorem: A bir kare matris olsun. $|A| \neq 0$ ise

$$A^{-1} = \frac{EKA}{|A|} \text{ dir.}$$

Ispat: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$$EKA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$$A \cdot EKA = \begin{bmatrix} a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n} & a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + \dots + a_{1n} A_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{11} A_{n1} + a_{12} A_{n2} + \dots + a_{1n} A_{nn} & a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot EKA = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = |A| \cdot I$$

$$A \cdot EKA = |A| \cdot I \text{ elde edilir.}$$

$$\underbrace{A^{-1}}_I \cdot A \cdot EKA = A^{-1} |A| \cdot I$$

$$EKA = |A| \cdot A^{-1} \cdot I$$

$$EKA = |A| \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{EKA}{|A|} \text{ elde edilir.}$$

Not: Bir A kare matrisi için $|A|=0$ ise
 A matrisinin tersi yoktur.

ÖR/ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -17$$

$$EKA = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{EKA}{|A|} = -\frac{1}{17} \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{17} & \frac{5}{17} & \frac{-2}{17} \\ \frac{3}{17} & \frac{-9}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{-2}{17} & \frac{6}{17} & \frac{1}{17} \end{bmatrix}$$

Bir matrisin alt matrisi:

$m \times n$ mertebeli herhangi bir matrisin herhangi satır veya sütunlarının silinmesiyle oluşan matrislere alt matris denir.

Bir matrisin rangi: A , $m \times n$ mertebeli bir matris olsun. A nin kare alt matrisleri arasında determinantı sıfırdan farklı olanlardan mertebesi en büyük olanın mertebesine bir matrisin rankı denir.

ör/ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matris 3×3 mertebeli
 $|A|=0$ (çünkü 3. satırın tümü 0)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ dir. Alt kare matrisin mertebesi } 2 \times 2 \text{ olduğu A matrisinin rangı 2 dir.}$$

ör/ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} r_A = ?$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad r_A = 3 \text{ tür.}$$

ÖR/

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5+6=11$$

ÖR/

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$$

determinant özelliklerini kullanarak determinantı hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ÖR/

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$$

determinantı 82 kullanarak determinantı hesaplayınız.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (b-a) & (b-a)(b^2+ab+a^2) \\ (c-a) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 1 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix}$$

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & c^2+ac-ab-b^2 \end{vmatrix}$$

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+ab+a^2 \\ 0 & (c-b)(c+b)+a(c-b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

$$\text{ör/} \begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix} \quad \text{det } 82 \text{ kulleninak çarpımlara ayırmız.}$$

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & abc \\ b^2 & b^4 & abc \\ c^2 & c^4 & abc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2 & b^4 & 1 \\ c^2 & c^4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2-a^2 & b^4-a^4 & 0 \\ c^2-a^2 & c^4-a^4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^4-a^4 \\ c^2-a^2 & c^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & (b^2-a^2)(b^2+a^2) \\ c^2-a^2 & (c^2-a^2)(c^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2+a^2 \\ 1 & c^2+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2+a^2 \\ 0 & c^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2-a^2)(c^2-a^2)(c^2-b^2)$$

ÖR / $\begin{vmatrix} r & t & 1 \\ p & -1 & w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = 7$ old göre determinant özelliklerini kullanarak

$$\begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 4 & 2s & 2u \end{vmatrix} \text{ determinant değeri hesaplayınız.}$$

$$\begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 4 & 2s & 2u \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} r-2 & t-s & 1-u \\ -p+2u & 1+su & -w+u^2 \\ 2 & s & u \end{vmatrix}$$

$$2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ -p & 1 & -w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} r & t & 1 \\ p & -1 & w \\ 2 & s & u \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 = -14$$

ÖR / $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n-1 & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2-1 & n^2 \end{vmatrix} = 0$ old göster

orantılı $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \\ 2n & 2n & 2n & \dots & 2n & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n^2-n & n^2-n & n^2-n & \dots & n^2-n & n^2-n \end{vmatrix} = 0$ dir.

ÖR/

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n \times n} = (-1)^{n-1} (n-1) \text{ olduğunu gösteriniz.}$$

Birinci sütuna diğer sütunları ekle

$$|A| = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n \times n}$$

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

$$|A| = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} = (n-1) \cdot (-1)^{n-1} \text{ bulunur.}$$

ÖR/ $n \times n$ mertebeden

$$|A| = \begin{vmatrix} x+y & x & \dots & x \\ x & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \dots & x+y \end{vmatrix}$$

determinant özellikleri
yardımıyla hesaplayınız.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} nx+y & x & \dots & x \\ nx+y & x+y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ nx+y & x & \dots & x+y \end{vmatrix} = (nx+y) \begin{vmatrix} y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & y \end{vmatrix} \\ &= (nx+y) \cdot y^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \\ &= (nx+y) y^{n-1} \end{aligned}$$

ÖR/ A , $n \times n$ mertebedeli tekil olmayan bir kare matris ve $\text{Adj } A$, A nin ek matrisi ise
 $|\text{Adj } A| = |A|^{n-1}$ dr. Gösteriniz.

$|\text{EKA}| = |\text{Adj } A| = |A|^{n-1}$ old göstereceğiz.

A. EKA = $\begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix}$ old biliyoruz.

$A \cdot \text{EKA} = |A|^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = |A| \cdot I$

birim matris.

$$|A| \cdot |\text{EKA}| = |A|^n$$

$|\text{EKA}| = \frac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$ dir.

ÖR / A ve B , 3x3 mertebedel ikî matris ve

$\det A = -7$, $\det B = 4$ olsun.

a) $\det(A^T (5B)^{-1})$ deðenli hesaplayınız.

b) $\det(2A^{-1} + \text{Adj } A)$ //

a) $\det(A^T (5B)^{-1}) = \underbrace{\det A^T}_{\det A} \cdot \det\left(\frac{1}{5} B^{-1}\right)$

Kullanılan özellikler

1) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$

2) $|kA| = k^n |A|$ ($n \times n$)

3) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

4) $A^{-1} = \frac{\text{E}kA}{|A|}$

5) $|A| = |A^T|$

$$\begin{aligned} &= -7 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det B^{-1} \\ &= -\frac{7}{5^3} \cdot \frac{1}{\det B} = -\frac{7}{5^3} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{7}{500} \end{aligned}$$

b) $\det(2A^{-1} + \text{Adj } A) = \det[(2A^{-1}) + |A| \cdot A^{-1}]$

$$= \det[(2A^{-1} - 7A^{-1})]$$

$$= \det[-5A^{-1}]$$

$$= (-5)^3 \cdot \det A^{-1}$$

$$= (-5)^3 \cdot \frac{1}{|A|}$$

$$= \frac{-125}{-7} = \underline{\underline{125}}/7$$

OR/

$$A = \begin{bmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin olmaması için x bilmeyenlesi ne olmalıdır?

Tersinin olmaması için $|A|=0$ olmalıdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & -1 & 1 \\ x+2 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= x+2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-3 & 1 \\ 0 & -6 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-2 & 1 \\ 0 & x-2 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$= (x+2)(x-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x+4 \end{vmatrix}$$

$$(x+2)(x-2)(x+4) = 0$$

$$x = -2 \quad x = 2 \quad x = -4$$

icin matrisin tersi yontur.

BR

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 & 1 \\ -x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = (x+1)^4 (4-x) \text{ eşitliğini determinant özelliklerini kullanarak ispatlayınız.}$$

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 1 & 1 & 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 & 1 & 1 \\ -x & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & -1-x & 1+x \\ 0 & 0 & -1-x & 0 & 1+x \\ 0 & -1-x & 0 & 0 & 1+x \\ 0 & 1+x & 1+x & 1+x & 1-x^2 \end{array} \right|$$

Önce 1.-inci satırı göre açıp sonra tüm satırlardan $(x+1)$ çarpanı dışarı alınarak

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -(1+x) & 1+x \\ 0 & -(1+x) & 0 & 1+x \\ -(1+x) & 0 & 0 & 1+x \\ 1+x & 1+x & 1+x & (1+x)(1-x) \end{array} \right| = (x+1)(1+x)(1+x)(1+x) \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{array} \right| + \text{C}$$

$$(x+1)^4 \left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2-x \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{array} \right| = (x+1)^4 (-1)^{4+1} \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{array} \right| + \text{C}$$

$$= -(x+1)^4 \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-x \\ 1 & 1 & 2-x \end{array} \right|$$

$$= - (x+1)^4 (-1)^{3+1} \cdot 1 \left| \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 1 & 3-x \end{array} \right|$$

$$= - (x+1)^4 [(-1)(3-x) - 1]$$

$$= - (x+1)^4 \underbrace{[-3+x-1]}_{-4+x}$$

$$= (x+1)^4 (-x+4)$$

~~ÖR~~

$$A = \begin{vmatrix} \lambda & c & \dots & c \\ c & \lambda & \dots & c \\ c & c & \lambda & \dots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & \lambda \end{vmatrix}_{n \times n}$$

matrisi veriliyor. $|A|$ 'yi bulunuz.

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & c & \dots & c \\ c & \lambda & \dots & c \\ c & c & \lambda & \dots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

2, 3 ... n.inci sütunları
1. sütuna eklersenk

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda + (n-1)c & c & \dots & c \\ \lambda + (n-1)c & \lambda & \dots & c \\ \lambda + (n-1)c & c & \lambda & \dots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda + (n-1)c & c & c & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

$\lambda + (n-1)c$ ortak
(1. sütunda)

$$|A| = (\lambda + (n-1)c) \begin{vmatrix} 1 & c & \dots & c \\ 1 & \lambda & & c \\ 1 & c & & c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & c & & \lambda \end{vmatrix}$$

$$|A| = (\lambda + (n-1)c) \begin{vmatrix} 1 & c & \dots & c \\ 0 & \lambda - c & 0 & \dots & c \\ 0 & 0 & \lambda - c & \dots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - c \end{vmatrix}$$

$$|A| = (\lambda + (n-1)c) \cdot (\lambda - c)^{n-1}$$

^{*} OR /

A orogonal matris ise $|A| = ?$

Ortogonal matris; A, bir kare matris olsun. $A^t = A^{-1}$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

$A^t = A^{-1}$ her iki tarafın determinantını alalım.

$$|A^t| = |A^{-1}| \Rightarrow |A| = \frac{1}{|A|}$$

$$1) |A^t| = |A| \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{id.} \end{array} \right\} |A|^2 = 1$$

$$2) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad |A| = \pm 1 \text{ dir.}$$

Söyle de yapılabilir.

$$A^t = A^{-1} \text{ ise } A^t \cdot A = A^{-1} \cdot A$$

$$A^t \cdot A = I$$

$$|A^t \cdot A| = |I|$$

$$\underbrace{|A^t| \cdot |A|}_{|A|} = 1$$

$$|AB| = |A| \cdot |B| \quad |A| \cdot |A| = 1$$

$$|A|^2 = 1$$

$$|A| = \pm 1 \text{ elde edilir.}$$

ÖR/ A tersi olan bir matris ise ve

$$A^2 = A \text{ ise } |A| \text{ yi hesaplayınız.}$$

A matrisinin tersi olduğundan $|A| \neq 0$ dir.

$$A^2 = A \text{ esitliginden}$$

$$|A^2| = |A| \cdot |A| = |A|^2 \text{ dir.}$$

$$|A| [(|A| - 1)] = 0 \text{ bulunur.}$$

$|A| \neq 0$ olduğundan $|A| = 1$ elde edilir.

ÖR/ Reel bileşenli $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

$|A|=5$ olduğuna göre

a) $|2A|=?$ b) $|3A^{-1}|=?$ nedir

A, 3×3 mertebeli matris

1) $|kA| = k^n \cdot |A| \quad n \times n$

2) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

a) $|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 5 = 40$

b) $|3A^{-1}| = 3^3 \cdot |A^{-1}| = 27 \cdot \frac{1}{|A|} = \frac{27}{5}$

Lineer Denklem Sistemleri:

Tanım: $i=1, 2 \dots m$ ve $j=1, 2 \dots n$ için a_{ij} ler ve b_i ler birer reel sayı x_1, x_2, \dots, x_n bilinmeyenler olmak üzere

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Şeklindeki bir sisteme m denklem ve n bilinmeyeğinden oluşan bir lineer denklem sistemi dir.

Burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Katsayılar Matrisi

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

bilinmeyenler ve $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ sistemin ikinci tarafıdır.

Lineer denklem sistemi $AX=B$ şeklinde ifade edebiliriz.

Lineer Denklem Sisteminin Denk Matrisler Yardımıyla
Gözümü;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Lineer denk sistemi gözönüne alın.

$$[A; B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

matrisine arttırlımsı katsayılar matrisi desir.

Elementer satır işlemleri ile $[A; B]$ arttırlımsı katsayılar matrisinin indirgenmiş esolan formu elde edilir.

1) $r_A \neq r_{A;B}$ ise sistemin çözümü yoktur.

2) $r_A = r_{A;B}$ " " " " vardır.

a) Eğer $r=n$ ise sistemin tek çözümü vardır.

b) Eğer $r < n$ ise $n-r$ tane keyfi sabite bögle sonsuz çözümü vardır.

Bu yöntemle Gauss-Jordan yöntemi de desir.

ÖR/ $\begin{cases} -2x+y+5z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 3y+2z=1 \end{cases}$ deki sistemin çözümü -

$$[A; B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \quad r_A = r_{A;B} = 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Tek çözüm} \\ n=3 \\ x=4 \quad y=-1 \quad z=2 \end{array} \right.$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{r_A}$ $\underbrace{\hspace{1cm}}_{r_{A;B}}$

ÖR/

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 1 \\ 2y+7z &= 4 \\ 3x+3y+6z &= 3 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$H_{31}(-3)$ $H_2(\frac{1}{2})$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$r_A = r_{A:B} = 2 \quad n=3$
 $n-r = 3-2=1$ tane keyfi sistetik bağılı sonsuz çözüm vardır.

$$x - \frac{3}{2} z = -1 \quad z = 2 \text{ alalım.}$$

$$y + \frac{7}{2} z = 2 \quad x = \frac{3}{2} z - 1 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = 2$$

$$y = -\frac{7}{2} z + 2 = -\frac{7}{2} \cdot 2 + 2 = -5$$

$$x = 2 \quad y = -5 \quad z = 2 \quad \text{bir çözümudur.}$$

$$z=k \text{ alalım.}$$

$$x = \frac{3}{2} k - 1 \quad y = -\frac{7}{2} k + 2 \quad z = k \text{ dir.}$$

ÖR/

$$\left. \begin{aligned} 3x+2y &= 7 \\ 17x+y &= 0 \\ 6x+4y &= 3 \end{aligned} \right\}$$

lineer denklem sistemini çözünüz.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 17 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -11 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -31 & -119 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -11 & -42 \\ 0 & -31 & -119 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$H_{31}(-\frac{1}{11}) \quad H_{12}$

$$H_{21}(-6), H_{31}(-2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 11 & 42 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7/31 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$r_A = 2 \quad r_{A:B} = 3$
 $r_A \neq r_{A:B}$

$H_2(-11)$

sistemin çözümü yoktur.

Lineer Homojen Denklem Sistemleri

Tanım; $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

Şeklindeki bir lineer denklem sisteme lineer homojen denklem sistemi denir.

$r_A = r_{A:B}$ olaceğinden denklem sisteminin her zaman çözümü vardır.

$AX=0$ homojen denklem sistemi için $X=0$ daima bir çözümüdür. Bu çözüme aşikar çözüm denir.

$r_A = r_{A:B} = r$ olsun.

- 1) Eğer $r=n$ ise sistemin tek çözümü sıfır çözümüdür.
- 2) Eğer $r < n$ " " $n-r$ tkeyfi sabite bağlı sonlu çözümü vardır.

ÖR/ $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{cases}$ } lineer homojen denklem sisteminin çözümü.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$H_1(1), H_2(-2), H_3(1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$H_2(\lambda_3), H_3(-2)$$

$$r_A = r_{A:B} = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} n-r=3-2=1 \\ \text{keyfi} \end{array} \right.$$

$$x - z = 0$$

$$y = 0 \quad z = k \text{ alırsak}$$

$$x = k \quad y = 0 \quad z = k \text{ dir.}$$

ÖR/
$$\left. \begin{array}{l} -3x+2y-3z=0 \\ 2x+5y+2z=0 \\ 4x+y-3z=0 \end{array} \right\}$$
 lineer homojen denklem sistemini çözünüz.

$$[A; B] = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_1^{(1)}$ $H_1^{(-1)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_1^{(-2)}$, $H_3^{(-4)}$ $H_2\left(\frac{1}{19}\right)$ $H_3^2(-29)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$H_3\left(-\frac{1}{7}\right)$ $H_2(7)$ $H_{13}(-1)$ $r_A = r_{A;B} = 3 = n$

Tek çözüm.
sürgütlenir.

$x=0$ $y=0$ $z=0$ dir.

CRAMER YÖNTEMİ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

lineer denklem
sistemi de $A, n \times n$

mertebeden kare matris

$|A| \neq 0$ ise $AX=B$ lineer denklen sisteminin tek çözümü vardır. ve bu çözüm

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dr. Burada } \Delta = |A| \text{ ve } \Delta_i \cdot (i=1, 2, \dots, n)$$

A katsayıları matrisinde i .inci sütun yerine

$b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n}$ ifadesinin yazılımasıyla elde edilen matrisin

determinantı olmak üzere $i=1, 2, \dots, n$ için

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ alınarak $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ çözümünü bulmaya

Cramer Yöntemi ile çözüm bulma desir.

ör/ $\begin{cases} 3x+2y-z=9 \\ y-2=4 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$ } denk sistemini Cramer Yöntemi ile
çözünüz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4$$

$H_{23}^{(1)}, H_{13}^{(1)}$ $\Delta = |A| = 4$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 18 = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 11 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 11 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 30 - 22 = 8$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 + 10) = -8$$

$$H_{23}^{(-1)}, H_{13}^{(-2)} \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1 \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2 \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-8}{4} = -2$$

Katsayılar Matrisinin İversi Yardımıyla Çözüm:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

!

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Lineer denklen sistemine göre gönune alalım.

$|A| \neq 0$ ise A^{-1} vardır.

$$\underbrace{AX = B}_{A^{-1}(AX) = A^{-1}B}$$

$X = A^{-1}B$ elde edilir. Bu şekildeki

çözüme katsayılar matrisinin tersi yardımıyla çözüm deir.

ÖR/ $\begin{cases} x+2y+3z=5 \\ 2x+5y+3z=3 \\ x+8z=17 \end{cases}$

lineer denklen sistemi katsayılar matrisinin tersi yardımıyla çözümü.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x=1 \quad y=-1 \quad z=2$$

Genel ömeler;

ÖR/ $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-2y+5z=3 \end{cases}$ } lineer denk sistemini çözünüz

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{array} \right] \quad r_A = r_{A:B} = 2$$

$$n = 3 \quad n - r = 3 - 2 = 1 \text{ keyfi} \\ \text{sabit}$$

$$x + \frac{7}{4} z = \frac{11}{4} \quad z = k \text{ alalım}$$

$$y - \frac{3}{4} z = \frac{5}{4} \quad x = -\frac{7}{4} k + \frac{11}{4} \\ y = \frac{3}{4} k + \frac{5}{4}$$

Sonsuz çözüm vardır.

ÖR/ $\begin{cases} x+3y-2z+t=4 \\ x+2y-4z-3t=6 \\ 2x+5y-5z-2t=10 \end{cases}$ } denk sistemini çözünüz

$$[A:B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & -5 & -2 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 2 \end{array} \right]$$

$$H_1(-1), H_3(-2)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -8 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -11 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$H_2(-1), H_2(-3), H_2(1), H_3(-2), H_3(8)$$

$$r_A = r_{A:B} = 3, n = 4$$

$$n - r = 4 - 3 = 1 \text{ keyfi sabit}$$

$$x - 11t = 10$$

$$y + 4t = -2$$

$$z = 0$$

$$t = k \text{ alalım}$$

$$x = 11k \quad y = -4k - 2 \quad z = 0 \quad t = k$$

OR/ $\begin{cases} y - 2z = b \\ x - y + z = 2 \\ x + ay = 3 \end{cases}$ } Lineer denklem sisteminin
 a) Çözümsüz
 b) Tek çözümlü
 c) Sonsuz çözümlü olması için
 a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A; B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & a & 0 & 3 \end{array} \right]$$

H_{12}

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & a+1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2+b \\ 0 & 1 & -2 & b \\ 0 & 0 & 2a+1 & 1-ab-b \end{array} \right]$$

$H_{31}(-1)$, $H_{12}(1)$, $H_{32}(-a-1)$

a) Çözümsüz $r_A \neq r_{A;B}$ olmalıdır.

$r_A = 2$ iken $r_{A;B} = 3$ olmalı

Yani $2a+1=0$ iken $1-ab-b \neq 0$ olmalıdır.

$a = -\frac{1}{2}$ ve $b \neq 2$ bulunur.

b) Tek çözümlü $r_A = r_{A;B} = n = 3$ olmalı

O da $2a+1 \neq 0$ ise tek çözüm vardır.
 $a \neq -\frac{1}{2}$ " "

c) Sonsuz çözüm $r_A = r_{A;B} < 3$ ($n < r$) olmalı
 $2a+1=0$ ve $1-ab-b=0$ olmalı.

$a = -\frac{1}{2}$ ve $b=2$ olmalıdır.

$$\text{OR/} \quad \begin{aligned} 2x-y+2az+t &= b \\ 2x-y+(2a+1)z+(a+1)t &= 0 \\ -2x+y+(1-2a)z-2t &= -2b-2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{lineer denklen sisteminin}$$

a) Çözümsüz b) Tek çözümli c) Sonsuz çözümli
olması için a ve b değerleri nasıl seçilmelidir?

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 2 & -1 & 2a+1 & a+1 & 0 \\ -2 & 1 & 1-2a & -2 & -2b-2 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -b-2 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 2a & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & -a-1 & -2 \end{array} \right]$$

a) Çözümsüz $r_{A:B} \neq r_A$ olmalı. $-a-1=0$ ise
 $\underline{a=-1}$ de
 $r_A=2$ $r_{A:B}=3$ olur. $b \in \mathbb{R}$

b) Tek çözümli $r_A = r_{A:B} = n = 4$

$r_{A:B} = r_A$ en fazla 3 olabilir. Sistemin tek çözümü yoktur.

c) $r_{A:B} = r_A < n$ olmalı. $r_{A:B} = r_A = 3 < n$ olduğundan
 $-a-1 \neq 0$ olmalı. ($a \neq -1$) için sonsuz çözüm var.
 $b \in \mathbb{R}$

ÖR /
$$\begin{aligned} (a-1)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (a-1)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Lineer denklem} \\ \text{sisteminin} \end{array} \right\}$$

- a) Sonsuz çözümü olması,
 b) Tek çözümünün sıfır çözüm olmasının sağlayan a değerlerini bulunuz.

a) $\begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ 2 & a-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{a-1}{2} \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a-1}{2} \\ a-1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{a-1}{2} \\ 0 & \frac{-a^2+2a+3}{2} \end{bmatrix}$$

$\frac{-a^2+2a+3}{2} = 0$ ise (yani $-a^2+2a+3=0$ ise)

$$a=3 \quad \text{veya} \quad a=-1 \quad \text{dir.}$$

$n=2$ (bilinmeyen sayısı) $r=1$ olacağından

$n-r=1$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

b) $\frac{-a^2+2a+3}{2} \neq 0$ ise yani $a \neq 3$ ve $a \neq -1$
 ise $n=r$ olduğundan tek çözüm sıfır çözümdür. (Denklem sisteminin homojen denklem sistemi olduğuna dikkat edelim.)

ÖR/ $\left. \begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x+4y-z=4 \\ x+y+(a^2-8)z=a \end{array} \right\}$ Lineer denklem sisteminin

- a) Çözümünün olmaması
- b) Tek çözümünün olması
- c) Sonsuz çözümünün olması için a nasıl seçilmelidir.

$$[A;B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & a^2-8 & a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a-3 \end{array} \right]$$

c) $a-3=0$ ise yani $a=3$ ise $r=2$ $n=3$ olduğundan $n-r=3-2=1$ tane keyfi sabite bağlı sonsuz çözüm vardır.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ şeklinde olur.}$$

a) $a-3 \neq 0$ ise

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+3) & a-3 \end{array} \right] \quad \text{3. satır } a-3 \text{ ile bölünürse}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a+3 & 1 \end{array} \right] \text{ olur. } a+3=0 \text{ ise } (a=-3) \text{ sisteminin çözümü yoktur.}$$

$r_A=2$ $r_{A;B}=3$ olduğundan

b) $a \neq -3$ ise tek çözüm vardır.
Günkü $n=r$ olur.