

$$\textcircled{X} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arctan x^2}{1 - e^{1/x}} = ? \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \rightarrow L'H.$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2x}{1+x^4}}{-e^{1/x} - x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2x}{1+x^4}}{e^{-1/x} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)} = \frac{0}{0}$$

$$\textcircled{X} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1-e^x}{1+\sin x}\right)^{1/x} = ? \quad 1^\infty \text{ betiksizliği} \rightarrow \text{Log. Limit yapın!}$$

$$y = \left(1 + \frac{1-e^x}{1+\sin x}\right)^{1/x} \stackrel{\ln a^x}{=} \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln \left[1 + \frac{1-e^x}{1+\sin x}\right]$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \text{Limit} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left[1 + \frac{1-e^x}{1+\sin x}\right]}{x} \rightarrow \frac{0}{0} \quad L'H. \\ & \frac{-\frac{1}{e^x(1+\sin x)} - \frac{1}{\cos x(1-e^x)}}{(1+\sin x)^2 \rightarrow 1} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1-e^x}{1+\sin x} \rightarrow 0}{1 + \frac{1-e^x}{1+\sin x} \rightarrow 1} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = -1 \Rightarrow \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} y \right] = -1$$

$$\downarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^{-1}$$

$$\textcircled{X} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} \text{ limitini L'Hopital kuralı kullanın!}$$

$(1+\cos x^2)$ ile çarpıp bölelim

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{\frac{1-\cos^2 x^2}{x^2 \cdot \sin x^2}} \cdot \frac{1}{1+\cos x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{\frac{\sin^2 x^2}{x^2 \cdot \sin x^2}} \cdot \frac{1}{1+\cos x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x^2}{x^2}}{1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{1+\cos x^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} \quad f(x) = (\cos x)^x \cdot x^{\cos x} \Rightarrow f'(x) = ? \rightarrow \text{Logaritmik Türev almaktayız}$$

$\downarrow \ln \text{ ol}$

$$\ln f(x) = \ln [(\cos x)^x \cdot x^{\cos x}]$$

$$\ln f(x) = \ln (\cos x)^x + \ln x^{\cos x}$$

$$\ln f(x) = x \ln (\cos x) + \cos x \cdot \ln x$$

$\downarrow \text{Türev ol}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln \cos x + x \cdot \frac{(-\sin x)}{\cos x} + (-\sin x) \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}$$

$$f'(x) = (\cos x)^x \cdot x^{\cos x} \cdot \left[\ln \cos x - x \tan x - (\sin x) \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right]$$

$$\textcircled{*} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x-\arcsinx} - 1}{\sqrt{1-x^2} - 1} = ? \quad \frac{0}{0} \rightarrow L'H.$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) e^{x-\arcsinx}}{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0} \rightarrow L'H.}{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{-x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^{x-\arcsinx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\frac{2\sqrt{1-x^2}}{-1}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^{x-\arcsinx} \\ &= \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} \quad \sinh x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = ?$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4e^x - 4e^{-x} = 6 \Rightarrow 2e^x - 2e^{-x} - 3 = 0 \quad \leftarrow e^x \text{ ile çarp}$$

$$2e^{2x} - 2 - 3e^x = 0$$

$$(e^x - 2)(2e^x + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} e^x - 2 &= 0 \\ e^x &= 2 \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^x &\neq -\frac{1}{2} \times \text{olamaz} \\ x &= \ln 2 \end{aligned}$$

(2)

$$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{2/\sin x^2} = ? \rightarrow 1^\infty$$

$$y = (e^x - x)^{2/\sin x^2} \rightarrow \ln y = \frac{2}{\sin x^2} \ln(e^x - x)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - x)}{\sin x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

L'Hospital

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - x}}{2x \cdot \cos x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(e^x - x) \cos x^2}}{1} = 1$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} y \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = e$$

$$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \sqrt{1-x})^x = ? \rightarrow 0^0$$

$$y = (1 - \sqrt{1-x})^x \rightarrow \ln y = x \ln(1 - \sqrt{1-x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1 - \sqrt{1-x}) \rightarrow 0 \cdot \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \sqrt{1-x})}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{\rightarrow} \frac{\frac{1}{1-\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} \cdot \frac{x^2}{2\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2(\sqrt{1-x} - 1+x)} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{-2} = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0 \quad \textcircled{3}$$

*) Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = \ln(\operatorname{Arctan}x^2) \Rightarrow y' = \frac{2x}{1+x^4} \operatorname{Arctan}x^2$

g) $y = \operatorname{Sinh}(e^{\operatorname{Cosh}x})$

$y' = \operatorname{Sinh}x \cdot e^{\operatorname{Cosh}x} \cdot \operatorname{Cosech}(\operatorname{Cosh}x)$

b) $y = \operatorname{ArcSin}e^{x^2} \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot e^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$

h) $y = \operatorname{Sech}(\ln(\operatorname{Cos}x))$

$y' = -\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x} \cdot (-\operatorname{Sech}(\ln(\operatorname{Cos}x)) \cdot \operatorname{Tanh}(\ln(\operatorname{Cos}x)))$

c) $y = e^{\operatorname{ArcCos}\ln(\operatorname{Sin}x)} \Rightarrow y' = \frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x} \cdot e^{\operatorname{ArcCos}\ln(\operatorname{Sin}x)}$

d) $y = \frac{\operatorname{ArcSin}x^3}{\operatorname{Arctan}(\operatorname{Cosh}x)} \Rightarrow y' = \frac{\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} \cdot \operatorname{Arctan}(\operatorname{Cosh}x) - \frac{\operatorname{Sinh}x}{1+\operatorname{Cosh}^2x} \cdot \operatorname{ArcSin}x}{[\operatorname{Arctan}(\operatorname{Cosh}x)]^2}$

e) $y = e^{\operatorname{Sinh}x^3} \cdot \operatorname{Tanh}x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 \cdot \operatorname{Cosh}x^3 \cdot e^{\operatorname{Sinh}x^3} \cdot \operatorname{Tanh}x^2 + e^{\operatorname{Sinh}x^3} \cdot 2x \operatorname{Sech}^2x$

f) $y = \log_3 \operatorname{Cot}x \Rightarrow y' = \frac{-e^x \cdot \operatorname{Cosec}^2 x}{\operatorname{Cot}x \cdot \ln 3}$

*) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \operatorname{ArcSin} \frac{2x+1}{3}$ fonksiyonunun tanım kümeli?

$4-x^2 \geq 0$ ve $-1 \leq \frac{2x+1}{3} \leq 1$ olmalı.

$\boxed{-2 \leq x \leq 2}$

\downarrow
 $-3 \leq 2x+1 \leq 3$

\downarrow
 $\boxed{-2 \leq x \leq 1}$

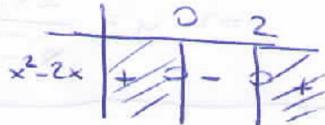
Tanım Kümeli: $[-2, 1]$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{1 - \arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2 - 2x}} \quad \text{tanım kümeleri?}$$

$$-1 \leq 2-x \leq 1 \quad \text{ve} \quad x^2 - 2x > 0 \quad \text{olmalı.}$$

$$\downarrow \\ -3 \leq -x \leq -1$$

$$\downarrow \\ (x-2)x > 0$$



$$\boxed{1 \leq x \leq 3}$$

$$\rightarrow \text{T.K.: } [2, 3]$$

$$[\text{T.K.: } (-\infty, 0) \cup (2, \infty)] \cap [1, 3] = [2, 3]$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \underbrace{\arccos \frac{x-5}{2}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\log_{10}(6-x)}_{\textcircled{2}} + \underbrace{\sin \sqrt[3]{x-2}}_{\textcircled{3}} \quad \text{tanım kümeleri.}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \text{ için} \\ -1 \leq \frac{x-5}{2} \leq 1 \text{ için} \\ \text{tanımlı.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{2} \text{ için} \\ 6-x > 0 \text{ için} \\ \text{tanımlı.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{3} \text{ için} \\ \sin \text{ ve } \sqrt[3]{} \text{ her } x \in \mathbb{R} \text{ için} \\ \text{tanımlıdır.} \end{array}$$

$$\downarrow \\ -2 \leq x-5 \leq 2$$

$$\boxed{3 \leq x \leq 7}$$

$$\downarrow \\ 6 > x$$

$$\leftarrow$$

$$\text{T.K.: } [3, 6]$$

$$\text{T.K.: } [3, 6]$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{x^3}{2} - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 4 \quad \text{fonksiyonun } [-2, 2] \text{ aralığında } f(x)=3 \text{ denklemini sağlayan bir } c \text{ sayısının mevcutliğini arastırınız.}$$

$f(x)$, $[-2, 2]$ de sürekli dir.

$$f(-2) = 0 \quad f(2) = 8 \quad \text{ve} \quad f(-2) = 0 < k = 3 < f(2) = 8 \quad \text{olduğundan}$$

Ara Değer Teoremine göre $f(c)=3$ olacak şekilde en az bir $c \in (-2, 2)$ sayısı vardır.

$$(12) f(x) = \log\left(\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right)$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x+1} > 0 \text{ olmalı}$$

$$x \neq 2 \quad x \neq -1 \quad x \neq -1$$

	-1	1	2
x^2-3x+2	+	+	0 - +
$x+1$	-	+	+
$\frac{x^2-3x+2}{x+1}$	-	/x/	- /x/

$$T.K.: (-1, 1) \cup (2, \infty)$$

$$(13) f(x) = \operatorname{ArcCos}\left(\log \frac{x}{10}\right) \quad \text{Tanım Kümesini bulunuz}$$

$$-1 \leq \log \frac{x}{10} \leq 1 \text{ olmalı ve } \frac{x}{10} > 0 \text{ olmalı}$$

↓

$$\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10 \quad \text{ve} \quad x > 0$$

↓

$$1 \leq x \leq 100 \quad \text{ve} \quad x > 0 \Rightarrow T.K.: [1, 100]$$

$$(14) f(x) = \operatorname{ArcSin}(1-x) + \ln(\ln x) \quad T.K.: ?$$

$$-1 \leq 1-x \leq 1, \ln x > 0, \boxed{|x>0|}$$

↓

↓

$$-2 \leq -x \leq 0$$

$$\boxed{x>1}$$

↓

$$\boxed{0 \leq x \leq 2}$$

→

$$T.K.: [1, 2]$$

$$(15) f(x) = \ln(\ln(\ln x)) + \sqrt{9-x^2} \quad \text{Tanım Kümesi?}$$

$$\boxed{x>0}, \ln x > 0, \ln(\ln x) > 0, 9-x^2 \geq 0$$

$$\boxed{x>1}$$

$$\ln x > 1$$

$$\boxed{-3 \leq x \leq 3}$$

$$\boxed{x>e}$$

→ ✓

$$T.K.: [e, 3]$$

⑥

$$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1)^{\cot \pi x} = ?$$

$$y = (2x-1)^{\cot \pi x} \quad \ln y = \cot \pi x \cdot \ln(2x-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(2x-1)}{\tan \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{2}{2x-1}}{\frac{\pi}{\cos^2 \pi x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos^2 \pi x}{2x-1} = \frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln y = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 1^+} y \right] = \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y = e^{\frac{2}{\pi}}$$

$$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{f(x-x^2)} \quad 0, \infty$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{x^2-f(x)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{(2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}) e^{x^2-f(x)}} \\ &\stackrel{\infty/\infty}{\longrightarrow} \text{L'H.} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x(2-\frac{1}{2x^{3/2}}) e^{\frac{x^2-f(x)}{\infty}}} = 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(x^2+1)} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \ln(x^2+1)}{x^2 \cdot \ln(1+x^2)} \quad \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\infty - \infty}{\longrightarrow} \text{L'H.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - \frac{2x}{x^2+1}}{2x \cdot \ln(1+x^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{2x} (1+x^2) - 2x}{\cancel{2x} (1+x^2) \ln(1+x^2) + 2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^3}{x^3 \left[\underbrace{(2 + \frac{2}{x^2}) \ln(1+x^2) + 2}_{0} \right]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2015 2. vize

S2. a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$ limitini hesaplayınız. (15p)

0° belirsizliği var. ①

$$y = x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{\ln(e^x - 1)} \cdot \ln x \quad ②$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln(e^x - 1)} \stackrel{③}{=} \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{e^x}{e^x - 1}} \quad ②$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x e^x} \stackrel{②}{=} 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x + x e^x} \stackrel{②}{=} \frac{1}{1+0} = 1 \quad ①$$

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}} = e \quad ②$$

- b) $0 < x < 1$ olmak üzere $f(x) = \arcsin x - \arccos \sqrt{1-x^2}$ ile tanımlı f fonksiyonunun türevini bulup, ortaya çıkan durumu yorumlayınız. (10p)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \stackrel{④}{=} \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \quad ⑥$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{x\sqrt{1-x^2}} \stackrel{⑤}{=} 0 \quad ⑦$$

⑦ Her $x \in (0,1)$ için, $f'(x) = 0$ olduğundan $f(x)$ sabittir.

(Veya; $f(x)$ fonksiyonun eğrisi bu aralıkta yatay teğete sahiptir.)



YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, II. Yılıçi
Sınav Soru ve Cevap Kağıdı

NOT TABLOSU

Adı Soyadı		1. S	2. S	3. S	4. S		TOPLAM
Öğrenci Numarası							
Bolumü					Sınav Tarihi	05/12/2015	
Dersin Adı	Mat1071 Matematik I	Sınav Süresi	100dk		Sınav Yeri		
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı				İmza			

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan "Sınavlarda kopya yapmak ve yapurmak veya huna teşebbüs etmek" fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezai alırlar.

S1. a) Kalkülüsun Temel Teoremini kullanarak, sürekli bir f fonksiyonu için $x > 0$ olmak üzere eğer

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = x \arctan x \quad \text{ise} \quad f(1) \quad \text{değerini bulunuz. (10p)}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t) dt = \frac{d}{dx} (x \arctan x) \quad (2)$$

$$2x f(x) - 0 = \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} \quad (4)$$

$$x=1 \Rightarrow 2f(1) = \arctan 1 + \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\pi+2}{8} \quad (2)$$

b) $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(0)$

değerini hesaplayınız. (15p)

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - (1+x) \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1+x^2 - (x+x^2)}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1-x}{(1+x^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Her $x \in (-\infty, 1)$ için $f'(x) > 0$ dir. Dolayısıyla f fonksiyonu 1-1 olup değer kümesi üzerinde tersi mevcuttur. (2)

$$y_0 = f(x_0) \Rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow \frac{1+x_0}{\sqrt{1+x_0^2}} = 0 \Rightarrow x_0 = -1 \quad (3)$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{\frac{1-x}{(1+x^2)^{3/2}}} \Big|_{x_0=-1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad (1)$$

Başarılar dilerim.

*) f fonksiyonu $f(x) = (\cos x^4)^{\operatorname{Arctan} x^2}$ şeklinde tanımlısa
türevlenebilir bir fonk. olsun. $f'(0) = ?$

$$y = (\cos x^4)^{\operatorname{Arctan} x^2} \quad x=0 \Rightarrow y=1$$

↓

$$\ln y = \operatorname{Arctan} x^2 \cdot \ln(\cos x^4)$$

↓ Türev

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{1+x^4} \cdot \ln(\cos x^4) + \operatorname{Arctan} x^2 \cdot \frac{4x^3 \cdot (-\sin x^4)}{\cos x^4}$$

$$\downarrow y=1, x=0$$

$$\left. \frac{y'}{y} \right|_{(1,0)} = 0$$

*) $f(x) = \operatorname{ArcSin} \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun arasız ozeler olduğu
aralıkları bulunuz

$f(x) = \operatorname{ArcSin} \sqrt{1-x^2}$ Tanım kümесini bulalım.

$$\begin{aligned} -1 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow \boxed{T.K.: [-1,1]}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)}} = -\frac{x}{1 \times 1 \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

$\rightarrow f', 0'da \text{ tanımsız}$			
x	-1	0	1
f'	+	-	

$f(x)$, $(-1,0)$ de arasız
 $(0,1)$ de ozeler

*) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1+x+\ln(1+x^2)$ fonk. tersinin mercut olduğunu
gösterip $(f^{-1})'(1)$ değerini bulunuz.

$f'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2}$ olduğundan $\forall x \in [0, \infty)$ için $f'(x) > 0$ d.r. Dolayısıyla

artendir \Rightarrow Birebirdir \Rightarrow Tersi vardır. $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(0)} = 1$

$$f^{-1}(1) = a \Rightarrow f(a) = 1+a+\ln(1+a^2) = 1 \Rightarrow a=0$$

$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{e^{2x}+1} - e^x) = ? \quad \infty - \infty$ belirsizliği

I.401

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x (\sqrt{1+e^{-2x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+e^{-2x}} - 1}{e^{-x}} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ L'H.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2 \cdot e^{-2x}}{2\sqrt{1+e^{-2x}}}}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^x \cdot \sqrt{1+e^{-2x}}}{\infty}} = 0$$

II.401 Eslenik çarpım ile:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e^{2x}+1} - e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1} + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{e^x + \sqrt{e^{2x}+1}}{\infty}} = 0$$

$\textcircled{*} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\cos x}{\cosh x} \right)^{1/x} = ? \rightarrow 1^\infty$ belirsizliği

$$y = \left(\frac{\cos x}{\cosh x} \right)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln \left(\frac{\cos x}{\cosh x} \right) = \frac{1}{x} [\ln(\cos x) - \ln(\cosh x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos x) - \ln(\cosh x)}{x} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ L'H.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{\sinh x}{\cosh x}}{1} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} y \right) = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1}$$

4.a. $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{4}{\pi} \arctan \left(\frac{x}{4} \right) \right]^{\tan \left(\frac{\pi x}{8} \right)}$ limitini hesaplayınız.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{4}{\pi} \arctan \left(\frac{x}{4} \right) \right]^{\tan \left(\frac{\pi x}{8} \right)} = 1^\infty$$

$$y = \left[\frac{4}{\pi} \arctan \left(\frac{x}{4} \right) \right]^{\tan \left(\frac{\pi x}{8} \right)} \Rightarrow \ln y = \tan \left(\frac{\pi x}{8} \right) \ln \left[\frac{4}{\pi} \arctan \left(\frac{x}{4} \right) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \ln y = \lim_{x \rightarrow 4} \tan \left(\frac{\pi x}{8} \right) \ln \left[\frac{4}{\pi} \arctan \left(\frac{x}{4} \right) \right] = \infty, 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \ln y = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln \left[\frac{4}{\pi} \arctan \left(\frac{x}{4} \right) \right]}{\cot \left(\frac{\pi x}{8} \right)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \ln y = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{4}{1 + \frac{x^2}{16}}}}{-\frac{\pi}{8} \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{\pi x}{8} \right)} = -\frac{4}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \ln y = -\frac{4}{\pi^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} y = e^{-\frac{4}{\pi^2}}$$

b. $f: R \rightarrow R^+$, $f(x) = e^{\arctan x}$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'(e^{\frac{\pi}{3}})$ değerini hesaplayınız.

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan x} > 0$ olduğundan fonksiyon artandır ve tersi mevcuttur.

$$f(a) = e^{\arctan a} = e^{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow \arctan a = \frac{\pi}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$(f^{-1})' \left(e^{\frac{\pi}{3}} \right) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})}$$

$$(f^{-1})' \left(e^{\frac{\pi}{3}} \right) = \frac{1}{\frac{1}{1+3} e^{\arctan \sqrt{3}}} = \frac{4}{\frac{\pi}{3}} = \frac{12}{\pi} \cdot e^{\frac{\pi}{3}}$$

İyi Şanslar...

*) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$ fonksiyonun artan / azalan olduğu aralıklar?

Fonksiyonun tanım kimesi: $\mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ dur.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \quad x=0 \quad x=-2$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	∞
f'	+	0	-	-	+
f	\nearrow	\searrow	\nearrow	\nearrow	\nearrow

Artan: $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$
Azalan: $(-2, -1) \cup (-1, 0)$

*) $f(x) = x^2 - 2\ln(1+x^2)$ → artan / azalan old. aralıklar

Tanım Kimesi: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ($1+x^2 > 0$ olduğundan, \ln terimini)

$$f'(x) = 2x - \frac{4x}{1+x^2} = \frac{2x(x^2-1)}{1+x^2} = 0 \quad x=0 \quad x=1 \quad x=-1$$

x	-1	0	1
f'	-	+	-
f	\searrow	\nearrow	\nearrow

Artan: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$
Azalan: $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

*) $\sin(xy) = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^3$ eğrisinin x -eksenini kestiği noktaları bulunuz ve eğrinin bu noktalardaki teğet doğrularının paralel olup olmadığını belirtiniz.
(2017 - 1. vize sorusu)

$$\sin(xy) = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^3 \quad y=0 \Rightarrow 0 = 1 - x^2 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ 'de eğri keser}$$

↓ Türev

$$(y+xy') \cos(xy) = -2x - 2yy' + 2x^2y^3 + x^2 \cdot 3y^2 \cdot y'$$

$$m_1 = y'|_{(1,0)} = -2 \quad m_2 = y'|_{(-1,0)} = -2 \quad \Rightarrow \text{eğimler eşit}$$

teğetter paralel

*) Aşağıdaki limitleri L'Hopital kuralı meden hesaplayın.

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+3} \right)^{3x+5}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 4^x}{4^{x+1} + 3^x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

Cevaplar

$$I. \text{Höp.} a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+1})}{(\sqrt[3]{x-1})(\sqrt[3]{x^2+3}\sqrt{x+1})} = \frac{2}{3}$$

$$(\sqrt[3]{x^2+3}\sqrt{x+1}), (\sqrt{x+1}) \quad II. \text{Höp.} x=0 \text{ olsun. } x \rightarrow 1 \Rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^2-1}{a^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a+1}{a^2+a+1} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2) \\ a^2-b^2 &= (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

estenit

estenit

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^x} = \ln e = 1 \quad (\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^x = e^a)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+3} \right)^{3x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x^2+3} \right) \right]^{\frac{3x+5}{x^2+3} \cdot x^2+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{x^2+3} \right)^{x^2+3} \right)^{\frac{3x+5}{x^2+3}}$$

$$= (e^{-1})^0 = \underline{\underline{1}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\frac{\sqrt{x}}{1}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{x}}{1}}{\frac{\sqrt{\sin x}}{1}} = 1$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 4^x}{4^{x+1} + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x \left(\frac{1}{2^x} + 1 \right)}{4^x \left(4 + \left(\frac{3}{4} \right)^x \right)} = \frac{1}{4}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \left(1 - 3^{-2x} \right)}{3^x \left(1 + 3^{-2x} \right)} = 1$$

$$*) y = \log \left(\frac{x-5}{x^2-10x+24} \right) + \sqrt[3]{x+1} + \arcsin \frac{x-3}{2} + 3^{x-4} \rightarrow T.K. \text{ Kümesi?}$$

$$\frac{x-5}{x^2-10x+24} > 0 \quad \text{ve} \quad -1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & 4 & 5 & 6 \\ \hline x-5 & - & 0 & + \\ x^2-10x+24 & - & 0 & + \\ \hline \end{array}$$

$$\text{olmali. } (\sqrt[3]{x+1} \text{ ve } 3^{x-4} \text{ } \forall x \in \mathbb{R} \text{ icin tanimlidir})$$

$$-2 \leq x-3 \leq 1$$

$$1 \leq x \leq 5$$

① ve ② den

T.K.: (4, 5)

$$\textcircled{*} \quad f(x) = (\sec x)^{\ln \sin x} \quad f'(x) = ?$$

$$\ln f'(x) = (\ln \sin x) (\ln \sec x)$$

↓ Türev

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos x}{\sin x}, \ln(\sec x) + (\ln \sin x) \cdot \frac{\sec x \cdot \tan x}{\sec x}$$

$$f'(x) = (\sec x)^{\ln \sin x} \left[\cot x \cdot \ln(\sec x) + (\ln \sin x) \cdot \tan x \right]$$

~~$$\textcircled{*} \quad f(x) = (\csc x)^{\ln \sin x} \quad \text{ise } f'(x) \text{ türevinin en sade halini bulunuz.}$$~~

$$\ln f(x) = \ln \sin x \cdot \ln \csc x$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{\cos x}{\sin x}, \ln \csc x + \ln \sin x \cdot -\frac{\csc x \cdot \cot x}{\csc x}$$

$$f' = (\csc x)^{\ln \sin x} \left[\cot x \cdot \underbrace{\ln \csc x + \ln \sin x \cdot (-\cot x)}_{-\ln \sin x} \right]$$

$$= -2(\csc x)^{\ln \sin x} \cdot \cot x \cdot \ln \sin x$$

29.10.2018

Bu sayfaya kader emleyerek, elinize kalem alıp soruları çözerken geldiyseniz bu iş olmusp demektir :))

Hepinizle 1. vizelerinizde başarılar dilerim... .

Sevgiler,

Pınar Albayrak