Uygulama-8

Soru:

$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot w^2$

$\frac{1}{2} \cdot \cancel{16} \cdot \frac{25}{\cancel{4}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{24}}{100} \cdot \frac{625}{\cancel{4}} \quad 16,5 = 80$

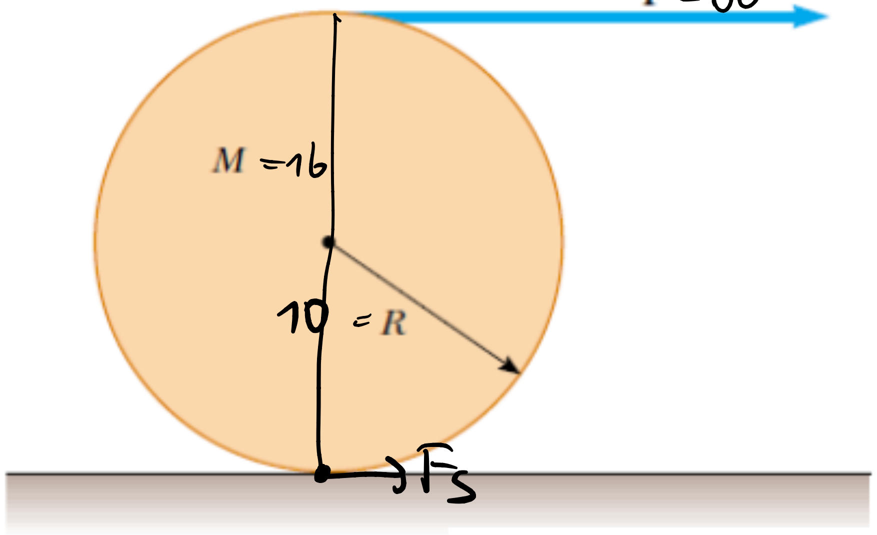
$80 = F + F_s$

$\boxed{F_s = 20\,N}$

M=16 kg kütleli ve R=10 cm yarıçaplı içi dolu bir silindir, F=60N'luk bir kuvvetin etkisi altında Şekil'de görüldüğü gibi, sürtünmeli yatay bir düzlemde harekete başlıyor. Silindir kaymadan yuvarlandığına göre;

$\frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{16}^{8} \cdot \frac{1}{100}$ $\quad \frac{12,625}{100}$

$50 + 25$



a) Silindirin kütle merkezinin ivmesini hesaplayınız. 5

b) Kaymayı önlemek için gerekli olan minimum statik sürtünme kuvvetini hesaplayınız.

c) Silindirin, 25 radyanlık açı döndükten sonraki açısal hızını bulunuz. 50 rad/s $\quad 25 \cdot \frac{1}{10} \quad \frac{5}{2}$

d) Silindir üzerine yapılan toplam işi bulunuz.

$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{50}^{25} \cdot t^2 = 25$

$t = 1$

$\cancel{12}^{4} = \frac{\cancel{3}}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha$

$\alpha \cdot \frac{1}{10} = 5$

$\alpha = 50$

$I \cdot \alpha$ $\quad 300$

$(I_{silindir} = \frac{1}{2} MR^2)$

$60 \cdot \frac{1}{5} = 12$

$\frac{8}{16 \cdot R^2} = \alpha$

$\frac{1}{2R^2} \cdot \frac{1}{10}$

$\frac{3}{2} \cdot M \cdot R^2$

8

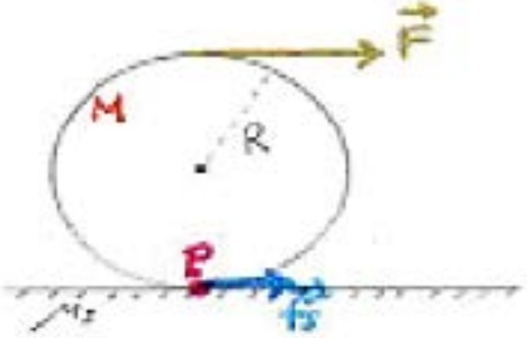
50

$\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{100}}$ $\quad \frac{50}{10} = 5$

5 m/sn²

Cevap:

a) $\tau_P = I_P . \alpha$ $\qquad \tau_P = 2R.F$



$R = 10\ cm$

$M = 16\ kg$

$F = 60\ N$

$I_P = I_{km} + MR^2$ (paralel eksenler teoremi)

$I_P = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$

$I_P = \frac{3}{2}MR^2$

$I_P . \alpha = 2R.F$

$\frac{3}{2}MR^2 . \alpha = 2R.F$

$\alpha = \frac{4F}{3MR}$

$a_{km} = \alpha . R$

$a_{km} = \frac{4F}{3M}$

$a_{km} = \frac{4.60}{3.16}$

$\boxed{a_{km} = 5\ m/s^2}$

veya

$$\tau = RF - Rf_s = I_{km} \cdot \alpha$$

$$(F - f_s)\cancel{R} = \frac{1}{2} M R^{\cancel{2}} \cdot \alpha$$

$$F - f_s = \frac{1}{2} M R \alpha$$

$$\begin{cases} F - f_s = \frac{1}{2} M \cdot a_{km} \\ F + f_s = M \cdot a_{km} \end{cases}$$ (Newton'un ikinci yasası)

$$2F = \frac{3}{2} M \, a_{km}$$

$$2 \cdot 60 = \frac{3}{2} \cdot 16 \cdot a_{km}$$

$$\boxed{a_{km} = 5 \, m/s^2}$$

b)

$$\Sigma F = M a_{km}$$

$$F + f_s = M a_{km}$$

$$60 + f_s = 16.5$$

$$\boxed{f_s = 20\ N}$$

c)

$$\omega_s^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$$

$$\omega_s^2 = 0 + 2 . \frac{a_{km}}{R} . \theta$$

$$\omega_s^2 = 2 . \frac{5}{0{,}1} . 25$$

$$\omega_s^2 = 2500$$

$$\boxed{\omega_s = 50\ rad/s}$$

d)

$$\Sigma W = \Delta K = K_s - \underbrace{K_i}_{\to 0}$$

$$W = \frac{1}{2} M v_{km}^2 + \frac{1}{2} I_{km} \omega^2$$

$$W = \frac{1}{2} M (R\omega)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \omega^2$$

Direkt verilen alınmış !

$$W = \frac{1}{2} . 16 . (0{,}1 . 50)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} . 16 . 0{,}1^2 \right) . 50^2$$

$$\boxed{W = 300\ J}$$

veya $\sum W = \Delta K = \frac{1}{2} I_p \omega^2$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} M R^2\right) \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot 16 \cdot 0{,}1^2\right) \cdot 50^2 = \underline{300\,J}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{16}^{4} \cdot \frac{1}{1\cancel{00}} \cdot 25\cancel{00} = 300$$

veya $W = \int_0^\theta \tau_{km} \cdot d\theta$

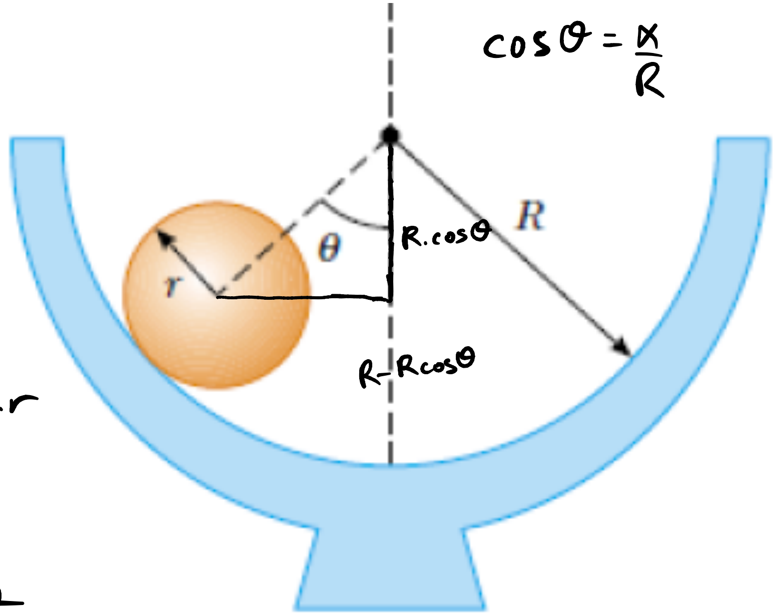
$$W = 2R \cdot F \cdot \theta \Big|_0^{25} = 2 \cdot 0{,}1 \cdot 60 \cdot 25 = \underline{300\,J}$$

Soru:

$R.\cos\theta = x$

m kütleli, r yarıçaplı içi dolu bir küre, R yarıçaplı yarım küre şeklinde bir çukurun içinde, başlangıçta, düşeyle θ açısı yapacak şekilde tutuluyor. Küre, serbest bırakıldığında kaymadan yuvarlandığına göre, kürenin çukurun dibindeki açısal hızını belirleyiniz. $I_{küre} = \frac{2}{5} mr^2$.

$\cos\theta = \frac{x}{R}$



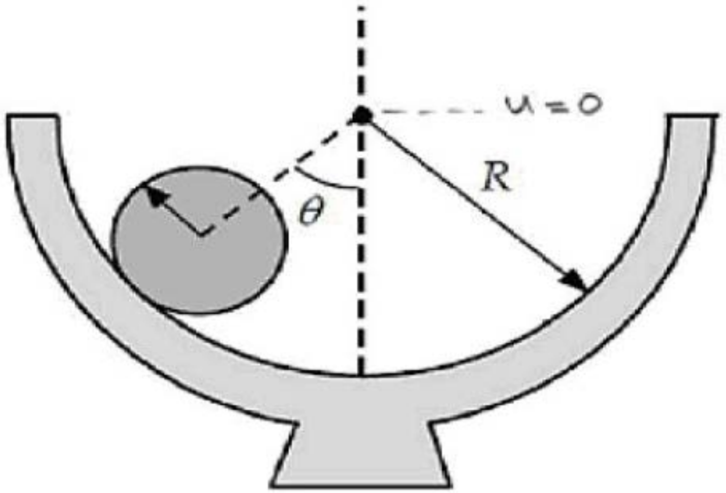
$v = w.r$

$$mg(R - R\cos\theta) = \frac{1}{2}.m.r^2.w^2 + \frac{1}{5}.m.r^2.w^2$$

$$g(R - R\cos\theta) = \frac{7}{10}.r^2.w^2$$

$$\sqrt{\frac{10g(R - R\cos\theta)}{7r^2}} = w$$

Cevap:



$$E_i = E_s$$

$$K_i + \sum U_i = K_s + \sum U_s$$

$$0 + \left[-mg(R-r)\cos\theta\right] = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \left[-mg(R-r)\right]$$

$$mg(R-r)(\cos\theta - 1) + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = 0$$

$$mg(R-r)(\cos\theta - 1) + \frac{1}{2}m(r\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2 = 0$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{10}{7}\,\frac{(R-r)(1-\cos\theta)g}{r^2}}}$$

$3i \quad 8j \quad 0$
$-7i \quad 0 \quad 0$

$56k$

Soru:

Kütlesi m=3 kg olan bir parçacık x=3m, y= 8m noktasından geçerken hızı $v = (5i - 6j)$ m/s olarak verilmektedir. Parçacığa negatif x yönünde 7 N'luk bir kuvvet etki etkimektedir.

a) Parçacığın açısal momentumu nedir? $L = -174k$

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

b) Parçacığa etkiyen tork nedir? $56k$

c) Açısal momentumun birim zamanda ne kadar değiştiğini bulunuz. $56k$

$\tau =$

$L = I . w$

Cevap:

$r = 3i + 8j$

$\vartheta = 5i - 6j$

$F = -7i$

$L =$

$\tau = \frac{\partial L}{\partial t}$

$p = m . \vartheta$

$p = 15i - 18j$

$3i \quad 8j \quad 0$
$15i \quad -18j \quad 0$

$-54 - 120 = -174k$

$x = 3$ m
$y = 8$ m $\Rightarrow \vec{r} = 3\vec{i} + 8\vec{j}$

$\vec{\upsilon} = 5\vec{i} - 6\vec{j}$

$m = 3$ kg

$F = 7$ N $\Rightarrow \vec{F} = -7\vec{i}$ N

$\vec{p} = m.\vec{v} = 3(5\vec{i} - 6\vec{j}) = 15\vec{i} - 18\vec{j}$

a)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 8 & 0 \\ 15 & -18 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k}(-54 - 120)$$

$$\vec{L} = -174\,\vec{k} \ \ kg\,m^2/s^2$$

b)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 8 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(+56)$$

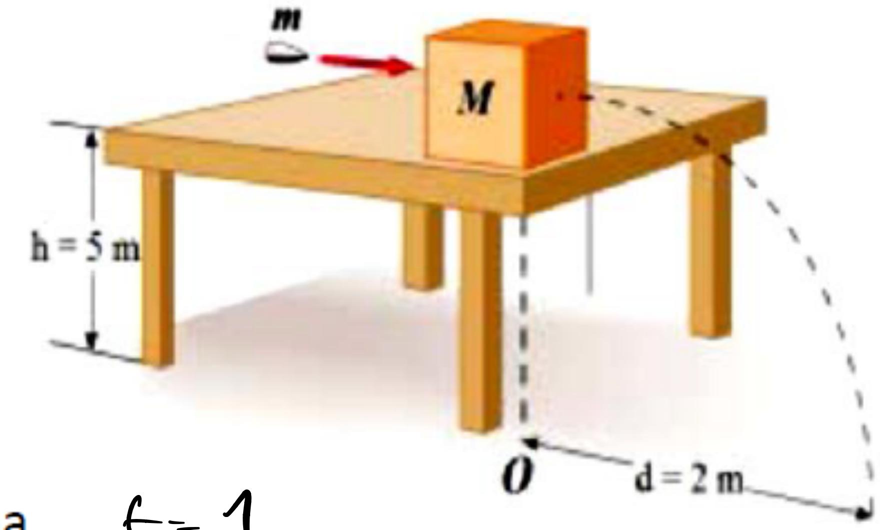
$$= 56\,\vec{k} \ \ N \cdot m$$

c)

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 56\,\vec{k} \ \ N \cdot m$$

Soru:

Kütlesi m olan bir mermi, h=5 m yüksekliğindeki sürtünmesiz bir masanın kenarında duran M kütleli bir bloğa doğru atılıyor. Mermi, bloğun içinde kalıyor ve çarpışmadan sonra blok, masanın tabanından Şekil 7'de görüldüğü gibi d=2 m kadar ileride yere düşüyor. (Hava direnci önemsenmiyor)



a) Merminin ilk hızını, m ve M cinsinden ifade ediniz.

b) Çarpışmadan sonra, bloğun, yere çarpma anında O noktasına göre açısal momentumunu birim vektörler cinsinden bulunuz.

$t = 1$

$g = 10$

$m v_i = (m+M) . 2$

$L = r \times p$

$v_i = \frac{2(m+M)}{m}$

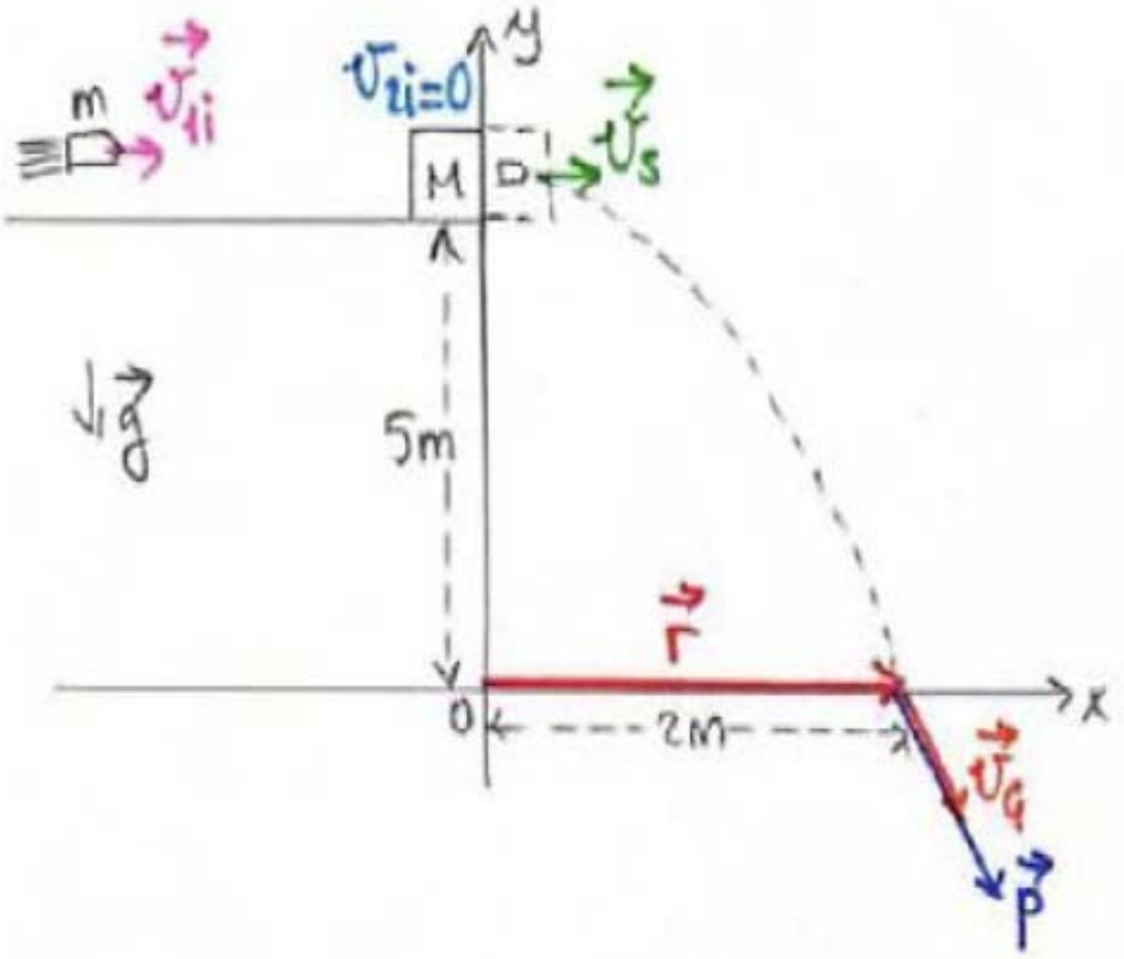
$2i \quad -10j$

$2i \quad 0 \quad 0$

$2mi \quad -10mj \quad 0$

$-20mk$

Cevap:



a)

$$\Sigma \vec{P}_i = \Sigma \vec{P}_s$$

$$m v_{1i} + M \underbrace{v_{2i}}_{\text{yo}} = (m+M)\, v_s$$

$$v_{1i} = \frac{(m+M)}{m} v_s$$

?

$$d = v_s . t$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$5 = \frac{1}{2} . 10 . t^2$$

$$t = 1\,(s)$$

$$2 = v_s . 1$$

$$v_s = 2\,(m/s)$$

$$v_{1i} = \frac{(m+M)}{m} . 2$$

$$\boxed{v_{1i} = 2\,\frac{(m+M)}{m}\ (m/s)}$$

b)

$\vec{v}$: $(m+M)$ kütle sisteminin yere çarpma anındaki hızı

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{r} = 2\hat{i}\ (m)$$

$$\vec{p} = (m+M)\vec{v}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

$$v_x = v_s \qquad v_y = -gt$$

$$v_x = 2\,(m/s) \qquad v_y = -10\,(m/s)$$

$$\vec{v} = 2\hat{i} - 10\hat{j}\ (m/s)$$

$$\vec{p} = (m+M)(2\hat{i} - 10\hat{j})$$

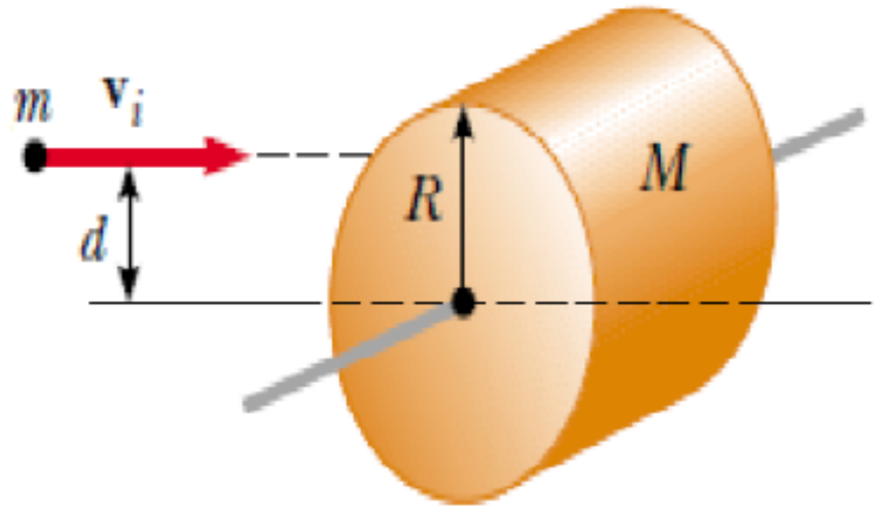
$$\vec{L}_o = 2\hat{i} \times \left[(m+M)(2\hat{i} - 10\hat{j})\right]$$

$$\boxed{\vec{L}_o = -20(m+M)\hat{k}\ (kg.m^2/s)}$$

Soru:

$$I_{sis} = \left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 + m \cdot d^2\right) \cdot w$$

m kütleli yapışkan kilden bir parça şekildeki gibi, M kütleli ve R yarıçaplı katı bir silindire doğru vi hızıyla fırlatılıyor. Silindir başlangıçta durgundur ve kütle merkezinden geçen sabit yatay bir eksene tutturulmuştur. Parçacığın hareket çizgisi eksene dik ve merkezden d uzaklığındadır (d<R).



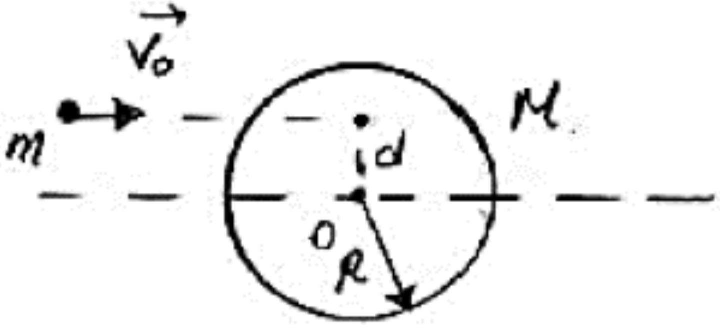
a) Kil parçası silindire çarpıp yapıştıktan hemen sonra sistemin açısal hızını bulunuz.

b) Bu olayda mekanik enerji korunur mu? Cevabınızı açıklayınız.

$$\frac{m v d}{\frac{1}{2} M \cdot R^2 + m d^2} = w$$

Cevap:

a)



$\sum \vec{\tau}_{dış} = 0 \quad L = sbt$ olur.

sistemin açısal momentumu korunur.

$L = m.v.d$

$L_{ilk} = L_{son}$.

(silindir başlangıçta durgun)

(O noktası etrafında)

$L_{ilk} = mV_0 d$

$L_{son} = I_{sist}\,\omega$

$I_{sist} = I_{silindir} + I_{mermi}$

$I_{sist} = \frac{1}{2} MR^2 + md^2$

$$L_{ilk} = L_{son}$$

$$mV_0 d = \left(\frac{1}{2}MR^2 + md^2\right)\omega$$

$$\boxed{\omega = \frac{mV_0 d}{\frac{1}{2}MR^2 + md^2}}$$

b) $\Delta E = E_{ilk} - E_{son}$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\cancel{\frac{1}{2} \cdot M R^2 + md^2}\right) \cdot \frac{(m v_0 d)^2}{\frac{1}{2} \cdot MR^2 + md^2}$$

$$E_{ilk} = \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$E_{son} = \frac{1}{2} I_{sist} \omega^2$$

$$E_{son} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MR^2 + md^2\right) \left(\frac{m^2 V_0^2 d^2}{\left(\frac{1}{2} MR^2 + md^2\right)^2}\right)$$

$$E_{son} = \frac{m^2 v_0^2 d^2}{MR^2 + 2md^2}$$

$$\Delta E = E_{ilk} - E_{son} = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{m^2 V_0^2 d^2}{MR^2 + 2md^2}$$

$$\Delta E = m V_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{md^2}{MR^2 + 2md^2} \right)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m V_0^2 \left(\frac{MR^2}{MR^2 + 2md^2} \right)$$

Mekanik enerji korunmaz, bir miktar enerji iç enerjiye dönüşür.

Soru:

Eylemsizlik momenti ihmal edilebilir bir şaft üzerinde bir tekerlek şekil'deki gibi 900 devir/dak açısal hız ile dönüyor. Başlangıçta hareketsiz olan ve eylemsizlik momenti birincisinin iki katı olan ikinci bir tekerlek aynı şafta bağlanıyor.

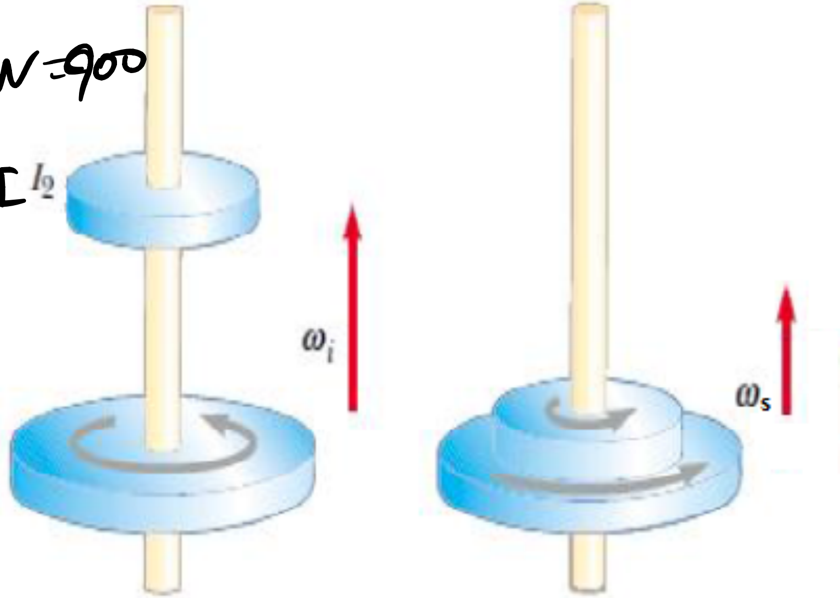
a) İki tekerlek ve şaftan oluşan sistemin açısal hızı nedir? 10π rad/s

b) Sistemde oluşan dönme kinetik enerjisindeki değişimi bulunuz.

W=900

2I

I



$L = I.W$

$\frac{3\cancel{0}0 . 2\pi}{\cancel{6}0} = 10$

$I . 900 = 3I . 300$

$\frac{1}{2} . I . 9 = \frac{9}{2}$ $\quad$ $\frac{1}{2} . 3I \, 1 = \frac{3}{2}$

Cevap:

a) $\omega_1 = 900$ devir/dak , $I_2 = 2I_1$

Sistem üzerine etkiyen net tork sıfır olduğundan sistemin açısal momentumu korunur ($\vec{L}$ = sabit).

Başlangıçta açısal momentum, $L_1 = I_1 \omega_1$
Sonraki " " , $L_2 = (I_1 + I_2)\omega_2$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_1 = \frac{I_1}{I_1 + 2I_1}\omega_1 = \frac{\omega_1}{3} = \frac{900}{3} = 300\,\frac{dev}{dak}$$

$$\frac{300 \cdot 2\pi}{60}$$

$$\omega_2 = 300\,\frac{dev}{dak} = \frac{300 \times 2\pi}{60} = 10\pi\,\frac{rad}{s}$$

b)

Başlangıçta kinetik enerji, $K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$

Sonraki " " , $K_2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_2^2$

Kinetik enerjideki değişim,

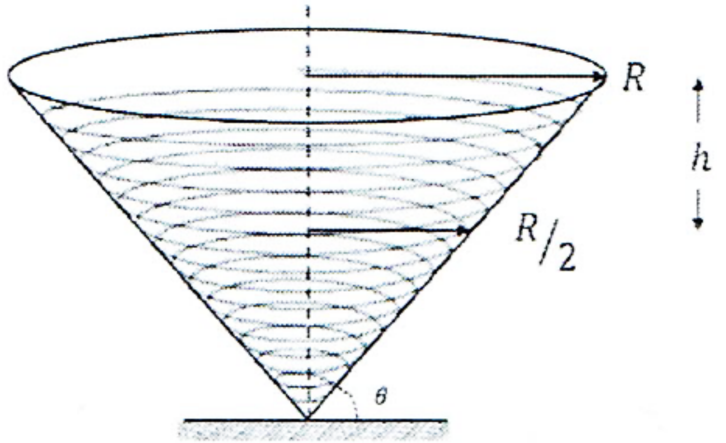
$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{3}{2} I_1 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{3}{2} I_1 \left(\frac{\omega_1}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

$\Delta K = -\frac{2}{3} K_1$ Sistem başlangıçtaki enerjisinin $\frac{2}{3}$'ni kaybeder.

UYGULAMA-9

Soru

m kütleli bir parçacık, konik cismin simetri ekseni etrafında dönsün diye konik bir kasenin içine ω_0 açısal hızı ile atılmıştır. Bu parçacık, konik cismin simetri ekseni etrafında dönerken aynı zamanda da aşağı, koninin tabanına doğru öteleme hareketi yapmaktadır. Başlangıçta parçacık konik cismin simetri ekseninden R yarıçapı kadar uzaklıkta ise;

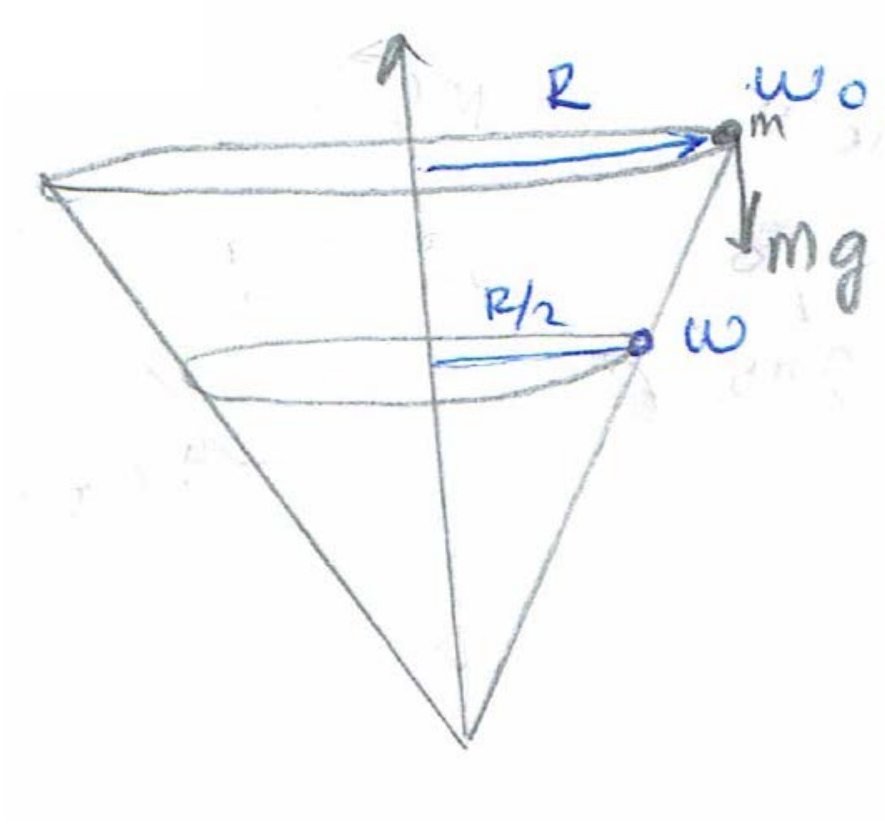


a) Yarıçap $R/2$'de iken parçacığın açısal hızını bulunuz.

b) Cisim ilk durumdan (R) son duruma ($R/2$) düşey yer değiştirmesi ne olur?

c) Yarıçap $R/2$'de iken parçacığın üzerine etki eden normal kuvveti nedir?

a)



m üzerine etki eden kuvvet dönme düzlemine diktir. Bu kuvvet açısal momentumu değiştirecek bir tork oluşturmaz.

$$\vec{\tau} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \vec{L} = \text{sabit}$$

Açısal momentum korunur.

$$L_i = L_s$$

$$L_i = I_i \omega_0 \ , \quad L_s = I_s \omega$$

$$I_i = mR^2, \quad I_s = m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} mR^2$$

$mR^2 \quad \frac{mR^2}{4}$

$$\cancel{m}\cancel{R^2}\omega_0 = \frac{1}{4}\cancel{m}\cancel{R^2}\omega \Rightarrow \quad \omega = 4\omega_0$$

b)

Enerjinin korunumundan $E_i = E_s$

$$\frac{1}{2} I_i \omega_0^2 + mgh = \frac{1}{2} I_s \omega^2$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} R^2 \omega_0^2 + \cancel{m} g h = \frac{1}{8} \cancel{m} R^2 \omega^2$$

$$gh = \frac{1}{8} R^2 \omega^2 - \frac{1}{2} R^2 \omega_0^2$$

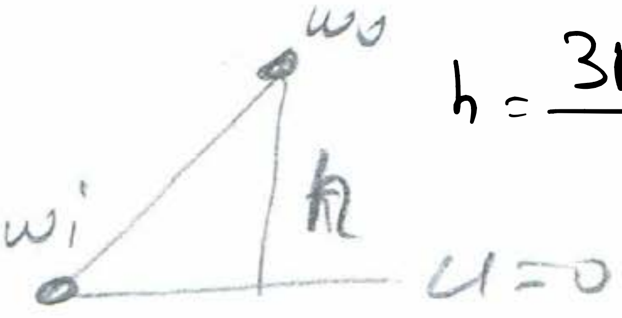
$$= \frac{1}{8} R^2 (4\omega_0)^2 - \underset{(4)}{\frac{1}{2}} R^2 \omega_0^2 = \frac{16}{8} R^2 \omega_0^2 - \frac{4}{8} R^2 \omega_0^2$$

$$gh = \frac{12}{8} R^2 \omega_0^2 \Rightarrow h = \frac{\cancel{12} R^2 \omega_0^2}{\cancel{8} g} = \frac{3 R^2 \omega_0^2}{2g}$$

$$mgh = \frac{1}{2} . I . 3w^2$$

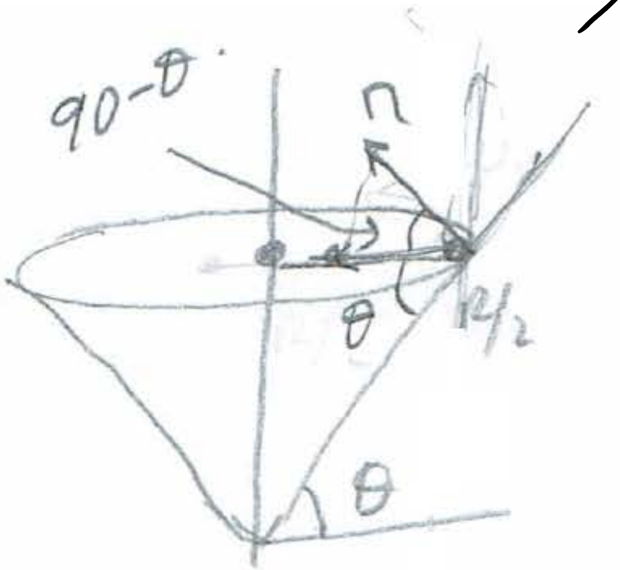
$$\cancel{m}gh = \frac{1}{2} . \cancel{m} R^2 . 3w^2$$

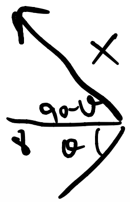
$$h = \frac{3R^2 . w^2}{2g}$$



$$mgh + \frac{1}{2} . I . w^2 = \frac{1}{2} . \frac{I}{\cancel{4}} . \overset{4}{\cancel{16}} w^2$$

c)





$m \cdot w^2 \cdot r$

$\cos(90-\theta)$

$\sin\theta = 8m w^2 \cdot r$

$$1\frac{6m w^2 \cdot R}{2}$$

$$F = m\frac{\omega^2}{r}$$

$$\frac{8m \cdot w^2 \cdot R}{\sin\theta}$$

$8mw^2 \cdot R$

$$n\cos(90-\theta) = m\frac{(4w_0 R/2)^2}{R/2}$$

$$n\sin\theta = m\frac{16w_0^2 R^2}{4} \cdot \frac{2}{R}$$

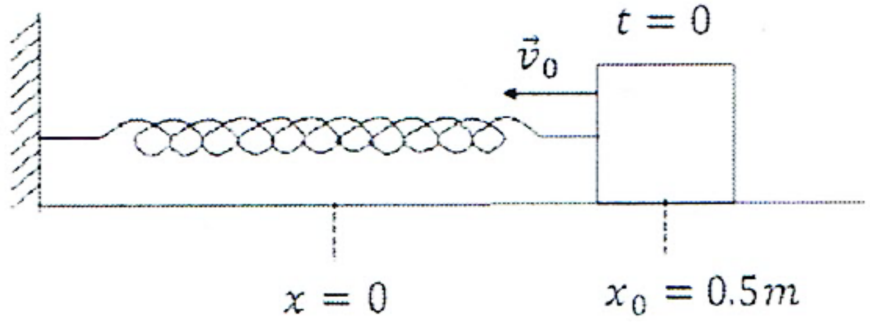
$\cos(90-\theta) = \sin\theta$

$\cos(a+b) = \cos 90^\circ \cos\theta + \sin\theta \sin\theta$

$$n = \frac{8mw_0 R}{\sin\theta}$$

Soru

Yatay şekilde bir kütle-yay sistemi $\omega = 3\pi(rad/s)$ açısal frekansına sahiptir. $t = 0$'da iken kütle $x_0 = 0.5\ m$'de ve ilk hızı $\vec{v}_0 = -4.5\hat{\imath}\ (m/s)$'dir.



a) Sistemin faz sabitini (ilk faz açısını) bulunuz. $\frac{\pi}{4}$

b) Hareketin genliğini bulunuz. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Sırasıyla, kütlenin maksimum hız ve maksimum ivmesi SI birim sisteminde aşağıdakilerden hangisidir?

d) Herhangi bir anda kütle-yay sisteminin enerjisi nedir? $k = 500\ N/m$ alınız.

$x = A\cos(3\pi + \theta)$

$\vartheta = -A3\pi \sin(3\pi + \theta)$

$-\frac{1}{2} = A\cos\theta$

$\frac{1}{2} \cdot 500\ \frac{1}{2} = 125$

$-\frac{9\pi}{2}$

$4{,}5 = A \cdot 3\pi \cdot \sin\theta$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(3\pi + \theta)$

$\frac{1}{2} = A\cos(\theta)$

$\frac{4{,}5}{9}$

$\frac{1}{2} = A\sin\theta$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = A$

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2} = A$

$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\theta$

$\frac{1}{4A^2} + \frac{1}{4A^2}$

$-\frac{1}{2A}$

$\frac{1}{2A}$

$\frac{1}{2A^2} = 1$

a)

$$\tan\phi = -\frac{u_i}{x_i\omega} = \frac{4.5}{0{,}5 \cdot 3\pi} = \frac{4.5}{0{,}5 \cdot 3\pi} = \frac{9}{3\pi} \approx \frac{9}{9} = 1$$

π

$$\phi = \pi/4$$

$$\frac{4{,}5}{\frac{1}{2} \cdot 3\pi}$$

$$\frac{9}{3\pi}$$

b)

$$x(t) = A \cos(3\pi t + \pi/4)$$

$t = 0$ için

$$x_i = A \cos(\pi/4)$$

$$0{,}5 = A\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot 0{,}5}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,m$$

c)

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(3\pi t + \pi/4)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\underbrace{\frac{3\pi}{\sqrt{2}}}_{v_{max}} \sin(3\pi t + \pi/4) \qquad v_{max} = \frac{3\pi}{\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ m/s}$$

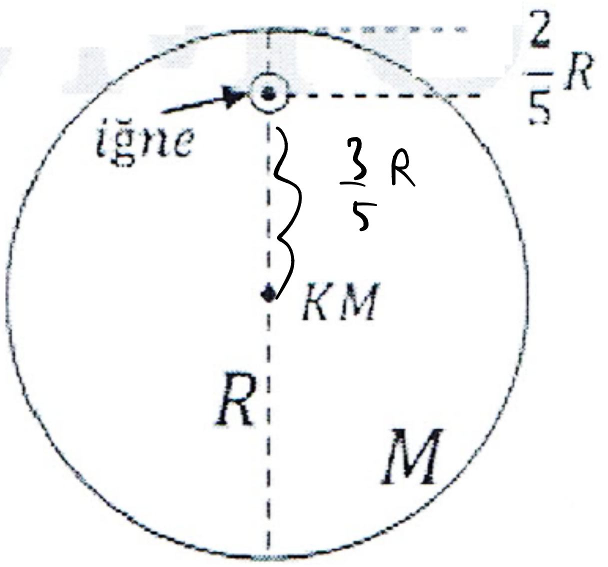
$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{9\pi^2}{\sqrt{2}} \cos(3\pi t + \pi/4)$$

$$a_{max} = A\omega^2 = \frac{81}{\sqrt{2}} \text{ m/s}^2$$

d) $E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} 500 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{500}{4} = 125 \text{ J}$

Soru

R yarıçaplı ve M kütleli bir diskin, kenarından $\frac{2}{5}R$ uzaklıkta küçük bir delik açılmıştır. Disk duvara, üzerindeki bu küçük delikten geçirilen bir iğne yardımı ile asılmıştır. Bu sistem bir sarkaç olarak düşünülürse, denge konumundan küçük bir θ açısı kadar ayrılması durumunda sistemin açısal frekansını bulunuz?



$I_{km} = \frac{1}{2}MR^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgd}{I}}$$

$$I_0 = I_{km} + Md^2$$
$$= \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{3}{5}R\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{9}{25}MR^2 = \frac{43}{50}MR^2$$

25 2

$$d = R - \frac{2}{5}R = \frac{3}{5}R$$

$$I_0 = \frac{43}{50}MR^2$$

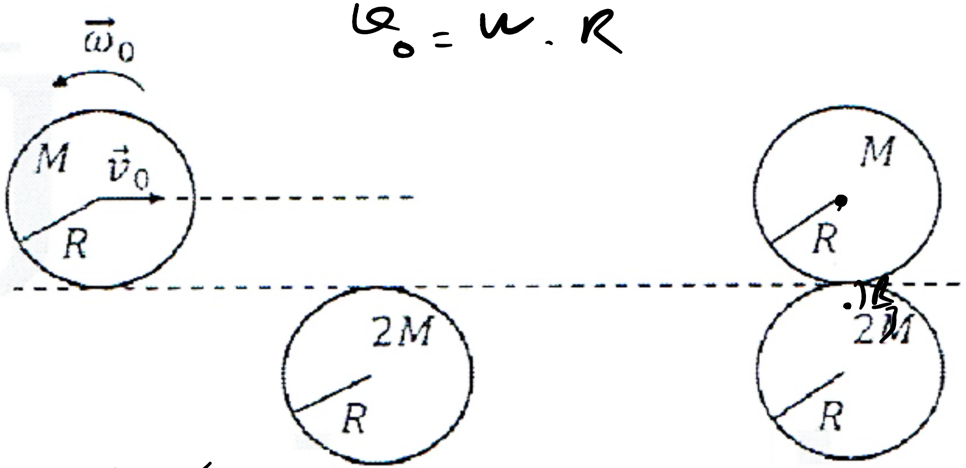
$$w^2 = \frac{mgd}{I}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg\frac{3}{5}R}{\frac{43}{50}MR^2}} = \sqrt{\frac{30}{43}\frac{g}{R}}$$

Soru

M kütleli ve R yarıçaplı düzgün bir disk, sürtünmesiz bir masa üzerinde $2M$ kütleli ve R yarıçaplı başka bir düzgün diske doğru hareket etmektedir. Birinci diskin kütle merkezinin ilk hızı v_0 olup ω_0 açısal hızı ile dönerken, ikinci disk başlangıçta durgun durumdadır. Birinci disk, ikinciye dokunduğunda (anlık bir çarpışma) gösterildiği gibi ikinci disk durgun durumdadır. Birinci disk ikinciye dokunduğunda hemen birbirlerine yapışmakta ve tek bir cisim olarak hareket etmektedirler.

$I_{km} = \frac{1}{2} M R^2$



$v_0 = w . R$

$M v_0 = 3 M v_s$ $\quad$ $\cancel{M} . w . R = 3 \cancel{M} v_s$

$\frac{2R . 2M}{3M}$

a) Disklerin kontak noktasına göre yeni kütle merkezinin yerini bulununuz. ✓

b) Çarpışmadan sonra birleşen sistemin yeni kütle merkezinin hızını bulunuz. $\frac{v_0}{3}$

$\frac{4 \cancel{M} R}{3 \cancel{M}}$

c) Birleşen sistemin yeni kütle merkezine göre eylemsizlik momentini bulunuz.

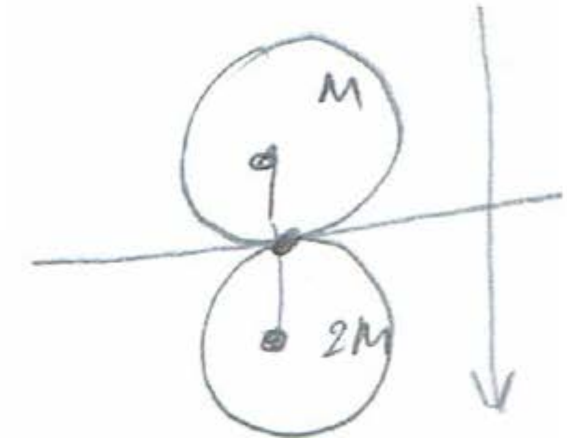
d) Çarpışmadan sonra birleşen sistemin açısal hızını bulunuz.

$\frac{4R}{3}$

$$\frac{1}{2} . M . R^2 + M . \left(R + \frac{R}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} . 2M . R^2 + 2M \left(\frac{2R}{3}\right)^2 = \frac{25}{6} M R^2$$

$\frac{1}{2} . M . R^2$

a)



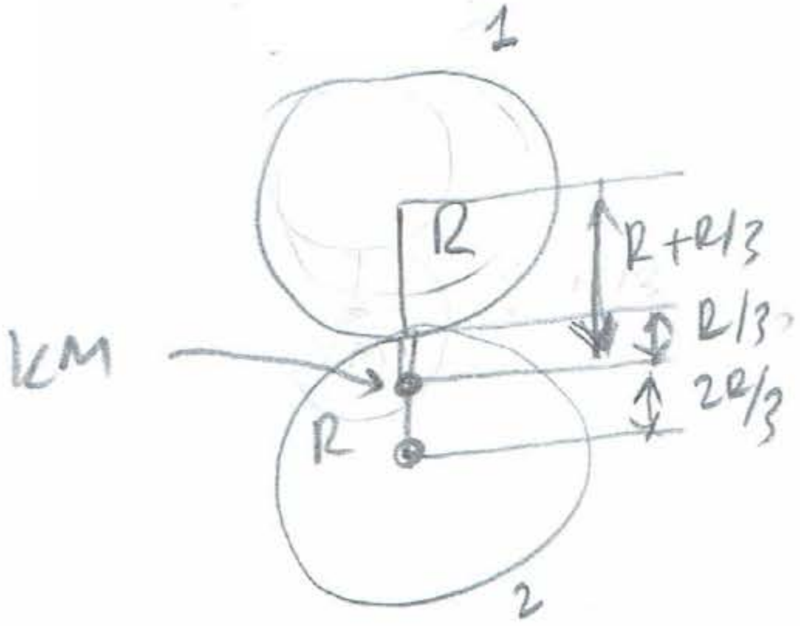
$$Y_{cm} = \frac{\cancel{M}R - 2\cancel{M}R}{3\cancel{M}} = -\frac{1}{3}R$$

b)

Lineer momentum korunur (ötelme momentumu)

$$\cancel{M} v_0 = 3\cancel{M} v_s \Rightarrow v_s = \frac{v_0}{3}$$

c)



$$I_{sis} = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(R+\frac{R}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}(2M)R^2 + 2M\left(\frac{2R}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{4}{3}\right)^2R^2 + \frac{2M}{2}R^2 + 2M\,\frac{4}{9}R^2$$

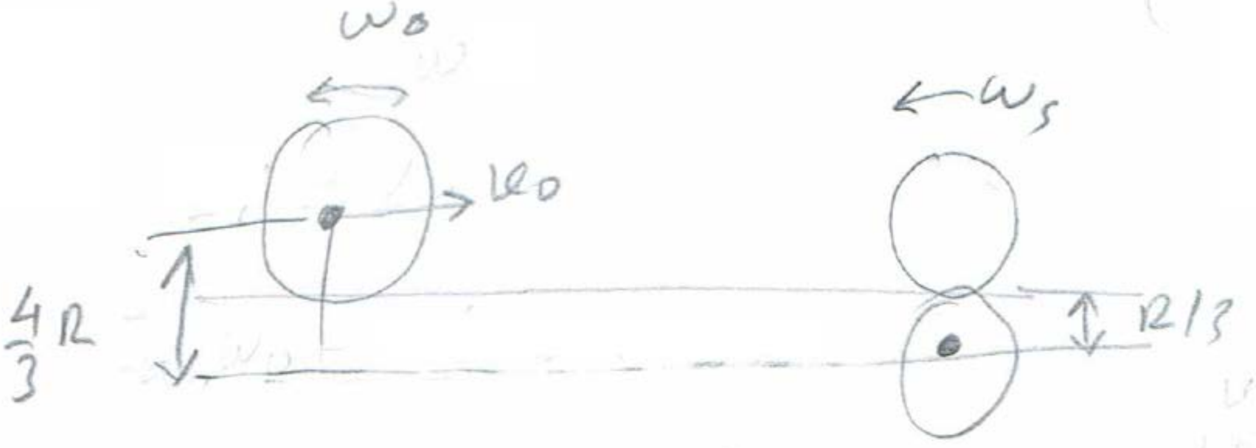
$$= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{16}{9}MR^2 + MR^2 + \frac{8}{9}MR^2$$

$$= \left(\underset{9}{\frac{1}{2}} + \underset{(2)}{\frac{16}{9}} + 1 + \underset{(2)}{\frac{8}{9}}\right)MR^2$$

$$= \left(\frac{9+32+18+16}{18}\right)MR^2 = \frac{75}{18}MR^2$$

$$= \frac{25}{6}MR^2$$

d)



$$-Mv_0\frac{4}{3}R+\frac{1}{2}MR^2\omega_0 = I_{S.S.}\,\omega_s$$

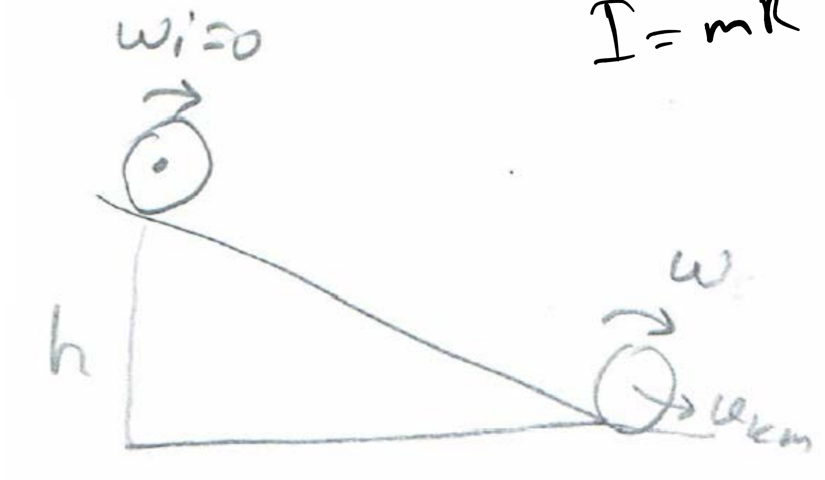
$$-\cancel{M}v_0\frac{4}{3}R+\frac{1}{2}\cancel{M}R^2\omega_0 = \frac{25}{6}\cancel{M}R^2\omega_s$$

$$\omega_s = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{R^2}\omega_0\cdot\frac{\cancel{6}}{25\cancel{R^2}} - \frac{4}{\cancel{3}}Rv_0\cdot\frac{\cancel{6}}{25R^2}$$

$$\omega_s = \frac{3}{25}\omega_0 - \frac{8}{25}\frac{v_0}{R}$$

Soru

Boyutları aynı, kütleleri farklı ($m_A > m_B > m_C$) üç silindir (A, B ve C), bir eğik düzlemin tepesindeki aynı noktadan ve aynı anda serbest bırakılıyor. Hangi silindirin aşağı ilk ulaşacağını bulunuz.



$I = mR^2$

$$mgh = \frac{1}{4} m R^2 w^2 + \frac{1}{2} m v_{km}^2$$

$$v_{km} = wR \Rightarrow w = \frac{v_{km}}{R}$$

$$\cancel{m} gh = \frac{1}{4} \cancel{m} R^2 \frac{v_{km}^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cancel{m} v_{km}^2$$

$$4gh = v_{km}^2 + 2v_{km}^2$$

$$3v_{km}^2 = 2gh$$

$$v_{km} = \sqrt{\frac{2gh}{3}}$$, kütleden bağımsız

$m_A > m_B > m_C$

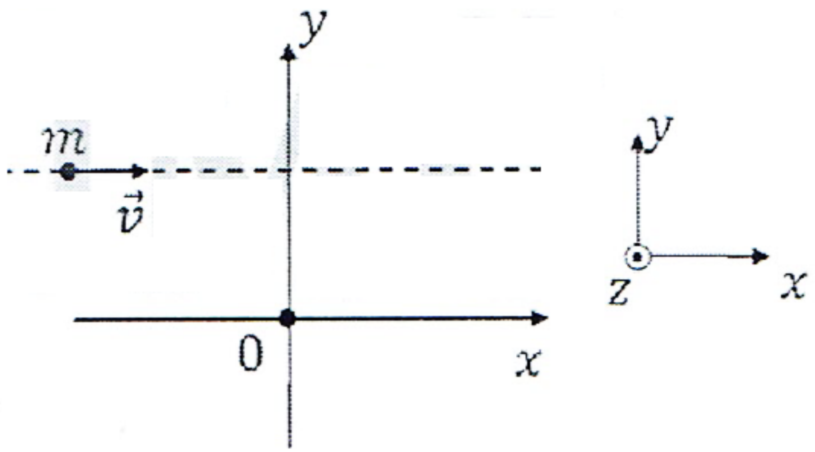
Hepsi aynı anda

Aynı anda

kütleden bağımsız

Soru

Bir parçacık şekildeki gibi $x-y$ düzleminde $+x$ yönünde sabit hız ile hareket etmektedir. Parçacığın orijine göre açısal momentumu,



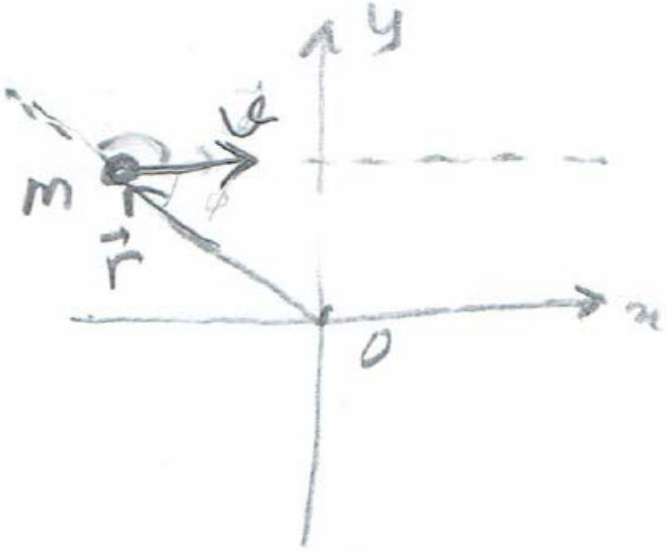
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) + m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$= m \underbrace{\cancel{(\vec{v} \times \vec{v})}}_{=0} + m\, \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

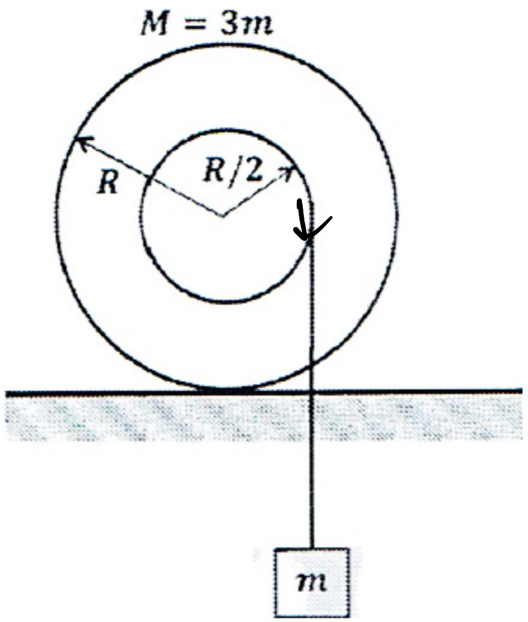
$$\Rightarrow \vec{v} \text{ sabit } \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ değişmiyor. sabit}$$



Soru

$M = 3m$ kütleli bir bobin, ağırlıksız bir ip ile sarılmış olup yatay pürüzlü bir yüzey üzerinde durgun haldedir. R bobinin dış yarıçapı olmak üzere kendi kütle merkezinden geçen eksene göre eylemsizlik momenti $I_{km} = MR^2$ olarak verilmiştir. Sarılan ip tabakasının yarıçapı $R/2$'e eşit olup ipin diğer ucu şekildeki gibi m kütleli bir bloğa, düşey olarak sabitlenmiştir. Sistem durgun halden serbest bırakılmaktadır.



a) Bobinin açısal ivmesini bulunuz.

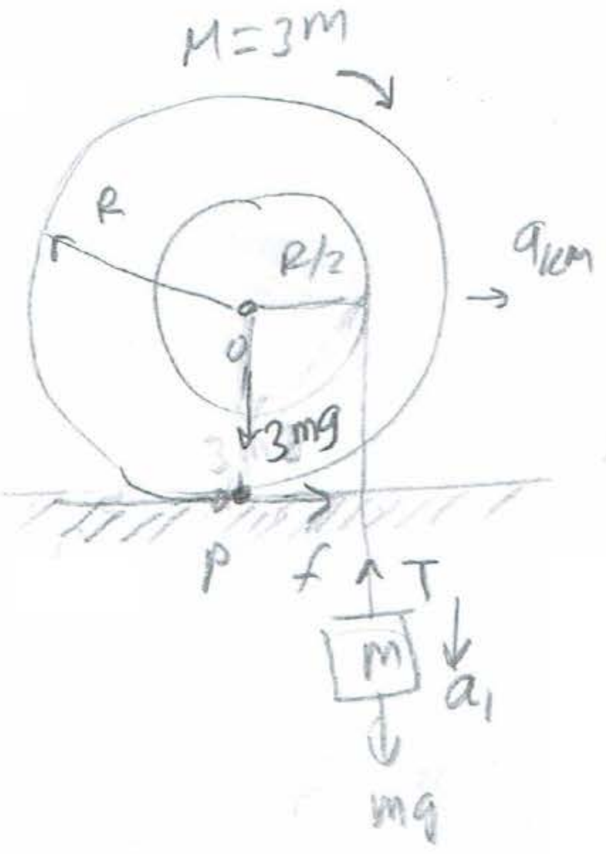
b) İpteki gerilmeyi bulunuz.

c) Kütle, $h = 4R$ kadar düştükten sonra bobinin açısal hızı nedir?

$M.R^2$

$$\frac{T.R}{2} = MR^2.\alpha$$

a)



$$\tau_p = I_p \alpha \qquad I_p = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

$$T \cdot \frac{R}{2} = 2MR^2\alpha$$

$$T = 4MR\alpha = 12mR\alpha$$

$$mg - T = ma_1 = \frac{mR}{2}\alpha$$

$$a_1 = \frac{R}{2}\alpha$$

$$T = mg - \frac{mR}{2}\alpha$$

$$mg - \frac{mR}{2}\alpha = 12mR\alpha$$

$$2mg - mR\alpha = 24mR\alpha$$

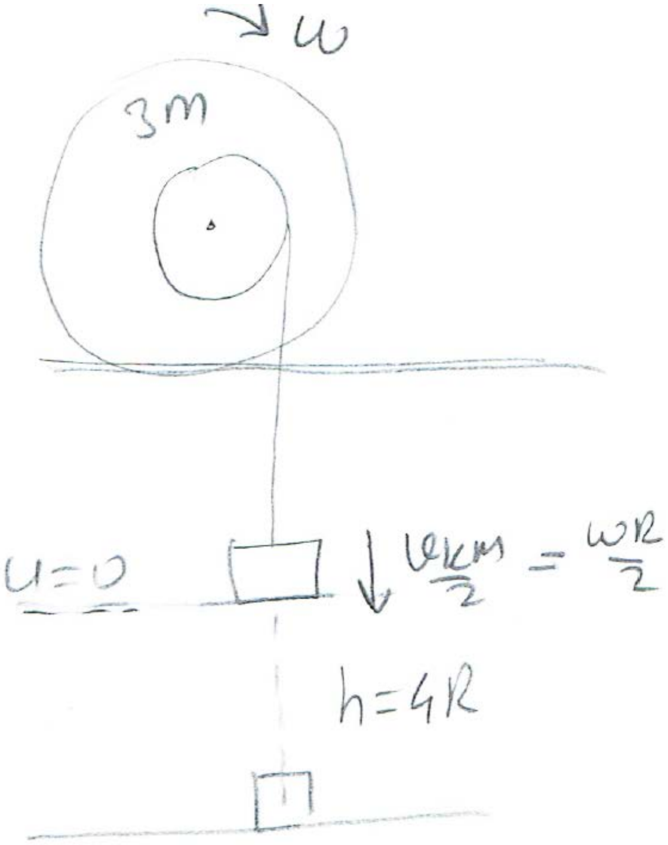
$$2mg = 25mR\alpha$$

$$\alpha = \frac{2g}{25R}$$

b)

$$T = 12mR\alpha = 12mR\,\frac{2g}{25R} = \frac{24}{25}\,mg$$

c)



$v_{KM} = \omega R$

Enerjinin korunumundan

$MR^2 = 3mR^2$

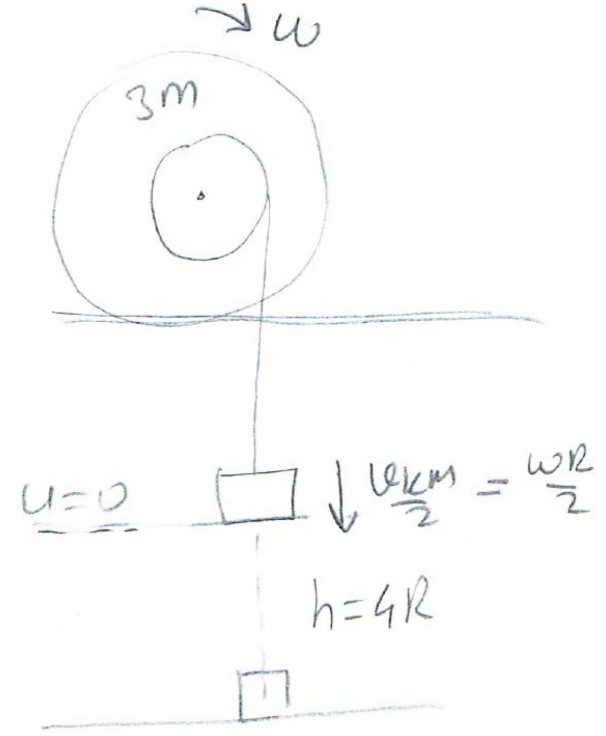
$$4mgR = \frac{1}{2} m \left(\frac{\omega R}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} 3m (R\omega)^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$(8)x \rightarrow \quad 4\cancel{m}gR = \frac{1}{8}\cancel{m} R^2\omega^2 + \frac{3}{2}\cancel{m} R^2\omega^2 + \frac{3}{2}\cancel{m} R^2\omega^2$$

$$32\, gR = R^2\omega^2 + 12 R^2\omega^2 + 12 R^2\omega^2$$

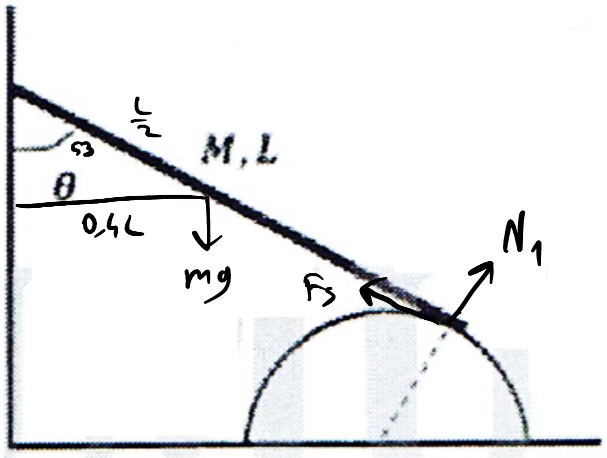
$$32 g \cancel{R} = 25 R^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{32g}{25R}}$$



Soru

Kütlesi M ve uzunluğu L olan düzgün bir kalasın bir ucu duvara yaslanmışken diğer ucu dairesel bir destek üzerindedir. Kalas ile duvar ve dairesel destek arası sürtünmelidir. Kalas dairesel desteğe teğetsel olarak değmektedir. Kalas hareketsizdir.



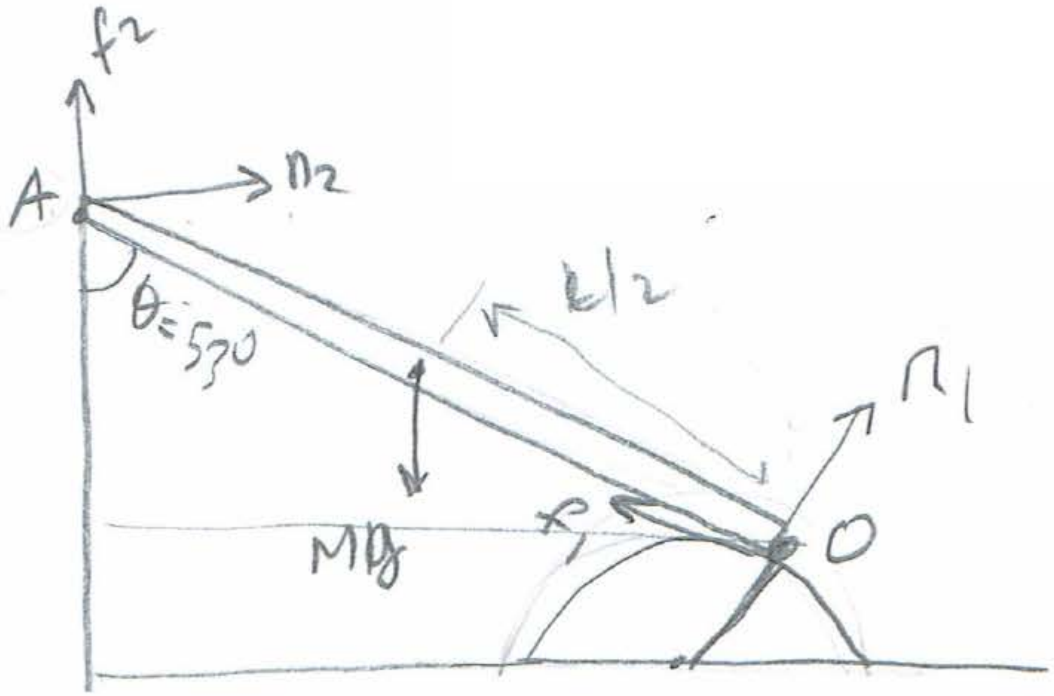
$\theta = 53^0, M = 1(kg), L = 2(m)$

Kalasa dairesel destek tarafından uygulanan normal kuvveti bulunuz.

$N_1 \cancel{L} = mg \cdot 0{,}4\cancel{L}$

$N_1 = \frac{1\cancel{0} \cdot 4}{1\cancel{0}}$

$N_1 = 4$



$\sin 53^\circ = 0{,}8$

A noktasına göre tork

$$\tau_A = n_1 L - Mg\frac{L}{2}\sin\theta = 0$$

$$n_1 \cancel{L} = Mg\frac{\cancel{L}}{2}\sin\theta$$

$$n_1 = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0{,}8}{2}$$

$$n_1 = 4N$$

40 - 20

Soru

0.5 kg kütleli bir parçacığın konumu, t saniye cinsinden olmak üzere; $\vec{r}(t) = (1 + 40t)\hat{\imath} + (20t - 5t^2)\hat{\jmath}$ (m) olarak verilmiştir. Aşağıdaki soruları SI birim sisteminde cevaplayınız.

a) $t = 2s$'de cisme etki eden torku $\vec{\tau}$ orijine göre bulunuz. $-405k$

b) $t = 2s$'de cismin açısal momentumunu $\vec{L}$ orijine göre bulunuz. $-400k$

$r = 81i + 20j$

$v = 40i + (20 - 10t)j$

$a = 0 \quad -10j$

$a = -10j$

$F = -5j$

$r \times P$

$$\begin{matrix} 81 & 20 & \\ 0 & -5 & 0 \end{matrix}$$

$-405k$

$40i$

$20i$

$$\begin{matrix} 81 & 20 \\ 20 & 0 \end{matrix}$$

$-400k$

a)

$$\vec{r}(t) = (1+40t)\hat{i} + (20t - 5t^2)\hat{j} \ \text{m} \qquad m = 0{,}5 \ \text{kg}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 40\hat{i} + (20-10t)\hat{j} \ \text{m/s}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = -10\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{F} = m\vec{a} = -5\hat{j}$$

$$\vec{r}\Big|_{t=2} = 81\hat{i} + 20\hat{j}$$

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = (81\hat{i} + 20\hat{j}) \times (-5\hat{j})$$

$$= -405\underbrace{(\hat{i} \times \hat{j})}_{k} = -405\hat{k}$$

b)

$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{v}\Big|_{t=2} = 40\hat{\imath}$ $\vec{p} = m\vec{v} = 20\hat{\imath}$

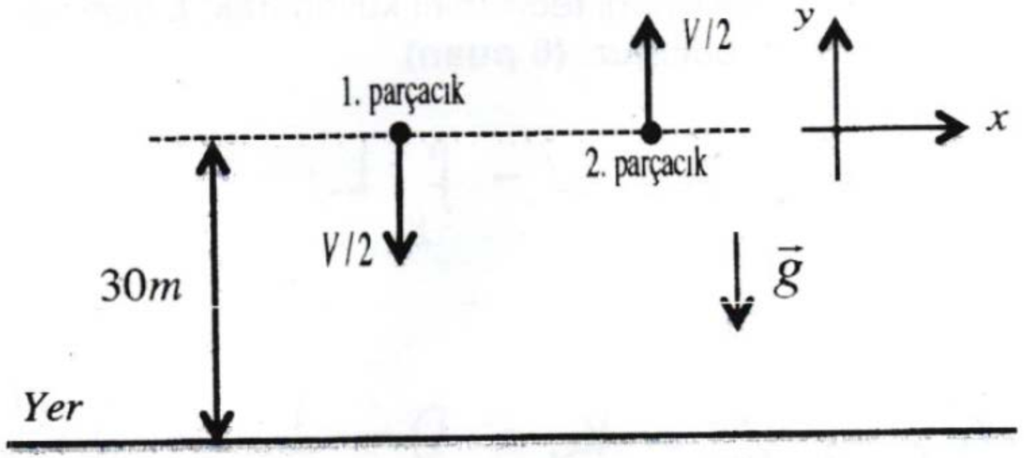
$\vec{L}_0 = (81\hat{\imath} + 20\hat{\jmath}) \times (20\hat{\imath}) = 400\,(\hat{\jmath} \times \hat{\imath})$

$$\boxed{\vec{L}_0 = -400\,\hat{k}}$$

UYGULAMA-10

Soru:

Yerden 30m yükseklikte ve ilk hızı V/2 olan bir parçacık aşağı doğru bırakıldığı anda, aynı yükseklikteki ve ilk hızı V/2 olan başka bir parçacık yukarı doğru fırlatılıyor. Birinci parçacık yere çarptığı anda, ikinci parçacık aynı zamanda maksimum yüksekliğe erişiyor. Parçacıkların ilk hızlarını bulunuz. Hava sürtünmesi önemsenmiyor.



Cevap:

2. parçacık için:

$$V_s = V_i + a_y t \Rightarrow 0 = \frac{V}{2} - g t$$

$$t = \frac{V}{2g}$$

Aynı sürede 1. parçacık için;

$$\left\{\begin{array}{l} y_s = y_i + V_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ a_y = -g, \quad V_{yi} = -\frac{V}{2} \quad y_s = -30m \end{array}\right\} \; y_i = 0$$

$$\Rightarrow -30 = 0 - \frac{V}{2}\left(V/2g\right) - \frac{1}{2} g \left(V/2g\right)^2$$

$$30 = \frac{V}{2}\left(\frac{V}{2g}\right) + \frac{1}{2} g \left(\frac{V}{2g}\right)^2$$

$$30 = \frac{3V^2}{8g} \Rightarrow V = \sqrt{80g}$$

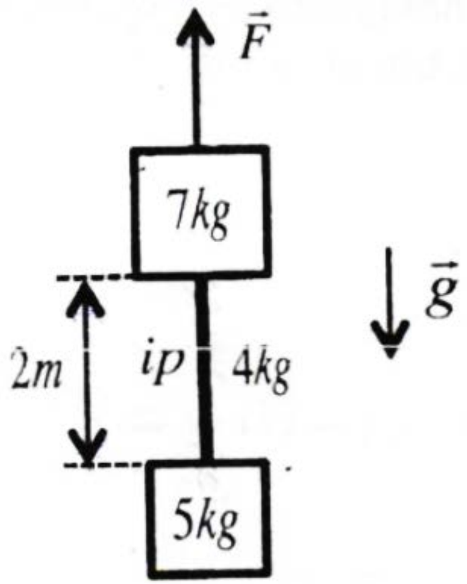
$$V = 20\sqrt{2} \; m/s$$

Soru:

İki blok şekildeki gibi kütlesi 4kg ve uzunluğu 2m olan bir iple bağlıdır. Yukarıdaki bloğun kütlesi 7kg ve aşağıdaki bloğun kütlesi 5kg dır. Düşey eksende, F=200N değerindeki sabit bir kuvvetin etkisiyle, 7kg lık kütleli blok yukarı doğru çekiliyor. Hava sürtünmesi önemsenmiyor.

(i) Sistemin ivmesinin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

(ii) İpin orta noktasındaki gerilme kuvvetin büyüklüğünü bulunuz.



Cevap:

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow m = 7+5+4 = 16kg$

$F - mg = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} - g$

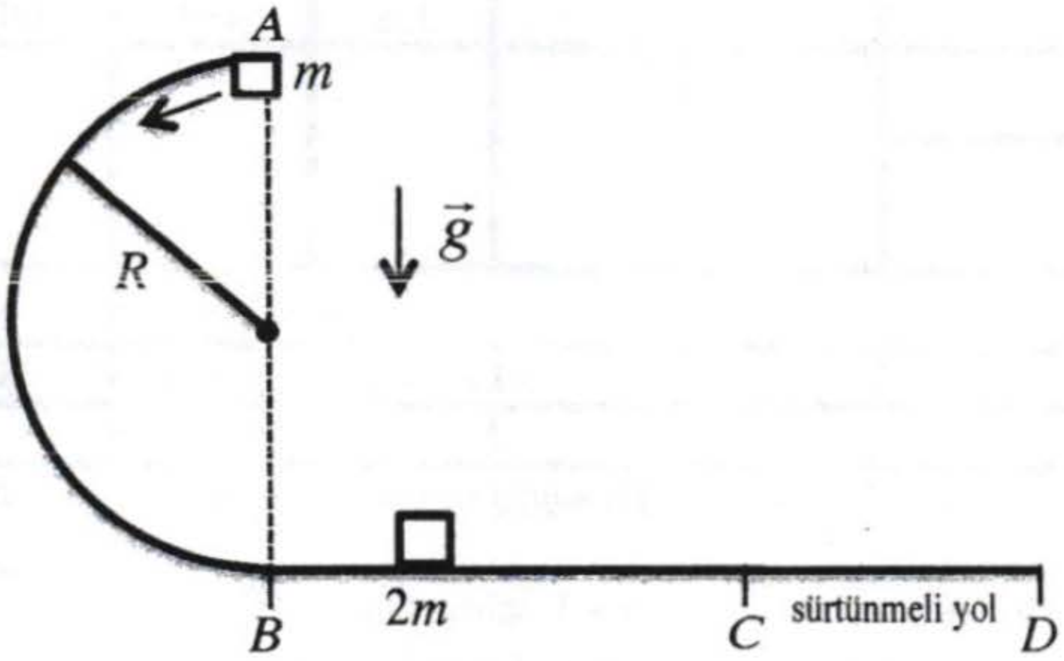
$a = \frac{200}{16} - 10 = 2{,}5\ m/s^2$ Yukarı Doğru

$T - mg = ma \Rightarrow m = \frac{4}{2} + 5 = 7kg$

$T = m(g+a)$

$T = 7(12{,}5) = 87{,}5\ N$

Soru:



A noktasından durgun halden serbest bırakılan m kütleli bir cisim, R yarıçaplı raylı bir yoldan (AB yolu) şekildeki gibi kayarak BC yolunda bulunan durgun 2m kütleli başka bir cisme çarpıyor. Çarpıştıkdan sonra **birlikte** kayarak hareket eden cisimler C noktasından L kadar uzaklıkda duruyor. Yolun CD kısmı **sürtünmeli olup**, diğer yollardaki sürtünmeler ve hava sürtünmesi önemsenmiyor. CD yolunda cisimlere etki eden sürtünme kuvveti $f_k = mg$ şeklinde olup, sabittir.

(a) m kütleli cisim B noktasından geçerken, yüzeyin normal (dik) kuvvetin büyüklüğünü m ve g cinsinden bulunuz.

(b) Çarpışmadan hemen sonraki cisimlerin ortak hızının büyüklüğünü g ve R cinsinden bulunuz.

(c) İş-kinetik enerji teoremini kullanarak; L uzaklığını R cinsinden bulunuz.

(d) C noktasından cisimler duruncaya kadar, cisimlere etki eden kuvvetlerin yapmış olduğu işi m, g ve R cinsinden bulunuz. (cisimlerin hareket yönünü pozitif alınız).

a)

B noktasında:

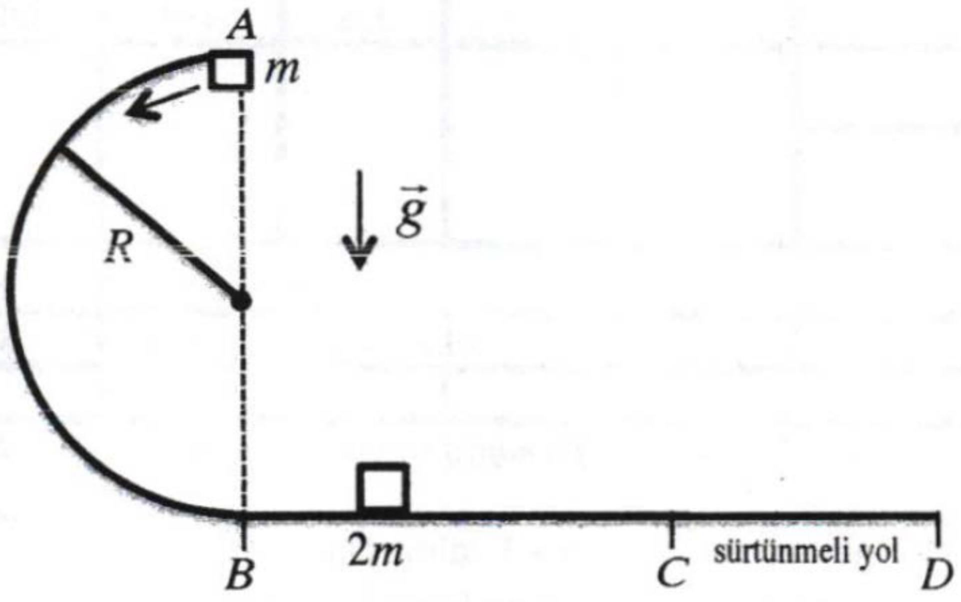
$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow n - mg = m\frac{V^2}{R}$$

A ile B arasında;

$$K_A^{\circ} + U_A = K_B + U_B^{\circ} \Rightarrow mg2R = \frac{1}{2}mV^2$$

$$V^2 = 4gR \Rightarrow n = mg + \frac{m}{\cancel{R}}4g\cancel{R}$$

$$n = 5mg$$



b)

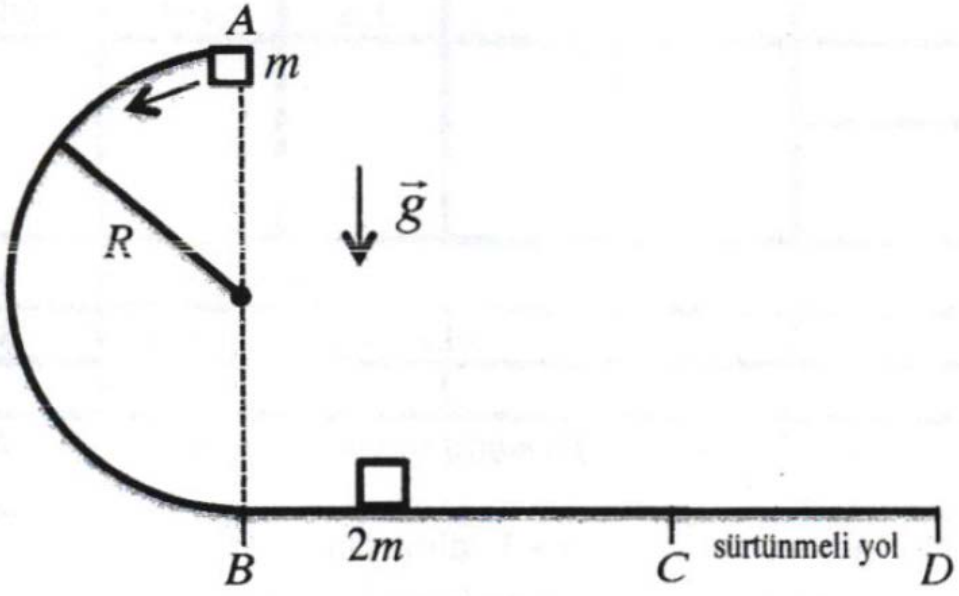
Momentum Korunur;

$$mV = (m+2m)V'$$

$$V^2 = 4gR$$

$$\cancel{m}\sqrt{4gR} = 3\cancel{m}V'$$

$$V' = \frac{2}{3}\sqrt{gR}$$



c)

$$W = \Delta K = -f_k L$$

$$\Delta K = K_2 - K_1 = 0 - \frac{1}{2}(3m)V'^2$$

$$\Delta K = -\frac{1}{2}(3m)\frac{4}{9}gR = -\frac{2}{3}mgR$$

$$-\cancel{m}\cancel{g}L = -\frac{2}{3}\cancel{m}\cancel{g}R \Rightarrow L = \frac{2}{3}R$$

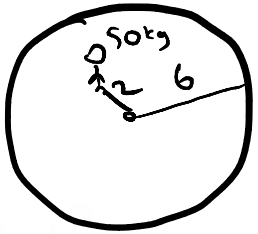
d)

Cisimlerin ağırlıkları ve uyguladıkları yüzeylerin normal kuvvetleri, alınan yola dik olduğu için cisim üzerinde iş yapmazlar. Cisim üzerinde sadece f_k iş yapar:

$$W_{f_k} = -f_k L = -\frac{2}{3} m g R$$

Soru:

Eylemsizlik momenti $400\ kg.m^2$, yarıçapı 6m olan ve kendi merkezi etrafında dönen bir platformun merkezinden 2m uzaklıkta, 50kg kütleli bir kişi durmaktadır. Platform, 3 rad/s lik açısal hızı ile dönmektedir. Kişi, platformun en dış kenarına doğru radyal olarak yürümeye başlıyor. Kişi plaformun en dış kenarına ulaştığı anda açısal hızı hesaplayınız. (sürtünmeler önemsizdir).



$I = 400$

$w = 3$

$50.4 = 200$

Açısal Momentum Korunur;

$(50.36 + 400).w$

$L_i = L_s \Rightarrow I_i w_i = I_s w_s$

$I_i = I_{platform} + (I_{kişi})_i$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 36 \\ \hline 300 \\ 150 \\ \hline 1800 \end{array}$$

$I_i = 400 + 50(2)^2 = 600\ kg.m^2$

$w_s = \dfrac{I_i w_i}{I_s}$; $w_i = 3\ rad/s$

$I_s = I_{platform} + (I_{kişi})_s$

$I_s = 400 + 50(6)^2 = 2200\ kg.m^2$

$\frac{18}{22} = w$

$6\cancel{00}.3 = 22\cancel{00}.w$

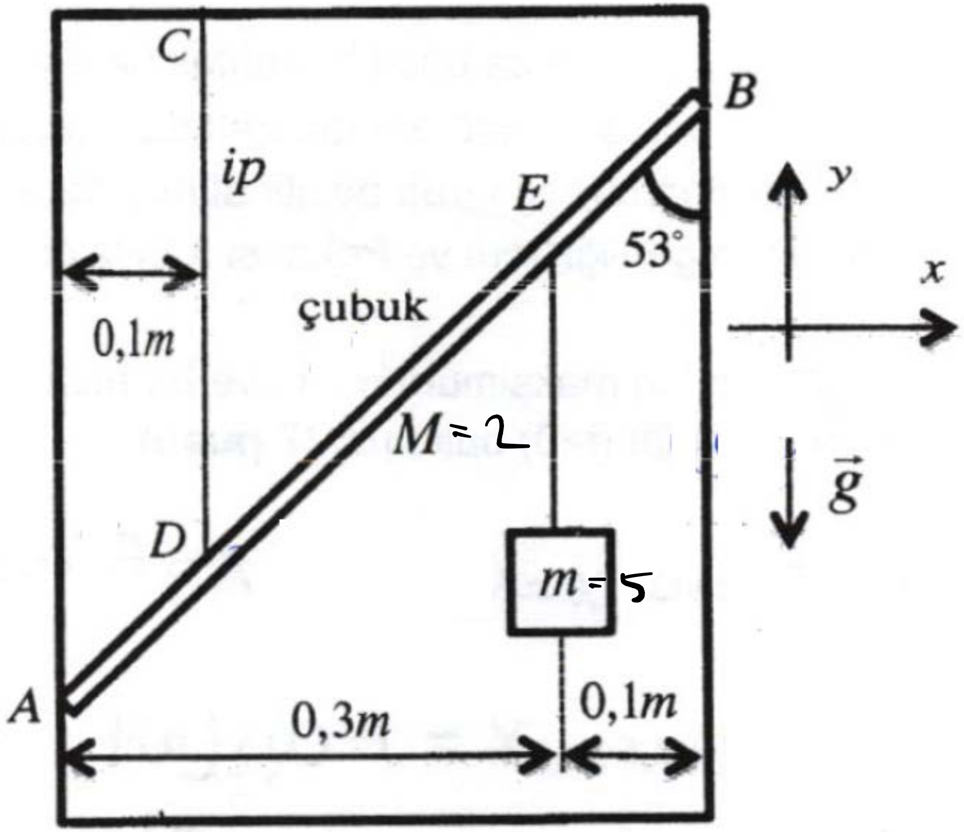
$\frac{9}{11} = w$

$$W_s = \frac{600}{2200}(3) = \frac{18}{22}\ rad|_s$$

$$W_s = \frac{9}{11}\ rad|_s$$

Soru:

Kütlesi M=2kg olan düzgün bir çubuk şekildeki gibi iki düşey pürüzsüz **(sürtünmesiz)** duvar arasında bir ipe asılmış ve çubuk dengede tutulmuştur. Çubuğun uç noktaları (A ve B noktaları) duvar ile temas halindedir. E noktasında m=5kg kütleli bir cisim asılmıştır.

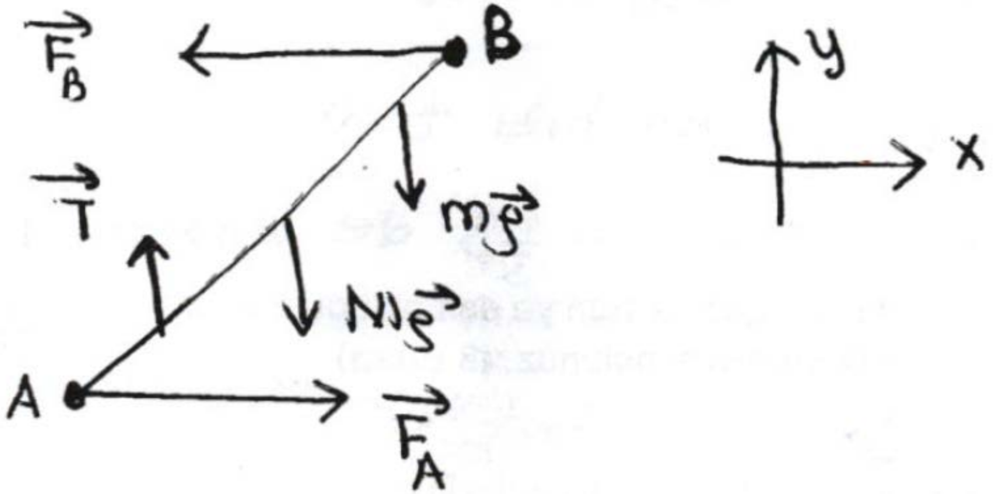


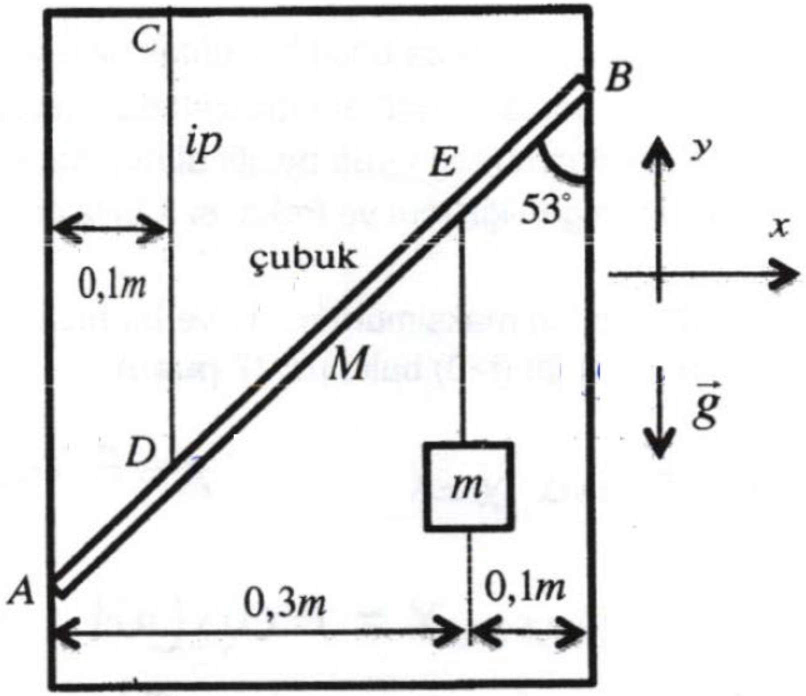
(i) Çubuğun serbest cisim diyagramını çiziniz.

(ii) CD ipindeki gerilmeyi hesaplayınız. 70

(iii) A ve B noktalarında çubuğa uygulanan tepki kuvvetler birim vektörler cinsinden bulunuz.

i)



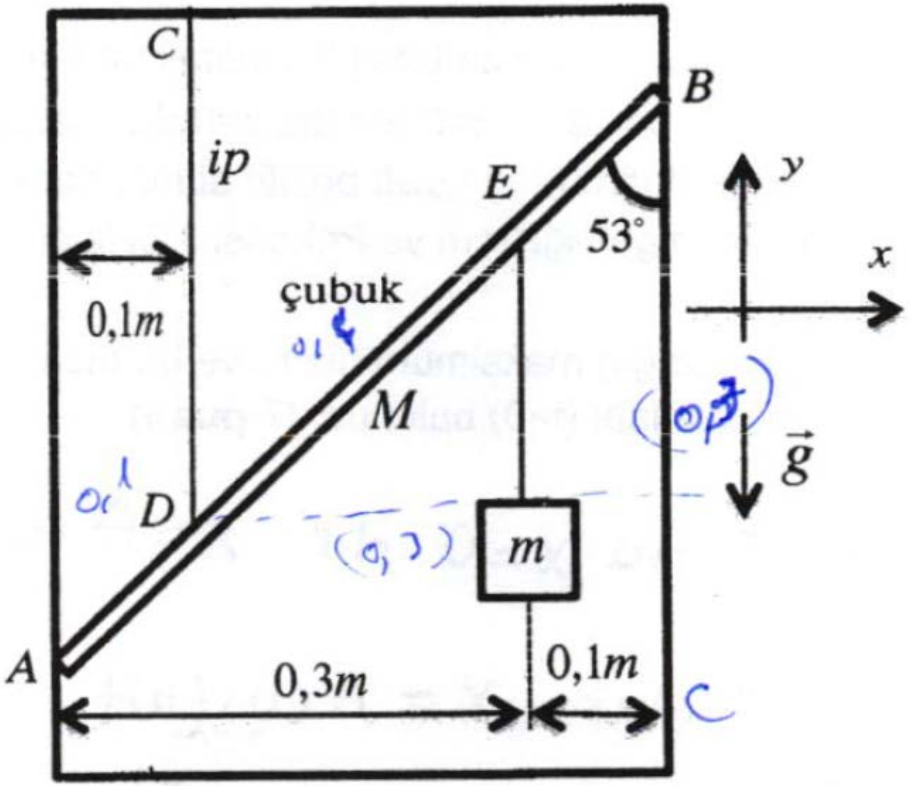


ii)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T = Mg + mg$$

$$T = \overset{10}{g}(\overset{2}{M} + \overset{5}{m}) = 70\,N$$

Cevap:



$\sin 53 = 0{,}8 = \frac{0{,}4}{AB}$ $\quad AB = \frac{0{,}4}{0{,}8} = 0{,}5\,m$

$(AC)^2 + (BC)^2 = AB$

$(0{,}4)^2 + (BC)^2 = (0{,}5)^2$

$(BC)^2 = (0{,}5)^2 - (0{,}4)^2 = (0{,}5+0{,}4)(0{,}5-0{,}4)$

$(0{,}9)(0{,}1)$

$\boxed{BC = 0{,}3}$

iii)

$$Mg(0.2) + mg(0.L)$$

$$\Sigma \tau_B = 0 \Rightarrow F_A(0,3) + 20(0,2) + 50(0,1)$$

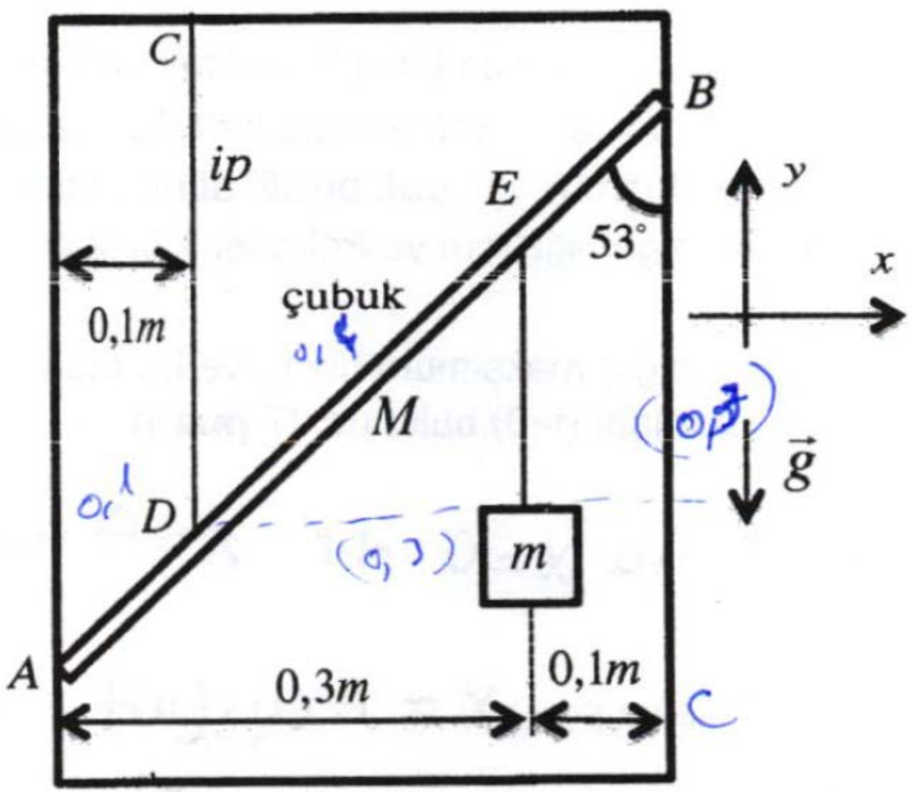
$$T$$

$$= 70(0,3)$$

$$0,3F_A = 12 \Rightarrow F_A = 40\ N$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \vec{F_A} + \vec{F_B} = 0$$

$$\vec{F_B} = -40\hat{i}\ (N)\ ,\ \vec{F_A} = 40\hat{i}\ (N)$$



Soru: $\frac{1}{200} = \sin(3\pi t)$ $\frac{1}{100} = 2\sin(3\pi t)$ $x = 2\sin(3\pi t)$ $v = \frac{6\pi}{100}\cos(3\pi t)$

x ekseni boyunca basit harmonik hareket yapan m=2kg kütleli bir parçacık, t=0 anında x=0 dan harekete başlıyor ve sağa doğru (sağ tarafı pozitif alınız) hareket ediyor. Hareketin genliği 2cm ve frekansı 1,5Hz olduğuna göre;

$2\sin\theta = 0$ $\frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} = T$

(i) Parçacığın maksimum hızını ve bu hıza ulaştığı en erken zamanı (t>0) bulunuz.

(ii) Yerdeğiştirme 1cm ye eşit olduğu zaman, parçacığın kinetik enerjisini bulunuz.

$\frac{2}{3} = \frac{2\pi}{w}$

Cevap: $\frac{2}{100} \cdot 3\pi$ $m=2$ $\sqrt{91}$

$V = Aw\cos wt$ $V_{maks} = Aw$

$w = 9$

i) $t=0$ da $x=0$ dır. $X = A\cos(wt+\phi)$ $\frac{2}{100}$

$\phi = \frac{\pi}{2}$ olur. $X = A\cos(wt + \pi/2)$ veya

$X = A\sin wt$, $V = Aw\cos wt$

$w = \frac{2\pi}{T}$

$\cos w\left(\frac{T}{2}\right) = \cos\frac{2\pi}{2} = \cos\pi = -1$

$A = 0{,}02m$, $w = 2\pi f = 9$ rad/s

Parçacık bu hızı $t=0$ da ve daha sonra $t = \frac{T}{2} = \frac{1}{3}$ s. de kazanır

$V_{maks} = Aw = 0{,}18$ m/s ✓

$T = \frac{1}{f}$

ii)

$E=\frac{1}{2}kA^2 \quad E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 \quad \omega^2=\frac{k}{m} \quad k=m\omega^2$

$$\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$\sqrt{v^2=\omega^2(A^2-x^2)}$$

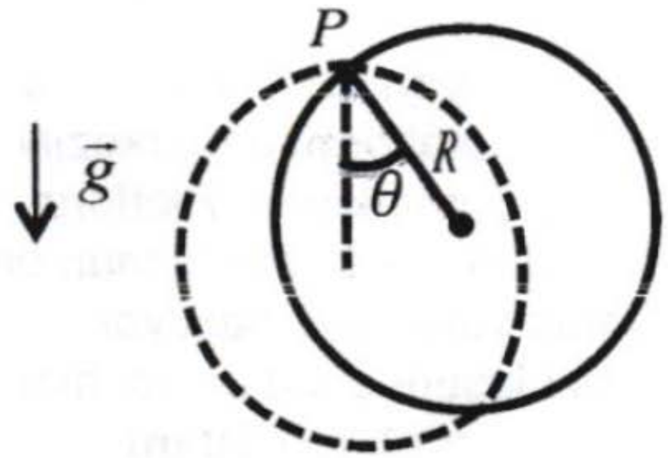
$$v=\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)$$

$$K=\frac{1}{2}(2)(9)^2(4-1)\times10^{-4}$$

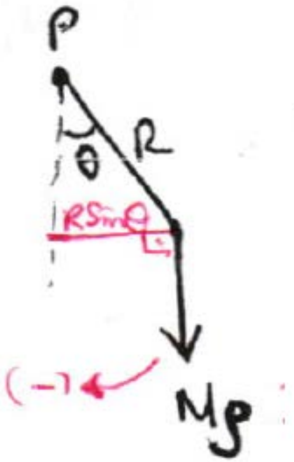
$$K=243\times10^{-4}\ \text{J}$$

Soru:



Yarıçapı R kütlesi M olan bir disk P noktasından duvara tutturularak, düzlemde salınım yapan bir fiziksel sarkaç olarak kullanılıyor. Küçük salınımlar (titreşimler) için sarkacın peryodunu π, g ve R cinsinden bulunuz. (Diskin kütle merkezinden geçen bir eksene göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$ dir.)

Cevap:



$$\Sigma \tau_p = -MgR\sin\theta$$
$$= I_p \alpha$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad , \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \overbrace{\frac{MgR}{I_p}}^{=\omega^2}\theta = 0$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad , \quad \sin\theta \approx \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{MgR}{I_p}}^{=w^2}\theta = 0$$

$$w^2 = \frac{MgR}{I_p} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{MgR}{I_p}}$$

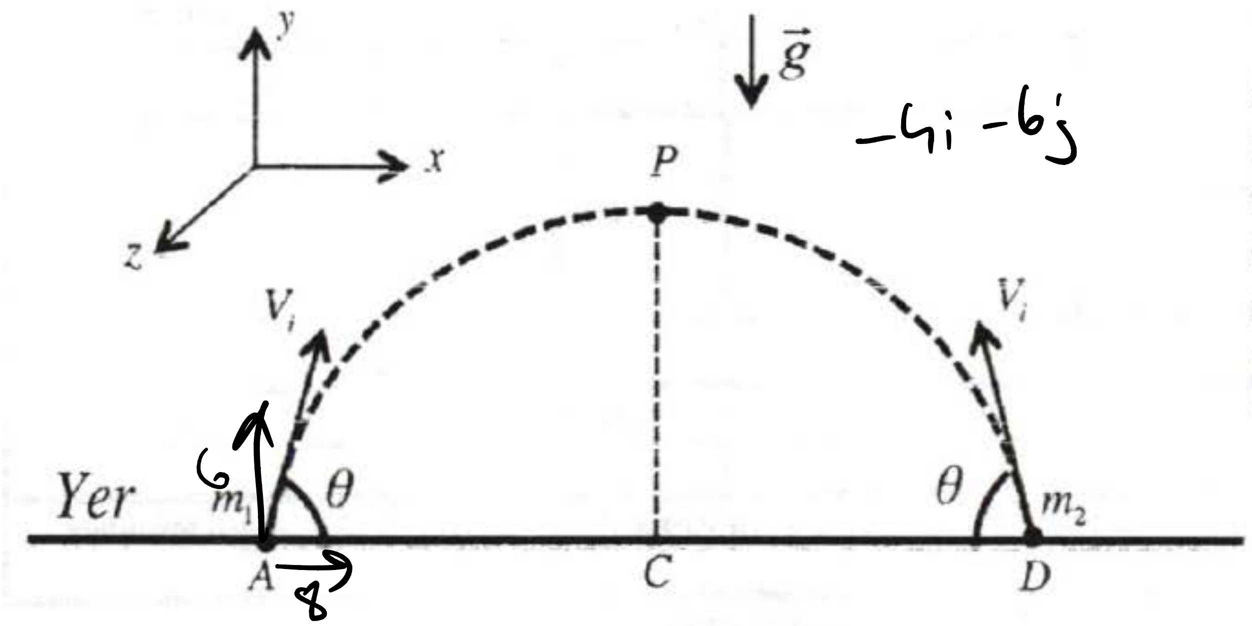
$I_p = I_{cm} + MD^2$ (P.E.T) $\boxed{D=R}$

$$I_p = MR^2 + \frac{1}{2}MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = \pi\sqrt{6\frac{R}{g}}$$

$$w = \sqrt{\frac{MgR}{\frac{3}{2}MR^2}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

Soru:



Şekilde m_1 ve m_2 kütleli iki cisim, aynı ilk hızla ve aynı açıyla eğik olarak atılıyor ve aynı anda P noktasına ulaşıyorlar. Cisimler en yüksek noktada (P noktaşı) çarpışıyor ve birlikte hareket ediyorlar (tamamen esnek olmayan çarpışma). Sürtünmeler önemsenmiyor.

$$\left(m_1 = 1kg\ ,\ m_2 = 3kg\ ,\ V_i = 10\ m/s\ ,\ \theta = 37^\circ\right)$$

$16 = 4v$

$\frac{36}{20} = 1{,}8$

(a) Çarpışmadan hemen sonraki kütlelerin ortak hızını birim vektörler cinsinden bulunuz. $-4i$

(b) P noktasının yerden yüksekliğini bulunuz. 1,8

(c) Çarpışmadan sonra, ortak hızla hareket eden cisimler yerde A noktasından ne kadar uzağa düşer? 3,4

(d) Cisimlerin yere çarptığı anda, cisimlerin C noktasına göre açısal momentumunu birim vektörler cinsinden bulunuz. $\boxed{57{,}6k}$

$2{,}4i \quad 0 \quad 0$

$-16i \quad -24$

$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 = 6$

$5t^2 = \frac{6}{5}$

$4{,}8 - 2{,}4 = 2{,}4$

5,6

3,4

57,6

Cevap:

a) (Tepede) Momentum Korunumdan;

$$m_1 V_i \cos\theta\, \hat{i} + m_2 V_i \cos\theta\,(-\hat{i}) = (m_1+m_2)\vec{V_s}$$

$$\vec{V_s} = \frac{(m_1-m_2)V_i \cos\theta}{m_1+m_2}(\hat{i})$$

$$\vec{V_s} = \frac{(1-3)(10)(0{,}8)}{4}(\hat{i})$$

$$\vec{V_s} = -4\hat{i}\ (m/s)$$

b)

$$t_q = \frac{V_{yi}}{g} = \frac{V_i \sin\theta}{g}$$

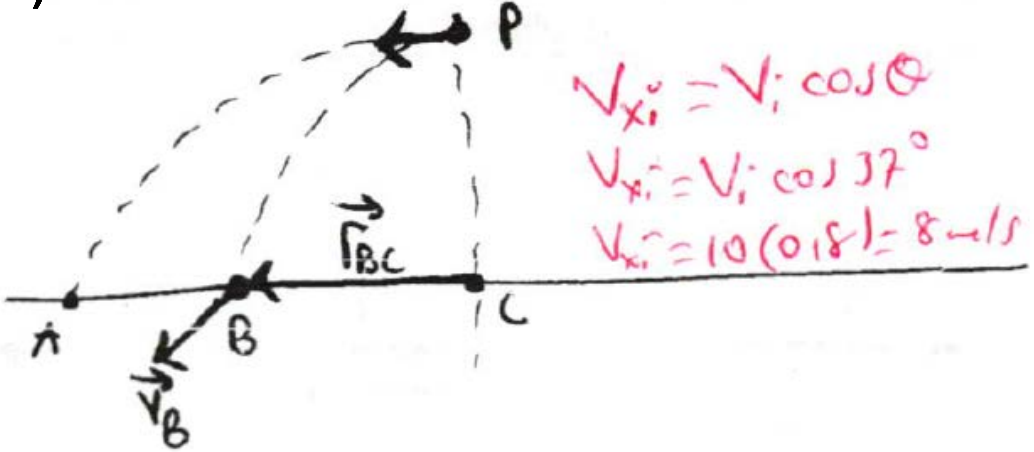
$$t_q = \frac{V_i \sin\theta}{g} = \frac{10\,(0{,}6)}{10} = 0{,}6\,s$$

$$h = V_{yi}\, t_q - \frac{1}{2} g\, t_q^2$$

$$h = 10\,(0{,}6)\,(0{,}6) - \frac{1}{2}\,(10)\,(0{,}6)^2$$

$$h = 1{,}8\,m$$

c)



$V_{xi} = V_i \cos\theta$

$V_{xi} = V_i \cos 37^\circ$

$V_{xi} = 10(0,8) = 8\ m/s$

$$t_{AP} = t_{PB} \Rightarrow t_{PB} = \frac{V_i \sin\theta}{g} = 0,6s$$

$$\overline{BC} = |\vec{V_s}|\, t_{PB} = 4(0,6) = 2,4m$$

$$\overline{AC} = V_{xi}\, t = 10(0,8)(0,6) = 4,8m$$

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = 4,8 - 2,4 = 2,4m$$

d)

$$\vec{V}_B = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} \Rightarrow \begin{cases} V_x = -4\ (m/s) \\ V_y = 0 - 10(0,6) \\ V_y = -6\ (m/s) \end{cases}$$

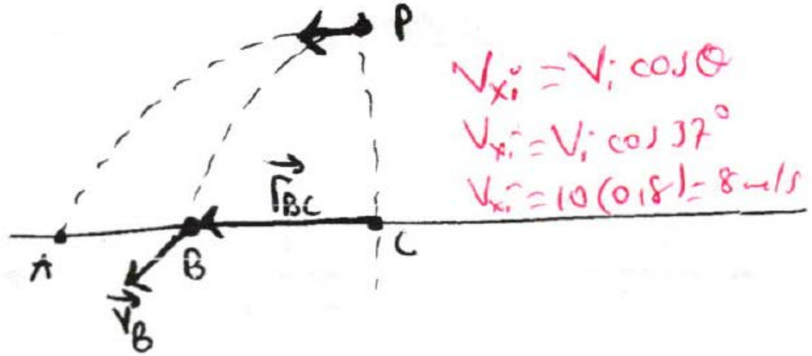
$$V_y = \cancel{V_{yi}}^{\,0} - gt = -10\,(0,6) = -6\,m/s$$

$$\vec{V}_B = -4\hat{i} - 6\hat{j}\ (m/s),\quad \vec{r}_{BC} = -2,4\hat{i}\ (m)$$

$$\vec{L}_C = \vec{r}_{BC} \times \vec{P} = \vec{r}_{BC} \times \underbrace{(m_1 + m_2)}_{4}\vec{V}_B$$

$$\vec{L}_C = \vec{r}_{BC} \times \vec{P} = 4\left[-2,4\hat{i} \times (-4\hat{i} - 6\hat{j})\right]$$

$$\vec{L}_C = 57,6\,(\hat{k})\ kg\cdot m^2/s$$



$V_{xi} = V_i \cos\theta$

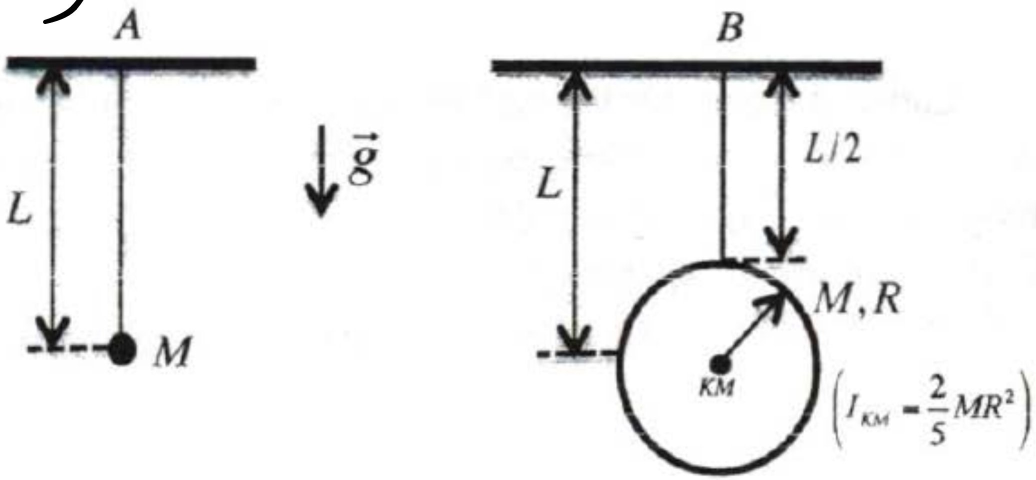
$V_{xi} = V_i \cos 37^\circ$

$V_{xi} = 10\,(0,8) = 8\,m/s$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Soru:

Şekildeki A ve B iki sarkaç da M kütleli dolu toplardan oluşmaktadır, bağlandıkları ip kütlesizdir. A sarkacının topu çok küçük, B sarkacının ki ise çok büyüktür. Her iki sarkacın küçük salınımlardaki peryotlarının oranını bulunuz. $\left(\frac{T_A}{T_B} = ?\right)$



Cevap:

A için: $T_A = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

B için: $T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{Mgd}}$

$d = L, \quad I_B = I_{KM} + ML^2$

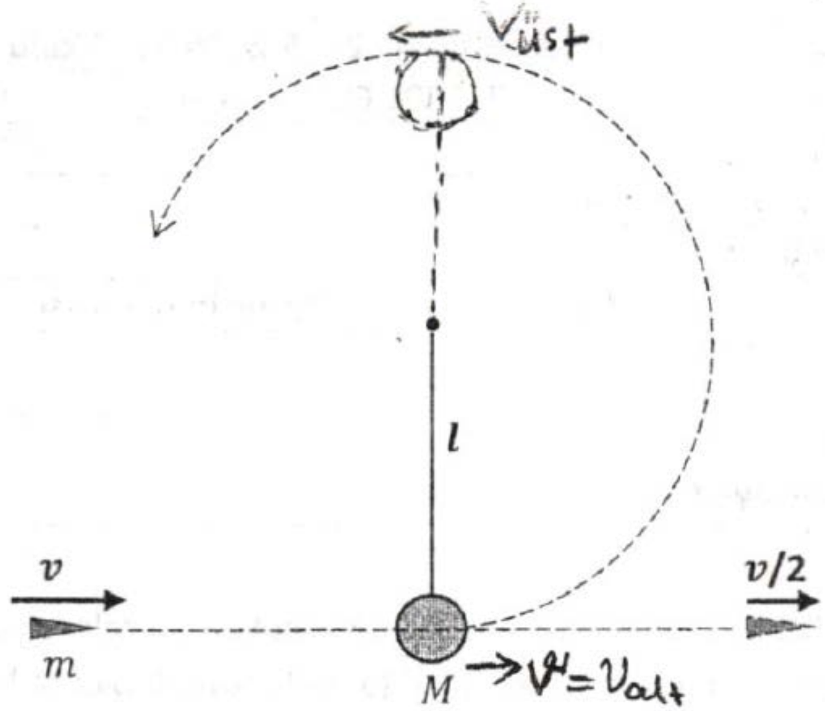
$I_{KM} = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{10}ML^2$

$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{11}{10}\frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{11}{10}\frac{L}{g}}$

$T_B = \sqrt{\frac{11}{10}}\left(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\right) = \sqrt{\frac{11}{10}}\,T_A$

$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{10}{11}}$

Soru: Şekilde görüldüğü gibi, m kütleli ve v hızlı bir mermi, M kütleli bir sarkaç içinden geçer ve $v/2$ hızı ile çıkar. Sarkaç l uzunluğunda ve kütlesi ihmal edilebilen bir ipin ucuna asılıdır. Sarkacın tam bir düşey daire üzerinde hareket edebilmesi için minimum v değeri ne olmalıdır.



Cevap:

Esnek olmayan çarpışma:
Lineer momentum korunumu;

$$\sum \vec{P}_i = \sum \vec{P}_s$$

$$mv + M.0 = MV' + m\frac{v}{2}$$

$$m\frac{v}{2} = MV'$$

$$\boxed{v = 2\frac{M}{m}v'} \quad (1)$$

v' bilinmiyor, alt ve üst noktalar arasında enerji korunur:

$$K_{alt} + U_{alt} = K_{üst} + U_{üst}$$

$$\frac{1}{2}MV_{alt}^2 + 0 = \frac{1}{2}MV_{üst}^2 + Mg2\ell$$

$$\boxed{\frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{1}{2}MV_{üst}^2 + 2Mg\ell} \quad (2)$$

Cismin en üst noktadan geçebilme şartı:

VEYA $\boxed{a_r = g}$ olmalı

$$\Sigma F_r = T + mg = m\frac{V_{üst}^2}{\ell}$$

$T = 0$ ise $V_{üst}$ minimum dolayısıyla v' de minimum olur.

Böylece;

$$\boxed{V_{üst}^2 = g\ell} \quad (3)$$

bulunur. (3)'(2) de yazılırsa:

$$\frac{1}{2}\cancel{M} v'^2 = \frac{1}{2}\cancel{M} g\ell + 2\cancel{M}g\ell$$

$$v'^2 = 5g\ell$$

$$\boxed{v' = \sqrt{5g\ell}}$$ olur.

(1)' de yazılırsa

$$v_{min} = 2\frac{M}{m}\sqrt{5g\ell}$$ olur.

Soru:

Yarıçapı 0.5 olan bir dairesel yörüngede hareket eden parçacığın açısal yer değiştirmesi

12

$\theta = 2t^3 + 4t$ ile verilmektedir. t=1s de, radyal(a_r) ve teğetsel (a_t) ivmeleri hesaplayınız.

$6t^2 + 4$

$w^2 \cdot r$

Cevap:

$12t$

$\frac{100}{2} = 50$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^3 + 4t)$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2$$

$$\omega = 6t^2 + 4$$

$$a_r = (0.5) \cdot 10^2$$

t=1 s de;

$$\boxed{\omega = 10 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{a_r = 50 \text{ rad/s}}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(6t^2+4)$$

$$\alpha = 12t\Big|_{t=1s}$$

$$\boxed{\alpha = 12\ rad/s^2}$$

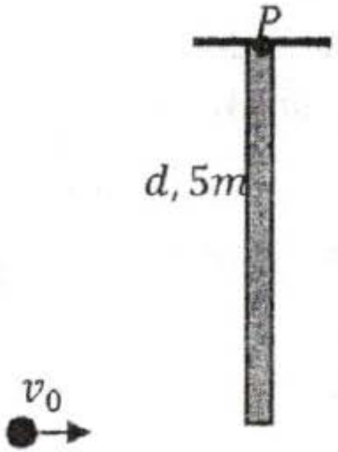
$$a_t = r\alpha = (0.5)\,12$$

$$\boxed{a_t = 6\ m/s^2}$$

Soru:

d uzunluklu $5m$ kütleli düzgün bir çubuk, şekildeki gibi üst ucundan serbestçe dönebilecek şekilde P noktasından tutturulmuştur. m kütleli yapışkan bir parçacık yatayda v_0 hızıyla çubuğun en alt noktasına çarparak yapışıyor.

(M kütleli l uzunluklu bir çubuğun kütle merkezine göre eylemsizlik momenti; $I_{KM} = \frac{1}{12} Ml^2$).



a) Çarpışmadan sonra çubuk+kütle sisteminin açısal hızını bulunuz.

b) Çarpışmada kaybolan enerjiyi hesaplayınız.

$$m v_0 = 6m v_s$$

$$\frac{v_0}{6} = v_s$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6m \cdot \frac{v_0^2}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 5md^2 + 5md^2 + md^2$$

Cevap:

a)

$$L_i = L_s$$

$$m v_0 d = I_p^{sis} \omega \Rightarrow \omega = \frac{m v_0 d}{I_p^{sis}}$$

$$I_p^{sis} = I_p^{G} + md^2 = \frac{1}{12}(5m)d^2 + 5m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + md^2$$

$$I_p^{sis} = \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{4} + 1\right) md^2$$

$$I_p^{sis} = \frac{8}{3} md^2$$

$$\omega = \frac{\cancel{m} v_0 \cancel{d}}{\frac{8}{3} \cancel{m} d^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{3}{8} \frac{V_0}{d}}$$

b)

$$K_i = \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$K_s = \frac{1}{2} I_P^{sis} \omega^2 = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{3} m d^2 \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{V_0}{d} \right)^2$$

$$K_s = \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{3}} m d^2 \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{16}{\cancel{64}}} \cdot \frac{V_0^2}{d^2} \qquad \frac{4}{3} m \cancel{d^2} \frac{9}{64} \frac{V_0^2}{\cancel{d^2}}$$

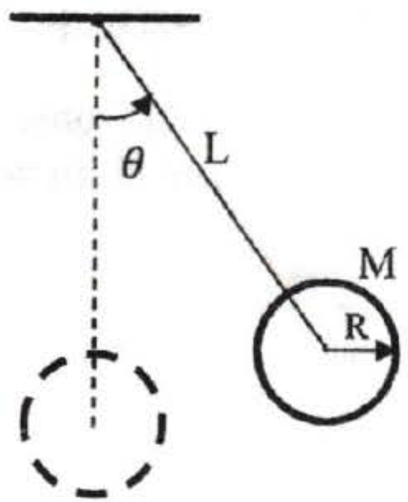
$$\boxed{K_s = \frac{3}{16} m V_0^2}$$

$$\Delta K = \frac{3}{16} m V_0^2 - \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$\Delta K = -\frac{5}{16} m V_0^2$$

Soru:

M kütleli ve R yarıçaplı bir disk, L uzunluklu ve kütlesi ihmal edilen bir çubuğun ucuna merkezinden tutturularak bir fizik sarkaç yapılmıştır. Şekilde ki gibi denge noktası etrafında düzlemde salınım hareketi yapmaktadır. Diskin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $I_{KM} = \frac{1}{2}MR^2$ dir.

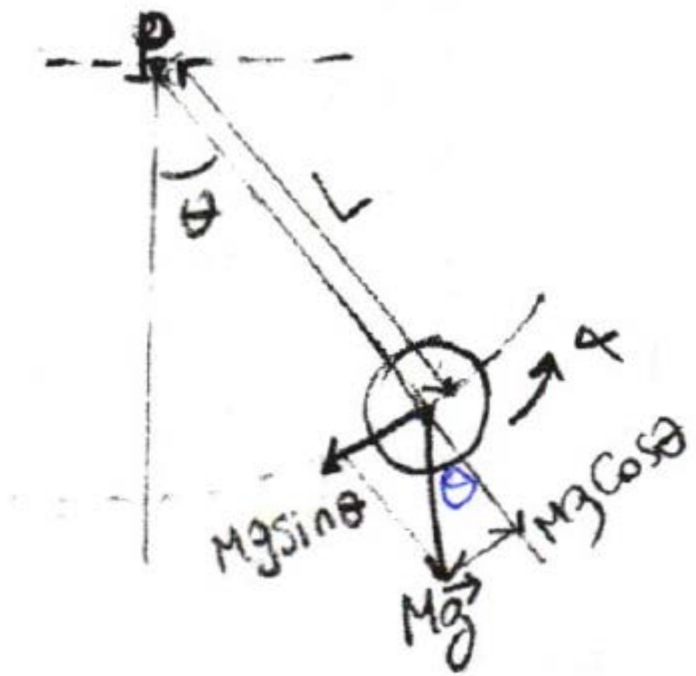


a) Disk için kuvvet diyagramını çizerek, hareket denklemini elde ediniz.

b) Küçük salınımlar için salınımın periyodunu ve frekansını bulunuz.

Cevap:

a)



Dikkat!

$$\boxed{\Sigma \vec{\tau}_P = \vec{r} \times \vec{F} = I_P \vec{\alpha}} \; ; \; \boxed{\alpha = \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

$$\boxed{-(Mg\sin\theta)L = I_P \ddot{\theta}}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{MgL}{I_P}\sin\theta = 0}$$

b)

Küçük salınımlarda $\sin\theta \cong \theta$ olur.

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{MgL}{I_p}\theta = 0}$$

$$\frac{MgL}{I_p} \rightarrow \omega^2$$

$$\boxed{\omega^2 = \frac{MgL}{I_p}} ; \quad I_p = I_{km} + ML^2$$

$$\boxed{I_p = \frac{1}{2}MR^2 + ML^2}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)}{gL}}}$$

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gL}{\left(\frac{R^2}{2} + L^2\right)}}}$$