Pınar Albayrak
2. Uygulama

(*) $\lim_{x\to 1^-} (1-x)\cdot \tan\frac{\pi}{2}x = ?$

$\underbrace{1-x=u}_{x=1-u}$ olsun. $x\to 1$ ise $u\to 0$ olur. $\tan\frac{\pi}{2}x = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}$

$$\lim_{u\to 0} \frac{u\cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right)} \qquad \left(\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right)=\cos\frac{\pi}{2}u \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}u\right)=\sin\frac{\pi}{2}u \end{array}\right)$$

$$=\lim_{u\to 0} \frac{u\cdot \cos\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}$$

$$=\lim_{u\to 0} \underbrace{\frac{\frac{\pi}{2}u}{\sin\frac{\pi}{2}u}}_{1}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}u}_{1} = \frac{2}{\pi}$$

(*) $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x\le 0 \\ x, & 0<x<1 \\ bx^2+a, & x\ge 1 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$ da süreksiz, $x=1$ de sürekli olması için a ve b hangi şartları sağlamalı?

$x=0$ da süreksiz olması için: $\lim_{x\to 0^+} f(x) \ne \lim_{x\to 0^-} f(x)$ olmalı.

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x}_{0} \ne \underbrace{\lim_{x\to 0^-} ax+b}_{b} \Rightarrow \boxed{b\ne 0} \text{ olmalı.}$$

$x=1$ de sürekli olması için: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$ olmalı.

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^+} bx^2+a}_{a+b} = \underbrace{\lim_{x\to 1^-} x}_{1} \Rightarrow \boxed{a+b=1}$$

$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ b\ne 0 \end{array}\right\}$ olursa $f(x)$ $x=0$ da süreksiz, $x=1$ de sürekli olur.

(*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\,(2+\underbrace{x^{-1/6}+x^{-3/10}}_{\to 0})}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{3-\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}}+\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{x}}-\underbrace{\frac{3}{x^{3/2}}}_{0}}\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(*) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}} & , x<1\\ 2a & , x=1\\ \dfrac{\sin(x-1)}{b.(2x-2)} & , x>1\end{cases}$ fonksiyonu $x=1$ de sürekli ise $a, b = ?$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = f(1)$ olmalı. $\boxed{f(1)=2a}$

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\sin(x-1)}{b.(2x-2)} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{\frac{\sin(x-1)}{x-1}}{1} \cdot \dfrac{1}{2b} = \dfrac{1}{2b} = 2a \Rightarrow \boxed{a.b=\frac{1}{4}}$

$\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-1}{1-\sqrt{2-x}} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}\,(1+\sqrt{2-x})}{\frac{1-2+x}{\cancel{x-1}}} = 2 = 2a \Rightarrow \boxed{a=1}$

$\boxed{b=\frac{1}{4}}$

(*) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = ?$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{x}+\sqrt{x}-\cancel{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\ 1}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0}}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$

(*) $f(x)=x^2+x$, $[0,1]$ de türevlenebilir mi?

$x_0 \in (0,1)$ için

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2+x_0+h-x_0^2-x_0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x_0^2}+2x_0h+h^2+\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0^2}-\cancel{x_0}}{h}=2x_0+1$$

(açık aralıkta türevli)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+h-0}{h}=1$$ (Sol uçta sağdan türevli)

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{1}+2h+h^2+\cancel{1}+h-\cancel{2}}{h}=\lim_{h\to 0}h+3=3$$

(Sağ uçta soldan türevli)

$[0,1]$ de türevlenir.

(*) $f(x)=|x^2-1|$ in $x=1$ de sürekli ama türevlenemez olduğunu gösteriniz.

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1-(1+h)^2-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h-h^2}{h}=-2$$

$$f'_+(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2+2h}{h}=2$$

$\neq$ $x=1$ de $f(x)$ türevlenemez.

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}|1-x^2|=0$ $\quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}|1-x^2|=0$ $\quad f(1)=0 \Rightarrow$ $x=1$ de sürekli.

(*) $y=x^2-2x$ eğrisinin $x+2y=1$ doğrusuna dik olan teğeti?

$y=x^2-2x \to y'=2x-2=m \to$ teğetin eğimi

$x+2y=1 \to y=\frac{1}{2}-\frac{x}{2} \to$ doğrunun eğimi $=-\frac{1}{2}$

dik $\Rightarrow (2x-2)\cdot\frac{-1}{2}=-1$

$2x-2=2 \Rightarrow \boxed{x=2}$

$y=x^2-2x$ in $x=2$ deki teğeti denklemi

$y-y_0=m(x-x_0) \to$ $y-0=2(x-2)$

$\boxed{y=2x-4}$

$(x=2 \to y=2^2-2.2=0)$

$(m=2x-2 \to x=2 \Rightarrow m=2.2-2=2)$

⊛ $f(x) = \begin{cases} x.\sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$ daki türevlenebilirliğini araştırınız.

* Sürekli mi?

$\lim_{x\to 0} \underbrace{x}_{0} . \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{-1 \leq \leq 1} = 0 = f(0)$ ✓ sürekli

* $f'(0)$ mevcut mu?

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}.\sin\frac{1}{h} - 0}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$ → Limiti mevcut değildir.

Fonksiyon $x=0$ da türevlenemez

⊛ f ve g türevlenebilir iki fonksiyon ve $f'(2)=3$, $g(1)=2$, $g'(1)=1$ olsun. $h(x) = (f \circ g)(x^2)$ ise $h'(1) = ?$

$h(x) = f(g(x^2)) \Rightarrow h'(x) = 2x . g'(x^2) . f'(g(x^2))$

$h'(1) = 2 . \underbrace{g'(1)}_{1} . \underbrace{f'(\underbrace{g(1)}_{2})}_{3} = 2.3 = 6$

⊛ Hangi $x \in \mathbb{R}$ noktaları için $f(x) = x^3 - 3x$ eğrisine teğet doğrular yataydır?

Teğet doğru yataysa eğimi 0 dır.

$m_T = f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

(*) $\cos(3x+y)+\sin(x+3y)=-1$ denklemi ile verilen kapalı fonksiyonun $A(0,\frac{\pi}{2})$ noktasındaki teğet ve normal doğrularını bulun. ($y'=-\frac{f_x}{f_y}$ formülünü kullanmayın)

$$-(3+y').\sin(3x+y)+(1+3y').\cos(x+3y)=0$$

$$y'(-\sin(3x+y)+3\cos(x+3y))=3\sin(3x+y)-\cos(x+3y)$$

$$y'=\frac{3\sin(3x+y)-\cos(x+3y)}{-\sin(3x+y)+3\cos(x+3y)} \qquad y'\Big|_{(0,\frac{\pi}{2})}=\frac{3.\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}}{-\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}+3\underbrace{\cos\frac{3\pi}{2}}_{0}}=-3$$

$m_T=-3 \Rightarrow m_N=\frac{1}{3}$

$(0,\frac{\pi}{2})$ deki teğet $\Rightarrow y-\frac{\pi}{2}=-3(x-0) \Rightarrow y=-3x+\frac{\pi}{2}$

" " normal $\Rightarrow y-\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}(x-0) \Rightarrow y=\frac{x}{3}+\frac{\pi}{2}$

(*) $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun türevinin $f'(x)=-\sin x$ olduğunu gösteriniz.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\cos x\underbrace{\frac{(\cos h-1)}{h}}_{0}-\sin x.\underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}\right)=-\sin x$$

⊛ $y^3 - x^3 = xy \Rightarrow y''$ yü x ve y cinsinden yazınız.

$$F: y^3 - x^3 - xy = 0 \overset{\text{türev}}{\Rightarrow} 3y^2y' - 3x^2 - y - xy' = 0$$

$$y' = -\frac{-3x^2-y}{3y^2-x} = \frac{3x^2+y}{3y^2-x}$$

$$y'' = \frac{(6x+y')(3y^2-x) - (3x^2+y)(6yy'-1)}{(3y^2-x)^2}$$

$$y'' = \frac{\left(6x + \frac{3x^2+y}{3y^2-x}\right)(3y^2-x) - (3x^2+y)\left(6y\cdot\frac{3x^2+y}{3y^2-x} - 1\right)}{(3y^2-x)^2}$$

⊛ $$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\underbrace{\sqrt[6]{(2x-3)^2}}_{\sqrt[6]{4x^2-12x+9}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(2 + \overbrace{x^{-1/6}}^{0} + \overbrace{x^{-3/10}}^{0}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{3-\underbrace{\frac{2}{x}}_{0}} + \sqrt[6]{\underbrace{\frac{4}{x}}_{0} - \underbrace{\frac{12}{x^2}}_{0} + \underbrace{\frac{9}{x^3}}_{0}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

⊛ $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

$|x| - x > 0$ olmalı. $|x| > x \Rightarrow \boxed{x<0} \Rightarrow \boxed{T.K = (-\infty, 0)}$

⊛ $y = \sqrt{\ln \dfrac{5x-x^2}{4}}$ tanım kümesi?

$\ln \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 1 \Rightarrow 5x - x^2 \geq 4$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 \leq 0$ olmalı.

$x = 1$
$x = 4$

	1		4	
+		−		+

$\boxed{T.K = [1,4]}$

⊛ $f(x)=\begin{cases} ax+b & , x<0 \\ 2\operatorname{Sin}x+3\operatorname{Cos}x & , x\geq 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$ da türevlenebilir olması için $a,b=?$

$x=0$ da türevlenebilir ise süreklidir.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ dır.

$\lim\limits_{x\to 0^-} ax+b=b$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} 2\operatorname{Sin}x+3\operatorname{Cos}x=3 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$x=0$ da türevli ise $f'_+(0)=f'_-(0)$ dır.

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-\overset{3}{\overline{f(0)}}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\operatorname{Sin}h+3\operatorname{Cos}h-3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\left(2\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{Sin}h}{h}}_{1}+3\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{Cos}h-1}{h}}_{0}\right)=2$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah+3-3}{h}=a$$

$\boxed{a=2}$

⊛ $y=x\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremumlarını araştırın.

$4-x^2\geq 0 \Rightarrow 4\geq x^2 \Rightarrow x\in[-2,2]$ de tanımlı. $D(f)=[-2,2]$

$\boxed{x=2 \mid x=-2}$ uç noktalar

$$y'=\sqrt{4-x^2}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$\to y'=0 \Rightarrow \boxed{x=\mp\sqrt{2}}$ K.N.

$\to \boxed{x=\mp 2}$ K.N (f' tanımsız)

		-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2	
y'			−	0	+	0	−		
y			↘		↗		↘		
		y.max		y.min		y.max		y.min	

$f(-2)=f(2)=0$

$f(\sqrt{2})=2 \to$ mutlak max

$f(-\sqrt{2})=-2 \to$ mutlak min.

$x=-\sqrt{2}$, $x=2 \to$ yerel min. noktaları,

$x=\sqrt{2}$, $x=-2 \to$ yerel max. "

$x=\sqrt{2} \to$ mutlak max. noktası

$x=-\sqrt{2} \to$ mutlak min. "

3.a $f(x) = \begin{cases} 4x\ , & x \le 0 \\ ax^2 + bx + c\ , & 0 < x < 1 \\ 3 - 2x\ , & x \ge 1 \end{cases}$ ile tanımlı f fonksiyonunun türevlenebilir bir fonksiyon olabilmesi için a, b ve c değerleri ne olmalıdır?

x=0 ve x=1'de türevlidir.

Ohalde x=0 ve x=1 de süreklidir.

$\lim_{x\to 0^+} (ax^2+bx+c) = \lim_{x\to 0^-} 4x = 0 \to \boxed{c=0}$

$\underbrace{\lim_{x\to 1^+} 3-2x}_{1} = \lim_{x\to 1^-} (ax^2+bx) \Rightarrow a+b=1$

x=0'da türevli ise: $f'_-(0) = f'_+(0)$.

$\lim_{h\to 0^-} \frac{4.h}{h} = 4 = f'_-(0)$ $\quad \lim_{h\to 0^+} \frac{ah^2+bh}{h} = b = f'_+(0) \Rightarrow \boxed{b=4} \Rightarrow a=-3$

kontrol: $a=-3$, $b=4$, $c=0$ ise x=1'de türevli mi?

$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{3-2(1+h)-1}{h} = -2 \quad f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{-3(1+h)^2+4(1+h)-1}{h}$

$= -2$ ✓

3.b. $\sqrt[3]{8.1}$ nin yaklaşık değerini lineer yaklaşım kullanarak hesaplayınız.

$a = 8 \quad f(x) = \sqrt[3]{x} \quad f'(x) = \frac{1}{3} . x^{-2/3}$

$L(x) = f(8) + f'(8).(x-8) \quad f(8) = 2 \quad f'(8) = \frac{1}{12}$

$L(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8)$

$f(x) \approx L(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8)$

$f(8,1) \approx L(8,1) = 2 + \frac{1}{12}(8,1-8) =$ 2,008

Good Luck...

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} & , x<0 \\ x^2+\dfrac{1}{2} & , x\geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=0$ daki türevlenebilirliğini araştırın.

$x=0$ 'da sürekli mi?

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad f(0)=\frac{1}{2}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\sqrt{1-x})} = \frac{1}{2}$

$= \checkmark$

$\Rightarrow f(x)$ $x=0$ 'da sürekli

$f'_+(0) \overset{?}{=} f'_-(0)$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^{\cancel{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{h}} = 0$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1-\sqrt{1-h}}{h}-\frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1-\frac{h}{2}-\sqrt{1-h}}{h^2} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1-\frac{h}{2})^2-1+h}{h^2(1-\frac{h}{2}+\sqrt{1-h})}$$

$(1-\frac{h}{2}+\sqrt{1-h})$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{\cancel{h^2}}{4}-\cancel{h}+\cancel{1}+\cancel{h}-\cancel{1}}{\cancel{h^2}(1-\underbrace{\tfrac{h}{2}}_{0}+\underbrace{\sqrt{1-h}}_{1})} = \frac{1}{8}$$

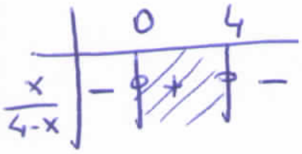
$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ $\quad f(x)$ $x=0$ da türevlenemez.

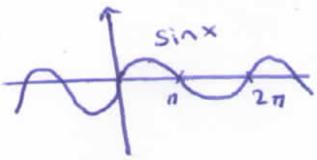
	YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi , Mazeret Sınav Soru ve Cevap Kağıdı	Not Tablosu							
		1.a	1.b	2.a	2.b	3.	4.a	4.b	Toplam
Adı Soyadı									
Numarası									
Bölümü		Gr No					Tarih	27.12.2016	
Dersin Adı	MAT1071 Matematik I			Süre	90 dk		Sınıf		
Öğretim Üyesi				İmza					

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1.a. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{4-x}} - \sqrt{sinx}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

$\frac{x}{4-x} \geq 0$, $x \neq 4$, $\sin x \geq 0$ olmalı





$[0,4)$ $\cap$

$D(f) = [0,\pi]$

1.b. $h(2) = 2$, $h'(2) = 1$, $f'(8) = -1$ olmak üzere, $g(x) = f(x^2 + xh(x))$ ile tanımlı g fonksiyonu için $g'(2)$ değerini hesaplayınız.

$g(x) = f(x^2 + x h(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(x^2 + x h(x)) \cdot [2x + h(x) + x h'(x)]$

$g'(2) = \underbrace{f'(\underbrace{4 + 2 \cdot \underbrace{h(2)}_{2}}_{8})}_{-1} \cdot [4 + \underbrace{h(2)}_{2} + 2 \underbrace{h'(2)}_{1}]$

$g'(2) = -1 \cdot 8 = \boxed{-8}$

Good Luck...

⊛ $\frac{y^2}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right)=x-y^2$ şeklinde kapalı olarak verilen $y=y(x)$ fonksiyonunun $P\left(\frac{6}{\pi^2},\frac{2}{\pi}\right)$ noktasındaki teğet denklemi? (2016- mazeret sınav sorusu)

$$\frac{y^2}{2}\cdot\sin\left(\frac{1}{y}\right)=x-y^2 \xrightarrow{\text{Türev}} y\cdot y'\sin\left(\frac{1}{y}\right)+\frac{y^2}{2}\cdot\left(\frac{-y'}{y^2}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right)=1-2yy'$$

$$\downarrow x=\frac{6}{\pi^2} \quad y=\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot y'\cdot\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}+\underbrace{\frac{2}{\pi^2}\cdot\left(-y'\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}=1-\frac{4}{\pi}y'$$

$$\frac{2}{\pi}y'=1-\frac{4}{\pi}y' \Rightarrow y'=\frac{\pi}{6}=m_T$$

Teğet denklem: $y-\frac{2}{\pi}=\frac{\pi}{6}\left(x-\frac{6}{\pi^2}\right)$

⊛ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{\cot^2 x-1}=?$ (L'Hopital kullanmayınız) (2016- Mazeret Sınavı sorusu)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sqrt{2}\sin x}{\cot^2 x-1}\,(1+\sqrt{2}\sin x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2\sin^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-1}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin x}$$

$\left(\begin{aligned}\cos 2x&=1-2\sin^2 x\\&=\cos^2 x-\sin^2 x\end{aligned}\right.$ olduğundan $\Big)$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cancel{\cos 2x}}{\frac{\cancel{\cos 2x}}{\sin^2 x}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+\sqrt{2}\sin x}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1+1}=\frac{1}{4}$$

YTÜ - Fen-Edebiyat Fakültesi, I. Yıliçi Sınav Soru ve Cevap Kağıdı			NOT TABLOSU						
			1. S	2. S	3. S	4. S			TOPLAM
Adı Soyadı									
Öğrenci Numarası		Grup No							
Bölümü				Sınav Tarihi			14/11/2015		
Dersin Adı	Mat1071 Matematik I		Sınav Süresi	100dk		Sınav Yeri			
Dersi veren Öğretim Üyesinin Adı Soyadı					İmza				

***NOT:** Bu sınavda **L'Hôpital** kuralı kullanılmayacaktır.*

S1. a) $f:\Re \to \Re$ fonksiyonu $f(x)=\begin{cases} x & , \quad x \le -2 \\ 1/(x+2) & , \quad -2 < x \le 1 \\ \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} & , \quad x>1 \end{cases}$ şeklinde tanımlanıyor. Buna göre;

i) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ limitlerini hesaplayınız. **(15 puan)**

ii) $x=-2$ **ve** $x=1$ noktalarındaki süreksizlik tiplerini belirleyiniz.

$\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} x = -2$ ⟩ limit yok

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = -\dfrac{1}{2}$ ⟩ $\neq$ limit yok

$x=-2$'de (esas) sonsuz süreksiz

$x=1$ sıçramalı süreksiz

b) Diferansiyel hesap ya da lineer yaklaşım kullanarak $\sqrt[3]{28}$ in yaklaşık değerini hesaplayınız. **(10 puan)**

$f(x)=\sqrt[3]{x} \qquad a=27$

$f'(x)=\frac{1}{3}\cdot x^{-2/3} \qquad f'(27)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$

$f(27)=3$

$L(x)=3+\frac{1}{27}(x-27)$

$f(x)\approx L(x)=3+\frac{1}{27}(x-27)$

$f(28)\approx L(28)=3+\frac{1}{27}(28-27)=3+\frac{1}{27}=\frac{82}{27}$

Başarılar dilerim.

⊛ $(1{,}002)^3 - 2\sqrt{1{,}002} + 3$ sayısının yaklaşık değerini
a) Lineerleştirme ile
b) Diferansiyel ile hesaplayın.

$f(x) = x^3 - 2\sqrt{x} + 3$ $\quad a = 1$ olsun.

a) $L(x) = f(1) + f'(1).(x-1)$

$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = 3 - 1 = 2$

$L(x) = 2 + 2(x-1) \rightarrow f(x) \approx L(x) = 2 + 2(x-1)$

$f(1{,}002) \approx L(1{,}002) = 2 + 2.(1{,}002 - 1)$

$= 2 + 2.0{,}002 = \underline{2{,}004}$

b) Diferansiyel ile: $dx = \Delta x = 1{,}002 - 1 = 0{,}002$

$dy = f'(1).dx = 2.0{,}002 = 0{,}004$

$\Delta y = f(1{,}002) - f(1) = f(1{,}002) - 2$

$dy \approx \Delta y \Rightarrow f(1{,}002) - 2 \approx 0{,}004$

$f(1{,}002) \approx 2 + 0{,}004 = \underline{2{,}004}$

⊛ $x^2y^2 + \tan(x+y) - 1 = 0$ eğrisine $P(\frac{\pi}{4}, 0)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemi?

$x^2y^2 + \tan(x+y) - 1 = 0$

$\downarrow$

$2xy^2 + 2yy'x^2 + (1+y').\sec^2(x+y) = 0$

$\downarrow x = \frac{\pi}{4} \quad y = 0$

$(1+y').\sec^2\frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow y' = -1 \rightarrow$ Teğetin eğimi

Teğet denklemi: $y - 0 = -(x - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow y = \frac{\pi}{4} - x$

13

4.a. $f(x)=\frac{3|x-2|}{x^2(4-x^2)}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz. Eğer varsa süreksizlik noktalarını sınıflandırınız.

Fonksiyon $x^2(4-x^2)=0 \rightarrow x=0,-2,2$ de incelenmelidir.

Diğer her noktada süreklidir. 3 +3+3 +5

$x=0$ için

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{3\cancel{(2-x)}}{x^2\cancel{(2-x)}(2+x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3}{x^2(2+x)}=\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cancel{(2-x)}}{x^2\cancel{(2-x)}(2+x)}=\infty$$

olduğundan $x=0$ da $\boxed{\text{sonsuz (esas) süreksiz}}$

$x=-2$ için

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{3\cancel{(2-x)}}{x^2\cancel{(2-x)}(2+x)}=-\infty \qquad \lim_{x\to -2^+}\frac{3\cancel{(2-x)}}{x^2\cancel{(2-x)}(2+x)}=+\infty$$

olduğundan $x=0$ da $\boxed{\text{sonsuz (esas) süreksiz}}$

$x=2$ için

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{3\cancel{(2-x)}}{x^2\cancel{(2-x)}(2+x)}=\frac{3}{16}\neq\lim_{x\to 2^+}\frac{3\cancel{(x-2)}}{x^2\cancel{(2-x)}(2+x)}=\frac{-3}{16}$$

olduğundan $x=2$ de $\boxed{\text{sıçramalı süreksiz}}$

4.b. $f(x)$ ve $g(x)$ türevlenebilir iki fonksiyon olsun. $f(g(x))=x$ ve $f'(x)=1+(f(x))^2$ olduğunu kabul edelim. O zaman $g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ olduğunu ispatlayınız. 12

$$[f(g(x))]'=1 \Rightarrow f'(g(x)).g'(x)=1$$

$f'(g(x))=1+[f(g(x))]^2=1+x^2$ olduğundan

$$(1+x^2)g'(x)=1 \Rightarrow \boxed{g'(x)=\frac{1}{1+x^2}}$$

⊛ $x>0$ olmak üzere $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun türevini türev tanımı ile hesaplayın. (2015- sınav sorusu)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h.\sqrt{x}.\sqrt{x+h}}$$
$$(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}-\cancel{x}-\cancel{h}}{\cancel{h}.\sqrt{x}.\sqrt{x+h}}.\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

⊛ f türevlenebilir bir fonksiyon, $f(-1)=5$ ve $f'(-1)=2$ olsun. $f(-0,9)$ değerini lineerleştirme kullanarak yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$L(x)=\underbrace{f(-1)}_{5}+\underbrace{f'(-1)}_{2}.(x+1)=5+2(x+1)$$

$$f(x)\approx L(x)\Rightarrow f(-0,9)\approx L(-0,9)=5+2(-0,9+1)=5+0,2=5,2$$

⊛ $\sin(xy)=1-x^2-y^2+x^2y^3$ eğrisinin x-eksenini kestiği noktaları bulunuz ve bu noktalardaki teğet doğruların birbirine paralel olup olmadığını belirtiniz. (2017-1. vize sorusu)

$y=0 \Rightarrow 0=1-x^2 \Rightarrow x=\mp 1$ de ekseni keser

$$\sin xy=1-x^2-y^2+x^2y^3 \rightarrow (y+xy')\cos xy=-2x-2yy'+2xy^3+3x^2y^2y'$$

$x=1 \quad y=0$ $\qquad$ $x=-1, y=0$

$m_1=y'=-2$ $\qquad$ $m_2=y'=-2$

$m_1=m_2=-2 \Rightarrow$ Doğrular paraleldir

	YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi I. Vize Soru ve Cevap Kağıdı		Not Tablosu				
			1. S	2. S	3.S	4. S	Σ
Adı Soyadı							
Numarası		Grup No					
Bölümü							
Dersin Adı	MAT1071 MATEMATİK I			Tarih	11.11.2017		
Öğretim Üyesi			Süre	100 dk.	Sınıf		
				İmza			

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan *"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"* fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

UYARI: Sınavdaki limit hesabı gerektiren sorularda *L'HÔPITAL KURALI* KULLANILMAYACAKTIR.

1.a) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $g(1)=g'(1)=4$ şartlarını sağlayan türevlenebilen bir fonksiyon olsun ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da $f(x)=\frac{g(x^2)}{1+x^2}$ ile tanımlı olsun. **Lineer yaklaşım veya diferansiyel hesap kullanarak** $f(1.25)$ in yaklaşık değerini bulunuz. *(13 Puan)*

$$L(x)=f(1)+f'(1)(x-1) \quad , \quad f(1)=\frac{g(1)}{1+1}=\frac{4}{2}=2$$

$$f'(x)=\frac{2x.g'(x^2)(1+x^2)-g(x^2).2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(1)=\frac{2.4.2-4.2}{2^2}=2$$

$$f(x)\approx L(x)=2+2(x-1)$$

$$f(1.25)\simeq L(1.25)=2+2(1.25-1)=2.5$$

1. b) $f(x)=\frac{|x^2-9|}{x^2-4x+3}$ ile tanımlı f fonksiyonunun süreksiz olduğu tüm noktaları bulunuz. Bulduğunuz bu süreksizlik noktalarını sınıflandırınız. *(12 Puan)*

$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=3,\ x=1$ için süreksiz,

<u>$x=1$ için</u>: $\lim\limits_{x\to1^-} -\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+} -\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}=-\infty$

$\Rightarrow x=1$ sonsuz (esas) süreksizlik noktasıdır.

<u>$x=3$ için</u>: $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}=3$, $\lim\limits_{x\to3^-} -\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}=-3$

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to3^-} f(x) \Rightarrow x=3$ sıçramalı süreksizlik noktasıdır.

3. a) $f(x)=\begin{cases} tan(sinx) & , \quad x\leq 0 \\ \frac{1}{x}\,sinx^2 & , \quad x>0 \end{cases}$ ile tanımlı f fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türeve sahip olup olmadığını belirleyiniz. (*15 Puan*)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\cdot \sin x^2 = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \tan(\sin x) = 0 \quad , \quad f(0)=0$$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ olduğundan fonksiyon $x=0$'da süreklidir.

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{h}\sin h^2 - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sin h^2}{h^2} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\tan(\sin h)-0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \underbrace{\frac{\tan(\sin h)}{\sin h}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{1}$$

$$= 1$$

$f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ olduğundan $f(x)$, $x=1$'de türevlenebilirdir. $f'(0) = \underline{1}$.

3. b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(2x+\sqrt{4x^2+3x} \right) = ?$ (*10 Puan*)

$$\lim_{x\to -\infty} (2x+\sqrt{4x^2+3x}) \to \infty - \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{(2x+\sqrt{4x^2+3x})(2x-\sqrt{4x^2+3x})}{2x-\sqrt{4x^2+3x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-3x}{2x-\sqrt{4x^2+3x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-3x}{2x - \underbrace{|x|}_{-}\sqrt{4+\frac{3}{x}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(2+\sqrt{4+\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}}\right)} = -\frac{3}{4}$$

3) $f(x) = \begin{cases} a\sin x + b & ; \ x < 0 \\ x & ; \ x \geq 0 \end{cases}$

fonksiyonunun $x=0$ noktasında türevlenebilir olması için a ve b nin alacağı değerleri bulunuz.

<u>Çözüm:</u> -) f(x) fonk. $x=0$ nok.'da sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x \to 0^-} (a\sin x + b) = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} x}_{0} = f(0)$$

$$b \qquad = \qquad 0$$

$\Rightarrow \boxed{b=0}$

-) f(x) fonk. $x=0$ nok.'da türevlenebilir olması için

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{h \to 0^-} \frac{a\sin(0+h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{a\sinh}{h} = a \\ &\lim_{h \to 0^+} \frac{(0+\cancel{h}) - 0}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1 \end{aligned}\right\} =$$

$\Rightarrow \boxed{a=1}$ bulunur.

YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi, I. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı	Not Tablosu							
	1.a	1.b	2.a	2.b	3.a	3.b	4.	Toplam
Adı Soyadı								
Numarası								
Bölümü	Gr No							
Dersin Adı: MAT1071 Matematik I					Tarih	12.11.2016		
Öğretim Üyesi: CEVAP ANAHTARI			Süre		90 dk	Sınıf		
					İmza			

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun *Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin* 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma cezası alırlar.

1.a. $y\sin\left(\frac{1}{y}\right) + x\cos\left(\frac{1}{y}\right) = -2x$ eğrisinin $P\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz ($y' = -\frac{F_x}{F_y}$ formülünü kullanmayınız). (1)

$$y'\sin\left(\frac{1}{y}\right) + y\left(\frac{-y'}{y^2}\right)\cos\left(\frac{1}{y}\right) + \cos\left(\frac{1}{y}\right) + x\left(-\frac{y'}{y^2}\right)\left(-\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right) = -2$$

(2) (2) (2) (2) (1)

$$y' = \frac{-2-\cos\left(\frac{1}{y}\right)}{\sin\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y^2}\sin\frac{1}{y}}$$

$$y'\Big|_P = \frac{-2-\cos\pi}{\sin\pi - \pi\cos(\pi) + 0} = \frac{-1}{\pi}$$ (2)

Teğet doğrusu : $\boxed{\left(y - \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi}(x-0)}$ (2)

1.b. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilen bir fonksiyon ve $g(2) = -4$, $g'(x) = \sqrt{x^2+5}$ olmak üzere; lineer yaklaşımı kullanarak $g(2,05)$ 'in yaklaşık değerini bulunuz. (14)

$g(x)$ fonksiyonunun $a=2$ deki lineerleştirmesi

$L(x) = g(2) + g'(2)(x-2)$ (2)

$L(x) = -4 + 3(x-2)$ (4)

$g(2.05) \approx L(2.05) = -4 + 3(2.05-2) = -4 + 0,15 = \boxed{-3.85}$ (4) (2)

Başarılar...

21-22-35-51

2.a. Türev tanımını kullanarak,

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}(1-\cos x) & x\geq 0\\ \sin x & x<0\end{cases}$$

ile tanımlı f fonksiyonunun $x=0$ 'da türevlenebilir olup olmadığını inceleyiniz. Nedenlerini açıklayınız.

0

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sin h-0}{h}=1 \quad 5$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h}\,(1-\cos h)-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\sqrt[3]{h}\cdot\frac{1-\cos h}{h}=0\cdot 0=0 \quad 5$$

$f'_-(0)\neq f'_+(0)$ olduğundan $x=0$ da türevlenemez.

3

2.b. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(2x)}{x^2-\pi x}$ limitini hesaplayınız (L'Hospital kuralını kullanmayınız).

$x-\pi=t$ dönüşümü ile

2

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{x(x-\pi)}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2(t+\pi)}{(t+\pi)\cdot t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{(t+\pi)t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\cdot\frac{2}{t+\pi}=1\cdot\frac{2}{\pi}=\boxed{\frac{2}{\pi}}$$

2 2 3 3

Başarılar...

S.2 a) Eğer f fonksiyonunun $x = 1$ de türevi mevcut ise,

$$\lim_{h\to 1} \frac{f(h) - f(2-h)}{h-1}$$

limitini bulunuz.(15p)

$$L = \lim_{h\to 1} \frac{f(h)-f(2-h)}{h-1} \xlongequal{(u=h-1)} \lim_{u\to 0} \frac{f(1+u)-f(1-u)}{u}$$

$$= \lim_{u\to 0} \left[\frac{f(1+u)-f(1)}{u} - \frac{f(1-u)-f(1)}{-u} \cdot (-u) \right]$$

$$= f'(1) + f'(1) = 2f'(1).$$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ ile verilen f fonksiyonu için eğer mevcut ise $f'(0)$ değerini bulunuz.(8p)

$x=0$ da sürekli mi?

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (x^2+x) = 0 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1 \end{aligned}\right\}$$ olduğundan f, $x=0$ da sürekli değil.

Dolayısıyla; f'nin $x=0$ da türevinden bahsedilemez.

Başarılar dilerim.