Ör: $f(x)=1-x^2e^{2-x}$ ile verilen f fonksiyonunun ekstremum değerlerini bulunuz.

$$f'(x)=-2xe^{2-x}-x^2.(-1)e^{2-x}$$

$$f'(x)=-2xe^{2-x}+x^2e^{2-x}$$

$$f'(x)=(-2x+x^2)e^{2-x}$$

$$f'=0 \Rightarrow -2x+x^2=0 \Rightarrow x.(x-2)=0,\ \underbrace{x=0,\ x=2}_{\text{Kritik Nokta.}}$$

$$f''(x)=(-2+2x)e^{2-x}+(-2x+x^2).(-1)e^{2-x}$$

$$=e^{2-x}.(-x^2+2x+2x-2)$$

$$=e^{2-x}.(-x^2+4x-2)$$

$x=0$ noktası için

$f'(0)=0$ ve $f''(0)=e^2.(-2)=-2e^2<0 \Rightarrow x=0$ noktası yerel max noktadır.

$f(0)=1$ $f$nin yerel max değeridir.

$x=2$ noktası için

$f'(2)=0$ ve $f''(2)=e^0.(-4+8-2)=2>0 \Rightarrow x=2$ noktası yerel min noktadır.

$f(2)=1-4e^0=-3$ yerel minimum değerdir.

II yol:

x		0		2	
$f'(x)$	+	ϕ	−	ϕ	+
	$\nearrow$	$x=0$ yerel max nok.	$\searrow$	$x=2$ yerel min nok.	$\nearrow$

, $f(0)=1$ max değer

$f(2)=-3$ min değer.

a)

Ör: $f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=(1+\ln x)^x$ ise f fonksiyonunun

türevini bulunuz.

$$f(x)=(1+\ln x)^x \Rightarrow \ln f(x) = \ln(1+\ln x)^x$$

$$\ln f(x) = x\ln(1+\ln x)$$

$$[\ln f(x)]' = [x \ln(1+\ln x)]'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + x \cdot \frac{(1+\ln x)'}{1+\ln x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(1+\ln x) + x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{1+\ln x}$$

$$f'(x) = \left(\ln(1+\ln x) + \frac{1}{1+\ln x}\right) \cdot (1+\ln x)^x$$

b.) (a) şıkkında verilen f fonksiyonunu kullanarak

$$g(x) = \int_x^{f(x)} (\cos^{12} t)\,dt$$ ise $g'(1)$ değerini hesaplayınız

$$g'(x) = f'(x)\cos^{12}(f(x)) - 1.\cos^{12} x$$

$$g'(1) = f'(1)\cos^{12}(f(1)) - \cos^{12} 1$$

$$g'(1) = 1.\cos^{12} 1 - \cos^{12} 1$$

$$g'(1) = \cos^{12}(1) - \cos^{12}(1) = 0$$

NOT: $f(x) = (1+\ln x)^x \Rightarrow f(1) = (1+\underbrace{\ln 1}_{0})^1 = 1$

$$f'(x) = \left(\ln(1+\ln x) + \frac{1}{1+\ln x}\right) \cdot (1+\ln x)^x$$

$$f'(1) = \left(\ln(1+\underbrace{\ln 1}_{0}) + \frac{1}{1+\ln 1}\right) \cdot (1+\underbrace{\ln 1}_{0})^1 = 1 \cdot 1 = 1$$

ör: $\int \sin^3x \ln(\cos^7x)dx = \int \sin^2x \ln(\cos^7x)\sin x\,dx$

$\cos x = t$

$-\sin x\,dx = dt$

$= \int (1-\cos^2x)\ln(\cos^7x)\sin x\,dx$

$= -\int (1-t^2)\ln t^7\,dt$

$= -7\int (1-t^2)\ln t\,dt$

(kısmi integrasyondan)

NOT$_1$: $\underbrace{\int \ln x\,dx}_{*} = x\ln x - x + C$

$-7\int (1-t^2)\ln t\,dt = -7\overbrace{\int \ln t\,dt}^{*} + 7\overbrace{\int t^2 \ln t\,dt}^{I_1}$

$= -7.(t\ln t - t) + 7\int t^2\ln t\,dt$

$= -7(t\ln t - t) + 7.\left(\frac{t^3}{3}\ln t - \frac{t^3}{9}\right) + C.$

$= -7(\cos x \ln x - \cos x) + \frac{7}{9}\cos^3x \ln\cos x - \frac{7}{9}\cos^3x + C$

NOT$_2$: $I_1 = \int t^2 \ln t\,dt := \frac{t^3}{3}\ln t - \int \frac{t^2}{3}dt.$

$\ln t = u$, $t^2dt = dv.$

$\frac{1}{t}dt = du$, $\frac{t^3}{3} = v$

$= \frac{t^3}{3}\ln t - \frac{1}{3}\frac{t^3}{3} + C.$

$= \frac{t^3}{3}\ln t - \frac{t^3}{9} + C.$

Or: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x + \int_0^x \cos t\,dt}{\int_0^x t\,dt - x\cos x} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \int_0^x \cos t\,dt}{\int_0^x t\,dt - x\cos x} \overset{0/0}{\underset{L'H}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sin x + \int_0^x \cos t\,dt\right)'}{\left(\int_0^x t\,dt - x\cos x\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x}{x - \cos x + x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{x - \cos x + x\sin x}$$

$$= \frac{2}{-1}$$

$$= -2$$

ör:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}, & 0<x\leq 1\\ -1, & x=0\end{cases}$$

ile verilen f fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında Ortalama Değer Teoremi (O.D.T) uygulanabilir mi? Açıklayınız.

f, $[0,1]$ aralığında sürekli olmalı.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}).(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}{x.(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x^2-(1+x)}{x.(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overset{x.(x-1)}{x^2-x}}{x.(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x})}\to\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}=-\frac{1}{2}\neq f(0)=-1$ olduğundan.

f, $x=0$ da sürekli değildir. Yani Ortalama Değer Teoreminin hipotezlerinden biri sağlanamaz dolayısıyla O.D.T uygulanamaz.

Ör: $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\forall x > 0$ için

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonunu ve

a sayısını bulunuz.

$$\left(6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right)' = \left(2\sqrt{x}\right)'$$

$a \in \mathbb{R}$ olduğu için $a' = 0$ dır

$$0 + 1 \cdot \left(\frac{f(x)}{x^2}\right) - a' \cdot \frac{f(a)}{a^2} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}$$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} \qquad \left(f(t) = \frac{t^2}{\sqrt{t}}\right)$$

$$6 + \int_a^x \frac{\cancel{t^2}}{\sqrt{t}\cdot\cancel{t^2}}\,dt = 2\sqrt{x}$$

$$6 + \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{x} \Rightarrow 6 + \int_a^x t^{-1/2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

$$6 + \left.\frac{t^{1/2}}{1/2}\right|_a^x = 2\sqrt{x} \Rightarrow 6 + \cancel{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{a} = \cancel{2\sqrt{x}}$$

$$6 = 2\sqrt{a}$$

$$3 = \sqrt{a}$$

$$\boxed{9 = a}$$

ör: Belirli integralin özelliğini / özelliklerini kullanarak

$\int_1^4 \sqrt{1+3x^2}\,dx$ integrali için mümkün olan

alt ve üst sınırları bulunuz

$f(x) = \sqrt{1+3x^2}$ fonksiyonu $[1,4]$ aralığında

süreklidir. Bu aralıkta bir mutlak maksimum

ve bir mutlak minimum değer alır.

$\min f(x) = f(1) = \sqrt{4} = 2.$

$\max f(x) = f(4) = \sqrt{49} = 7$

Belirli integraller için Max-Min eşitsizliği gereği

$$\min f(x).(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f(x).(b-a)$$

$$\min f(x).(4-1) \leq \int_1^4 \sqrt{1+3x^2}\,dx \leq \max f(x).(4-1)$$

$$2.3 \leq \int_1^4 \sqrt{1+3x^2}\,dx \leq 7.3$$

$$6 \leq \int_1^4 \sqrt{1+3x^2}\,dx \leq 21$$

Ör: $f(x) = \arcsin x + \frac{\pi}{2} . \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunu $[0,1]$ aralığında Rolle Teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz ve ilgili c sayılarını bulunuz.

i) $f(x) = \arcsin x + \frac{\pi}{2} \sqrt{1-x^2}$, $[0,1]$ de sürekli

ii) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{2-\pi x}{\sqrt{1-x^2}}$, $(0,1)$ de türevli

iii.) $f(0) = \arcsin 0 + \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$f(1) = \arcsin 1 + 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

$f(0) = f(1)$ ✓

i.), ii) ve iii) koşulları sağlandığı için Rolle Teoremi hipotezlerini sağlar.

$f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in (0,1)$ vardır

$f'(c) = \frac{2-\pi c}{\sqrt{1-c^2}} = 0 \Rightarrow 2 - \pi c = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{\pi} \in (0,1)$ dır

Ör: $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$ ile tanımlı f fonksiyonunun tanım kümesini; artan ve azalan olduğu aralıkları; varsa asimptotlarını; varsa ekstremum değerlerini; varsa büküm (dönüm) noktalarını bulunuz ve konkavlığını inceleyiniz. Tüm sonuçlarını tek bir tabloda göstererek f nin grafiğini çiziniz.

Tanım Kümesi: $\mathbb{R}-\{2\}$.

$\boxed{x=2 \text{ Düşey Asimptot}}$ $\left(\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2}{x-2}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2}{x-2}=-\infty\right)$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2-2x & x+2 \\ \hline 0\quad 2x & \\ 2x-4 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{y=x+2 \text{ eğik asimptot}}$, yatay asimptot yok.

$f'=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow \underline{x=0, x=4}$. Kritik Nokta

$f'(x)=\dfrac{2x.(x-2)-x^2.1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$,

f' tanımsız $\Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow \cancel{x=2}$ Kritik Nokta Değil. Çift kat

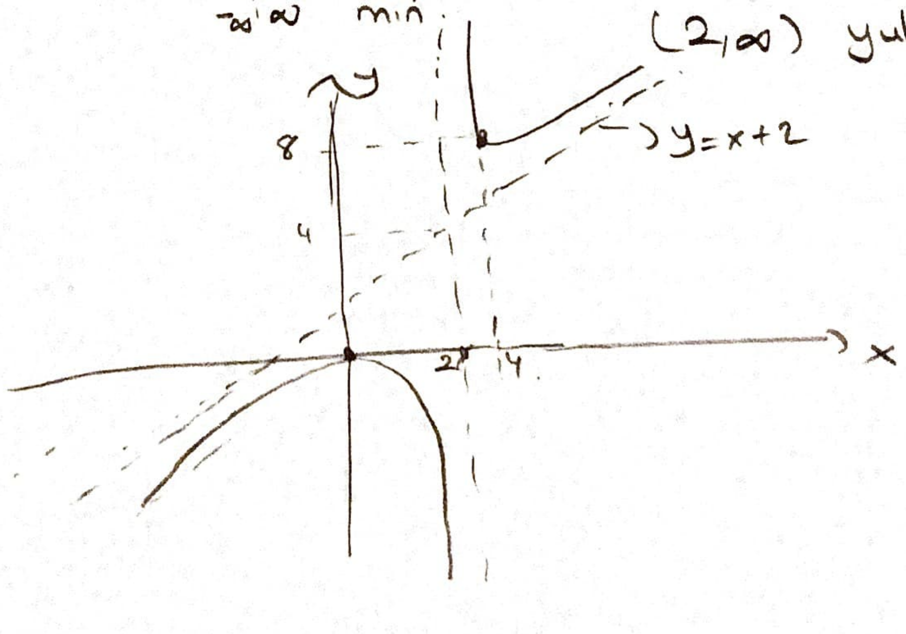
$x=2$ düşey asimptot

$f''(x)=\dfrac{(2x-4).(x-2)^2-(x^2-4x)2.(x-2)}{(x-2)^4}=\dfrac{8}{(x-2)^3}$

$f''=0 \Rightarrow (x-2)^3=0 \Rightarrow \underline{x=2}$

x	$-\infty$		0		2		4	
f'		$+$	0	$-$	0 $-$ T.sız		0	$+$
f''		$-$		$-$	0 T.sız	$+$		$+$
			max		$-\infty$ ∞		min	

* $(0,0)$ yerel maximum.
  $(4,8)$ yerel minimum
* $(-\infty,0)\cup(4,\infty)$ artan
  $(0,2)\cup(2,4)$ azalan
* $(-\infty,2)$ aşağı konkav.
  $(2,\infty)$ yukarı konkav.



Ör: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$ ile tanımlı f fonksiyonunun tanım kümesini; yatay, düşey ve eğik asimptotlarını; artan ve azalan olduğu aralıkları, ekstremum noktalarını, konkavlığını ve büküm (dönüm) noktalarını inceleyiniz. Tüm sonuçları tek bir tabloda göstererek f'nin grafiğini çiziniz.

Tanım kümesi
$D(f): \mathbb{R}-\{-1,1\}$

$\boxed{\text{Düşey asimptot : } x=-1,\ x=1} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-4}{x^2-1}=+\infty, & \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-4}{x^2-1}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2-4}{x^2-1}=+\infty, & \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^2-4}{x^2-1}=-\infty \end{cases}$

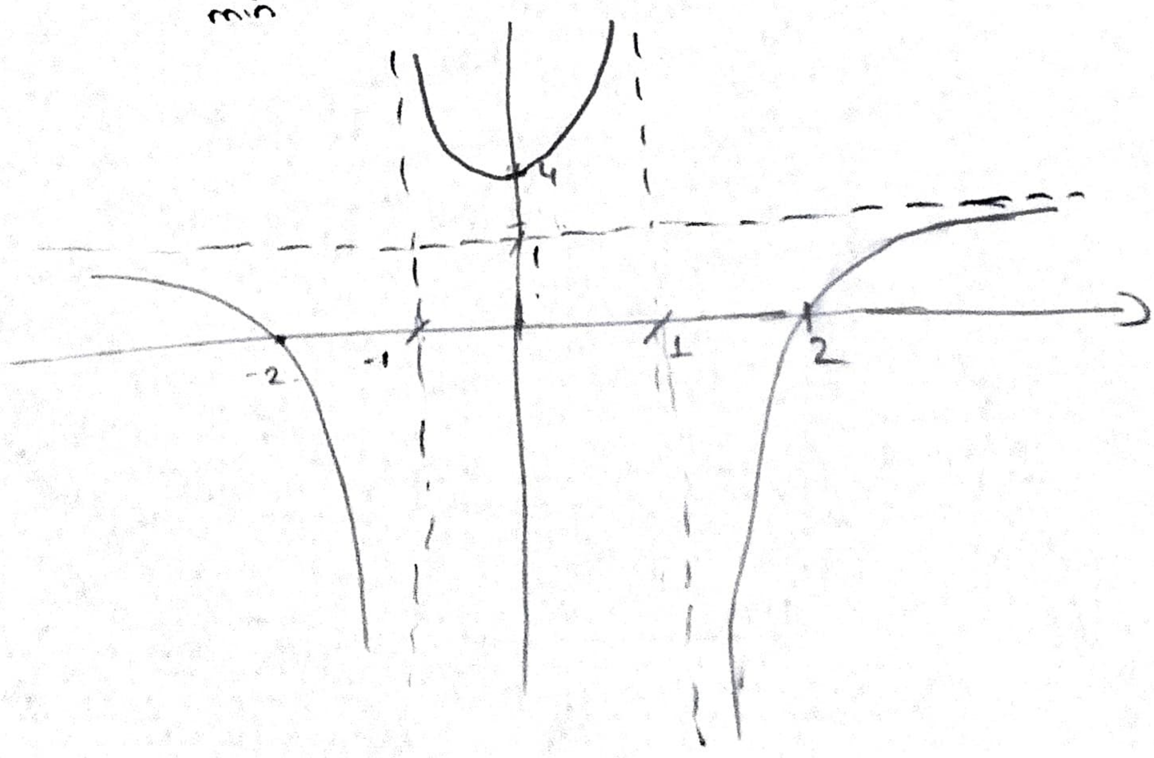
$\boxed{\lim\limits_{x\to \mp\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-1}=1 \Rightarrow y=1 \text{ yatay asimptot}}$, $\boxed{\text{Eğik asimptot yok}}$

$f'(x)=\dfrac{2x.(x^2-1)-(x^2-4).2x}{(x^2-1)^2}=\dfrac{6x}{(x^2-1)^2}$ → $x=0$ Kritik Nokta.
→ $x=\mp 1 \notin D(f)$ ($x=\mp1$ düşey asimptot)
Çift kat
Kritik Nokta değil

$f''(x)=\dfrac{6.(x^2-1)^2-6x.2.(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4}=\dfrac{-6-18x}{(x^2-1)^3}$ → $x=\mp 1 \notin D(f)$.
Büküm Noktası Yok!

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f''		$-$		$+$		$+$		$-$	
f		↘		↘	$x=0$ yerel min	↗		↗	

$(0,1)\cup(1,\infty)$ artan
$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ azalan
$(-1,1)$ yukarı konkav
$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ aşağı konkav
$(0,4)$ yerel minimum



Ör: $f(x)=\frac{x^2}{1-x}$ ile verilen fonksiyonunun tanım aralığını; varsa düşey, yatay ve eğik asimptotlarını, artan-azalan olduğu aralıkları ve varsa ekstremum değerlerini; aşağı ve yukarı konkav olduğu aralıkları ve varsa büküm noktalarını bularak grafiğini çiziniz

$D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

$\boxed{x=1 \text{ düşey asimptot}} \Rightarrow \left\{ \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty, \ \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{1-x} = +\infty \right.$

$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \pm\infty \ \text{ yatay asimptot yok}}$

Eğik asimptot: $y=mx+n \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m=\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x^2}{x.(1-x)} = -1 \\ n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\mp\infty}\left[\frac{x^2}{1-x}+x\right] \\ = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x} = -1 \end{array} \right.$

$y=mx+n \Rightarrow \underbrace{y=-x-1}_{\text{eğik asimptot}}$

$f'(x)=\frac{2x.(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2} \Rightarrow$

$f'=0 \Rightarrow 2x-x^2=0, \ \underbrace{x=0, x=2}_{\text{Kritik Nokta}}$

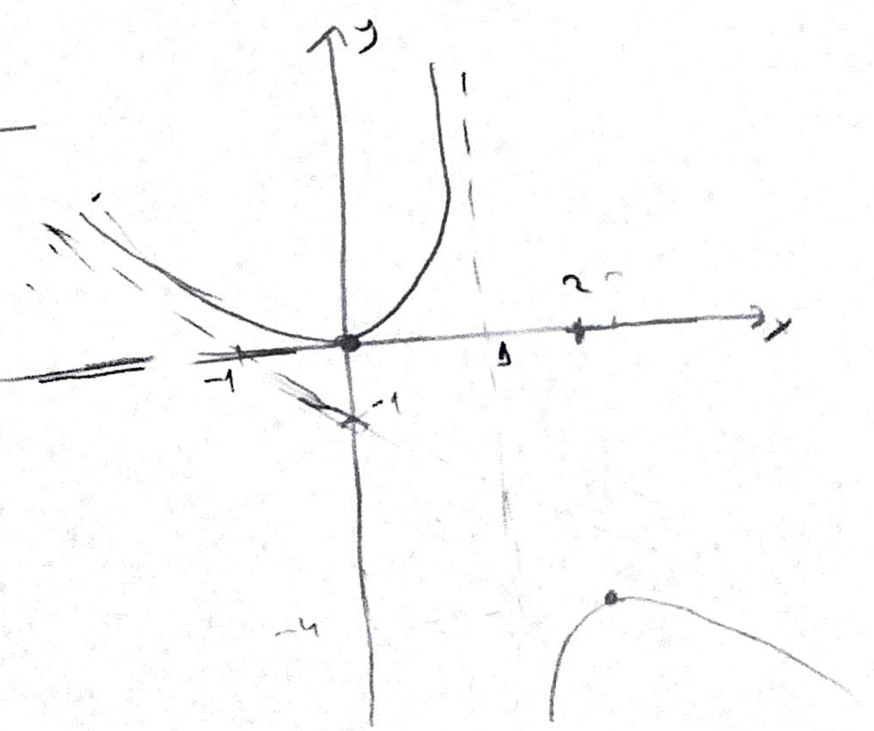
f' tanımsız $\Rightarrow (1-x)^2=0$, $\cancel{x=1}$ Kritik Nokta değil

$\cancel{x=1}$ $\notin$ KM, $x=1$ düşey asimptot

$f''(x)=\frac{(2-2x).(1-x)^2-(2x-x^2).2(1-x).(-1)}{(1-x)^4}=\frac{2}{(1-x)^3}$

$\rightarrow x=1 \notin D(f)$ büküm noktası değil

x	$-\infty$		0		1		2	
f'		$-$		$+$	T.siz	$+$	0	$-$
f''		$+$		$+$	0	$-$		$-$
f			$x=0$ yerel min $f(0)=0$				$x=2$ yerel max $f(2)=-4$	



Belirli İntegralleri Kısmi İntegrasyonla Hesaplamak

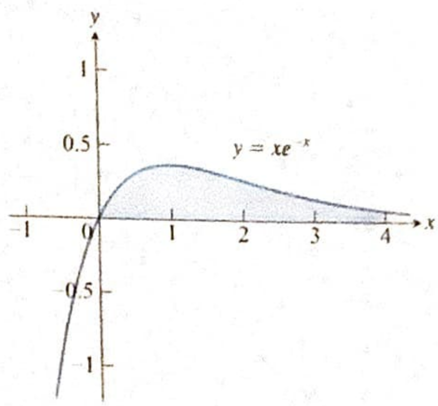
Belirli integralleri kısmi integrasyonla hesaplamak için Denklem (1)'deki kısmi integrasyon formülü ile Temel Teorem, Kısım 2 birleştirilebilir. f' ve g''nün her ikisinin de $[a, b]$ aralığında sürekli olduğunu kabul edersek Temel Teorem, Kısım 2 aşağıdaki sonucu verir.

Belirli İntegraller İçin Kısmi İntegrasyon Formülü

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{3}$$

Denklem (3)'ü uygularken normalde Denklem (2)'deki u ve v notasyonlarını kullanırız, çünkü hatırlaması daha kolaydır. Buna bir örnek verelim.

ÖRNEK 6 $x = 0$'dan $x = 4$'e kadar $y = xe^{-x}$ eğrisi ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.



ŞEKİL 8.1 Örnek 6'daki bölge.

Çözüm Bölge Şekil 8.1'de taralı alan olarak gösterilmiştir. Alanı şöyledir:

$$\int_0^4 xe^{-x}\,dx.$$

$u = x$, $dv = e^{-x}\,dx$, $v = -e^{-x}$ ve $du = dx$ olsun. O halde;

$$\begin{aligned}\int_0^4 xe^{-x}\,dx &= -xe^{-x}\Big]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x})\,dx \\ &= [-4e^{-4} - (0)] + \int_0^4 e^{-x}\,dx \\ &= -4e^{-4} - e^{-x}\Big]_0^4 \\ &= -4e^{-4} - e^{-4} - (-e^0) = 1 - 5e^{-4} \approx 0.91.\end{aligned}$$

İntegrasyon Tablosu

f'nin peş peşe türevinin alınabildiği (sıfır olacak şekilde) ve g'nin zorlanmadan integralinin alınabildiği $\int f(x)g(x)\,dx$ biçimindeki integrallerin kısmi integrasyon için doğal adaylar olduklarını gördük. Ancak çok fazla tekrar gerekiyorsa hesaplamalar kullanışsız hale gelebilir, ya da tekrar eden kısmi bir integrasyon için seçtiğiniz dönüşümler sonunda sizi bulmak istediğiniz başlangıçtaki integrale ulaştırabilir. Bu gibi durumlarda hesaplamaları düzenleyerek zorluklardan kurtarıp işi çok daha kolay hale getiren bir yol vardır. Buna **integrasyon tablosu** denir ve aşağıdaki örneklerde açıklanmaktadır.

ÖRNEK 7 Aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int x^2 e^x\,dx.$$

Çözüm $f(x) = x^2$ ve $g(x) = e^x$ ile listeyi oluştururuz.

$f(x)$ ve türevleri		$g(x)$ ve integralleri
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

Oklarla birbirine bağlanmış fonksiyonların çarpımlarını okların üzerindeki işaretlere göre birbirlerine ekleyerek aşağıdaki sonucu elde ederiz;

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Bu sonucu Örnek 3'teki sonuçla karşılaştırınız. ■

ÖRNEK 8 Aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int x^3 \sin x\,dx.$$

Çözüm $f(x) = x^3$ ve $g(x) = \sin x$ ile listeyi oluştururuz.

$f(x)$ ve türevleri		$g(x)$ ve integralleri
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$

Yine oklarla birbirine bağlanmış fonksiyonların çarpımlarını okların üzerindeki işaretlere göre birbirlerine ekleyerek aşağıdaki sonucu elde ederiz;

$$\int x^3 \sin x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2 \sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C.$$ ■

Bu bölümün sonundaki Ek Alıştırmalar, ne f ne de g'nin peş peşe türevleri alınarak sıfırlanamadığı durumlarda integrasyon tablosunun nasıl kullanılabileceğini göstermektedir.

Alıştırmalar 8.1

Kısmi İntegrasyon

Alıştırma 1–24'te, integralleri kısmi integrasyonla hesaplayınız.

1. $\int x \sin \frac{x}{2}\,dx$
2. $\int \theta \cos \pi\theta\,d\theta$
3. $\int t^2 \cos t\,dt$
4. $\int x^2 \sin x\,dx$
5. $\int_1^2 x \ln x\,dx$
6. $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$
7. $\int xe^x\,dx$
8. $\int xe^{3x}\,dx$
9. $\int x^2 e^{-x}\,dx$
10. $\int (x^2 - 2x + 1)\,e^{2x}\,dx$
11. $\int \tan^{-1} y\,dy$
12. $\int \sin^{-1} y\,dy$
13. $\int x \sec^2 x\,dx$
14. $\int 4x \sec^2 2x\,dx$
15. $\int x^3 e^x\,dx$
16. $\int p^4 e^{-p}\,dp$
17. $\int (x^2 - 5x)e^x\,dx$
18. $\int (r^2 + r + 1)e^r\,dr$
19. $\int x^5 e^x\,dx$
20. $\int t^2 e^{4t}\,dt$
21. $\int e^\theta \sin\theta\,d\theta$
22. $\int e^{-y} \cos y\,dy$
23. $\int e^{2x} \cos 3x\,dx$
24. $\int e^{-2x} \sin 2x\,dx$

Değişken Dönüşümlerini Kullanmak

Alıştırma 25–30'da, integralleri kısmi integrasyondan önce bir değişken dönüşümü kullanarak hesaplayınız.

25. $\int e^{\sqrt{3s+9}}\,ds$
26. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$

$n = 1$ ve $a = 1$ ile;

$$\int x \sin^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Daha sonra sağ taraftaki integrali bulmak için Formül 49'u kullanırız:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$a = 1$ ile,

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C.$$

Sonuçlar birleştirildiğinde;

$$\int x \sin^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x\sqrt{1 - x^2} + C\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin^{-1} x + \frac{1}{4} x\sqrt{1 - x^2} + C'.$$

İndirgeme Formülleri

Tekrarlı kısmi integrasyon yöntemi için gereken süre bazen indirgeme formülleriyle aşağıdaki gibi kısaltılabilir.

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n - 1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx \tag{1}$$

$$\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx \tag{2}$$

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m + n} + \frac{n - 1}{m + n} \int \sin^{n-2} x \cos^m x\, dx \qquad (n \neq -m) \tag{3}$$

Böyle bir formülü peş peşe kullanarak orijinal integrali sonunda daha düşük kuvvetli ve doğrudan hesaplanabilir bir integral olarak ifade ederiz. Aşağıdaki örnek bu yöntemi açıklamaktadır.

ÖRNEK 4 Aşağıdaki integrali bulunuz:

$$\int \tan^5 x\, dx.$$

Çözüm $n = 5$ ile Denklem (1)'i kullanırız;

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x\, dx.$$

Daha sonra Denklem (1)'i tekrar $n = 3$ ile kullanıp kalan integrali hesaplarız;

$$\int \tan^3 x\, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x\, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

Sonuçlar birleştirildiğinde;

$$\int \tan^5 x\, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C'.$$

İntegral biçimlerinin gösterdiği gibi, indirgeme formülleri kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak elde edildi. (Bkz. Bölüm 8.1, Örnek 5.)

8

İNTEGRASYON TEKNİKLERİ

GENEL BAKIŞ Temel Teorem, bir integrand fonksiyonunun ters türevini bildiğimizde belirli integrali nasıl hesaplayacağımızı gösterir. Tablo 8.1 şimdiye kadar çalıştığımız fonksiyonların ters türevlerinin formlarını özetlemektedir ve tablodaki bu basit formülleri değişken dönüşümü yöntemleriyle kullanarak daha karmaşık formülleri hesaplamamız mümkün olmaktadır. Bu bölümde daha başka önemli teknikleri öğreneceğiz; böylece ters türevleri şimdiye kadar gösterilen yöntemlerle bulunamayan birçok fonksiyon bileşimlerinin ters türevlerini (yada belirsiz integralleri) bulabileceğiz.

TABLO 8.1 Temel integrasyon formülleri

1. $\int k\,dx = kx + C$ (k herhangi bir sayı)	**12.** $\int \tan x\,dx = \ln\lvert\sec x\rvert + C$
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $(n \neq -1)$	**13.** $\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	**14.** $\int \sec x\,dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$	**15.** $\int \csc x\,dx = -\ln\lvert\csc x + \cot x\rvert + C$
5. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ $(a > 0, a \neq 1)$	**16.** $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	**17.** $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	**19.** $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$
9. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$	**20.** $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left\lvert\dfrac{x}{a}\right\rvert + C$
10. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	**21.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$ $(a > 0)$
11. $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$	**22.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cosh^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) + C$ $(x > a > 0)$

Bilinmeyen integral şimdi eşitliğin her iki yanında da görünmektedir. Her iki tarafa integral eklenip ve integral sabitini yazıldığında,

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C_1$$

sonucunu verir, 2 ile bölüp integral sabitini yeniden yazdığımızda;

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C.$$

■

ÖRNEK 5 Aşağıdaki integrali

$$\int \cos^n x\,dx$$

$\cos x$'in daha düşük kuvvetinin integrali olarak ifade eden bir indirgeme formülü bulunuz.

Çözüm $\cos^n x$ ifadesini $\cos^{n-1} x \cdot \cos x$ olarak düşünebiliriz. O zaman

$$u = \cos^{n-1} x \qquad \text{ve} \qquad dv = \cos x\,dx$$

olarak aldığımızda

$$du = (n-1)\cos^{n-2} x\,(-\sin x\,dx) \qquad \text{ve} \qquad v = \sin x$$

olur. Böylece kısmi integrasyon

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int (1-\cos^2 x)\cos^{n-2} x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx\end{aligned}$$

sonucunu verir. Eşitliğin her iki yanına

$$(n-1)\int \cos^n x\,dx$$

eklersek,

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$$

elde ederiz. Daha sonra her iki tarafı n ile bölerek aşağıdaki sonuca ulaşırız;

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

■

Örnek 5'te elde edilen formüle **indirgeme formülü** denir, çünkü bir fonksiyonun belli bir kuvvetini içeren bir integrali, aynı formda ama indirgenmiş bir kuvvetini içeren başka bir integrale dönüştürür. n pozitif bir tamsayı olduğunda, kalan integral kolayca hesaplanabilir hale gelene kadar formülü peş peşe uygularız. Örneğin, Örnek 5'teki sonuç bize şunu söylemektedir;

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\int \cos x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C.\end{aligned}$$