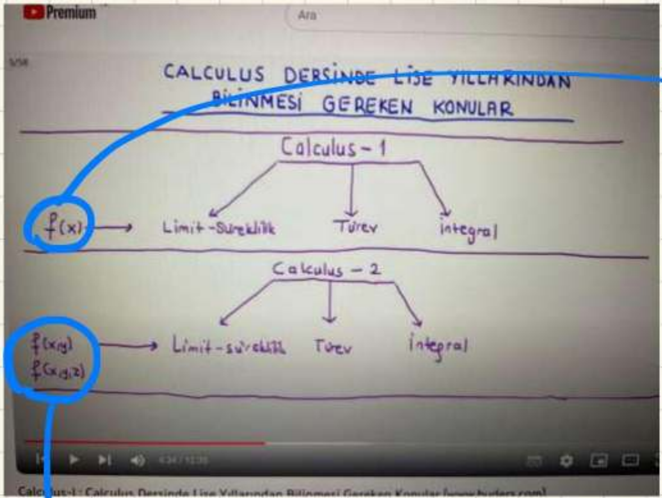
Mat 1



tek değişkenli

çok değişkenli

Bilinmesi Gerekenler

Fonksiyonlar

- Tanım görüntü kümesi bulma
- Ters fonksiyon
- Bileşke fonksiyon
- Parçalı Fonksiyonlar ve grafikleri çizme

Analitik Geometri

- Eğim Bulma
- Doğru denklemi yazma.
- Doğru grafikleri çizme
- Doğruların birbirlerine göre durumları

Trigonometri

* $30° - 45° - 60°$ ve $0° - 90° - 180° - 270° - 360°$ değerlerini bulma.
* Trigo bağıntılar
* Yarım açı formülleri
* Ters trigo fonksiyonlar

Parçalı Fonksiyon Grafiği

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x>3 \\ x^2+1, & x\leq 3 \end{cases}$$

$x=3$ parçalanma noktasıdır.

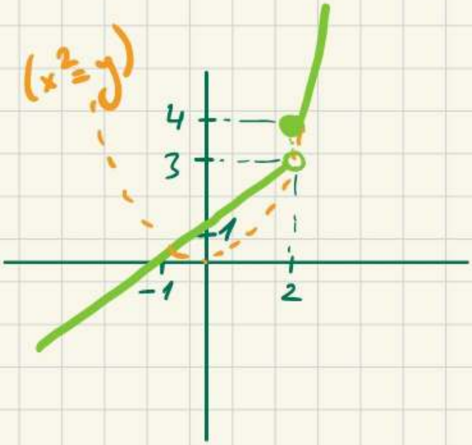
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<2 \\ 2x-1, & 2\leq x<5 \\ x^2+3, & 5\leq x \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right\}$ parçalanma noktası

Soru:

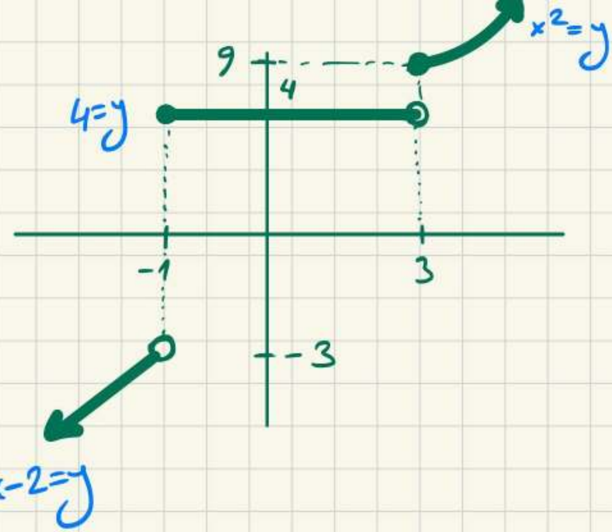
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<2 \\ x^2, & x\geq 2 \end{cases}$$ grafiğini çiz

$x=2$ parçalanma noktası

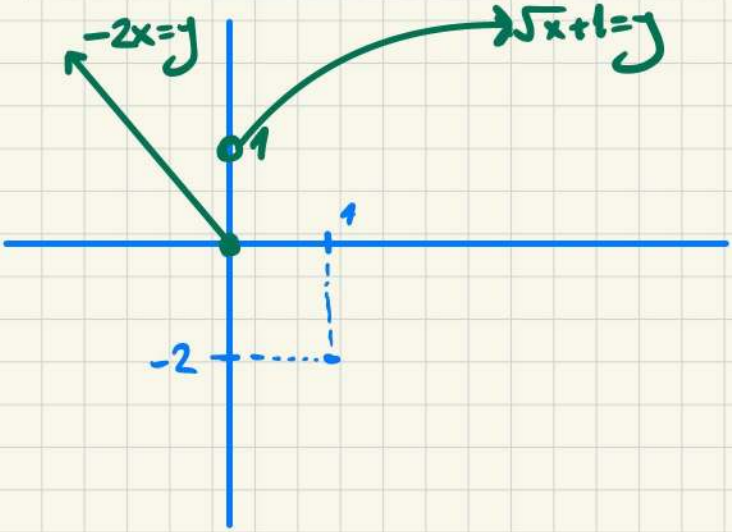


Soru:

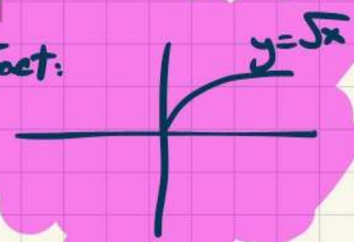
$$f(x)=\begin{cases} x-2, & x<-1 \\ 4, & -1\leq x<3 \\ x^2, & 3\leq x \end{cases}$$



Soru: $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\leq 0 \\ \sqrt{x}+1, & x>0 \end{cases}$ grafiğini çiziniz.



Fact:



Calculus'te Trigo Kuralları

① $\sin^2x + \cos^2x = 1$ $\rightarrow$ $1-\sin^2x=\cos^2x$
$\rightarrow$ $1-\cos^2x=\sin^2x$

② $\tan x . \cot x = 1 \longrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$

③ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

④ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

Yarım Açı Kuralları

⑤ $\sin 2x = 2\sin x . \cos x$

⑥ $\cos 2x = \cos^2x - \sin^2x = 2\cos^2x - 1 = 1 - 2\sin^2x$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \longrightarrow \frac{x-1}{x+3} \geq 0 \qquad x-1 \to 1, \quad x+3 \to -3$$

$-3 \qquad 1$

$(-\infty, -3) \cup [1, \infty)$

farklı tanım kümesi bulma örneği

$$f(x) = \log_{(x-2)}(x+5) \longrightarrow$$

$x-2>0$	$x+5>0$	$x-2 \neq 1$
$x>2$	$x>-5$	$x \neq 3$

log fonkta tanım kümesi bulma

$$f(x) = \ln(x^2-3x+2) \longrightarrow x^2-3x+2>0$$

$x \quad -2$

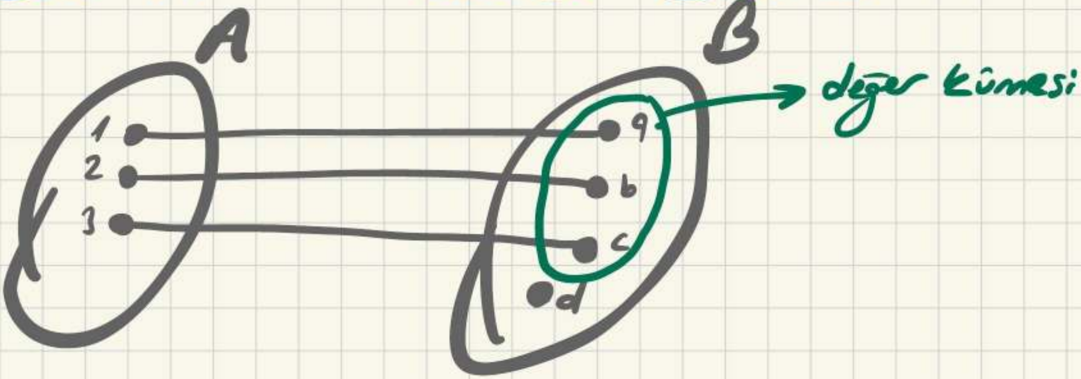
$x \quad -1$

$(x-2)(x-1)>0$

$2 \quad 1$

$1 \qquad 2$

Görüntü Kümesi Bulma



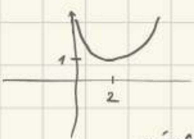
$f(x)=3$ domain = tanım kümesi =

range = görüntü kümesi = $\{3\}$

paraboller

$f(x)=x^2-4x+5$ görüntü kümesi

$T(r,k) \Longrightarrow r=\frac{-b}{2a}$ $k=f(r)$

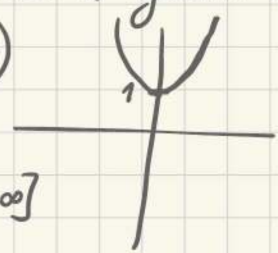


$r=2$ $k=f(2)=1$

görüntü küme $=[+1,\infty]$

$f(x)=2x^2+1$ görüntü kümesi

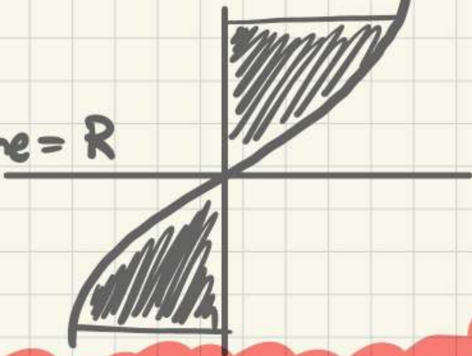
$(0,1)$



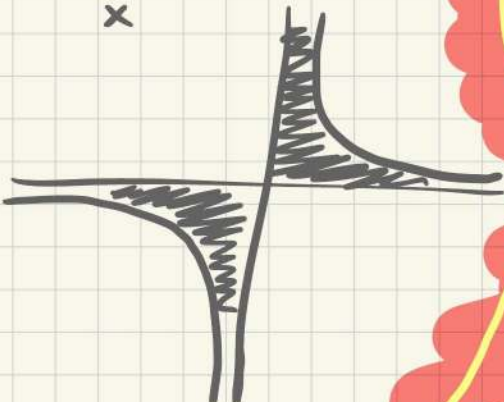
$[1,+\infty]$

$f(x) = x^3$

görüntü küme = R

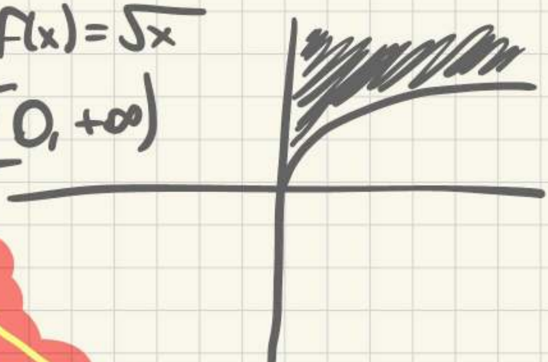


$f(x) = \frac{1}{x}$



$f(x) = \sqrt{x}$

$[0, +\infty)$



$\ast\ast$

$\ast$ $f(x) = \frac{3x-4}{x-5}$

$T.K = R - \{5\}$

$f^{-1}(x) = \frac{5x-4}{x-3}$

$G.K = R - \{3\}$

$f(x) = \sin x \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$

$f(x) = \cos x \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$

$GK = [-1, 1]$

$f(x) = 1 + \sin x \qquad 0 \leq 1 + \sin x \leq 2$

$f(x) = 2\cos x + 1 \qquad -1 \leq 2\cos x + 1 \leq 3$

Limit Nedir?

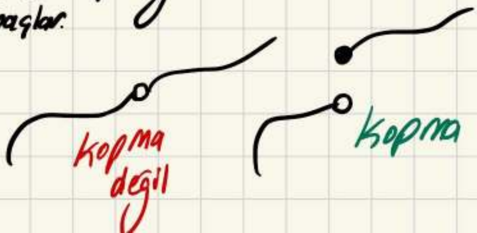
Limit

Sayıya giden

$\lim_{x \to 3} f(x)$

$\lim_{x \to 5} (3x-2)$

Amacı: Fonk. limitin arandığı noktada kopup kopmadığını belirlemesini amaçlar.

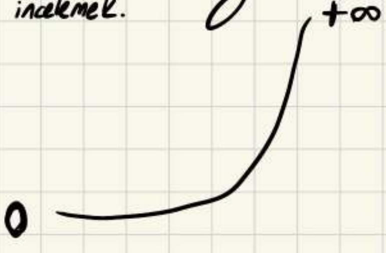


Sonsuza giden

$\lim_{x \to \infty} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

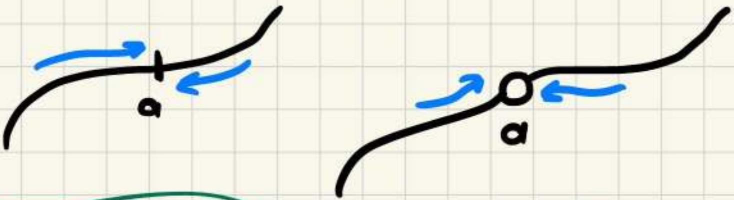
Amacı: Sonsuza giderken davranışını incelemek.



Bir Noktada Limit Olma Şartı

f(x)'in x=a nok. lim olması için

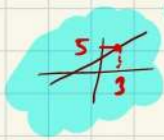
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$



Kopmaması yeterlidir.

Ör/

$$\lim_{x \to 3} (2x-1) = ?$$



$$y = 2x-1$$
$$\downarrow$$
$$3$$

Ör/

$$\underbrace{\lim_{x \to 5} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{0}}_{\text{sağdan ve soldan bakılmalı}}$$

★ Önemli olan 3 ihtimal vardır.

1) Parçalı fonksiyonlarda

2) Mutlak Değerli

3) $\frac{\text{Sayı}}{0}$ durumu

Parçalı Fonk. Limit

$$f(x) = \begin{cases} x-2 , & x > 3 \\ x^2+1 , & x \leq 3 \end{cases}$$

parçalanma noktası kopma adayıdır.

$\lim_{x \to 3} f(x) = ?$) yoktur.

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 10$ $\neq$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 , & x \neq 2 \\ 3 , & x = 2 \end{cases}$$

iken $\lim_{x \to 2} f(x) = ?$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \underline{5}$

Mutlak Değerli Limit

$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = ?$

* önce mutlak d. kuralı uygulanır.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

lim yok

*** Belirsizlik'te mutlaka limit vardır.

$\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$

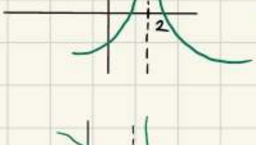
Tanımsızda Limit

$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0}$ tanımsız $\Longrightarrow$

$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

lim yok.



= lim var : $+\infty$

= lim yok!

Belirsizlikte Limit (L'pital kullanmadan)

1) $\frac{0}{0}$ 3) "$\infty - \infty$" 5) 1^{∞}, ∞^0

2) "$\frac{\infty}{\infty}$" 4) $0 \cdot \infty$ 0^0

L'hospital ile hepsi çözülür.

L'hospital kuralı olmadan çözülebilir.

1) Çarpanlara Ayırma

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{0}{0}$$

2) Eşlenik Çarpımı

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+11} - 4}{2x-10} = \frac{0}{0}$$

3) Trigonometrik Kurallar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow 1$$

⋮

Eşlenik Belirsizlikleri

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[2]{x+7} - 3}{x-2} = ? \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{(\sqrt{x+7} - 3) \cdot (\sqrt{x+7} + 3)}{(x-2) \cdot (\sqrt{x+7} + 3)} \quad \cancel{x+7-9} \quad \cancel{x-2}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 25} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x+11} - 4} = ?$$

$$\frac{\cancel{(x^2-25)}^{x+5} \cdot (\sqrt{x+11} + 4)}{\cancel{(x-5)}} = 10 \cdot 8 = 80$$

$$\overbrace{2 \cdot 2x}^{20} \cdot \overbrace{\sqrt{x+11}}^{4} = \underline{80}$$

Trigonometrik Belirsizlikler

★ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

böyle kabul edilir.

★ $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

★ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

★ $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$

★ $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

★ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

★ $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

★ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

★ $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

★ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x} = ? \rightarrow \underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{2} \cdot \frac{x}{\tan 5x}$$

$$2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3} = \lim_{a\to 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$$

$a = x-3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(2x-3)\cdot \sin x}{\cos x \cdot x} = ?$$

$$\frac{2x-3}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

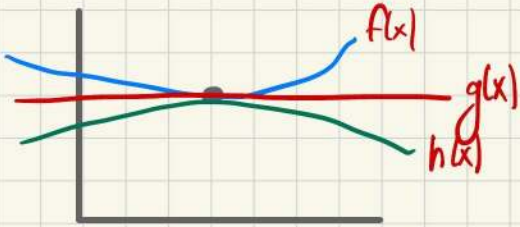
$$\rightarrow -3 \cdot 1 = -3$$

Sıkıştırma Teoremi

Sıkıştırma Teoremi: $f(x), g(x), h(x)$ üç fonk olsun

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\left.\begin{aligned} \lim h(x) &= L \\ \lim_{x\to a} f(x) &= L \end{aligned}\right\} \lim_{x\to a} g(x) = L$$



Soru:

$$-1 \leq \left(\cos\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$$

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = ?$$

$$-x \leq x\cdot\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} -x &= 0 \\ \lim_{x\to 0} +x &= 0 \end{aligned}\right\} 0$$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$$

$$-x \leq x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} (-x) &= 0 \\ \lim_{x\to 0} (x) &= 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Soru:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$\underbrace{-\infty \qquad\qquad +\infty}_{\text{sıkıştırma ile çözülemez}}$$

Soru:

$$\sqrt{4-x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{4+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = ?$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\sqrt{4-x^2} &= 2 \\ \lim_{x\to 0}\sqrt{4+x^2} &= 2 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

Sonsuza Giden Limitler

Sonsuza Gitme

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

x değerleri $+\infty$ doğru artarken y değerlerinin ne yaptığına cevaptır.

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

x değerleri $-\infty$ doğru azalırken y değerlerinin ne yaptığına cevaptır.

Soru: $\lim_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$ //

$x = 1 \longrightarrow 1$

$x = 10 \longrightarrow 100$

$x = 20 \longrightarrow 400$

$\lim_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$ //

$x = -1 \longrightarrow 1$

$x = -10 \longrightarrow 100$

$x = -20 \longrightarrow 400$

önemsiz

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{+5x} \cancel{-7}) = +\infty$$

önemsiz

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{+5x} \cancel{-7}) = -\infty$$

en büyük derece önemsenir.

Sonsuza Giden Limit Kuralları

Kural:

$$\lim_{x \to \begin{smallmatrix}+\infty \\ -\infty\end{smallmatrix}} \frac{\text{Pay polinom}}{\text{Payda polinom}}$$

(1) Payda derece > Pay derece

Sonuç = 0

(2) Payda derece = Pay derece

Derece belirleyen terimlerin KATSAYI ORANI cevaptır.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{4x+5} = \frac{3}{4}$$

(3) Pay derece > Payda derece

Sonuç $\to +\infty$, $\to -\infty$

yerine yaz.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-5x+4}{-5x+7} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-6x-7}{-6x+3} = +\infty$$

Alternatif Yol:

$$\lim_{x \to \substack{+\infty \\ -\infty}} \frac{1}{x^p} = 0$$

$$0 = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2}$$

Soru:

$$\frac{\cancel{x}}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-5}{x^2+7x-3} = \frac{x\left(2-\cancel{\frac{5}{x}}\right)^{\to 0}}{x^2\left(1+\cancel{\frac{7}{x}}^{\to 0}-\cancel{\frac{3}{x^2}}\right)^{\to 0}}$$

Pay ve Paydada Polinom Dışı ifadeler

$x^x > x! > 5^x > 3^x > 2^x > x^{10} > x^5 > \log > \text{trigo}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (\sin x) \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (\cos x) \end{array}\right\} \text{lim yoktur.}$$

Soru:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5^x+3^x-1}{5^{x+1}+2^x-x^7} = ?$$

$$\frac{\cancel{5^x}\left(1+\cancel{\left(\frac{3}{5}\right)^x}^{\to 0}-\cancel{\frac{1}{5^x}}\right)^{\to 0}}{\cancel{5^x}\left(5+\cancel{\left(\frac{2}{5}\right)^x}^{\to 0}-\cancel{\frac{x^7}{5^x}}\right)^{\to 0}} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2-5x+1}{x^2+7x-3} = \frac{x^2\left(4-\cancel{\frac{5}{x}}^{\to 0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)^{\to 0}}{x^2\left(1+\cancel{\frac{7}{x}}^{\to 0}-\cancel{\frac{3}{x^2}}\right)^{\to 0}} = 4$$

$$\to \frac{8x-5}{2x+7} = \frac{8}{2} = \frac{4}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-6x+7}{2x-3} = \frac{x^3\left(1-\cancel{\frac{6}{x^2}}^{\to 0}+\cancel{\frac{7}{x^3}}\right)^{\to 0}}{x\left(2-\cancel{\frac{3}{x}}\right)^{\to 0}}$$

$$\to \frac{3x^2-6}{2} \to +\infty$$

$$\frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2}$$

$+\infty$

Soru:

en büyükler

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x! + \ln x}{\sin x + x} = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x!\left(1 + \cancel{\frac{\ln x}{x!}}^{\to 0}\right)}{x\left(\cancel{\frac{\sin x}{x}}^{\to 0} + 1\right)}$$

$$\lim_{x \to \infty} (x-1)! = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \sin x = \text{lim yok}$$

$$-1 < \sin x < 1$$

$$-x < x \cdot \sin x < x$$

Kök ve Mutlak İçeren Sonsuz Limitler

Mutlak Değer İçeren Sonsuza Giden Limitler

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{|2x-3|}^{+\text{ (sonsuza gidiyo)}}+x}{5x+1} = \frac{3x-3}{5x+1} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|2\bar{x}-3|+x}{5x+1} = \frac{-2x+3+x}{5x+1} = \frac{-x+3}{5x+1} = \frac{-1}{5}$$

Kök İçeren Sonsuza Giden Limitler

$\infty+\infty=\infty$

$\infty-\infty=$ belirsizlik

1- Kesirli

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+1}+x-2}{\sqrt[3]{x^3-7x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+1}+4x-3}{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}} = ?$$

$$\sqrt{x^2\cdot\left(1-\cancelto{0}{\frac{5}{x}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right)} + x\left(4-\cancelto{0}{\frac{3}{x}}\right)$$

$$\sqrt[3]{x^3\left(\cancelto{0}{1+\ldots}\right)}$$

$$\frac{|x|+4x}{x} = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-5x+1}+4x-3}{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}} = ?$$

$$\frac{|x|+4x}{x} = 3$$

2- Kesirsiz

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-3x+1\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow \frac{x\left(-4+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}\right)}{|x|+|x|}$$

$$\frac{-4x}{2x} = -2$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \qquad \frac{\cancel{(1-\sqrt{x})}.\cancel{(1+\sqrt{x})}}{\cancel{(1-x)}.(1+\sqrt{x})}$$

$\frac{1}{2}$ $\quad -x^{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x+1)\,+}{x^2-9)\,-} \longrightarrow$$

1) parçalı fonk ✗

2) $\frac{\text{sayı}}{0}$ ✓ $\rightarrow \begin{matrix}+\infty \\ -\infty\end{matrix}$

3) mutlak değer içini 0'layan ✗

$-\infty$

$$\lim_{x \to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$$ lim var ise bulunuz.

$\left.\begin{matrix}\lim_{x \to 5^+} & 1 \\ \lim_{x \to 5^-} & -1\end{matrix}\right\}$ lim yok

$\left.\begin{matrix}\lim_{x \to 5^+} = 1 \\ \lim_{x \to 5^-} = -1\end{matrix}\right\}$ lim yok.

Pay'da en değerli x

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overbrace{x+\sin x}}{\underbrace{x+\cos x}} = ?$$

Payda'da en değerli x

1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2} = \frac{\sin 3x}{5x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}$$

$$\frac{\sin 3x}{5x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}$$

$$\frac{3}{5}\cdot 3 = \frac{9}{5}$$

$$\frac{3}{5}\cdot 3 = \frac{9}{5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x-5} = \frac{x^2\left(1+\cancel{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}\right)}{x\left(1-\cancel{\frac{5}{x}}^{\nearrow 0}\right)} = \infty$$

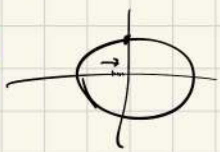
$$\frac{2x}{1}\to +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+8}{3x^3} = \frac{\cancel{x^2}\left(1 \nearrow^{0} \nearrow^{0}\right)}{3\cancel{x^2}x} = \frac{1}{3x} = 0$$

$$\frac{2x-4}{9x^2}\to\frac{2}{18x}\to\frac{1}{-\infty}=0$$

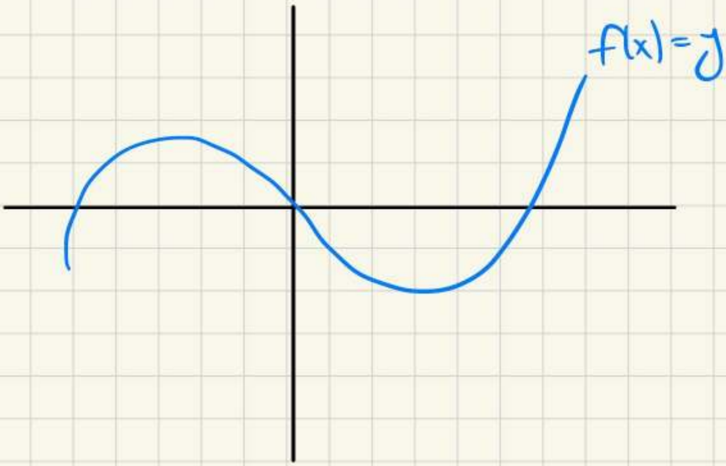
$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}(\sec x) = \frac{1}{\cos} = \frac{1}{0} \begin{matrix}\nearrow +\infty \\ \searrow -\infty\end{matrix}$$

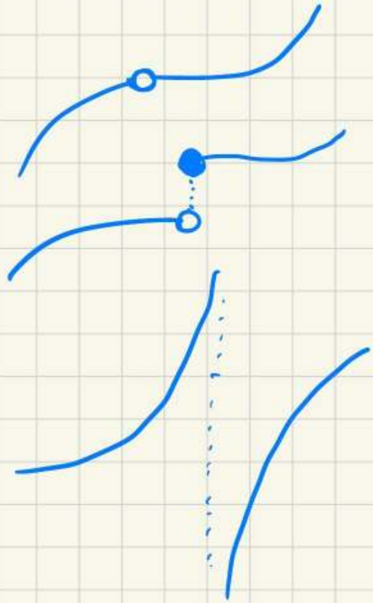
$$= \frac{1}{\underbrace{\cos(91^\circ)}_{-}} = -\infty$$



$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

Süreklilik Nedir?



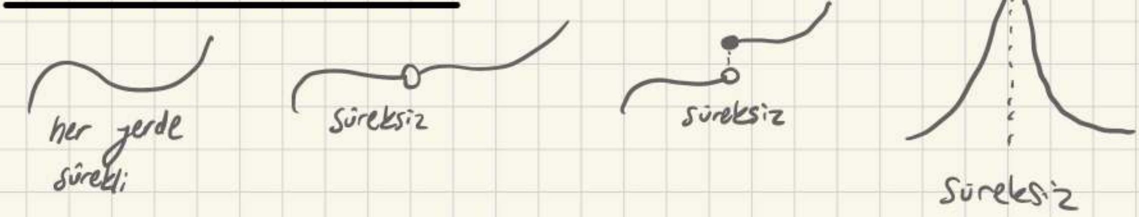


Süreksizlik

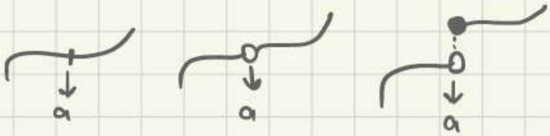
Tanımsızlıklarda tartışmasız süreksiz noktalardır.

Parçalı fonksiyonların parçalanma noktası süreksiz olabilir (kesin değil)

Süreklilik Şartı



Grafik Yokken Süreklilik Tespiti



$\lim_{x\to a} f(x) =$	var	var	yok
Süreklilik	var	yok	yok

limit gerekli şart
yeterli değil !

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

$f(a) =$

$$\underbrace{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)}_{\text{süreklilik şartıdır.}}$$

Süreksizlik

Tanımsızlık

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$ $\quad f(3)$ yoktur.

$x=3$ tanımsız

süreksiz

Parçalı Fonk

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x>5 \\ x+1, & x\leq 5 \end{cases}$$

süreksiz olabilir.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\mathbb{R} - \{-1\}$$

-1 muhakkak süreksiz yapar.

$$x \geq 0$$

$$f(x) = \underbrace{\sqrt[3]{x-1}}_{\text{sorun yok}} + \sqrt[4]{x}$$

$$x \geq 0$$

$$[0, +\infty)$$

$$\frac{x}{x+1} \geq 0 \qquad -1 \quad 0$$

$$-$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \sqrt{x^2-4x+3}$$

$$(-\infty, -1) \cup [0, 1] \cup [3, \infty)$$

$$\frac{x}{x+1} \geq 0 \qquad x^2-4x+3 \geq 0$$

$$-3$$
$$-1$$

$$-1 \quad 0 \qquad (x-3).(x-1) \geq 0$$

$$-$$

$$(-\infty, -1) \cup [0, 1] \cup [3, \infty)$$

$$1 \quad 3$$

$$-$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} \to 3, & x < 3 \\ \dfrac{2x+1}{x^2-16} \to \dfrac{7}{-7} = -1, & 3 \leq x \end{cases}$$

Süreksiz noktaları bulunuz.

tanımsız

$x=2$

$\underbrace{x=-4,4}_{\text{süreksiz}}$

parçalanma

$\underbrace{x=3}_{\text{süreksiz}}$

Muhakkak

$$2, -4, 4$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+ax+3, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ bx-1, & x>2 \end{cases}$$

her noktada sürekli ise $a+b=?$

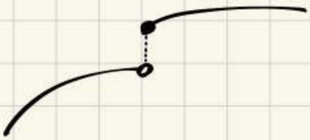
$$2a+7=5 \qquad 2b-1=5$$

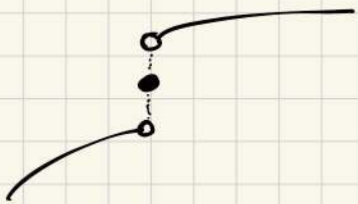
$$a=-1 \qquad b=3$$

$$\boxed{2}$$

Süreksizlik Çeşitleri

1. Atlama Süreksizliği (Jump discontinuity)

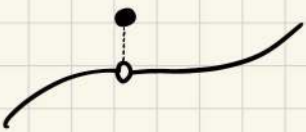




$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

$$f(a)$$

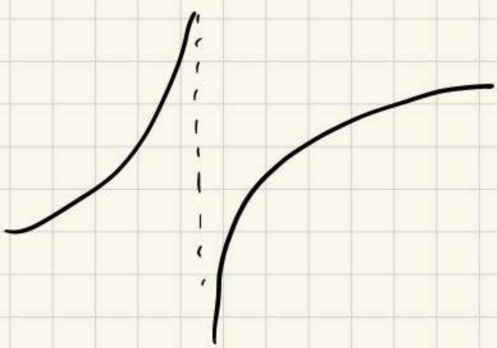
2. Kaldırılabilir Süreksizlik (Removable discontinuity)



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$$

3. Sonsuzluk Süreksizliği (Infinity discontinuity)

Tanımsızlık



$$\lim_{x \to a^+} \longrightarrow +\infty, -\infty$$

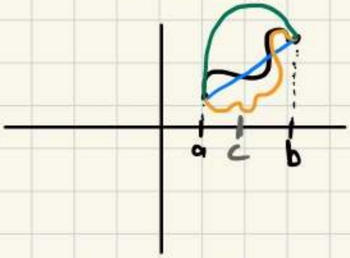
$$\lim_{x \to a^-} \longrightarrow -\infty, +\infty$$

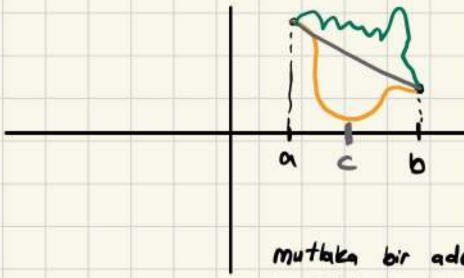
Ara Değer Teoremi (Intermediate Value Theorem)

$f(x)$ fonk $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.

$f(a) \neq f(b)$ ise

$f(a) < f(b)$ $\qquad$ $f(a) > f(b)$





mutlaka bir adet $f(a) < f(c) < f(b)$ olan c değeri vardır.

mutlaka bir adet $f(a) > f(c) > f(b)$ olan c değeri vardır.

Ara Değer ile Kök İspatlama

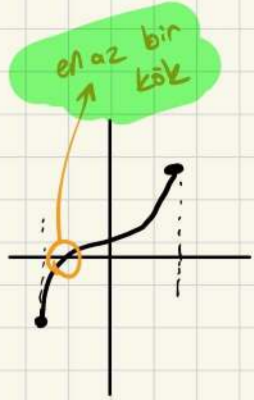
$f(x) = 0$ çıkmasını sağlayan x değerine kök denir.

$f(x)$ fonk $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.

$f(a) \cdot f(b) < 0$ ise

en az bir kök vardır.

f(a)	f(b)
−	+
+	−



$$\frac{e^{\tan x}}{2} - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} = f(0)$$

$$\frac{e}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

1. $\frac{|x-a|}{x-a} \cdot g(a) + |x-a| \cdot g'(a) = f'(x)$

$$\lim_{x \to a^+} f'(x) = \lim_{x \to a^-} f'(x)$$

$$\frac{\cancel{x-a}}{\cancel{x-a}} \cdot g(a) + 0 = \frac{-x+a}{x-a} \cdot g(a) + 0$$

$$2g(a) = 0$$

$$g(a) = 0$$

$x^3-5x+1=0$ [1,3] aralığında en az bir kökü olduğunu ispatlayınız.

→ süreklidir

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-3 \\ f(3)=13 \end{array}\right\}$$ mutlaka bir kök var.

Ara Değer ile iki Fonk Kesiştiklerini ispatlama

$f(x)=x^4-5x^2$ ve $g(x)=2x^3-4x+6$ $x=3$ ve $x=4$ arasında kesiştiklerini ispatlayınız.

süreklidir.

$$x^4-5x^2=2x^3-4x+6$$

$$h(x)=x^4-2x^3-5x^2+4x-6$$

$$\left.\begin{array}{l} h(3)=-12<0 \\ h(4)=58>0 \end{array}\right\}$$ en az bir kök

Bir Aralıkta Bir Kök Olduğunu ispatlama

$f(x)=x^4+3x+1$ $[-2;-1]$ tek kök olduğunu ispatlayınız.

↓

sürekli

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=11>0 \\ f(-1)=-1<0 \end{array}\right\}$$ en az bir kök vardır.

$$f'(x)=4x^3+3$$

$$-2\leq x\leq -1$$

$$-8\leq x^3\leq -1$$

daima azalandır.

$$-29\leq 4x^3+3\leq -1$$

Türev Var Olma Şartı

1. Şart: Fonksiyon o noktada sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

1) Sürekli
2) Smooth transition

2. Şart: $f'(a^+) = f'(a^-)$

Sağdan türev = soldan türev

(akıcı geçiş)
smooth transition

$f(x) = |x|$ 0'da türev yoktur.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x<0 \\ +x, & x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ +1, & x>0 \end{cases}$$

$5-\frac{12}{5}$

$6a+b=5$

$2ax+a$

$5a=2$

3

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+ax+b, & x \geq 2 \\ 3x-1, & x<2 \end{cases}$$

her noktada türevli ise
$a+b=?$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4+2a+b$

$\lim_{x \to 2^-} = 5$

$2a+b=1$

$a=-1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \geq 2 \\ 3, & x<2 \end{cases}$$

$a+b=2$

Türev Tanım Kuralları

$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

1\. türev tanım kuralı : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

2\. türev tanım kuralı : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

x yerine $(h+a)$ yazılır.

$\lim\limits_{h \to 0}$

$f(x) = x^3$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{\cancel{(x-a)} \cdot (x^2 + ax + a^2)}{\cancel{x-a}} = \underline{\underline{3a^2}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \quad \frac{h \cdot \left((a+h)^2 + (a+h) \cdot a + a^2\right)}{h} = 3a^2$$

Türev Kuralları

$$f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow f'''(x) \rightarrow f^{(4)}(x)$$

$$f(x) \longrightarrow \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \rightarrow \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = f''(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{dy^2}{dx^2}$$

1- Sabit sayının türevi 0'dır.

2- $f(x) = ax \longrightarrow f'(x) = a$

3- $f(x) = x^n \longrightarrow n \cdot x^{n-1}$

Yardımcı Kural: Toplama - Çıkarmada türev ayrı ayrı alınır.

4- Parantezli Türev

$$f(x) = (g(x))^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$$

5- Üstel Fonksiyon Türevi

$$\left[a^x\right]' = 1 \cdot a^x \cdot \ln a$$

$f(x) = a^x \quad a = sbt$

a) $f(x) = e^{g(x)}$

e aynen yazılır üssünün türevi yanına çarpım olarak yazılır.

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \cancel{\ln e}^{\,1}$$

$f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = e^{-x} \cdot -1$

b) $a^{g(x)}$ $\quad k > 0$ ve $k \neq 1$

$$f'(x) = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$$

$f(x) = 2^x \rightarrow f'(x) = 2^x \cdot 1 \ln 2$

$f(x) = 5^{x^3} \longrightarrow 5^{x^3} \cdot 3x^2 \ln 5$

$f(x) = 3e^{5x+4} \longrightarrow f'(x) = 3e^{5x+4} \cdot 5$

Logaritmaların Türevi

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$\ln = \log_e$$

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \log_e e \to 1$$

$$f(x) = \log_a g(x)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \log_a e$$

$f(x) = \ln(g(x))$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \qquad \frac{\text{içinin türev}}{\text{içi}}$$

$$f(x) = \log_3(2x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-1} \cdot \log_3 e$$

$$f(x) = \log_5(x^2+x-1) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \cdot \log_5 e$$

$$f(x) = \ln x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln(x^2+1) \longrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Trigonometrik Türev Kuralları

$$f(x) = \sin(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \sin x \longrightarrow \cos x$$

$$f(x) = \sin 4x \longrightarrow \cos 4x \cdot 4$$

$$f(x) = \sin(x^2+1) \longrightarrow \cos(x^2+1) \cdot 2x$$

$$f(x) = \cos(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \tan(g(x)) \longrightarrow$$

$$f'(x) = \left(1 + \tan^2 g(x)\right) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \sec^2 g(x) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot g'(x) = \sec^2(g(x)) \cdot g'(x)$$

④ $f(x) = \cot g(x) \longrightarrow f'(x) = -(1+\cot^2 g(x)) \cdot g'(x)$

$-\operatorname{cosec}^2 x$

$f'(x) = -\csc^2(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 g(x)} \cdot g'(x)$

⑤ $f(x) = \sec(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \sec g(x) \cdot \tan g(x) \cdot g'(x)$

⑥ $f(x) = \operatorname{cosec}(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\csc g(x) \cdot \cot g(x) \cdot g'(x)$

Ters Trigonometrik Fonk. Türevi

cos, cot = −
sin, tan = +

① $f(x) = \arcsin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

② $f(x) = \arccos g(x) \longrightarrow f'(x) = -\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

③ $f(x) = \arctan(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$

④ $f(x) = \operatorname{arccot} g(x) \longrightarrow f'(x) = -\dfrac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$

$f(x) = \sin x^2 \rightarrow f'(x) = \cos x^2 \; 2x$

$f(x) = \sin^2 x \longrightarrow f'(x) = 2.(\sin x)^1 \cos x . 1$

$f(x) = \cos x^2 \longrightarrow f'(x) = -\sin x^2 . 2x$

$f(x) = \cos^2 x \longrightarrow 2.(\cos x)^1 . -\sin x . 1$

$f(x) = \ln^2 x \rightarrow 2(\ln x)^1 . \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln x^2 \rightarrow \frac{2x}{x^2}$

Çarpım ve Bölüm Türevi

$$f(x).g(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$f(x) = xe^x \longrightarrow f'(x) = 1.e^x + x.e^x.1 = e^x + xe^x$

$f(x) = x\ln x \longrightarrow \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f(x) = e^{2x}\cos 3x \longrightarrow e^{2x}.2.\cos 3x + e^{2x}.(-\sin 3x).3$

$f(x) = (x^3+1).\tan 2x \longrightarrow 3x^2 \tan 2x + (x^3+1).\sec^2 2x.2$

$f(x) = (2x-1)^5.(x+2)^6 \longrightarrow 5.(2x-1).2.(x+2)^6 + (2x-1)^5 . 6(x+2)^5 . 1$

Bölümün Türevi

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$$

Mutlak Değerin Türevi

$$f(x) = |g(x)| \longrightarrow f'(x) = g'(x) \cdot \frac{|g(x)|}{g(x)}$$

$$\frac{|g(x)|}{g(x)} = \begin{cases} 1 & , \ g(x) \geq 0 \\ -1 & , \ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |x^3+1| = 3x^2 \cdot \frac{|x^3+1|}{x^3+1}$$

$(x=2)$

$$f(x) = |x^3 + x^2 + 3x - 1|$$

$$f'(x) = (3x^2+2x+3) \cdot \frac{|x^3+x^2+3x-1|}{x^3+x^2+3x-1} = 11 \cdot \frac{11}{-11} = \underline{\underline{-11}}$$

★ Mutlak değerin içini "0" yapan x değerinde türev yoktur.

$f(x) = |x-3| \longrightarrow f'(3)$ yoktur.

Parametrik Fonksiyonların Türevi

$y = 2x - 3$

$x = t^2 + 1$

$y = 2(t^2+1) - 3 = 2t^2 - 1$

$$y = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 - 1 \end{cases}$$

$x = f(t)$

$y = g(t)$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Soru:

$y = 3t^2 - 5t + 1$

$x = t + 6$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t-5}{1}$$

$y = e^{a} + 2a - 1$

$x = a^2 - 3a + 2$

$$\frac{dy}{dx} = ? \qquad \frac{e^{a}+2}{2a-3}$$

Soru: $y = a^3 + a^2 + a + 1$

$x = 3a - 2$

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{3a^2 + 2a + 1}{3}$

b) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{a=2}$ $\quad \frac{17}{3}$

c) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=7} \rightarrow a=3$ $\quad \frac{34}{3}$

Parametrik Fonksiyonun 2. Türevi

$y = t^2 - 3t + 1$ $\qquad \dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

$x = t^2 + 1$

2. adım

1. adım $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \longrightarrow \dfrac{2t-3}{2t} = y'$ $\Bigg|$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \boxed{\dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}} = \dfrac{4t^2-4t+6}{4t}$

Soru: $y = a^2 + 3a$ ise $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $\qquad \dfrac{2a+3}{4}$

$x = 4a - 1$

$\dfrac{2a+3}{4} = y'$ $\Bigg|$ $\dfrac{\frac{dy'}{da}}{\frac{dx}{da}} = \dfrac{\frac{2.\cancel{4}}{4.\cancel{4}}}{4} = \dfrac{1}{8}$

Zincir Kuralı (Chain Rule)

$y = 3x^2 - 5x + 1$

$x = 2a^3 + 1$

$a = 4t^2 - 1$

$\dfrac{dy}{dt} = ?$ $\Bigg\}$ $\dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{da} \cdot \dfrac{da}{dt} = \dfrac{dy}{dt}$

Soru: $y = 2x^2 - 5x + 1$

$x = 2t^2 + 1$

$t = 3a - 1$

$\left.\dfrac{dy}{da}\right|_{a=2}$ nedir

$(4x-5).(4t).\ 3$

$199\ .20.3 = 11940$

Bileşke Fonksiyonunun Türevi

$f(x) = 2x - 1$

$g(x) = 3x + 2$

$fog(x) = 2.(3x+2) - 1 = 6x + 3$

$gof(x) = 6x - 1$

$$fog'(x) = f'(g(x)).\ g'(x)$$

** $f(2x-3) \longrightarrow$ bileşke fonksiyon

Soru:

$f(x^2) = 4x^2 - 7x + 3 \Rightarrow f'(4) = ?$

$f'(x^2) \cdot 2x = 8x - 7$

$f'(x^2) = \dfrac{8x-7}{2x}$

$f'(4) = \dfrac{9}{4}, \dfrac{23}{4}$

Ters Fonksiyonun Türevi

$f(x) = 3x - 1$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3}$

$f^{-1}(y) = x$

$(f^{-1})'(x)$

$\downarrow$

fonk tersini alır, ardından türev

$\downarrow$

$f(x) = y$ yaparız

$f^{-1}(y) = x$ ardından bileşke fonk türevi yardımıyla alırız.

Soru: $f(x) = 5x - 4$ ise

$(f^{-1})'(3) = ?$

$f^{-1}(5x-4) = x$

$\dfrac{y+4}{5} = x$ veya ** $[f^{-1}(5x-4)]' = [x]'$

$(f^{-1})'(5x-4) \cdot 5 = 1$

$(f^{-1})' = \dfrac{1}{5}$

$(f^{-1})'(5x-4) = \dfrac{1}{5}$

Logaritma Yardımıyla Türev Alma

① $f(x) = x^{x+1}$

$f(x) = x^{\cos x}$

$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

hem taban x'li ise
hem üs
logaritma kullanılmak zorunludur.

---

② $\dfrac{(x^2+1)^4 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{\sin x \cdot (x-4)^5} \Longrightarrow$ çarpma ve bölmenin fazla x içeren durumlarında başvurulur.

---

1. Durum

$f(x)^{g(x)}$

$x^x = f(x)$

$f'(x) = ?$

1. adım

$y = x^x$

2. adım

$\ln y = \ln x^x$ / $\ln y = x \cdot \ln x$

3. adım

her taraf x'e göre türevi alınır.

$\dfrac{y'}{y} = \ln x + \cancel{x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}}$

$\boxed{y' = (\ln x + 1) \cdot x^x}$

Soru: $f(x) = x^{\cos x}$

$f'(x) = ?$

$y = x^{\cos x}$

$\ln y = (\cos x) \cdot \ln x$

$y' = \left(-\sin x \cdot \ln x + \dfrac{\cos x}{x}\right) \cdot x^{\cos x}$

2. Durum

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+5)^3 \cdot (2x-1)^4 \text{ ise } f'(x) = ?$$

1. adim

$$\ln y = \ln\left[(x-2)^2 \cdot (x+5)^3 \cdot (2x-1)^4\right]$$

$$\ln y = 2\ln(x-2) + 3\ln(x+5) + 4\ln(2x-1)$$

2. adim

$$\frac{y'}{y} = \left[\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+5} + \frac{8}{2x-1}\right]$$

Soru:

$$f(x) = \frac{(3x+4)\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}{\cos x \cdot e^{3x}} \text{ ise } f'(x) = ?$$

$$\ln y = \ln(3x+4) + \frac{\ln(x^2+1)}{3} - \ln(\cos x) - 3x\cancel{\ln e}^{1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{3x+4} + \frac{2x}{3x^2+3} + \frac{(+\sin x)}{\cos x} - 3$$

Kapalı Fonksiyonların Türevi

Kapalı Fonk: Fonksiyonda y $(f(x))$ yalnız bırakılamıyorsa kapalı denir.

$f(x) = 2x+1 \longrightarrow$ açık

$x^2+y^2=1 \implies y = \pm\sqrt{1-x^2} \longrightarrow$ kapalı

?

$x+y=\sin y$

$x^2y^3+3xy-4x+5=\cos y^2+e^{xy}$

kapalı fonk

Türevi

$x^2y^3+xy^2=5x+1 \qquad \frac{dy}{dx}=?$

* her iki tarafın türevi alınır.
* y'liler x'e bağlı fonk olarak kabul edilir.

$(y^2)' = 2y.y'$

$(\sin y)' = \cos y . y'$

$(x^2y^3)' = 2xy^3 + x^2.3y^2.y'$

Soru:

$x^2+y^2=5$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ nedir?

1. adım Her iki tarafın türevi

$$2x+2yy'=0$$

2. adım y' i yalnız bırak

$$y'=\frac{-2x}{2y} \rightarrow y'=\frac{-x}{y}$$

Soru:

$$x^2y^3-4xy^2=\sin x+1$$

$\dfrac{dy}{dx}$

$$2xy^3+x^2 3y^2y'-(4y^2+4x2y.y')= \cos x =$$

$$2xy^3+3x^2y^2y'-4y^2-8xyy'=\cos x$$

$$y'(3x^2y^2-8xy)=\cos x-2xy^3+4y^2$$

$$y'=\frac{\cos x-2xy^3+4y^2}{3x^2y^2-8xy}$$

Soru:

$x^2+y^3=e^{xy}-4$ ise $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$ için kaçtır?

$$2x+3y^2y'=e^{xy}.(1.y+x.y')$$

$$3y^2y'-xe^{xy}y'=ye^{xy}-2x$$

$$y'=\frac{ye^{xy}-2x}{3y^2-xe^{xy}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{e-2}{3-e}$$

Mat-1 Sorular

$$(\sin x)^{x^2} = y$$

$$x^2 \cdot \ln(\sin x) = \ln y$$

$$(\sin x)^{x^2} \cdot \left(2x \cdot \ln(\sin x) + x^2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right) = y'$$

$$(\ln x)^x = y$$

$$\left[x \cdot \ln(\ln x)\right]' = \frac{y'}{y}$$

$$\left(\ln(\ln x) + \cancel{x} \frac{x'}{\cancel{x} \ln x}\right) \cdot (\ln x)^x = y'$$

$$(3+x)^{\tan x} = y$$

$$\left[\tan x \cdot \ln(x+3)\right]' = \frac{y'}{y}$$

$$\left(\sec^2 x \cdot \ln(x+3) + \frac{\tan x}{x+3}\right) \cdot (x+3)^{\tan x} = y'$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = y$$

$$\left[\ln x \cdot \left(\ln\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right]' = \frac{y'}{y}$$

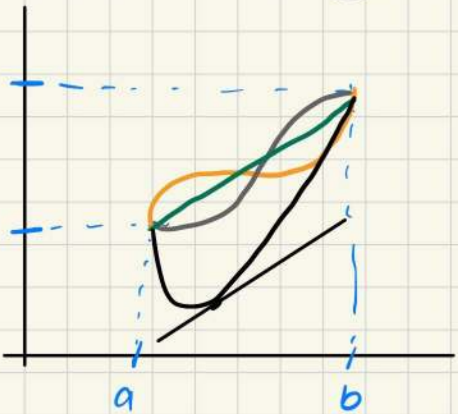
$$\left(\frac{\ln\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x} + \ln x \cdot \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}}{f\left(\frac{1}{x}\right)}\right) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = y'$$

★★
★ $\left[\arcsin f(x)\right]' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$

$$\left[(\arctan x)\right]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left[\arctan(\sec x)\right]' = \frac{\sec x . \tan x}{1+\sec^2 x}$$

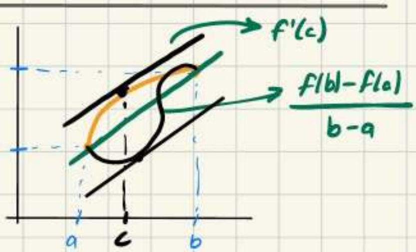
Ortalama Değer Teoremi



$$\text{ortalama değer} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{için}$$

$$c \in [a, b]$$



$$\underbrace{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

★ en az 1 tane vardır.

Soru:

$f(x) = x^2+5$ fonk

[1, 5] aralığında odt sağlayan değerleri bulun

1. adım
f(x), [1,5] aralığında süreklidir.

$$\frac{f(5)-f(1)}{4} = 6$$

$6 = 2x$
$3 = x$

Sonu:

$f(x) = x^3 + 2x - 5$

$3 = 3x^2 + 2$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$[-1, 1]$ odt?

$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \underline{\underline{3}}$

$3 = 3x^2 + 2$

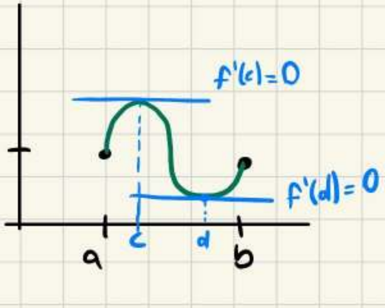
$\frac{1}{3} = x^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

Rolle's Teoremi

f(x) fonk $[a,b]$ aralığında sürekli
ve
f(x) fonk (a,b) aralığında türevlenebilir
ve
$f(a) = f(b)$ ise

$f'(c) = 0$
en az bir tane var.
$c \in (a,b)$



Ara Değer

$f(a) < f(c) < f(b)$
en az bir adet olmak zorunda

Rolle Teoremi

$[a,b]$ arasında ve
$f(a) = f(b)$ ise
en az bir
$f'(c) = 0$ olmak zorunda

Ortalama Değer

$[a,b]$ arasında c ise

$\underbrace{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}_{\text{mutlaka en az bir tane vardır}}$ (türev)

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1} = f(x)$$

$$f(1) = f(-1) = 0$$

$1-4+3$ $=12$

$$f(x) = \frac{9x^2-4x+3}{x-2}$$

$f(1) = 0$
$f(3) = 0$
sağladı

$$\frac{(x-3).(x-1)}{x-2}$$

$\boxed{x=2}$

$$f(-1) = 1+1-2 = 0$$

$$x^4+x^2-2 = 0$$

$x^2=a$ $\quad a^2+a-2=0$

$+2$
-1

$a=-2$
$a=1$

$\cancel{x^2=-2}$

$x^2=1$

$x=-1, 1$

$f(x) = |x-1|$

$[0,2]$ Rolle?

$f(0) = f(2)$

$[0,2]$ sürekli mi?

$(0,2)$ türevli mi?

$$f(x)\begin{cases} \underbrace{-x+1}_{-1}, & x<1 \\ \underbrace{x-1}_{1}, & x\geq 1 \end{cases}$$

1. şart

$f(x)$, $[1,3]$ aralığında sürekli olmalı

$f(x)$, $(1,3)$ aralığında türevli olması

$f(1) = f(3)$

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-}}_{0} = \underbrace{\lim_{x\to 1^+}}_{0} = \underbrace{f(1)}_{0}$$

- sürekli

- türevli değil.

Soru: $f(x) = x^2$ $(-2,2)$ $f'(x)$ 'i 0 yapan bir c

değeri olduğunu Rolle's Teoremi ile ispatlayınız.

$f(-2) = f(2) = 4$

$f(x)$ $(-2,2)$ sürekli, türevlenebilir

Soru: $f(x) = x^2 - x$ $(0,1)$ aralığında

$f(0) = f(1) = 0$

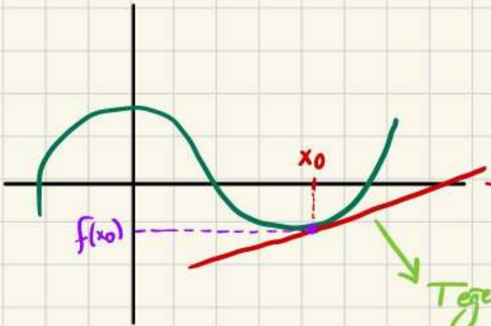
$f(x)$ sürekli, türevlenebilir

$$2x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Teğetin Eğimi ve Denklem: (Tangent Line)

eğim= $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



f(x) fonk. x_0 noktasından çizilen teğet doğru

Teğet doğru eğimi = $f'(x_0)$
(slope)

$$y-f(x_0)=f'(x_0).(x-x_0)$$

Soru: $f(x)=x^3+x^2+x-1$, $x=1$ apsisli noktadan çizilen teğet eğim ve denklemi nedir?

$$f'(x)=3x^2+2x+1 \rightarrow f'(1)=6$$

$$f(1)=2 \qquad y-2=6(x-1)$$

$$y=6x-4$$

Soru: $f(x)=e^{2x-1}$, $x=0$ teğet denklemi nedir?

$$f'(x)=2e^{2x-1} \qquad f'(0)=\frac{2}{e}$$

$$f(0)=\frac{1}{e} \qquad y=\frac{2x}{e}+\frac{1}{e}$$

Soru: $x^2+2xy+y^3=4$, $(1,1)$ nok çizilen teğet denklem nedir?

$$2x+2y+2xy'+3y^2y'=0$$

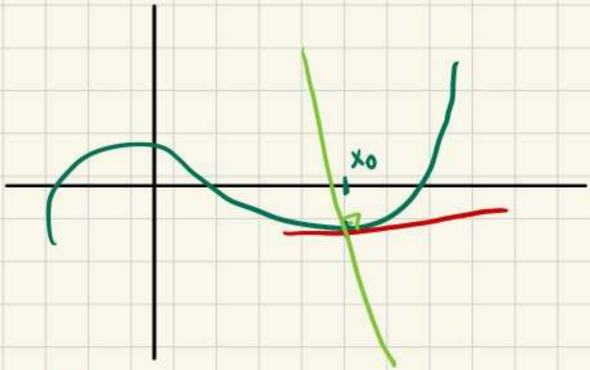
$$y'(2x+3y^2)=-2(x+y)$$

$$y'=\frac{-2(x+y)}{2x+3y^2} \rightarrow \frac{-4}{5}=m$$

$$y-1=\frac{-4}{5}(x-1)$$

$$y=\frac{-4x+9}{5}$$

Normalin Eğimi ve Denklemi



Dik doğruların eğimleri çarpımı -1'dir.

$$m_{teğet}\cdot m_{normal}=-1$$

$$m_{normal}=\frac{-1}{f'(x_0)}$$

Soru: $f(x)=x^3+2x-1$, $x=2$ apsisli normalin eğimi ve denklem nedir?

$f'(2)=$ eğimi

$f'(x)=3x^2+2$

$m_{normal}\cdot 14=-1$

$$y-11=\frac{-1}{14}\cdot(x-2)$$

Belirsizlik Çeşitleri ve L'Hospital Kuralı

Belirsizlik Çeşitleri

- 1. Çeşit: $\frac{0}{0}$ belirsizliği
- 2. Çeşit: $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği
- 3. Çeşit: $\infty - \infty$ belirsizliği
- 4. Çeşit: $\infty . 0$ belirsizliği
- 5. Çeşit: 1^{∞} veya 0^{0} veya ∞^{0} belirsizliği

L'Hospital Kuralı

Belirsizlikten Türev yardımıyla kurtulma işidir.

1. Çeşit ve 2. Çeşitleri çözer.

3., 4. ve 5. çeşit belirsizliklerde 1. ve 2. çeşit benzetip ardından L'Hospital uygulanır.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliğinin L'Hospital Kuralı ile Çözümü

* Türev yardımıyla belirsizlikten kurtulma

Ör/ $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6}=?$ $\quad \frac{2x}{3}\xrightarrow{(x=2)}\frac{4}{3}$

Ör/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=?$ $\quad \frac{3\cos 3x}{2}\xrightarrow{x=0}\frac{3}{2}$

Ör/ $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{2x-6}=?$ $\quad \frac{3x^2}{2}=\frac{27}{2}$

Ör/ $\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}=?$ $\quad \frac{(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{2}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{1}{84}$

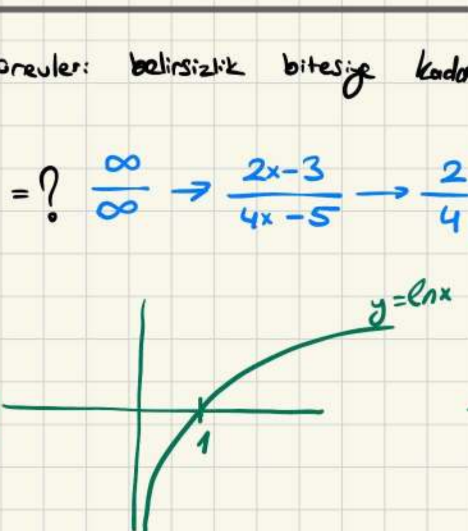
$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliğinin L'Hospital ile Çözümü

Payın ve paydanın türevleri belirsizlik bitesiye kadar alınır.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-3x+4}{2x^2-5x+1}=?$ $\quad \frac{\infty}{\infty}\rightarrow\frac{2x-3}{4x-5}\rightarrow\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Soru:

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=?$



$\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}$

$\downarrow$

0

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 7}{x^2 + 6x - 1} = ? \quad \frac{3x^2 - 8x + 5}{2x + 6} \to \frac{6x - 8}{2} = \frac{-\infty}{2}$$

$$\downarrow$$

$$-\infty$$

$\infty - \infty$ Belirsizliğin L'Hospital ile Çözümü

$\infty - \infty \longrightarrow \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ benzetilmelidir.

$\downarrow$

Payda eşitlendiğinde ortaya $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği gelir.

Soru: $\lim_{x \to 2} \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} = ?$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4 - x - 2}{x^2 - 4} \to \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{x - \sin x}{\sin x . x} \longrightarrow \frac{1 - \cos x}{x . \cos x + \sin x} \rightarrow \frac{+\sin x}{\cos x - x . \sin x + \cos x} \Rightarrow 0$$

Soru: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = ?$

$$\frac{x - \sin x}{\sin x . x} \xrightarrow[\lim_{x \to 0}]{\frac{dy}{dx}} \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x . x + \sin x . 1} \right) \xrightarrow{\frac{dy}{dx}} \frac{+\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)}$$

$$\downarrow$$

$$0$$

$0.\infty$ Belirsizliğinin L'Hospital ile Çözümü

$0.\infty \rightarrow \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ yapılmalıdır.

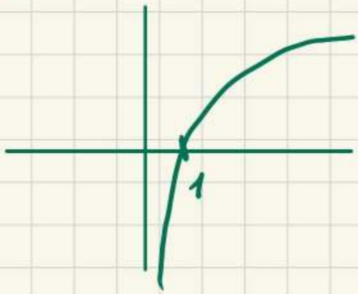
$\rightarrow 0.\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$ veya $0.\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ //

Soru: $\lim_{x \to 0^+} x . \ln x = ?$

$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{dy}{dt}} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -x \rightarrow 0$

$0 . \ln(0^+)$

$0 . (-\infty)$



$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$

$\downarrow$

$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{1}{x} . -x^2 = \underline{\underline{-x}} \rightarrow 0$

Soru: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) . \tan x = ?$

$\downarrow$

$\lim_{x \to \pi/2} \frac{(x - \frac{\pi}{2})'}{(\cot x)'} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{1}{-\mathrm{cosec}^2 x} = -\sin^2 \frac{\pi}{2} = -1$

1^∞, 0^0 ve ∞^0 Belirsizliklerinin Çözümü

1^∞, 0^0 ve $\infty^0 \longrightarrow \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ benzetilmelidir.

Soru: $\lim_{x \to 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}} = ?$

$y = (x+1)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow \ln y = \frac{\ln(x+1)}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \longrightarrow \frac{0}{0}$

$\frac{1}{x+1} = 1$

$\ln y = 1$

$y = e^1$

$y = e$

Soru: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = ? \longrightarrow 1^\infty$

$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

$\ln y = x \cdot \left[\ln(x+1) - \ln(x-1)\right]$

$\Downarrow$

$\lim_{x \to \infty} x \cdot \left[\ln(x+1) - \ln(x-1)\right] = 0 \cdot \infty$ eyvah!

$\Downarrow$

$\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$

$\frac{\frac{\frac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2}}{\frac{(x+1)}{(x-1)}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$

$\ln y = 2$

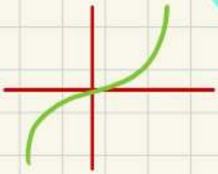
$y = e^2$

Hiperbolik Fonksiyonlar

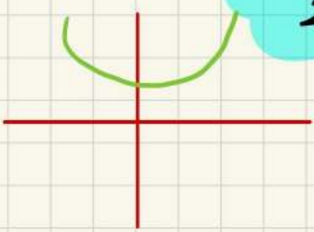
$$\left.\begin{array}{l}\sin x \\ \cos x \\ \tan x \\ \cot x\end{array}\right\}\text{trigonometrik ifadeler}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sinh(x) \\ \cosh(x) \\ \tanh(x) \\ \coth(x) \\ \operatorname{sech}(x) \\ \operatorname{cosech}(x)\end{array}\right\}\text{hiperbolik ifadeler}$$

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$



$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$



$$f(x) = \sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$f(x) = \coth(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$f(x) = \operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$f(x) = \operatorname{csch}(x) = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

(1) $f(x) = \sinh(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \cosh(g(x)) \cdot g'(x)$

"−" yok!

$\sinh(x) \longrightarrow f'(x) = \cosh(x)$

$\sinh(4x) \longrightarrow f'(x) = \cosh(4x) \cdot 4$

(2) $f(x) = \cosh(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \sinh(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(x) = \cosh(x^2) \longrightarrow f'(x) = \sinh(x^2) \cdot 2x$

(3) $f(x) = \tanh(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \operatorname{sech}^2(g(x)) \cdot g'(x)$

"−" normaldeki gibi var.

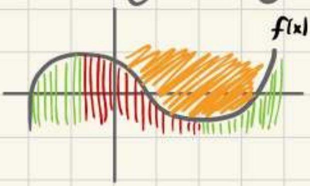
(4) $f(x) = \coth(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\operatorname{csch}^2(g(x)) \cdot g'(x)$

(5) $f(x) = \operatorname{sech}(g(x)) \longrightarrow -\operatorname{sech}(g(x)) \cdot \tanh(g(x)) \cdot g'(x)$

(6) $f(x) = \operatorname{csch}(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\operatorname{csch}(g(x)) \cdot \cot(g(x)) \cdot g'(x)$

1. ve 2. Türevin Yorumu

f(x) grafiği yokken f(x)'in grafiği hakkında bilgiler verir.



f'(x)

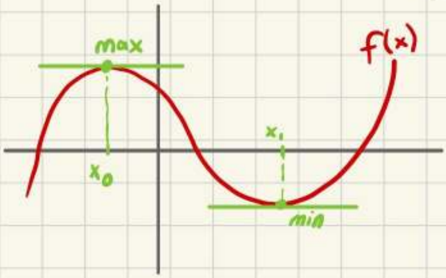
* Artan azalan aralığını verir.
* Max, min noktaları bulmayı sağlar.

f''(x)

* eğriliğin yönünü belirlemeyi sağlar.

1. Türevin Yorumu

$f(x) = \dots\dots \longrightarrow f'(x)$ → f(x) artan – azalan
→ f(x) max – min noktalar



* max – min noktalardan çizilen teğetler x eksenine paralel olur.
* x'e paralel doğruların eğimleri 0'dır.

critical points
$f'(x) = 0$

ekstremum apsisleri

YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi
I. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı

		Not Tablosu				
		1.S	2.S	3.S	4.S	Σ
Adı Soyadı						
Numarası						
Bölümü		Grup No		Tarih	02.11.2019	
Dersin Adı	MAT1071 Matematik I		Süre	80 dk	Sınıf	
Öğretim Üyesi				İmza		

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1.a) $f(x)=\dfrac{\ln(18-2x^2)}{|2x-5|}+\arcsin(x-3)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. **(13P)**

$18-2x^2>0$

$18>2x^2$

$9>x^2$

$(-3,3)$

$2x-5\neq 0$

$x\neq \frac{5}{2}$

$-1\leq x-3\leq 1$

$2\leq x\leq 4$

$[2,4]$

$18-2x^2>0$

$9-x^2>0$

$9>x^2$

$x^2<9$

$-3<x<3$

$(-3,3)$

$T.K: \left[2,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},3\right)$

$-1<x-3\leq 1$

$|2x-5|\neq 0$

$x\neq\frac{5}{2}$

1.b) $\sqrt[4]{18}$ sayısının yaklaşık değerini lineer yaklaşım veya diferansiyel hesap kullanarak hesaplayınız. **(12P)**

$f(x)=\sqrt[4]{x}$

$f(x)=x^{1/4}$

$f'(x)=\frac{x^{-3/4}}{4}$

$f(x)=\sqrt[4]{x}\quad,\quad a=16\quad,\quad f(16)=2$

$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\quad,\quad f'(16)=\frac{1}{32}$

$f(x)\approx L(x)=f(16)+f'(16)(x-16)$

$L(x)=2+\frac{1}{32}(x-16)$

$f(16)=2$

$a=16$

$y-2=2^{-5}(x-16)$

$y=\frac{(x-16)}{32}+2$

$y=\frac{x+48}{32}$ (18)

$f(18)\approx L(18)=2+\frac{1}{32}(18-16)=2+\frac{1}{16}=\frac{33}{16}$

$\frac{66}{32}=\frac{33}{16}$

$f(18)\approx\frac{33}{16}$

Scanned with CamScanner

2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x^2}{x^4} & , x<0 \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin x+\dfrac{3}{\pi}\arccos x & , 0\le x\le 1 \\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1} & , x>1 \end{cases}$ fonksiyonu için:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ limitlerinin varlığını araştırınız. **(L'Hopital Kuralı kullanılmayacaktır)**

(17P)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\cos x^2)}{x^4}\cdot\frac{(1+\cos x^2)}{(1+\cos x^2)}=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\frac{\sin^2 x^2}{x^4}}_{1}\cdot\frac{1}{1+\cos x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2}{\pi}\underbrace{\arcsin x}_{0}+\frac{3}{\pi}\underbrace{\arccos x}_{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{3}{2}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan limit mevcut değildir.

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{2}{\pi}\underbrace{\arcsin x}_{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{\pi}\underbrace{\arccos x}_{0}\right]=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\underbrace{(x-1)}_{0}\underbrace{\sin\frac{1}{x-1}}_{A,\ -1\le A\le 1}=0$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan limit mevcut değildir.

b) $x=0$ ve $x=1$ noktalarında f fonksiyonunun sürekliliğini araştırıp, süreksizlik olması halinde türünü belirleyiniz. **(8P)**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan $x=0$ da sıçramalı süreksizlik vardır.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan $x=1$ de sıçramalı süreksizlik vardır.

3.a) **Kapalı Türetme Yöntemini kullanarak,** $2x+\cos(x+y)=y^2-\pi$ ile kapalı olarak tanımlı $y=f(x)$ eğrisinin $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ noktasındaki normal doğrusunun denklemini bulunuz. **(12P)**

$2-(1+y')\sin(x+y)=2y.y'$

$x=\frac{-\pi}{2}$ ve $y=0$ için;

$2+(1+y')=0$

$m_T=y'=-3 \Rightarrow m_N=\frac{1}{3}$

N.D.D. $y-0=\frac{1}{3}\left(x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$y=\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}$ //

$2-\sin(x+y).(1+y')=2yy'$

$\underbrace{2+1.(1+y')=0}_{}$ ($x+y$: $\frac{-\pi}{2}$, 0; y: 0)

$1+y'=-2$

$y'=-3$

$y=-3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$(f^{-1})'(x.\sec x).\left(\frac{x.\sin x}{\cos^2 x}\right)=1$

$y=x.\sec x$

$f^{-1}(x.\sec x)=x$

$x.\sec x=\frac{2\pi}{3}$

$\frac{x}{\cos x}=\frac{2\pi}{3}$

$x=\frac{2\pi\cos x}{3}$

$\frac{2\pi.\sin x}{3.\cos}$

3.b) $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x.\sec x$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ değerini bulunuz. **(13P)**

$f'(x)=\sec x+x.\sec x.\tan x>0 \quad \left(\forall x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$

olduğundan f artandır $\Rightarrow f$, 1-1 $\Rightarrow f$'in tersi mevcuttur.

$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $(f^{-1})'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(\frac{2\pi}{3})}_{a})}$

$f^{-1}\left(\frac{2\pi}{3}\right)=a \Rightarrow f(a)=\frac{2\pi}{3}$

$a.\sec a=\frac{2\pi}{3}$

$a=\frac{\pi}{3}$

$=\frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})}$

$=\frac{3}{6+2\sqrt{3}\pi}$ //

$f^{-1}(x.\sec x)=x$

$(f^{-1})'(x.\sec x).\left(\sec x+\frac{\sin x.}{\cos^2 x}x\right)=1$

$\frac{x}{\cos x}=\frac{2\pi}{3}$

$x=\frac{\pi}{3}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sec\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}$

$=2+\frac{\pi}{3}.2.\sqrt{3}$

$=\frac{6+2\sqrt{3}\pi}{3}$

Başarılar

4.a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x^2+2x}} = y$ limitini hesaplayınız. **(14P)**

$$y=(1+\arctan x)^{\frac{1}{x^2+2x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x^2+2x}\cdot \ln(1+\arctan x)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arctan x)}{x^2+2x} = \left(\frac{0}{0}\text{ b.l.}\right)$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\arctan x}}{2x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \frac{1}{2}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x^2+2x}} = e^{1/2} \quad //$$

$$\frac{\ln(1+\arctan x)}{x^2+2x} = \ln y$$

$$\left.\frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\arctan 0}}{2x+2}\right) \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \frac{1}{2}$$

$$\log_e \lim_{x\to 0} y = \frac{1}{2}$$

$$e^{1/2}$$

4.b) $\sqrt[3]{x-1}-3x=0$ denkleminin $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ aralığında bir kökünün var olup olmadığını araştırınız. **(11P)**

$f(x)=\sqrt[3]{x-1}-3x$ fonksiyonu $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ aralığında süreklidir.

$f(0)=-1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=a>0$

dolayısıyla f $[-1,a]$ aralığında her değeri alır. O halde $0\in[-1,a]$ değerini de alır. Yani $f(c)=0$ olacak şekilde $c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ vardır.

veya

$f(0)=-1<f(c)=0<f\left(-\frac{1}{2}\right)=a$ olduğundan Ara Değer Teoremine göre $f(c)=0$ olacak şekilde $c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ vardır.

Başarılar...

MAT1071-MATEMATİK I 1. VİZE
ÖRNEK SINAV

1.

$f(x) = \dfrac{\arccos(x+1)}{\left|x+\frac{1}{2}\right|-1} + \ln(16-x^2)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

$\left(1+\dfrac{1}{6(x-1)}\right)^{6x} = y$

a) $[-2, 0]$

b) $\left[-2, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 0\right]$

$6x \cdot \ln\left(\dfrac{6x-5}{6x-6}\right) = \ln y$

c) $[-4, -2] \cup (2, 4)$

d) $\left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right]$

e) $\left(-4, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}, 4\right)$

$\lim\limits_{x\to\infty} 6x.$

2.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{6(x-1)}\right)^{6x}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

$\left(\dfrac{6x-5}{6x-6}\right)^{6x} = y$

a) 1

b) 0

c) e

d) $\dfrac{1}{e}$

e) Limit mevcut değildir.

3. x $x+h$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(x - \dfrac{h}{2}\right) - f\left(x + \dfrac{h}{2}\right)}{h}$ limitinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $-f'(x)$

b) $f'(x)$

c) $2f'(x)$

d) $\dfrac{1}{2}f'(x)$

e) $-\dfrac{1}{2}f'(x)$

4.

$$\frac{(x-2).(x+1)}{(x-6).(x+1)}$$

$+1$
-2

$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x - 6}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

-6
$+1$

I. $x = -1$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır.

II. $x = 6$ noktasında sonsuz süreksizdir.

III. $x = 2$ noktasında sıçramalı süreksizliği vardır.

a) Yalnız I

b) I ve II

c) II ve III

d) Yalnız II

e) I, II ve III

$$\frac{1}{\pi} - 1 = b$$

5.

$\frac{x}{y} + \cos xy + ax = b$ eğrisinin $(1, \pi)$ noktasındaki teğet doğrusunun eğiminin π olmasını sağlayan a ve b değerleri için $a + b$ kaçtır?

$$\frac{y - x \cdot y'}{y^2} \underbrace{- \sin xy \cdot (xy')}_{0} + a = 0$$

$$\frac{\pi - y'}{\pi^2} + a = 0$$

~~a) $\frac{1}{\pi}$~~

~~b) $\frac{2}{\pi}$~~

c) $\frac{1}{\pi} - 1$

~~d) 2~~

~~e) 3~~

$$x = \frac{a\sqrt{(b^2 - y^2)}}{b}$$

6.

a ve b sabit olmak üzere, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ biçiminde verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için y'' türevi aşağıdakilerden hangisidir?

$$2b^2x + 2a^2 y \cdot y' = 0$$

$$y' = \frac{-2b^2x}{2a^2y}$$

$$-4a^2b^2y + 4a^2b^2x\, y \cdot y'$$

$$\frac{(-2b^2 \cdot 2a^2y) - (-2b^2x) \cdot (2a^2 y \cdot y')}{(2a^2y)^2}$$

$$(-y + xy \cdot y')$$

$$a^2y^2 - a^2b^2$$

a) $\frac{b^4}{a^2y^2}$

b) $\frac{a^4}{b^2y^2}$

c) $-\frac{a^4}{b^2y^3}$

d) $-\frac{b^4}{a^2y^3}$

e) $\frac{b^4}{a^3y^2}$

$$\frac{b^2 \cdot (y^2 - b^2 - y)}{a^2y} \qquad \frac{b^2 \cdot (xy' - 1)}{a^2y} \qquad \frac{(y^2 - b^2)}{y} - 1$$

$$\frac{b^2y^2 - b^4 - b^2y}{a^2y}$$

7.

$f(x) = \ln(3x - 1)$ olduğuna göre $f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)$ kaçtır?

$$f^{-1}(\ln(3x-1)) = x \qquad (f^{-1})'(\ln(3x-1)) \cdot \frac{3}{3x-1} = 1$$

$$\log_e (3x-1) = 0 \qquad = \frac{3x-1}{3}$$

$$3x - 1 = 1$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}$$

$$\frac{\cancel{3}\frac{2}{\cancel{3}} - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

~~a) −2~~

~~b) −1~~

~~c) 0~~

d) 1

~~e) 2~~

$x^3+7x+9=0$

8.

$x^3 + 7x = -9$ denkleminin aşağıdaki aralıklardan hangisinde en az bir reel çözümü vardır?

a) $[-2,-1]$

b) $[-1,0]$

c) $[0,1]$

d) $[1,2]$

e) $[2,3]$

9.

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ limitinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

$\dfrac{\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}}{x\cdot\sqrt{1+\cos x}}$

$\sqrt{1-\cos^2 x} = \sin x$

$\dfrac{\sin x}{x\cdot\sqrt{2}}$

$1\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) 0

e) Limit mevcut değildir.

$9d-4=3c+d$

$8d$

10.

$f(x) = \begin{cases} cx+d, & x \le 3 \\ dx^2-4, & x > 3 \end{cases}$ fonksiyonu $x=3$ noktasında türevlenebilir ise c ve d sabit olmak üzere $c-d$ kaçtır?

$8d-4c=0$

$c=6d$

$8d-3c=4$

$3c$

$8d-3c=4$

$2d-c=0$

$+4c$

$c=4$

$d=2$

$8d-3c=4$

$-18d+3c=0$

$-10d=4$

$d=\frac{-4}{10}$

$\frac{-24}{10}+\frac{4}{10}=-2$

a) $-\dfrac{2}{5}$

b) -1

c) -2

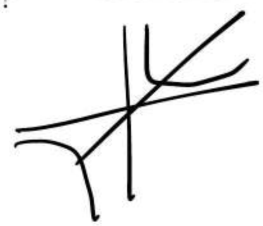
d) $-\dfrac{12}{5}$

e) 3

$f(x) = x$

11.

$f(x)$ fonksiyonu bir (a, b) aralığında pozitif tanımlı ve artan ise aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi bu aralıkta <u>azalandır</u>?



a) $-\frac{1}{f(x)}$

b) $-\frac{1}{f^2(x)}$

c) $f^2(x)$

d) $f^3(x)$

e) $2f(x)$

$1 = b$

12.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x}, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{1-x}{|1-x|}, & x > 1 \end{cases}$$ fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sürekli olmasını sağlayan a ve b değerleri için $b - a$ kaçtır?

-1

$1 + 2$

a) -1

b) 0

c) 1

d) 2

e) 3

$a + b = -1$

$-2 \quad 1$

$\sin(4x + 3x) = \cancel{\sin 4x \cdot \cos 3x} + \cos 4x \cdot \sin 3x$

13.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[\sin 7x - \sin 4x \cos 3x]^{100}}{x^{99}}$ limitinin değeri kaçtır?

$$\frac{[\cos 4x \cdot \sin 3x]^{100}}{x^{99}}$$

a) 0

b) 3^{100}

c) $\frac{1}{3^{100}}$

d) 7^{100}

e) $\frac{1}{7^{100}}$

$$\frac{[\cos 4x]^{99} \cdot \cos 4x \cdot (\sin 3x)^{100}}{x^{99}}$$

14.

$\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{6}+t\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{t}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\frac{4}{3}$

b) $\sqrt{3}$

c) 0

d) $\frac{3}{4}$

e) 1

$\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 30

$\frac{1}{\cos^2 30^\circ}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\frac{3}{4}$

15.

$\arctan(1) = 45$

arctan(1.04) ifadesinin yaklaşık değeri aşağıdakilerden hangisidir?

$f(x) = \arctan x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(1) = \frac{1}{2}$

a) $\frac{25\pi+2}{100}$

b) $\frac{50\pi+2}{100}$

c) $\frac{5\pi+4}{100}$

d) $\frac{50\pi+4}{100}$

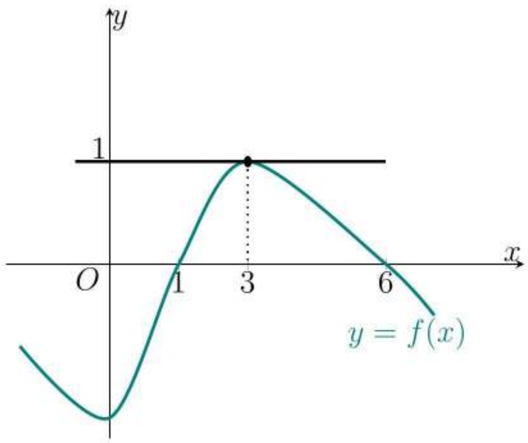
e) $\frac{5\pi+2}{100}$

$y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot(x-1)$

$y - \frac{\pi}{4} = \frac{x-1}{2}$ $\longrightarrow$ $\frac{2}{100} = -\frac{\pi}{4} + y$

$\boxed{\frac{2+25\pi}{100}} = y$

16.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandaki şekilde verilmiştir. $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ biçiminde tanımlandığına göre $g(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki normal doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

$$\frac{f'(x).x - f(x)}{x^2} = g'(x)$$

$$-\frac{1}{9} = g'(3)$$

$$\frac{1}{3} = g(3)$$

$$+9(x-3) = y - \frac{1}{3}$$

$9x-27$

$\frac{-1}{9} \cdot \overset{-9}{x} = 1$

a) $y = 3x - \dfrac{40}{3}$

b) $y = 9x - \dfrac{80}{3}$

c) $y = -3x + \dfrac{20}{3}$

d) $y = -9x - \dfrac{40}{3}$

e) $y = 3x + \dfrac{80}{3}$

$\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot \log_5 e$

$\frac{1}{2x}$

17.

$f(x) = [\log_5(\sqrt{x})][\sin(x^e)]$ ise $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\ln 25 \cdot x}\cos(x^e) + \sin(x^e)(ex^{e-1})\log_5(\sqrt{x})$

b) $f'(x) = 2\ln 5 \cdot x \sin(x^e) + \cos(x^e)(ex^{e-1})\log_5(\sqrt{x})$

c) $f'(x) = 2\ln 25 \cdot x \sin(x^e) + \cos(x^e)\left(ex^{e^{-1}}\right)\log_5(\sqrt{x})$

d) $f'(x) = 2\ln 25 \cdot x \sin(x^e) + \cos(x^e)(\ln x^e)\log_5(\sqrt{x})$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\ln 5 \cdot x}\sin(x^e) + \cos(x^e)(ex^{e-1})\log_5(\sqrt{x})$

18.

f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \quad f'(1) = 2 \\ f(2) &= 3, \quad f'(2) = 4 \end{aligned}$$

ve $f\left(tf(s)\right) = 2t^2 - 5$ ise $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{(t,s)=(2,1)}$ değeri kaçtır?

$$\underbrace{f'(t.\underbrace{f(s)}_{1})}_{4} . \left(\underbrace{f(s)}_{\cancel{1}} + \underbrace{t}_{2} . \underbrace{f'(s)}_{2} . s'\right) = \cancel{8}$$

$$\cancel{2}$$

$$1$$

$$\frac{1}{4}$$

a) $-\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $-\dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) -1

19.

$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

$2\ln x + \cancel{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \ln y$

I. Tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ dır ✗

II. $x = 0$ noktasındaki limiti 0 dır ✓

III. $x = 0$ noktasında süreklidir ✓

a) Yalnız I

b) Yalnız II

c) Yalnız III

d) II ve III

e) I, II ve III

20.

$\dfrac{d}{dx}\ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right|$ türevinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\cancel{\dfrac{-\pi}{x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}}$

b) $\cancel{-\cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}$

c) $\cancel{\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}}$

d) $\cancel{\dfrac{\pi}{x}\cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}$

e) $-\dfrac{\pi}{x^2}\cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

$$\frac{\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)' \cdot \dfrac{\cancel{\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|}}{\sin\frac{\pi}{x}}}{\cancel{\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|}}$$

$$\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(\pi x^{-1}\right)'$$

$$\downarrow$$

$$\frac{-\pi}{x^2}$$

Çıkarım

$f(x) \longrightarrow$ **1. adım** $f'(x)=0$ x'ler bulunur $\longrightarrow$ Türevin işaret tablosu

f'	.		.		.

Soru: $f(x)=x^3-27x+1$ fonk

$3x^2-27=0$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

a) $f(x)$ in ekstremum apsisleri ± 3

b) artan azalan $(-\infty,3) \cup (3,\infty)$ artan

c) mak- min noktalarını bulun.

$\underbrace{(-3,55)}_{\text{maks}} \,/\, \underbrace{(3,-53)}_{\text{min}}$

		-3		3	
f'	+		−		+

Not: $f'(x)=0$ yapan her x, ekstremum apsisi olmayabilir.

$f'(x)=0$ + türevin işareti o noktada değişmelidir $\Rightarrow$ ekstremum apsisi

Daima Artan ve Azalan Fonksiyonlar

$f'(x) > 0$ ise artandır.

$f'(x) < 0$ ise azalandır.

Daima artanda $f'(x) = 0$ yapan x yoktur.
Bu durumda $f'(x) > 0$ olur.

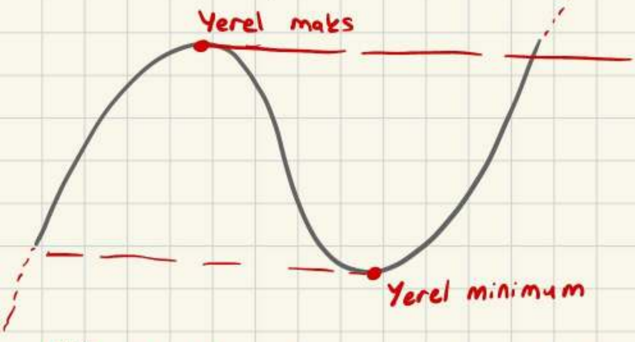
Örnek: $3x^2 + 1 = f'(x)$ ise
$f(x)$ daima artandır.

Daima azalanda $f'(x)$ daima negatiftir.

Yerel ve Mutlak Maks ve Min Arasındaki Fark

Maksimum

Yerel (local) maks	Mutlak (absolute) maks
Yerel (local) min	Mutlak (absolute) min

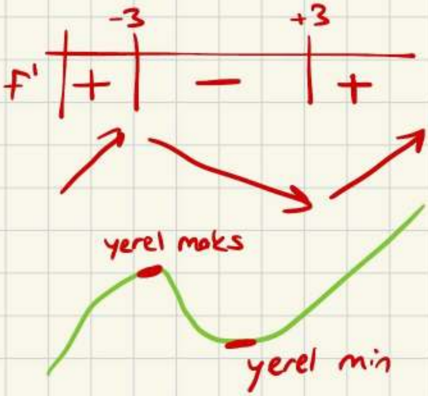


Not: Mutlak maks-min, aynı zamanda birer yerel maks-min olarak kabul edilir.

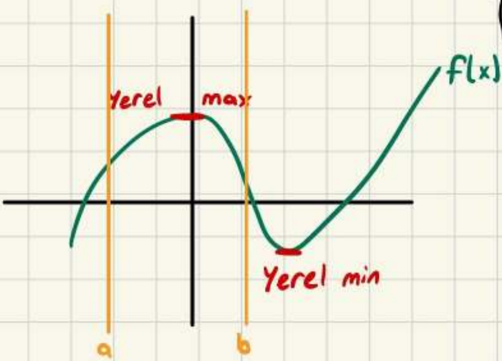
Soru: $x^3-27x+1$ maks, min bul. sınıflandır.

$3x^2-27=f'(x)$

$x=\pm 3$



Verilen Aralıkta Maksimum – Minimum Noktalarını Bulma



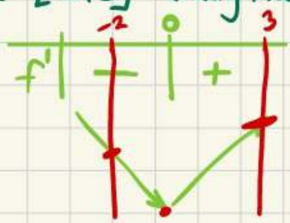
$[a,b]$ aralığında bu aralıkta mutlaka mutlak maks-min olur.

Adaylar

1. Sınırlar max-min adayıdır.
2. Sınırlar içindeki ekstremumlar

Soru: $f(x)=x^2$ fonk $[-2,3]$ aralığında mutlakları bul.

$f'(x)=2x \longrightarrow$

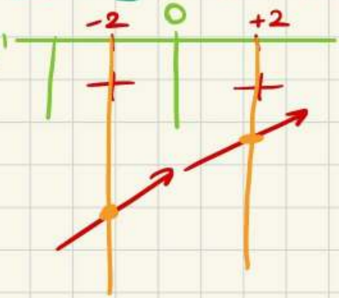


$(0,0)$ mutlak minimum

$(3,9)$ mutlak maksimum

Soru: $f(x) = x^3 + 1 \quad [-2,2]$ ar. mutlak bul.

$3x^2 \longrightarrow f'$

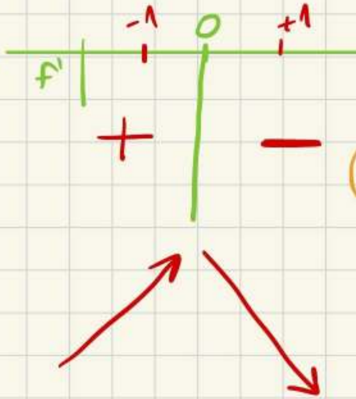


$(-2,-7)$ mutlak min

$(2,9)$ mutlak max

Soru: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $[-1,1]$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow$



$(0,1)$ mutlak maks

$(-1, 1/2)$ ve $(1, 1/2)$ mutlak min

$\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0$

$f'(1) = \dfrac{+2}{4}$

Maksimum ve Minimum Noktaları 2. Türev ile Belirleme

(Second Derivative Test)

1. Yol

işaret tablo

$f(x) \longrightarrow f'(x) = 0 \longrightarrow$

2. Yol

$f(x) \longrightarrow f'(x) = 0$ türevi 0 yapan bir nokta x_1 olsun.

$$f'(x_1) = 0$$

$f'(x_1) = 0$ iken

- $f''(x_1) > 0$ min apsis
- $f''(x_1) < 0$ maks apsis
- $f''(x_1) = 0$ max - min değildir.

Soru: $x^3 - 27x + 1 = f(x)$

$3x^2 - 27$ f' $x = \pm 3$

$\downarrow$

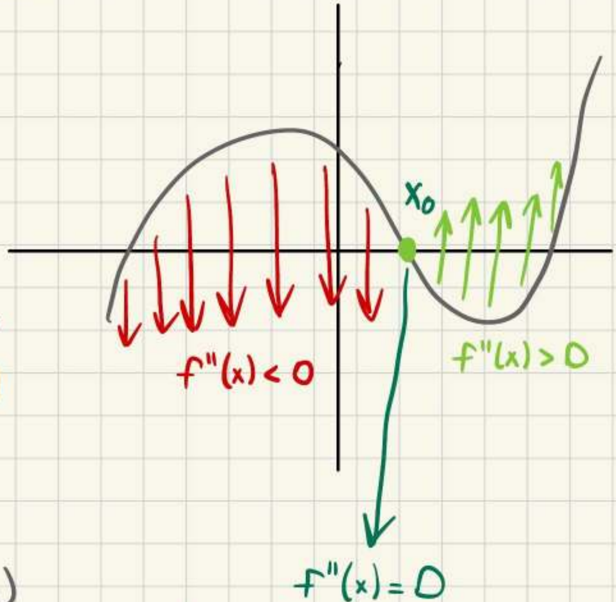
$6x$ f'' $\longrightarrow$ $(+3, 18) \longrightarrow$ min apsis

$(-3, -18) \longrightarrow$ max apsis

2. Türevin Yorumu

$f(x) \longrightarrow f''(x)$

?



$f''(x) = 0$ yapan noktaya
dönüm, büküm (inflection point)
noktası denir.

$f''(x) < 0$ eğriliğin yönü aşağı (iç bükey) (konkav)

$f''(x) > 0$ eğriliğin yönü yukarı (dış bükey) (konveks)

$f''(x) = 0$ yapan her x dönüm noktası olmayabilir.

✓

		a	
f''	+		−

		a	
~~f''~~	~~+~~		~~+~~

Soru: $x^3-27x+1$

a) büküm nok. $(0,1)$

b) içbükey, dışbükey nok nelerdir.

$(-\infty,0)$ iç bükey konkav

$(0,\infty)$ dış bükey konveks

$3x^2-27$

$6x = f''(x)$

$6x = 0$

$x = 0$

		0	
f''	$-$		$+$

$\cap$ konkav $\quad$ $\cup$ konveks

$(0,1)$ büküm noktası

Optimizasyon Problemleri

Bir şeyin alabileceği en büyük veya en küçük değerin 1. Türev yardımıyla hesaplanmasına optimizasyon problemleri denir.

Soru: $x+3y=18$ ise $x.y$ en fazla kaçtır?

1. adım

$x.y$ tek bilinmeyene çevrilmelidir.

$x=18-3y \longrightarrow x.y=(18y-3y^2)$ maks değer

2. adım

$18-6y=0$

$y=3$

		3	
$18-6y$	+		−

$\nearrow \; \searrow$

$\overset{x \; y}{(9,3)}$ ✓

27

Soru:

200 metre tel ile en büyük alanlı dikdörtgen şeklinde tel ile çevirmek istiyor.

$2x+y=200$

$y=200-2x$

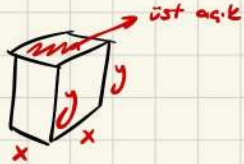
$x.y=200x-2x^2$

$200-4x=0$

$x=50$

$(50, 100)$

400 cm^2 lik karton ile dik prizma yapılmak isteniyor.
Hacmin en çok olması için dik prizmanın boyutları ne olmalıdır.



$x^2 + 4xy = 400$

$y = \frac{100}{x} - \frac{x}{4}$

$x^2 \cdot y = \max$

$\left(100x - \frac{x^3}{4}\right) = \max$

$100 - \frac{3x^2}{4} = 0$

$x = \frac{20}{\sqrt{3}}$

$y = 5\sqrt{3} - \frac{5}{\sqrt{3}}$

	$-\frac{20}{\sqrt{3}}$		$20/\sqrt{3}$	
$-$		$+$		$-$

max değer

Soru: $f(x) = x^2 - 5x + 4$ fonk üzeri noktalardan koordinat top en küçük olan noktayı bulun.

$4 - 10 + 4$

$(x, x^2 - 5x + 4)$

$x^2 - 4x + 4 \rightarrow$ min değer

$2x - 4 = 0$

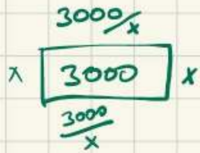
$\underline{x = 2}$

	2	
$-$		$+$

0

$(2, -2) = 0$

Soru: $3000\ m^2$'lik bir arazi telle kaplanacak. 3 kenarı metresi 3 lira bir kenarı metresi 1 lira olan tel kullanılacaktır. En ucuz maliyet?



$$2x + \frac{3000}{x}$$

$$3 \cdot \left(\frac{2x^2 + 3000}{x} \right) + \frac{3000}{x}$$

$$\frac{6x^2 + 12000}{x} = f(x)$$

$$6x + \frac{12000}{x} = f(x)$$

$$\downarrow$$

$$6 - \frac{12000}{x^2} = 0$$

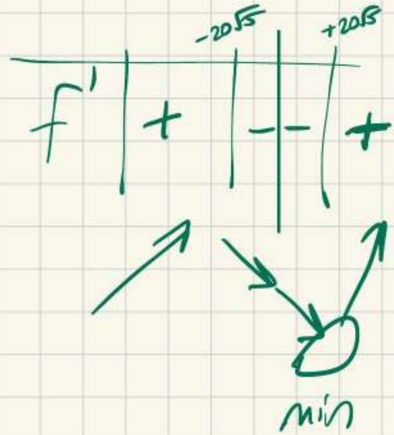
$$6 = \frac{\cancel{12}000}{x^2}$$

$$\cancel{6}x^2 =$$

$$x^2 = 2000$$

$$x = \mp\sqrt{2000} \longrightarrow 20\sqrt{5}$$

$$y = 30\sqrt{5}$$



$$\left[f\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right)\right]'$$

$$= f\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right) \cdot \left(1 \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right) + x \cdot g\left(x^2 \cos x\right) \cdot \left(2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)\right)\right)$$

$$\left[f(x)\right]' = f(x) \cdot f'(x)$$

$$f'\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right) \cdot \left[1 \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right) + \left(x \cdot g'\left(x^2 \cdot \cos x\right) \cdot \left(2x\cos x - x^2 \cdot \sin x\right)\right)\right]$$

Çözüm Limiti alınan ifadenin bütün terimlerini x ile bölerek

$$\frac{x+\sin x}{\sin x} = 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\arctan x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+(\sin x)/x}{(\arctan x)/x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

elde ederiz. ◄

[redacted] $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm Uygun düzenlemeler yapar ve ilgili formülleri kullanırsak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\ln(1+x^2)}{1-\cos x} &= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2}{1-\cos x}\left[1+\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]\right\}\\ &= \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\left[1+\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]\right\} = 2(1+1) = 4\end{aligned}$$

olacaktır. ◄

[redacted] $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)}{x^2-\sin x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm Not olarak

Çözüm Ö

$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+}}{\sqrt{}}$

çıkar. ◄

Çözüm

oldukl

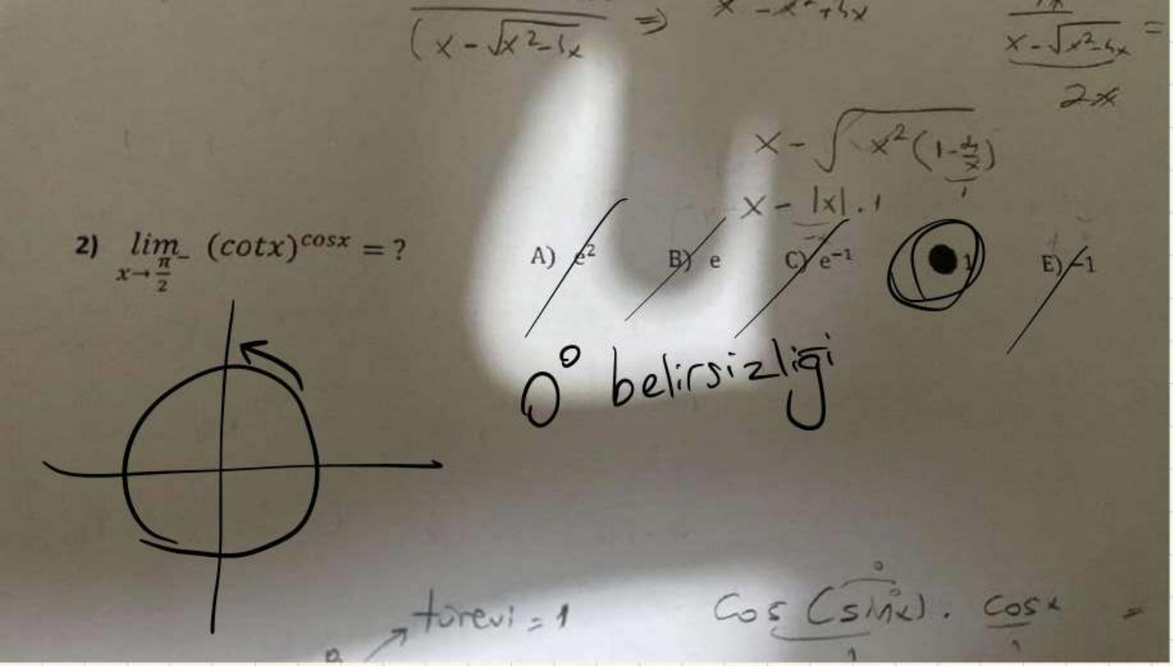
bulun

$$\frac{2x+\dfrac{2x}{x^2+1}}{+\sin x}$$

$$\cancel{2x^2}+2-\cancel{4x^2}$$

$$\frac{2+\dfrac{\cancel{-2x^2}+2}{(x^2+1)^2}}{+\cos x} \longrightarrow \frac{4}{+1} = \boxed{4}$$

2



$$\frac{\ldots}{\left(x - \sqrt{x^2 - 4x}\right)} \Rightarrow x^2 - x^2 + 4x \qquad \frac{4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} =$$

$$2x$$

$$x - \sqrt{x^2\left(1 - \frac{4}{x}\right)}$$

$$x - |x| \cdot 1$$

2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\cot x)^{\cos x} = ?$

A) ~~e^2~~ B) ~~e~~ C) ~~e^{-1}~~ D) 1 E) ~~-1~~

0^0 belirsizliği

türevi = 1

$\cos(\sin x) \cdot \cos x =$

$$(\cot x)^{\cos x} = y$$

$$\cos x \cdot \ln(\cot x) = \ln y$$

$$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cot x)}{\sec} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \ln y$$

$$\log_e \ldots = 0$$

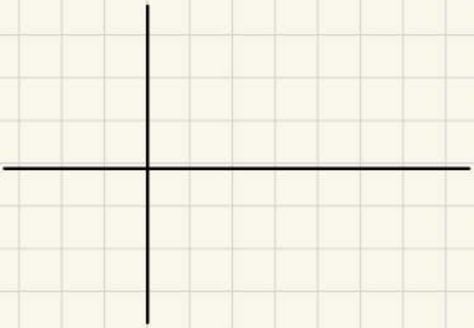
$$\frac{\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x}}{\sec x \cdot \tan x} \quad \frac{c}{s}$$

$$\frac{-1}{\sin} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos} \cdot \frac{s}{}} \quad \left(\frac{-\cos 0}{\sin^2 1}\right)^0$$

Asimptot

Bir doğru çiziminde çizimi kolaylaştıran denklemlerdir.

doğru denklemi



* fonksiyon grafiğinin yaklaşması gereken doğrulardır.

1. Düşey Asimptot (Vertical Asymptot)
2. Yatay Asimptot (Horizontal Asymptot)
3. Eğik ve eğri Asimptot (Oblique Asymptot)

Düşey Asimptot

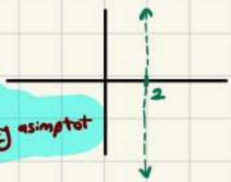
Tanımsızlıktan oluşan asimptottur.

$f(x) = 2x-1$ ✗

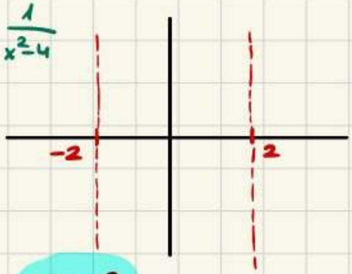
$f(x) = \frac{3x-2}{3}$ ✗

$f(x) = \frac{x}{x-2}$

$x=2$ fonk düşey asimptot



$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$



$x=-2$
$x=2$

$f(x) = \log_2(x+5)$ $\quad x=-5$

Yatay Asimptot

$y =$ fonksiyonun $+\infty$ veya $-\infty$'a giderkenki limit değeri

★ limit değeri $+\infty, -\infty$ olursa yatay asimptotu yoktur.

★ sadece sayı çıkması gerekir.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to +\infty} (2x-3) = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} (2x-3) = -\infty\end{array}\right] \text{yatay asimptot yok.}$$

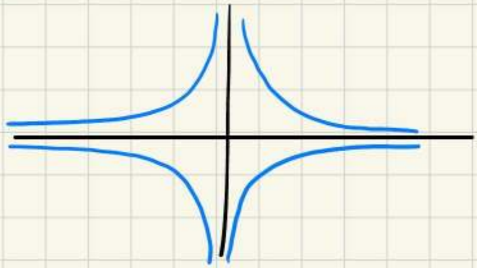
Ör/ $f(x) = \dfrac{3x-2}{4x+5}$ yatay asimptot nedir?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{4x+5} = \dfrac{3}{4} \\ \lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x-2}{4x+5} = \dfrac{3}{4}\end{array}\right] \; y = 3/4$$

★ sadece bir sonsuza giderken sayı varsa yatay asimptot var kabul edilir. Fakat diğer sonsuza giderken yoktur.

Ör/ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ yatay asimptotu nedir.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x^2+1} = \dfrac{2}{2x} = 0 \\ \lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x+1}{x^2+1} = \dfrac{2}{2x} = 0\end{array}\right] \; y = 0$$



Eğik ve Eğri Asimptot

* Yatay asimptot olmayan durumlarda karşımıza çıkar.

Eğik Asimptot

1. Çeşit

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

"payın derecesi paydanın derecesinden bir fazla ise"

2. Çeşit

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

"Kök ve içinde 2. derece fonksiyon varsa"

Eğri Asimptot

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$$

"payın derecesi paydadan iki ve daha fazlası ise"

Eğik Asimptot 1. Çeşit

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-2}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{pay} & \text{payda} \\ \hline & \text{bölüm} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -\ x^2-2x & x+1 \\ \cline{1-1} 0+x+1 & \\ -\ x-2 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$$\boxed{y = \text{bölüm}}$$

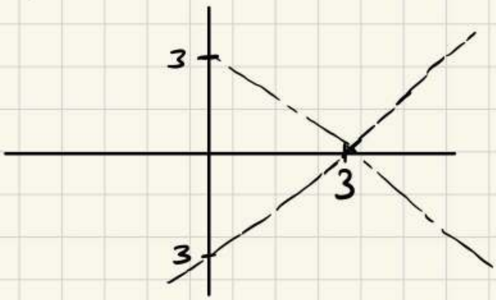
$$y = x+1$$

Eğik Asimptot 2. Çeşit

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} \implies y = \pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

$f(x) = \sqrt{x^2-6x+1}$ eğik asimptot?

$\pm 1(x-3)$ → $y = x-3$, $y = 3-x$

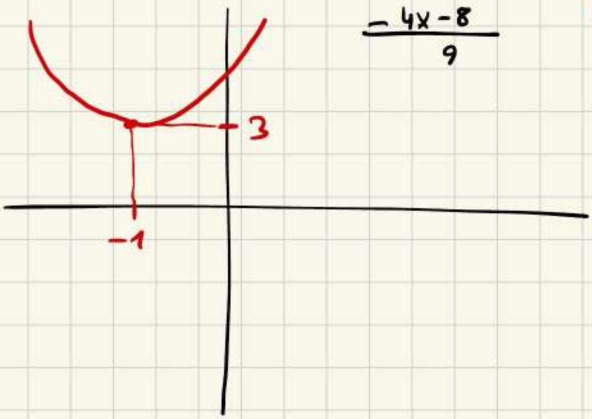


Eğri Asimptot

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x-2 \\ \underline{-\;x^3-2x^2} & x^2+2x+4 \\ 2x^2+1 & \\ \underline{-\;2x^2-4x} & \\ 4x+1 & \\ \underline{-\;4x-8} & \\ 9 & \end{array}$$

$$y = x^2+2x+4$$

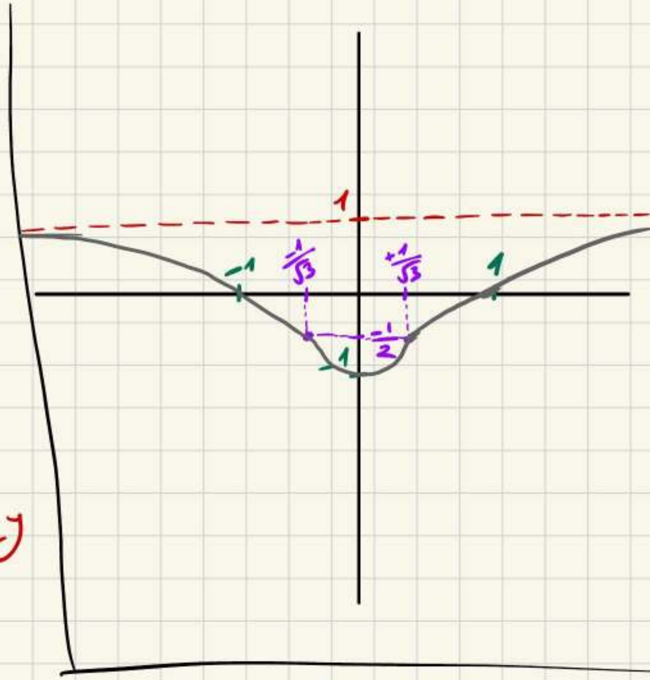


Türev Kullanarak Fonksiyon Çizme

1. Tanım Kümesi
2. Eksenleri kestiği noktayı bul.
3. Asimptotlar bulunmalıdır. (varsa)
4. Düşey Asimptot değerine sağdan ve soldan limitleri hesaplanır.
5. 1. Türevi alıp = 0
   * artan – azalan aralık
   * varsalar max ve min noktaları bul.
6. 2. Türevi alıp = 0
   * Konveks (dış-bükey), konkav (iç-bükey)
   * büküm noktası
7. Grafik Çizilir.
   1. Asimptotlar çizilir.
   2. Maksi/Min nokta, büküm noktası
   3. x ve y eksenlerini kestiği nokta
   4. çizim

Soru /

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$



Tanım Kümesi = $\mathbb{R}$

$x=0$ için $y=-1$ $(0,-1)$

$y=0$ için $x=-1,1$ $(-1,0),(1,0)$

düşey asimptot yok

yatay asimptot $\lim_{x\to \mp\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 = y$

$$\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1).2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

$x=0$ ★ paydayı sıfır yapanlar da işaret tablosunda bulunmalı

		0	
f'	$-$		$+$
	↘		↗

$$\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = 0$$

$x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{1}{3}}$

		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	
f''	$-$		$+$		$-$
	$\cap$		$\cup$		$\cap$
	Konkav		Konveks		Konkav

1) Tanım küme
2) x,y
3) asimptotlar
4) düşey asimptot için sağdan soldan limit
5) 1. Türev
6) 2. Türev
7) Çizim

$\mathbb{R} - \{1\}$

$(0,0)$
$(0,0)$ $\rangle$ $(0,0)$

$x=1$ düşey asimptot → $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$ / $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to {+\infty \atop -\infty}} \frac{2x}{x-1} = 2 = y$ yatay asimptot

$f'(x) = \dfrac{2(x-1) - 2x.1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} = 0$ için

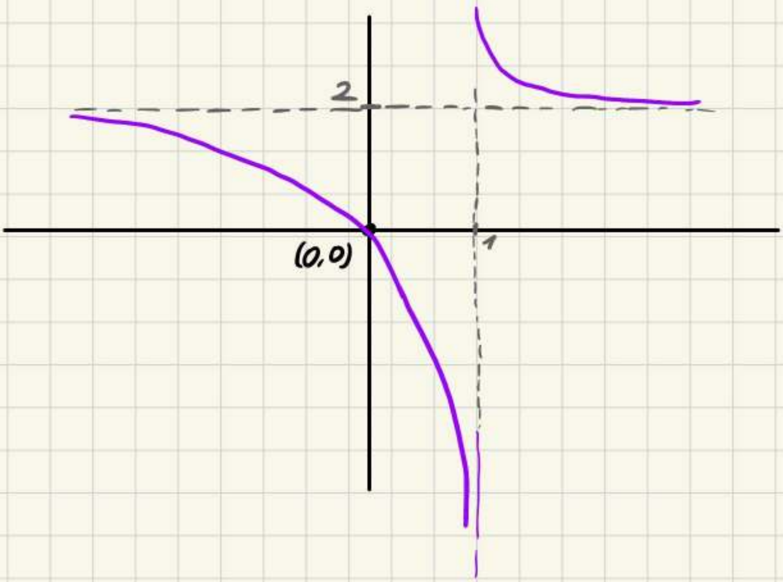
		1	
f'	$-$	‖	$-$

$\dfrac{+2.(2x-2)}{(x-1)^4} = 0$ için

$x-1=0$

$\boxed{x=1}$

		1	
f''	$-$	‖	$+$
	$\cap$		$\cup$



$f(x) = x^3 - 27x + 1$

1) Tanım Kümesi
2) x, y
3) düşey asimp
4) yatay asimp
5) 1. Türev
6) 2. Türev
7) Çiz

R

(0,1)

~~(1,0)~~

Kesirli olmadığı için asimptot yok.

$x^3 - 27x + 1 = 0$

?

$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0$ için

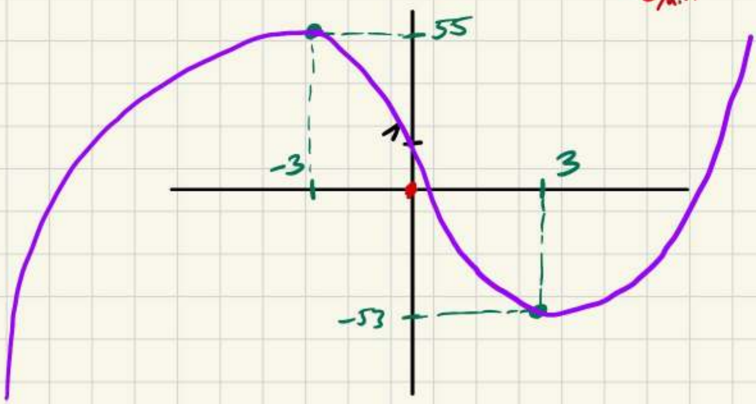
$x^2 = 9$

$x = -3, 3$

		-3		3	
f'	$+$		$-$		$+$
	↗	max	↘ min		↗

$f''(x) = 6x = 0$ için

	$x=0$	
$-$		$+$
$\cap$		$\cup$



$f(x) = x \cdot \sqrt{4-x^2}$

1) Tanım

$4-x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 4$

$-2 \leq x \leq 2$

$[-2,2]$

2) (x,y)

$(0,0)$

$(-2,0)$

$(2,0)$

asimptot yok

$\sqrt{4x^2-x^4} = f(x)$

$\frac{8x-4x^3}{2\cancel{x}\sqrt{4-x^2}} = f'(x)$

$\frac{8-4x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = f'(x)$

$8x-4x^3=0$

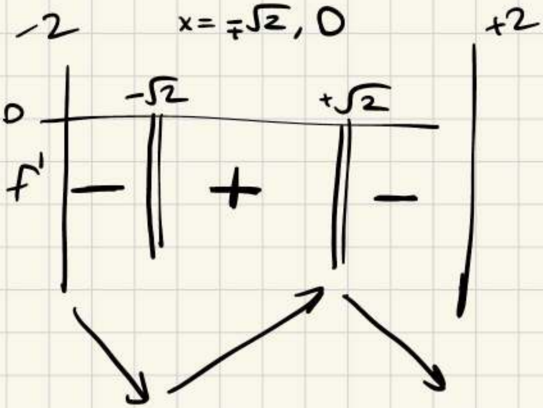
$\cancel{4x^3=8x}$

$x^2=2$

$x=\mp\sqrt{2}, 0$

$f''(x)=$

$-8x\left(2\sqrt{4-x^2}\right) - \left(8-4x^2\right) \cdot \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} = 0$

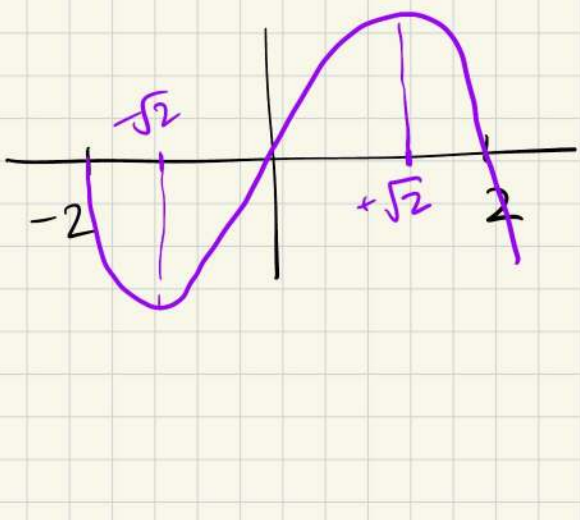


$8 \cdot (4-x^2) = (8-4x^2)$

$2 \cdot (4-x^2) = (2-x^2)$

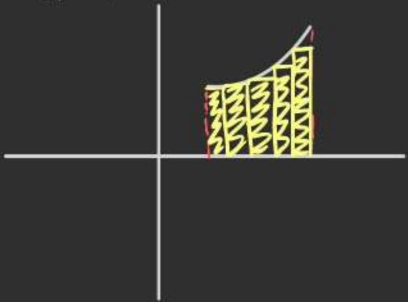
$8-2x^2 = 2-x^2$

$x=0$

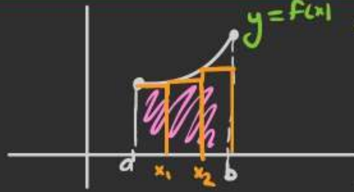


Riemann Toplamı

* Bir eğrinin altında kalan alanı



Sol Riemann Toplamı



* n eşit alt aralığa böl
* sol uçları ile dikdörtgen oluştur.
* Alanları topla

$$\Delta x = \frac{b-a}{3}$$

$$f(a).\Delta x + f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x$$

Soru

$f(x) = x^2+1$

$[2,10]$ 4 parça

sol riemann

2,4
4,6
6,8
8,10

$\Delta x = \frac{10-2}{4} = 2$

$5.2 + 17.2 + 37.2 + 65.2 =$

$248 =$

Soru:

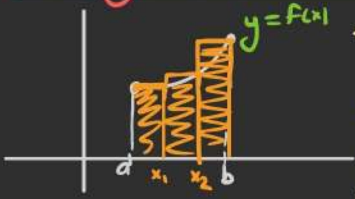
$\int_1^3 x^3 dx$ integralini $n=3$ alarak sol riemann ile yaklaşık hesaplayınız.

$\Delta x = \frac{2}{3}$ $\left[1, \frac{5}{3}\right]$ $\left[\frac{7}{3}, 3\right]$

$\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$

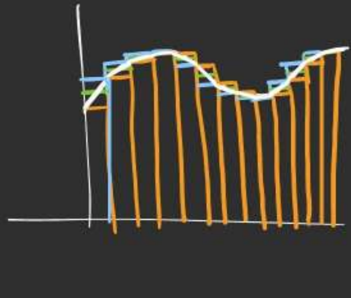
$\frac{990}{81}$ //

Sağ Riemann Toplamı



* n eşit alt aralığa böl
* sağ uçları ile dikdörtgen oluştur.
* Alanları topla

$$f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + f(b).\Delta x$$



Soru:

$(1-x^2)=f(x)$

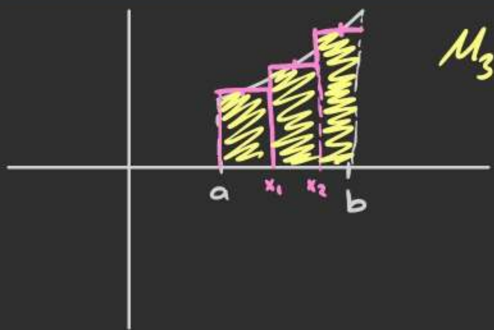
$[1,5]$, 4 parça

$$\left.\begin{array}{l} [1,2] \longrightarrow 3 \\ [2,3] \longrightarrow 8 \\ [3,4] \longrightarrow 15 \\ [4,5] \longrightarrow 24 \end{array}\right\} -50$$

$\int_0^2 x^2\,dx \quad n=4$

$$\left.\begin{array}{l} [0,\frac{1}{2}] \\ [\frac{1}{2},1] \\ [1,\frac{3}{2}] \\ [\frac{3}{2},2] \end{array}\right\} \frac{15}{4}$$

Orta Nokta Riemann Toplamı



$$M_3 = \Delta x \left(f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+b}{2}\right) \right)$$

Soru

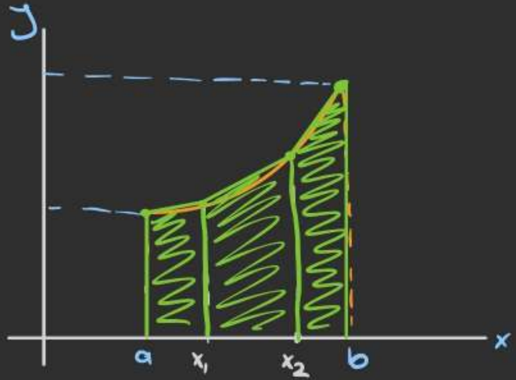
$f(x)=x^2+1$

$[1,4]$, 3 parça

$$\left.\begin{array}{l} [1,2] \longrightarrow 13/4 \\ [2,3] \longrightarrow 29/4 \\ [3,4] \longrightarrow 53/4 \end{array}\right\} 95/4$$

Yamuk Alanı ile Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ arasında sürekli olsun.



* n eşit alt aralıkta yamuk alanı ile riemann toplamı, bu sınırların oluşturduğu yamukla elde edilir.

$$\frac{a+b}{2} \cdot h$$

$n=3$

$a \leq x \leq x_1$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$x_2 \leq x \leq b$

$$T_3 = \frac{f(a)+f(x_1)}{2} \cdot \Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot \Delta x + \frac{f(x_2)+f(b)}{2} \cdot \Delta x$$

* Yamuk alanı ile R.T, sol ve sağ toplamın ortalamasına eşittir. (aritmetik)

Soru:

$f(x) = x^3 + 1$ fonk

$[1,5]$, $n=4$

Yamuk alanı = ?

$1,2 \longrightarrow 11/2$

$2,3 \longrightarrow$

$3,4 \longrightarrow$

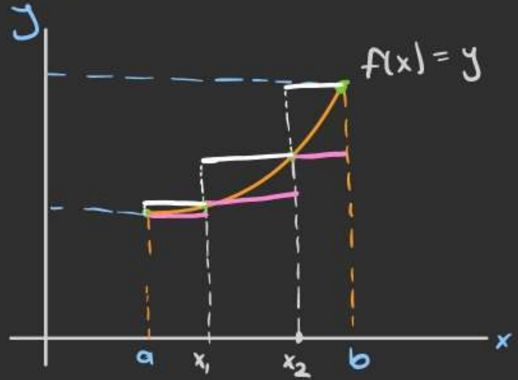
$4,5$

$+$

$332/2 = 166$

Alt Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ sürekli



* fonksiyon artansa

alt riemann toplamı = sol riemann toplamı

* fonksiyon azalansa

alt riemann toplamı = sağ riemann toplamı

$$\left.\begin{array}{l} a \le x \le x_1 \\ x_1 \le x \le x_2 \\ x_2 \le x \le b \end{array}\right]$$

aralıkta hangisi küçükse o alınır.

Soru

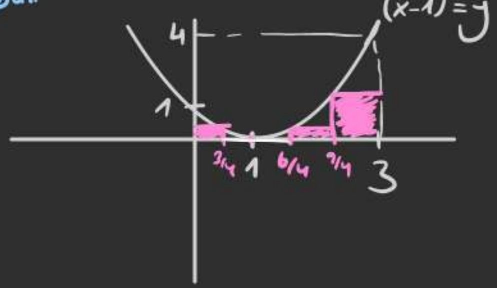
$f(x) = (x-1)^2$

$[0,3]$ aralığında

$n = 4$

alt riemann toplamı bul.

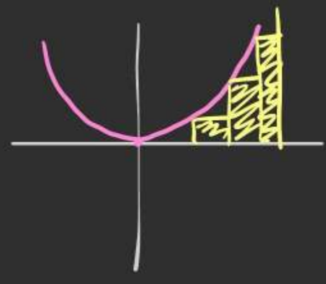
$$\left.\begin{array}{l} 0, \tfrac{3}{4} \rightarrow f(3/4) \\ \tfrac{3}{4}, \tfrac{6}{4} \rightarrow f(1) \\ \tfrac{6}{4}, \tfrac{9}{4} \rightarrow f(3/2) \\ \tfrac{9}{4}, 3 \rightarrow f(9/4) \end{array}\right\} \ 45/32$$



Soru:

$y = x^2$, $[1,3]$

$n = 3$, alt riemann toplamı



$1, \tfrac{5}{3} \rightarrow$

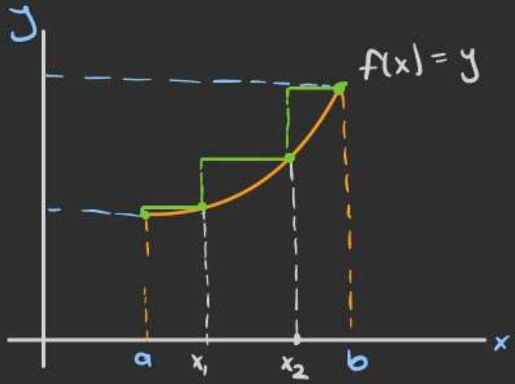
$\tfrac{5}{3}, \tfrac{7}{3} \rightarrow$

$\tfrac{7}{3}, 3 \rightarrow$

$166/27$

Üst Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ sürekli



$a \le x \le x_1$
$x_1 \le x \le x_2$
$x_2 \le x \le b$

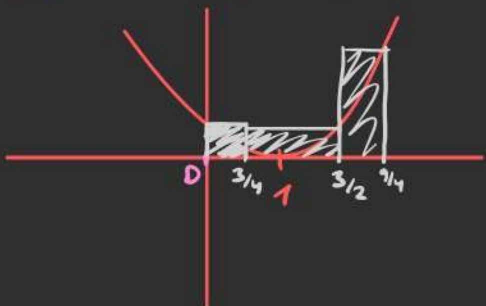
aralıkta hangisi büyükse onu seç

Soru:

$y = (x-1)^2$

$[0,3]$, $n=4$

üst riemann toplamı = ?



$0, 3/4 \longrightarrow$
$3/4, 6/4 \longrightarrow$
$6/4, 9/4 \longrightarrow$
$9/4, 3 \longrightarrow$

$325/64$

Toplam Sembolü ve Özellikleri (Sigma Notation)

$\sum$ = toplam sembolü

$$\sum_{k=1}^{5} f(k) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$$

5 → bitiş değeri

k=1 → başlangıç değeri

$\{1,2,3,4,5\}$

$$\sum_{n=0}^{3}(n^3+1) = 1+2+9+28=40$$

Özellik 1:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3\sum_{i=1}^{n} i$$

Özellik 2:

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+5k+6) = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 5k + \underbrace{\sum_{k=1}^{10} 6}_{60}$$

Toplam Sembolünü Kısa Yoldan Hesaplama

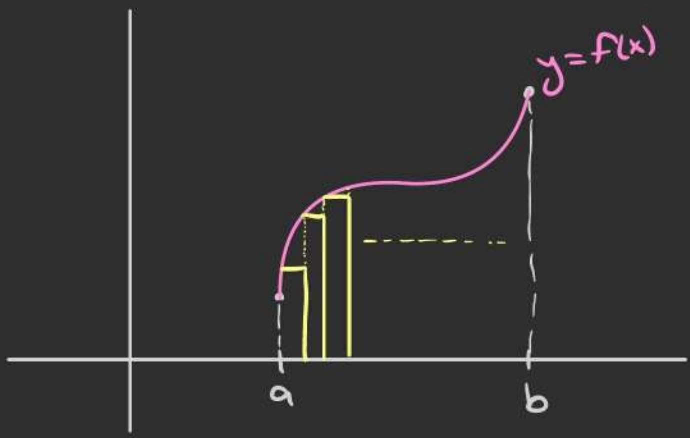
1. $$\sum_{k=m}^{n} a = a.(n-m+1)$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$$

Riemann Toplamının Limiti



$n = 3$
$n = 4$
5
6
$\vdots$
$n = n \to \infty$

$$\int_a^b f(x).\,dx = \text{gerçek alan}$$

Sağ Riemann Toplamının Limiti

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x . i$$

Ör/ $x_1 = a + \Delta x$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sol Riemann Toplamının Limiti

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x (i-1)$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\,\Delta x = \int_a^b f(x).\,dx$$

Soru:

$y=x^2$

$[1,3]$

Riemann toplam limiti ile bul.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i$$

$$x_i = a + \frac{2i}{n}$$

$$f(x_i) = \left(a + \frac{2i}{n}\right)^2$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) . \Delta x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 . \frac{2}{n} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} + \frac{8i}{n^2} + \frac{8i^2}{n^3}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n} + \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3} . \sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{4n+4}{n} + \frac{8n^2+12n+4}{3n^2}\right) = 26/3$$

$$\int_0^3 x\,dx$$ sonucunu riemann toplamının limitini kullanarak bulunuz.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = \frac{3i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) . \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right) . \frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{9i}{n^2} = \frac{9n+9}{2n} = \frac{9}{2}$$

Riemann Toplamının Limitini Belirli İntegral ile Çözme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$b-a=3$

$5-2$

$x_i = a + \Delta x i$ $\quad \int_2^5$

$f(x_i) = 2 + \frac{3i}{n}$

Soru

Δx

Δx ifadesini belirli integral

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\overset{a}{2} + \frac{3k}{n}\right)}_{f(x_i)}$$

$\Delta x = \frac{3}{n} \rightarrow b-a=3$ $\quad 5 \quad 2$

$\Rightarrow \int_2^5 x\,dx = 21/2$

$x_k = a + \Delta x.k = 2 + \frac{3k}{n}$

$b-a=3$

$x_i = a + \Delta x i$

$2 + \frac{3k}{n}$

Soru:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^5+2^5+3^5+\dots}{n^6}\right)=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x=\int_a^b f(x).dx \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^5}{n^5}+\frac{2^5}{n^5}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\cdot\underbrace{\left(\frac{i^5}{n^5}\right)}_{\boxed{x^5}}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^5\,dx=\frac{1}{6}} =$$

$$\Delta x=\frac{1}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x i$$

0 ise $b=1$

Soru:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{2}{n}\right)+\sin\left(\frac{3}{n}\right)\dots}{n}\right)=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{i}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\underbrace{\left(\sin\left(\frac{i}{n}\right)\right)}_{f(x_i)}$$

$$b-a=1$$

$$\cancel{a}+\frac{i}{n}=x_i$$

$$\sin\left(\frac{i}{n}\right)=f(x_i)$$

$$\sin(x)=f(x)$$

$$\int_0^1 \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^1 =$$

Riemann Toplamı Örnek Soru-1

$f(x) = x^2$ fonksiyonu $[1,5]$ aralığında 4 eşit alt aralığa bölünüyor.

a) Buna göre, Riemann alt toplamını bulunuz.

b) Buna göre, Riemann üst toplamını bulunuz.

c) Her aralığın orta noktasına göre hesaplanan Riemann toplamını bulunuz.

$1,2 \longrightarrow 1$ | 4 | $2{,}25$
$2,3 \longrightarrow 4$ | 9 | $6{,}25$
$3,4 \longrightarrow 9$ | 16 | $12{,}25$
$4,5 \longrightarrow 16$ | 25 | $20{,}25$
30 | 54 | 41

Toplam Sembolü Örnek Soru-3

Toplam Sembolü Örnek Soru-3

Aşağıda verilen ifadelerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\sum_{k=1}^{10} k^3 \rightarrow \left[\frac{n.n+1}{2}\right]^2 = \left[\frac{10.11}{2}\right]^2 = 55^2$

b) $\sum_{k=\cancel{1}\,1}^{\cancel{20}\,27} \cancel{(2k-3)} \rightarrow 2k+3 = 2\sum_{k=1}^{27} k + \sum_{1}^{27} 3 = 27.28 + 27.3$

$31.27 =$

c) $\sum_{i=\cancel{-2}\,1}^{\cancel{12}\,15} (k^2+k) \quad 15(k^2+k)$

Integrale Giriş

* Türevin tersi

$$f'(x) \longrightarrow f(x)$$

* $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

* $\Sigma \longrightarrow$ ayrık değerlerde toplama
* $\int \longrightarrow$ sürekli değerlerde toplama

Integral Çeşitleri

Belirsiz integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

sınırları olmayan integral

Belirli integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ldots\ldots$$

Integral Alma Kuralları

1) Sabit Sayının İntegrali

$$\int 3\,dx = 3x + c$$

$$\int -2\,dx = -2x + c$$

$$\int \frac{1}{5}\,dx = \frac{x}{5} + c$$

Belirsiz integralde zorunlu

2) Üslü Sayının İntegrali

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + c$$

$$x^{\frac{1}{3}}$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

Yardımcı Kurallar

a)

$$\int a\,f(x)\,dx = a.\int f(x).dx$$

$$\int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + c$$

b)

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (x^2 - 7x + 4)\,dx = \int x^2\,dx + \int -7x\,dx + \int 4\,dx$$

(c) $\int (ax+b)^n \, dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1).(a)}$

** parantez içi sadece 1. derece iken uygulanabilir.

$$\int \sqrt[3]{5x-2} \, dx = \frac{(5x-2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}.5} + c$$

---

(4) Üstel Fonksiyonların İntegrali

(a)

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

e aynen yazılır.
üssünün türevine bölünür.

e'nin üssü 1. derece ise uygulanabilir.

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int e^{-x} dx = \dfrac{e^{-x}}{-1} + c$

$\int e^{3x+1} dx = \dfrac{e^{3x+1}}{3} + c$

$\int 2e^{5x} = \dfrac{2.e^{5x}}{5} + c$

$\int e^{x^2} dx$ = kurala uymaz.

$\int x.e^x \, dx$ = kurala uymaz.

(b)

$$\int a^{mx+n} \, dx = \frac{a^{mx+n}}{m.\ln a} + c$$

üs 1. derece olmalıdır.

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{1.\ln 5} + c$$

5) Sonucu "ln" çıkanlar

$$\frac{\text{Sayı}}{\text{1. derece fonk.}} = \ln$$

* $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

* $\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + c$

* $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c =$

$$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{3}{2x}\,dx = 3.\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{3.\ln|2x|}{2} + c$$

$$\int \frac{2}{x+5}\,dx = 2\int \frac{1}{x+5}\,dx = 2\ln|x+5| + c$$

6) Trigonometrik İntegral Kuralları

a) $\int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

1. derece

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \sin 5x\,dx = \frac{-\cos 5x}{5} + c$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{5}\right)dx = \frac{-\cos(x/5)}{\frac{1}{5}} + c$$

Hatırlatma: Fonk.lar için Ortalama Değer Teorisi

f, $[a,b]$ sürekli
f, (a,b) türevli

$$\underbrace{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{en az bir } c \in (a,b)}$$

integraller için ODT

f, $[a,b]$ sürekli

$$ort(f) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c) \text{ olmak üzere}$$

en az bir c vardır.

Soru: $|x-1|$, $[-1,2]$ aralığında ortalama değeri?

$$ort(f) = \frac{\int_{-1}^{2} |x-1|\,dx}{2-(-1)} = \frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^{1}(-x+1)\,dx + \int_{1}^{2}(x-1)\,dx =$$

$$\underbrace{\frac{-x^2}{2}+x}\qquad \underbrace{\frac{x^2}{2}-x}$$

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{-3}{2}\right) = 2 + \underbrace{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}_{5/2}$$

Leibniz Yöntemi

$$\left[F(x)\right]' = \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right]'$$

$$F'(x) = f(g(x)).g'(x) - f(h(x)).h'(x)$$

$$y=\int_a^{x^3}(t^3+1)\,dt\ ,\quad \frac{dy}{dx}=?$$

$$f(x)=\int_{\cos x}^{\sin x}\frac{1}{1-t^2}\,dt \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=?$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^3}\tan(t-1)\,dt}{x^3-2x^2+x}\quad \begin{matrix}\to 0\\ \to 0\end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L'H}\frac{\left[\int_1^{x^3}\tan(t-1)\,dt\right]'}{3x^2-4x+1}$$

$\tan(t-1)=f(x)$

$\to \tan(x^3-1)\cdot 3x^2$

$$f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$$ çiziniz.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

} kök yok.

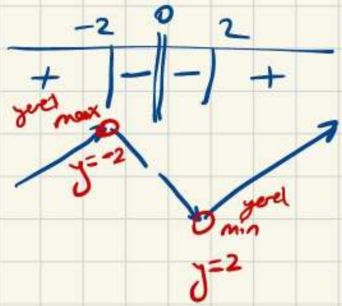
tek fonk

$f'(x) = \dfrac{x^2-4}{2x^2} = 0$ iken

$x = -2, 2$

$x \neq 0$

$x = 0$ kritik nokta değildir. Çünkü tanım kümesinde yok.



Kalkülüsün Temel Teoremi

① $$F(x) = \int_{x+3x^2}^{5x} (y+\sqrt{y^2+1} \,, \quad F'(x) = ?$$

② $$\int_{\pi/2}^{\pi} \sec^2 x \,.\, dx = \tan x \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

Ör/ $$\int_{\pi/2}^{\pi} \sec^2(xy) \,.\, dx = \frac{\tan(xy)}{y} \Bigg|_{\pi/2}^{\pi}$$

Ör/ $$\int \sec^2 x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Integraller için ODT

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Integral için Min-Max Değer

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \,.\, dx \leq M(b-a)$$

Fundamental Theorem of Calculus (Part-1)

* $$F(x) = \int_a^x f(t) \,.\, dt$$

then,

$F'(x) = f(x)$ over $[a,b]$.

Fundamental Theorem of Calculus (part 2)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

* $[\sin(x)]' = \cos x$

$[\cos(x)]' = -\sin x$

$[\tan(x)]' = \sec^2 x$

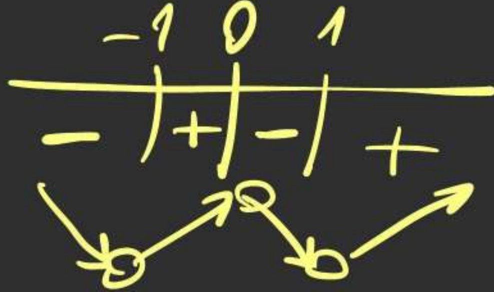
$[\cot(x)]' = -\operatorname{cosec}^2 x$

* $[\sec(x)]' = \sec x \cdot \tan x$

$[\operatorname{cosec}(x)]' = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

$f(x) = x^2 - 2\ln(1+x^2)$

extremum değerleri bul.



$$2x - 2 \cdot \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\cancel{2x} = \frac{2 \cdot \cancel{2x}}{1+x^2} \qquad \cancel{1} + x^2 = \cancel{2}\,1$$

$x = -1, 1, 0$

$f(-1) = 1 - 2\ln 2$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1 - 2\ln 2$

$f' = 0$ veya tanımsız noktaları

---

2. Yol,

$f'(x) = 0$ ~~$f'(x)$ = tanımsız~~

$x = 0$, $x = -1$ | $x = 1$

$\Downarrow$

$f''(x) =$

$$2 - 4\left[\frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}\right] =$$

$f''(0) = -2 < 0$ yerel maks

$f''(1) = 2 > 0$

$f''(-1) = 2 > 0$

yerel min

$$\int_0^{\pi/4} e^{-2\ln\cos x}\,dx =$$

$$\left(e^{-2}\right)^{\ln\cos x}$$

$$\left(e^{\ln\cos x}\right)^{-2} = \left(\cos^{-2}x\right) dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos^{-2}x\,dx = \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \,.\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$\tan x \Big|_0^{\pi/4} = \boxed{1}$$

$$\int_1^2 e^{-\ln(4+x^2)}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\underbrace{f(x) = \frac{5x+7}{x-3}}$$

$x=3$ düşey asimptot

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5x+7}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{5x+7}{x-3} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{5x^2+7}{x-3}$$

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt \quad \text{için,}$$

$F(x)$, artan, azalan, yukarı, kon. aşağı konkav, yerel extremum ?

$$F'(x) = 2x \cdot e^{-x^4}$$

Belirli integral (Definite integral)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

* c yazılmaz.

$$\int_1^3 2\,dx = 2x\Big|_1^3 = 4$$

$$\int_0^2 (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_0^2 = 6$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Belirli integral Özellikleri

1. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2. $$\int_a^b f(x)\,dx = m \Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = -m$$

3. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

④ f(x) çift fonk ise;

$f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

⑤ f(x) tek fonk. ise;

$f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

Mutlak Değerli İntegralleri Çözme

* Mutlak değer içini sıfır yapan değer sınırlarından ayrılır.

Reminder:

$$[\arctan f(x)]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$[\arcsin f(x)]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$[\arccos f(x)]' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$[\text{arccot} f(x)]' = \frac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$$

Fundamental Theorem of Calculus

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{f(x)} h(t)\,dt\right) = \underbrace{h(f(x)).f'(x)}_{\text{Liebniz Theorem}} - h(g(x)).g'(x)$$

$$f(x)=\int_{x}^{x^2+1}\cos(t^2)\,dt \Rightarrow f'(x)=\cos((x^2+1)^2).\,2x-\cos(x^2).\,1$$

$$\searrow \cos((x^2+1)^2).\,2x-\cos(x^2).\,1$$

$$f(x)=\int_{2}^{7}\frac{1}{1+t^6}\,dt \Rightarrow f'(x)=0$$

$$\searrow 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{\ln x}\tan(t^2)\,dt\right)=\frac{\tan(\ln^2 x)}{x}-\tan(x^6).\,3x^2$$

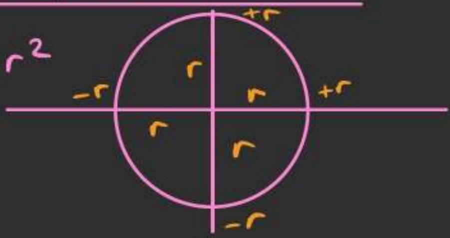
$$\lim_{x\to 2}\frac{\int_{2}^{x}\frac{1}{1+t^3}\,dt}{x^2-4}=\frac{\frac{1}{1+x^3}}{2x}=\frac{1}{2x.(1+x^3)}=\frac{1}{36}$$

(L'H: numerator $\xrightarrow{L'H} \frac{1}{1+x^3}$, denominator $x^2-4 \rightarrow L'H \rightarrow 2x$)

Çember Yardımıyla integral Çözme

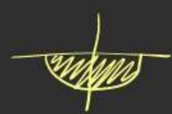
Merkezil Çember Denklemi

$$x^2+y^2=r^2$$



$$x^2+y^2=r^2$$

$$y=\sqrt{r^2-x^2} \;//\; y=-\sqrt{r^2-x^2}$$



$$x^2+y^2=4$$

Integral Alma Yöntemleri

* Önce integral alma kurallarına bakılır. Yoksa yöntemlere başvurulur.

* Yöntemler, kurallara dönüştürür.

1) Değişken Değiştirme (u-substitution)

* Bu yöntem için

$$\int F(x) \cdot f'(x)\,dx \rightarrow$$ $f'(x)$ ve dx çarpım durumunda olmalıdır.

* $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x\,dx$

* $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

⋮

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

$$du = f'(x) \cdot dx$$

Soru:

$$\int e^{x^3} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{du} =$$

($u = x^3$, $du = 3x^2 dx$)

$$\int e^u \cdot du = \frac{e^u}{1} + c$$

$$= e^{x^3} + c$$

* $\left.\begin{aligned} u &= f(x) \\ du &= f'(x) \cdot dx \end{aligned}\right\}$ $x \longrightarrow u$

* Sonuç u'lu çıkar. u yerine $f(x)$ konur.

Soru:

$du = (2x-5)\cdot dx$

$$\int \underbrace{(x^2-5x+1)}_{u}{}^{10} \cdot \underbrace{(2x-5)\,dx}_{du}$$

$$\int u^{10} \cdot du = \frac{u^{11}}{11} + c = \frac{(x^2-5x+1)^{11}}{11} + c$$

Soru:

$$\int \frac{2x}{\underbrace{x^2+1}_{u}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{u}\quad -(x^2+1)^2 \cdot -2x\,dx}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{du} \cdot \underbrace{x^2+1}_{u}} \qquad \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$x^2+1 = u$

$2x\,dx = du$

$$\int \frac{1}{u}\cdot du = \ln|x^2+1| + c = \int \frac{1}{u} \cdot du = \int \ln|u| + c = \ln|x^2+1| + c$$

Soru:

$$\int \underbrace{\sqrt{x^3+1}}_{u} \cdot \underbrace{3x^2\,dx}_{du} = \int \frac{\cancel{2}\,\overset{u}{(x^3+1)}}{\cancel{2}\sqrt{x^3+1}} \cdot \overset{du}{3x^2\,dx}$$

$u = x^3+1$

$du = 3x^2\,dx$

$$= \int \sqrt{u} \cdot du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2\sqrt{(x^3+1)^3}}{3} + c$$

Soru:

$$\int e^{\overset{u}{\sin x}} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{du} = \int du = u + c = e^{\sin x} + c$$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$$\int e^u \, du = e^u + c$$

Soru: $\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$u \, du = \frac{u^2}{2} + c$

Soru:

$$\int \frac{\sin(\overset{u}{\ln x})}{x} \, dx = \int \sin(u) \, du = -\cos(u) + c = -\cos(\ln x) + c$$

$$\int \sin(u) \, du = -\cos(u) + c$$

Soru:

$$\int \cos(\underset{u}{x^2}) \cdot \underbrace{2x \, dx}_{du} = \int \cos(u) \cdot du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c$$

$\sin(u) + c$

$$\int e^{\overset{u}{x^3}} \cdot \underbrace{x^2 \, dx}_{\frac{du}{3}} = \int \frac{e^u}{3} \cdot du = \frac{e^u}{3} + c = \frac{e^{x^3}}{3} + c$$

$x^3 = u$

$dx \quad x^2 = \frac{du}{3}$

$$\int \frac{e^u}{3} \, du = \frac{e^u}{3} + c$$

Soru

$$\int \frac{x}{x^2+1} \cdot dx = \int \frac{1}{2u}\, du = \frac{\ln|u|}{2} + c = \frac{\ln|x^2+1|}{2} + c$$

$x^2+1 = u$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

Soru

$$\int \sqrt[3]{x^3+1} \cdot x^2\, dx = \int \frac{\sqrt[3]{u} \cdot du}{3} = \frac{3u^{\frac{4}{3}}}{12} + c = \frac{3(x^3+1)^{4}}{12} + c$$

$x^2 dx = \frac{du}{3}$

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int 2\sin(u) \cdot du = -2\cos(u) + c = -2\cos(\sqrt{x}) + c$$

$2du$

$x^{\frac{1}{2}} = u$

$\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2du \quad \int 2\sin(u)\, du$

Soru $\quad -2\cos(\sqrt{x}) + c$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + c$$

du

$\arcsin x = u$

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$

Soru

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx = \int u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

Soru

$$\int \tan^3 x \cdot \sec^2 x\, dx = \int u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4} + c$$

$\tan x = u$

$\sec^2 x\, dx = du \quad \frac{u^4}{4} + c$

$u^3 \cdot du$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x+1} \cdot dx = \int \frac{1}{u+1}\, du = \ln|u+1|+c$$

$$\ln|\sin x+1|+c$$

Soru:

$$\int \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx = \sin(u)+c = \sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$$

Kısmi İntegral

Logaritma $\longrightarrow \ln x,\ \ln^2 x,\ \ln(2x+1),\ \log_2 x$
Arc'lılar $\longrightarrow$ arcsinx, ...
Polinom $\longrightarrow x,\ 2x-1,\ x^2,\ x^3+x^2+5$ ($\frac{1}{x}$ veya $\sqrt{x}$ değildir)
Trigonometri $\longrightarrow$ sinx, cos3x ....
Üsteller $\longrightarrow 5^x, e^x, e^{3x}, 2^x$ .....

* yalnız durumda,
* çarpım durumunda çözer
* bölü durumunu çözmez.

Yöntem

* integral u ve dv diye iki parçaya ayrılır.
* Neye u denileceğini $\overrightarrow{LAPTÜ}$ belirler.
* Önceki u'dur.
* geriye kalan her şey dv'dir.
* x olanın türevi yazılır.
* dv'nin integrali alınır.
* c ilk başta yazılmaz.
* $u.v - \int v\,du$ = sonucu verir.

Soru

$$\int \ln x\, dx =$$

$\ln x = u \longrightarrow \frac{1}{x}dx = du$

$dv = dx \longrightarrow v = x$

$$\ln x \cdot x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}\,dx =$$

$$x\ln x - x + c =$$

$$\int \overset{u}{x}\, \overset{dv}{e^x dx}$$

$u = x$
$du = dx$
$e^x dx = dv$
$e^x = v$

$$x.e^x - \int e^x\,dx$$

$$\underline{x.e^x - e^x + c}$$

$u = x \ \big|\ e^x dx = dv$

$\Downarrow$

$du = 1.dx$

$du = dx$

$\int e^x dx = \int dv$

$e^x + c = v$

ilk yazılmaz.

$$x.e^x - \int e^x dx = \underline{e^x(x-1) + c}$$

Soru

LAPTU

$$u.v - \int v\,du$$

$$\int \underset{\text{pol.}}{x} \underset{\text{trigo}}{\cos x}\, dx = ?$$

$x = u \longrightarrow dx = du$

$\cos x\, dx = dv \longrightarrow \sin x = v$

$x.\sin x - \int \sin x\, dx = x.\sin x + \cos x + c$

$$\frac{x}{x^2+1} \cdot e^{|x|} \cdot dx$$

$x^2 + 1 = u$

$x = \sqrt{u-1}$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\frac{1}{2u} \cdot e^{|\sqrt{u-1}|} \cdot du$$

Polinom Bölmesi ile İntegral

$$\int \frac{\text{Pay}}{\text{Payda}}\,dx$$

① Pay ve payda polinom olmalı

② Payın derece paydadan büyük ya da eşit olmalı.

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$

Bu durumda bu yöntem zorunludur!

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx \rightarrow \begin{array}{r|l} x & x+2 \\ \underline{-\;x+2} & 1 \\ -2 & \end{array} = \int 1 + \frac{-2}{x+2}\,dx$$

$$x - 2\ln|x+2| + c$$

$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx \Rightarrow \begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \underline{-\;x^2-x} & x+1 \\ +x & \\ \underline{-\;x-1} & \\ +1 & \end{array} \Rightarrow \int \left(x+1 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \underline{-\;x^3+x} & x \\ -x & \end{array} \Rightarrow \int \left(x + \frac{-x}{x^2+1}\right) dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{\underbrace{x^2+1}_{u}}\,dx$$

$x^2+1 = u$ | $\frac{1}{2}\ln|u| + c$

$2x\,dx = du$ |

Basit Kesirlere Ayırarak İntegral Alma

$$\int \frac{\text{Pay}}{\text{Payda}}\,dx$$

① Pay ve payda polinom

② Paydanın derecesi > Payın derecesi

③ Payda çarpanlara ayrılabilir olmalıdır.

1. Çeşit

Payda tamamen 1. derece ise

**

$$\int \frac{2x-5}{x^2-3x-4} \;\Big|\; \frac{2x-5}{(x-4).(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \int \frac{3/5}{x-4} + \frac{7/5}{x+1}\,dx$$

$\begin{matrix} x & -4 \\ x & +1 \end{matrix}$

$$\frac{2x-5}{(x-4).(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx-4B}{(x-4).(x+1)}$$

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ A-4B &= -5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 3/5 \\ B &= 7/5 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{5}\ln|x-4| + \frac{7}{5}\ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$$

$(x-2).(x+2)$

$A+B=0$

$2A-2B=1$

$4A=1$

$A=1/4$

$B=-1/4$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1/4}{x-2}+\frac{-1/4}{x+2}\right)dx$$

$$\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$$

2. Çeşit

Paydada 2. derece çarpan bulunursa

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1).(x-2)}\,dx = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \;!$$

$Ax^2+Bx^2+A-2C+Cx-2Bx=$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ C-2B&=2\\ A-2C&=1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} B&=-1\\ C&=0\\ A&=1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{-x}{x^2+1}\right)dx$$

$x^2+1=u$

$2x\,dx=du$

$$\ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln|u|+c$$

3. Çeşit

Paydada tamkare ifadeler bulunursa

$$\int \frac{2x+1}{(x-3)^2.(x+1)}\,dx = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

$Ax^2-6Ax+9A$

$Bx^2-2Bx-3B$

$+Cx+C$

$A+B=0$

$-6A-2B+C=2$

$9A-3B+C=1$

$A=-1/16$

$B=1/16$

$C=7/4$

$$\frac{-1}{16}\ln|x+1|+\frac{1}{16}\ln|x-3|+\frac{7}{4}\int\frac{1}{\underbrace{(x-3)^2}_{u}}\underbrace{dx}_{du}$$

$$\int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$\frac{-1}{u}+c$$

$$=-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x-3}+c$$

$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx$

$\downarrow$

$(1-\cos^2 x)^2 \cdot \cos^2 x \cdot \underbrace{\sin x \cdot dx}$

$-t^2\, dt$

$\cos x = t$

$-\sin x\, dx = dt$

$-t^2(1-t^2)^2$

$\int (-t^6 + 2t^4 - t^2)\, dt$

$\ln(g(x)) = \sin x \cdot \ln(f(x))$

$g'(x) = \left(\cos x \cdot \ln(f(x)) + \sin x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)[f(x)]^{\sin x}$

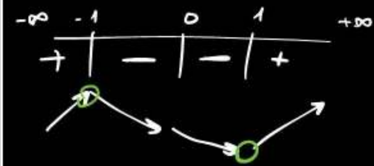
$\frac{x^3-3x^2+1}{x^3} = f(x)$

Düşey $\Rightarrow x = 0$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-3x^2+1}{x^3} = 1$

$x^2(x^2-1) =$ $x=0 \to$ tanımsız

$\left.\begin{matrix} x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}\right\}$ kritik



$\arctan x^2 = u$ | $x\, dx = dv$

$\frac{2x}{1+x^4}\, dx = du$ | $\frac{x^2}{2} = v$

$\frac{\arctan x^2 \cdot x^2}{2} - \int \frac{x^2}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}x}{1+x^4}\, dx$

$\frac{x^3}{1+x^4}\, dx$

$\int \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$

$x^4+1 = u$

$4x^3\, dx = du$

$\frac{\cancel{x^3}}{4} \cdot \frac{du}{4\cancel{x^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\, du$

$\frac{\ln|x^4+1|}{4}$

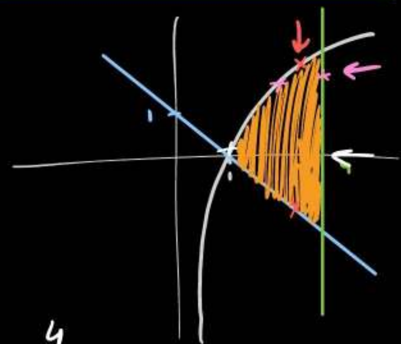
$\int_0^{\pi/4} e^{\tan x} \cdot e^{-\ln(\cos x)}$

$e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

$\tan x = u$

$\int_0^1 e^u\, du$

$e^u \Big|_0^1 = \boxed{e-1}$



$\int_1^4 (\ln x - (1-x))\, dx$

$\ln x = y$

$e^y = x$

$$\ln(\cot x)^{1/\ln x} = \ln y$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \cot x}{\ln(x)} = \ln y$$

$$\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot} \cdot x =$$

$$\frac{-x}{s.c} \quad -1 \cdot \frac{1}{\cancel{\cos}} \quad 1 \quad -1 = \ln y$$

$$\underline{\underline{e^{-1} =}}$$

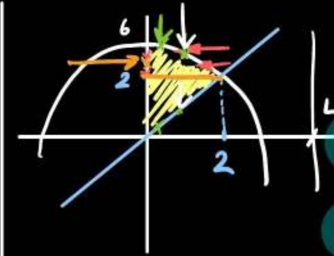
$$\int \sqrt{1+(y')^2} = L$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} = y'$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{cosec}^2}$$

$$\pi/4 \quad 45 \qquad \frac{1}{\sin} \qquad \pi/2$$

$$\ln|\sin x| \Big|_{\pi/4}$$



$$\pi \int_2^6 \left(\sqrt{6-y}\right)^2 dy +$$

$$\pi \int_0^2 y^2\, dy$$

$$x = \sqrt{6-y}$$

$$6 - x^2 = y$$

$$6 - x^2 = x$$

$$\pi \int_0^2 \left((6-x^2)^2 - x^2\right) dx$$

$$2\pi \int_0^2 (4-x)\cdot(6-x^2-x)$$

$$\int \cos(\ln(x))\,dx = I$$

$$\cos(\ln(x)) = u \qquad dx = dv$$

$$-\sin(\ln(x)).\frac{dx}{x} = du \qquad x = v$$

$$x.\cos(\ln(x)) + \int \sin(\ln(x)).\,dx$$

$$\sin\ln(x) = u \qquad dx = dv$$

$$\frac{\cos\ln(x)}{x}\,dx = du \qquad x = v$$

$$x.\sin\ln x \underbrace{- \int \cos\ln(x)\,dx}_{-I} = I$$

$$\frac{x.\sin\ln x + x.\cos\ln(x)}{2} + C$$

$$\int \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t - \sin^2 t - 6\sin t}\,dt$$

$$\frac{\cos^3 t}{\sin t(\sin^2 t - \sin t - 6)} \quad \begin{matrix} -3 \\ +2 \end{matrix}$$

$$\frac{\cos^3 t}{\sin t.(\sin t - 3).(\sin t + 2)}$$

$$\int \frac{1-u^2}{u.(u-3).(u+2)}\,du =$$

$$\sin t = u$$

$$\cos t.dt = du$$

$$1 - \cos^2 t = u^2$$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = 0 \text{ en az bir noktada}$$

$$\frac{2 - \pi c}{\sqrt{1-c^2}} = 0$$

$$2 = \pi c$$

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = c}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{h \to 1^+} \int_h^e \frac{dx}{x.\ln x}$$

$$\ln x = u$$

$$\frac{dx}{x} = du$$

$$\int_{\ln h}^{1} \frac{1}{u}\,du$$

$$-\ln|\ln h|$$

$$f'(x) = \sqrt{16-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$-2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}$

$16 - \cancel{x^2} + \cancel{2x^2}$

tanımsız

$$\frac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$$

$x = -4, 4$

-4	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	4
$-$	$+$	$-$	

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3 \cdot \sqrt{(x+1)^2-4}}$$

$x+1 = 2\sec t \implies dx = 2\sec t \cdot \tan t \cdot dt$

$$\int \frac{dt}{8\sec^2 \cdot}$$

$$\frac{1}{8}\int \cos^2 t\, dt =$$

$1+\cos 2t$

$\cancel{6} = \cancel{2}\sqrt{a}$

3

$\underline{a=9}$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

$x^{\frac{3}{2}}$

$$\int \sec^2\sqrt{x} \cdot dx$$

$\sqrt{x} = t$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dt$

$2\int \sec^2 t \;\; t \cdot dt$

$t = u$	$\sec^2 t\, dt = dv$
$dt = du$	$\tan t = v$

$$2\left(\tan t \cdot t - \int \tan t\, dt\right)$$

$$\int \frac{\sin t}{\cos t}\, dt$$

$\cos t = x$

$-\sin t\, dt = dx$

$$\int \frac{-1}{x}\, dx$$

$-\ln|\cos t|$

$$\lim_{R\to 0^+}\int_R^1 \frac{dx}{x\cdot(1+\ln^2 x)}$$

$\ln x = u$

$\frac{1}{x}\cdot dx = du$

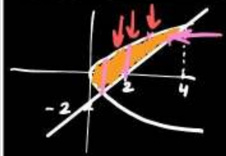
$$\frac{du}{(1+u^2)}$$

$$\arctan(\ln x)\Big|_R^1$$

$$0-\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$$e^{\arctan x}\cdot\frac{-x^2+1}{}$$

$$\frac{3x+x^3}{}$$



$y-x=-2$

$y=x-2$

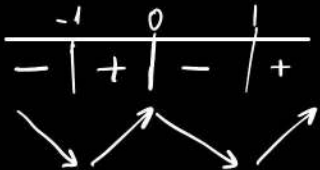
$$\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\frac{\frac{1}{x+1}}{1}$$

$$\frac{2(x^2-1)^3\cdot x}{\sqrt{1+(x^2-1)^2}}=0$$

$x=0$

$x=1,-1$



$t=\tan u$

$\frac{1}{x}$ $dt=\sec^2 u\cdot du$

$$\int_{\arctan(x^{-1})}^{\arctan 1}\frac{1}{\cos u}\,du=\ln|\cos(u)|\Big|_{\arctan(\frac{1}{x})}^{\arctan 1}$$

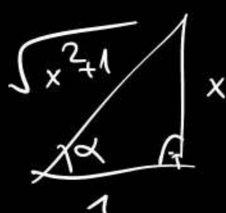
$t=\tan u$

$dt=\sec^2 u\cdot du$

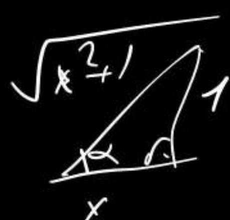
$$\int_{\arctan(1)}^{\arctan(x)}\frac{\sec u\cdot du}{\tan\cdot\cancel{\frac{1}{c}}\cdot\frac{c}{s}}\rightarrow\ln|\sin x|\Big|_{\arctan 1}^{\arctan(x)}$$

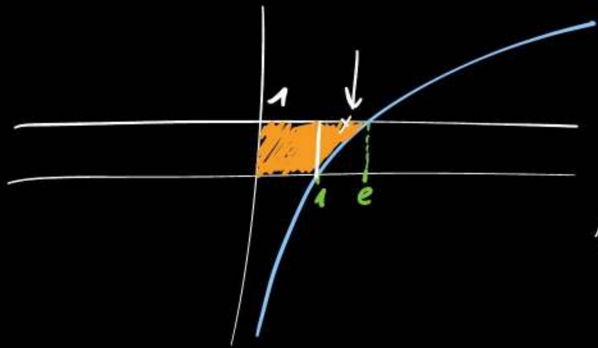
$$\cancel{\ln|\cos(\arctan 1))|}-\cancel{\ln|\sin(\arctan 1)}$$

$$\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$



x





$$\int_2^5 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$x\sqrt{x^2-2} = y'$$

$$1 + x^2\cdot(x^2-2) = x^4-2x^2+1$$

$$\sqrt{x^4-2x^2+1}$$

-1

-1

$$\sqrt{(x^2-1)^2} = \int_2^5 x^2-1$$

$125-8$

$117 : 3 = 39$

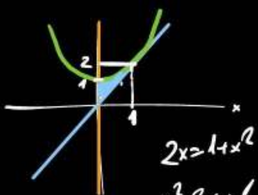
-9

27

$$\frac{x^3}{3} - x$$

$$39-3 = \underline{\underline{36}}$$

$$\int_0^1 dx + \int_1^e 1-\ln x$$



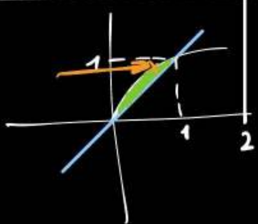
$2x = 1+x^2$

x^2-2x+1

-1

-1

$$2\pi\int_1^2 y\cdot\frac{y}{2} -$$



$$\pi\int_0^1 \left((y^2-2)^2-(y-2)^2\right)dy$$

$$2\pi\int_0^1 (2-x)\cdot(\sqrt{x}-x)\,dx$$

Trigonometrik Dönüşüm İle İntegral Alma

① Yarım Açı Yardımıyla İntegral Alma

$$\int \sin^2 x \, dx, \quad \int \cos^2 x \, dx, \quad \int \sin^4 5x \, dx, \ldots$$

★ çift dereceye sahip sin ve cos'lu integrallerde

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \boxed{2\cos^2 x - 1} = \boxed{1 - 2\sin^2 x}$$

★★

$$\frac{\cos 2x + 1}{2} = \cos^2 x \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \;\; ★★$$

Soru

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

$$\int \cos^2 3x \, dx = \int \frac{\cos 6x + 1}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right) + c$$

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$\int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \, dx$$

$$\frac{1}{4}\left(x - \frac{2\sin 2x}{2}\right) + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \, dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx = \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$$

② [$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$] özdeşliği ile integral çözme

$\int \sin^3 x\,dx$, $\int \cos^5 x\,dx$ | $\int \sin^3 x \cdot \cos^5 x\,dx$, $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x$

* tek başına üssü tek olan durumlarda | * çarpım durumunda ikisi tek veya biri tek durumunda

Soru:

* değişken değiştirme

$$\int \sin^3 x\,dx = ? \quad \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot dx = \int (1-\underbrace{\cos^2 x}_{u}) \cdot \overbrace{(\sin x) \cdot dx}^{-du}$$

$$= -\int (1-u^2) \cdot du \qquad = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

Soru:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x\,dx$$

$$\int (1-\underbrace{\sin^2 x}_{u})^2 \cdot \overbrace{\cos x\,dx}^{du} = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

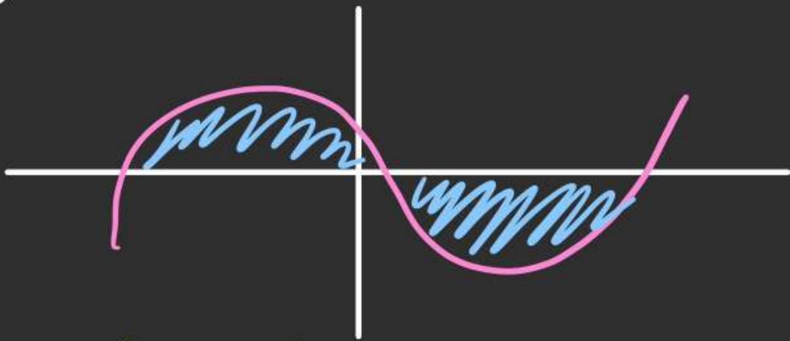
Soru:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot \cos^4 x \cdot dx$$

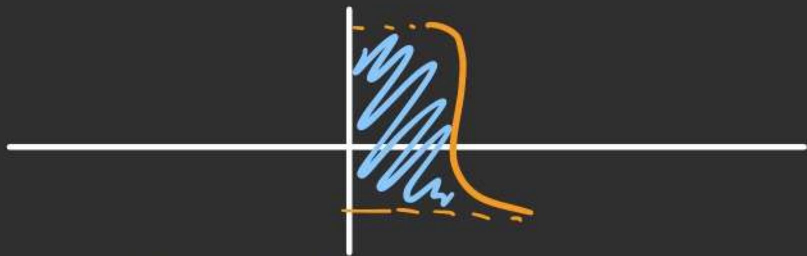
$$= \int (1-\underbrace{\cos^2 x}_{u}) \cdot \cos^4 x \cdot \overbrace{\sin x\,dx}^{-du}$$

$$= -\int (1-u^2)\,u^4\,du = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

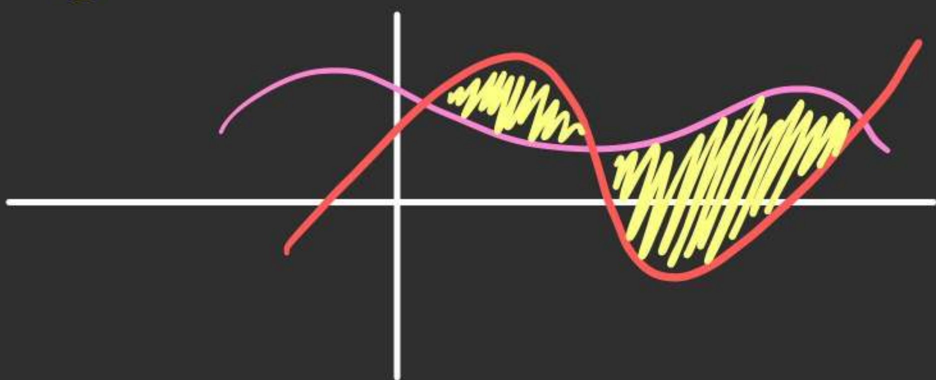
Integralde Alan Çeşitleri



x-ekseni ile arada kalan alan



y-ekseni ile arada kalan alan



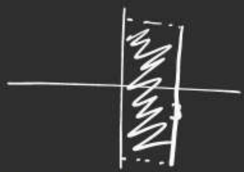
iki eğri arasında alan

Integralde Alan Hesaplarken Çizimi Bilinmesi Gereken Fonksiyonlar

① Doğru Grafikleri

* Eksenlere dik

$x = 3$

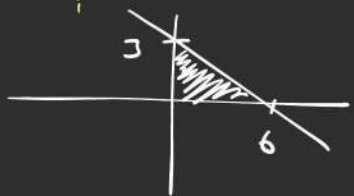


* Orijinden geçenler

* $x + 2y = 6$

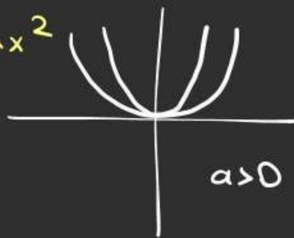
$y = 3x + 12$

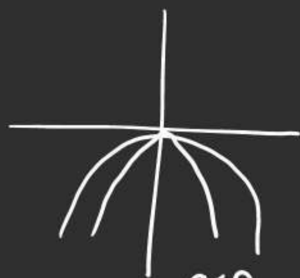
⋮



② Parabol Grafikleri

* $y = ax^2$

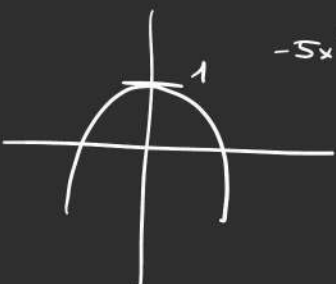




* $y = ax^2 \pm k$

$x^2 + 1 = y$

$-5x^2 + 1 = y$

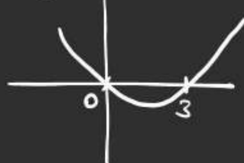


* $y = ax^2 + bx + c$

$a \rightarrow$ kolların yönü

$y = 0 \Rightarrow$ x-eksenini kestiği noktalar

$y = x^2 - 3x$

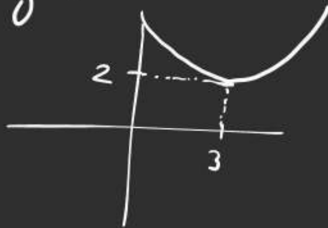


$y = x^2 + 2x - 3$

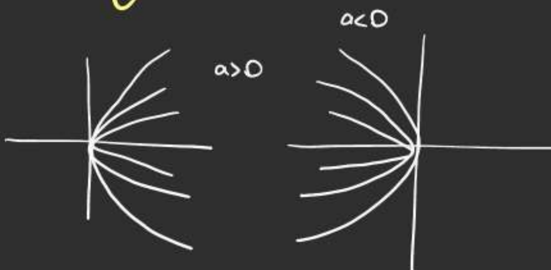
* $y=a(x-r)^2+k$ $\quad (r,k)=$ tepe noktası

$y=(x-3)^2$

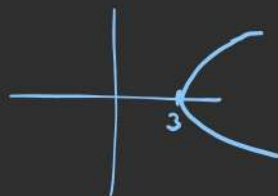
$y=(x-3)^2+2$



* $x=ay^2$



$x=y^2+3$



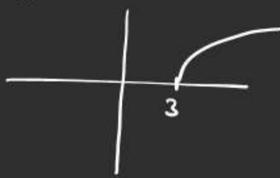
$x=-2y^2+1$

* $x=y^2-3y$

3 Özel Grafikler

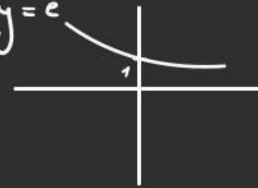
$y = \sqrt{x}$

$y = \sqrt{x-3}$



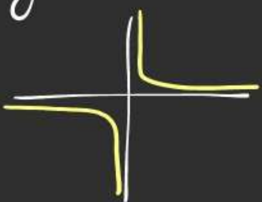
$y = e^{x}$

$y = e^{-x}$



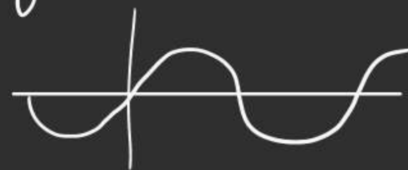
$y = \ln x$

$y = \frac{1}{x}$

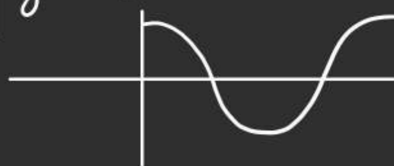


$y = \frac{1}{x^2}$

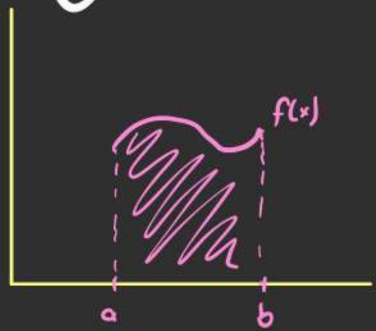
* $y = \sin x$



$y = \cos x$

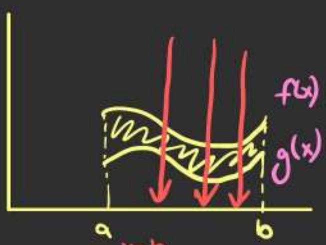


Integralde Alan



Alan = $\int_a^b f(x)\,dx$

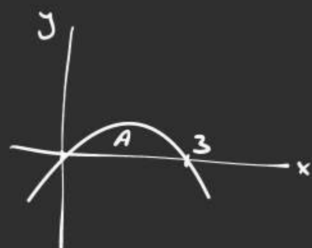
Eğriler Arasında Alan



Alan= $\int_{x=a}^{x=b} (f(x)-g(x))\,dx$

x ekseni üzerinde parabol altında kalan bölgenin alanı

$3x-x^2 = f(x)$



$A=\int_0^3 (3x-x^2)\,dx$

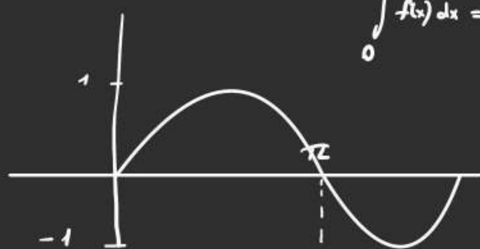
$9/2 =$

$\sin x = f(x)$ $(0, 2\pi)$

$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi}$

$1-1 =$

$\underline{\underline{0}} =$



**

$-1 \le x \le 2$ için $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

- çizilemeyen fonk. için;

* türev al.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$

$x = 0, 2, -1$

$\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2)\,dx$

$+$

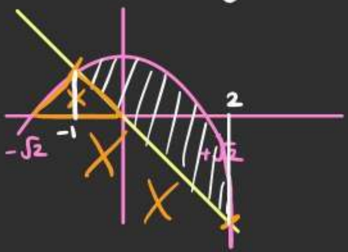
$\int_0^2 (x^3 - x^2 - 2)\,dx$

$=$

$\frac{28}{12}$

Sorular:

$y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = -x$ ile çevrili bölge alanı = ?

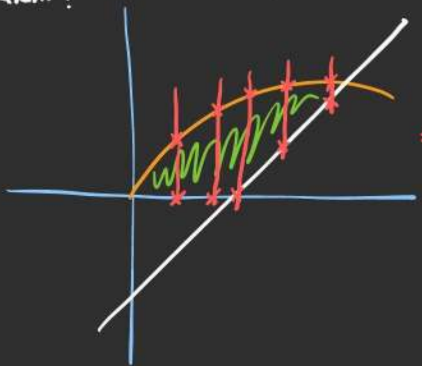


$$2 - x^2 = -x$$

$$\boxed{x = 2, -1}$$

$$\int_{-1}^{2} \left[(2-x^2) - (-x)\right] dx =$$

Birinci dörtte birlik bölgede üstten $y = \sqrt{x}$ alttan x ekseni ve $y = x-2$ ile sınırlı bölgenin alanı?



$\Rightarrow$ $$A = \int_0^2 (\sqrt{x} - 0)\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - (x-2))\,dx =$$

$$\frac{10}{3} =$$

Soru:

$y^2 - 4y$, $2y$ fonk alan

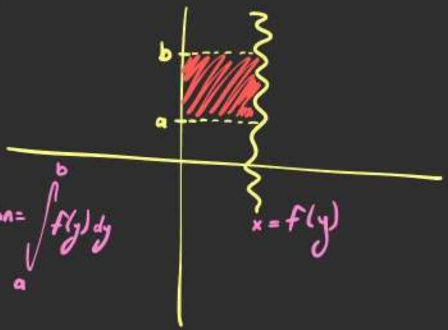
$$y^2 - 4y = 2y$$

$$\boxed{y = 0, 6}$$

$$\int_0^6 6y - y^2 = \underbrace{3y^2 - \frac{y^3}{3} \Big|_0^6}_{\boxed{+36}}$$

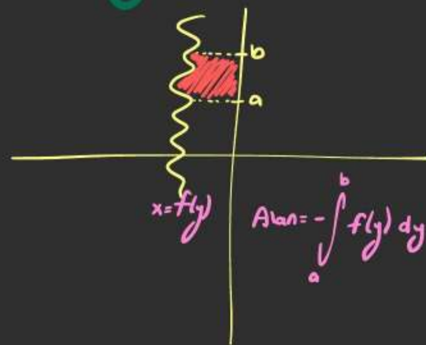
y-ekseni ile Alan Hesaplama

y-ekseninin sağında



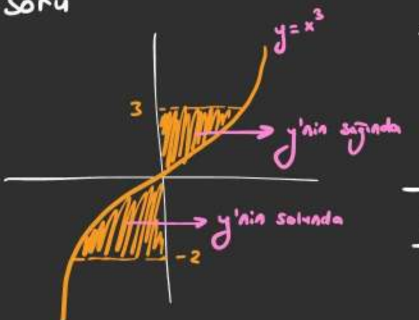
$$\text{Alan} = \int_a^b f(y)\,dy$$

y ekseninin solunda



$$\text{Alan} = -\int_a^b f(y)\,dy$$

soru



$\sqrt[3]{y} = x$

$f(y) = \sqrt[3]{y}$

$$-\int_{-2}^{0} y^{\frac{1}{3}} = \underbrace{\frac{-3y^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_{-2}^{0}}_{\boxed{+\frac{3\sqrt[3]{16}}{4} + \frac{3\sqrt[3]{81}}{4}}}$$

Soru:

$x = y^2 - 4$ ile y ekseni arası kalan alan=?

$y^2 - 4 = 0$

$y = \mp 2$

$$-\int_{-2}^{0} (y^2 - 4)\,dy = \frac{-y^3}{3} + 4y \Big|_{-2}^{0}$$

$$16 \quad \frac{-16}{3} \quad \boxed{\frac{32}{3}}$$

iki grafik arasında kalan alan

Soru

$x^2 = x$

$\boxed{x = 0,1}$

$$\int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \boxed{\frac{-1}{6}}$$

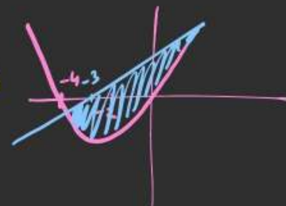
$\frac{+1}{6}$ alan

$x^2 + \cancel{4x} = \cancel{2x} + 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$\begin{matrix} +3 \\ -1 \end{matrix}$

$x = -3, 1$

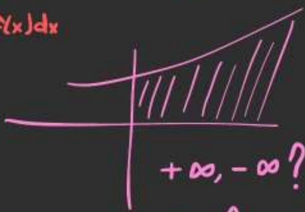


$$\int_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)\,dx = \frac{-32}{3} \;//\; \frac{+32}{3}$$

Genelleştirilmiş integral (Improper Integral)

1. Sınırlarında sonsuz içeren

* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$
* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$
* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$



$+\infty, -\infty\,? \longrightarrow$ Iraksak

Sayı $? \longrightarrow$ Yakınsak

2. Sınırlarında tanımsızlık içeren integraller

$\int_1^3 \frac{1}{x-3}$ $\quad$ $\int_1^3 \frac{1}{x-2}$

---

1. Sınırlarında Sonsuz İçeren

* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} \int_a^h f(x)\,dx$

Soru: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x}\,dx$

$= \lim_{t\to+\infty} \ln x \Big|_2^t = \lim_{t\to+\infty} \overset{\infty}{\overline{\ln t}} - \ln 2$

$= +\infty$

* Sonuç $\to$ $\pm\infty$ Iraksak
* Sonuç $\to$ Sayı Yakınsak

* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$

$\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^1 e^x\,dx$

$= \lim_{t\to-\infty} (\overset{e}{\overline{e}} - \underset{0}{\underline{e^t}}) = e$

---

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} f(x)\,dx$

Soru

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = ?$$

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\arctan x\Big|_{-\infty}^{0} \qquad\qquad \frac{\pi}{2}$$

$$0-\underbrace{\arctan(-\infty)}_{\left(\frac{-\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} \quad + \quad = \pi$$

---

② Sınırlarında tanımsızlık içeren

* Üst sınırın tanımsız yapması
* Alt sınırın tanımsız yapması
* Sınırları arasındaki bir değeri tanımsız yapması

* $$\int_1^3 \frac{1}{x-3}dx \longrightarrow \lim_{x\to3^-}\int_1^{t}\frac{1}{x-3}dx$$

* üst sınırda limite soldan yaklaşılır.

$$\lim_{x\to3^-}\left(\ln|x-3|\right)\Big|_1^t$$

$$\lim_{x\to3^-}\ln\left|\frac{t-3}{2}\right|$$

$$= \ln|0^-| = \ln 0^+$$

$$= -\infty$$

* $$\int_1^3 \frac{1}{x-2}dx$$

$$\lim_{t\to2^-}\int_1^{t}\frac{1}{x-2}dx + \lim_{t\to2^+}\int_t^3\frac{1}{x-2}dx$$

* $$\int_1^3 \frac{1}{x-1}dx = \lim_{t\to1^+}\int_t^3\frac{1}{x-1}dx$$

$$\ln|x-1|\Big|_t^3$$

$$\ln\left|\frac{2}{t-1}\right| = \ln\infty = \infty$$

Integralde Hacim Hesaplama

*** Disk Metodu**

x-ekseni etrafında
y-ekseni etrafında (eksene temas varken)

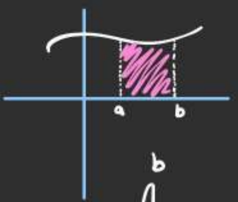
iki grafik arasında kalan alanın
x veya y ekseni etrafında döndürülmesi

*** Shell Metodu**

x-ekseni etrafında döndürme
y-ekseni " "
x=a veya y=b " "

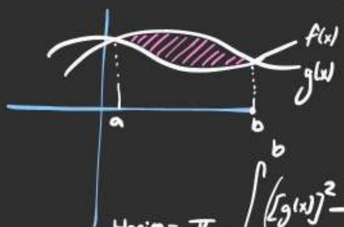
Disk Metodu

* x-ekseni etrafında



$$\text{Hacim} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

veya

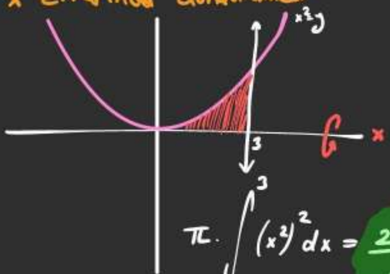


$$\text{Hacim} = \pi \cdot \int_a^b \left([g(x)]^2 - [f(x)]^2\right) dx$$

WASHER METODU !

Soru

$y = x^2$, $x = 3$ ve x arasında
x etrafında döndürülmesi



$$\pi \cdot \int_0^3 (x^2)^2 \, dx = \frac{243}{5}\pi$$

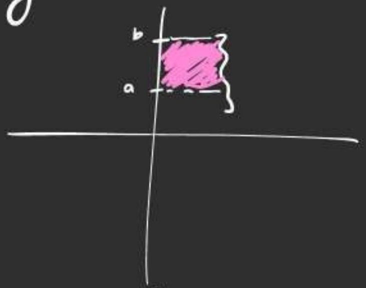
Soru

$y = x^2 + 1$, $y = 5$ ve y ekseni

$$\pi \int \left(25 - (x^2+1)^2\right) dx$$

Disk Metodu

* y-etrafında

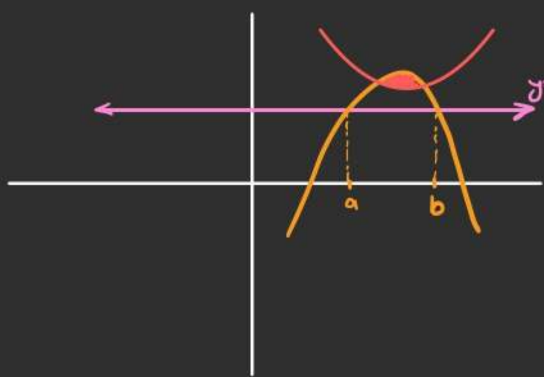


$$\text{Hacim} = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy \quad / \quad \text{Hacim} = \pi \cdot \int_a^b \left([g(y)]^2 - [f(y)]^2\right) dy$$

* Yatay doğru etrafında döndürme

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x) - a)^2 \, dx$$

WASHER METODU !



Soru

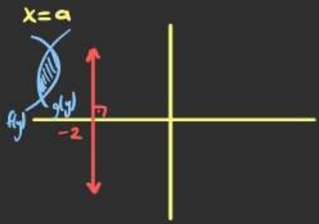
$y = x^2$, $y = 4$ ve y ekseni arasında

$y=4$ doğrusu etrafında

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 \, dx$$

$$= \frac{256\pi}{15}$$

* Düşey doğru etrafında döndürme



$$V = \pi \int_a^b \left[(g(y)-a)^2 - (f(y)-a)^2 \right] dy$$ (Washer)

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2$$

Soru:
$y = x^2$, $y = 2x$, $x = -2$ etrafında döndürünüz.

$x^2 = 2x$

$$\boxed{\begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}}$$

$$V = \pi \int_0^4 \left[(\sqrt{y}+2)^2 - \left(\frac{y}{2}+2\right)^2 \right] dy$$

$V = 8\pi$

Shell Metodu y ekseni için

$$* \quad V = 2\pi \int_a^b r \cdot h \cdot dx$$

* Sınırlar x ekseninden gelir. $a \leq x \leq b$

r: shell yarıçapı $\Rightarrow$ $r = x$,

h: shell yüksekliği $\Rightarrow$ $h = \begin{bmatrix} \text{alanın} \\ \text{üst} \\ \text{sınır} \\ \text{fonksiyonu} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{alanın} \\ \text{alt} \\ \text{sınır} \\ \text{fonksiyonu} \end{bmatrix}$

Soru

$y = x^2$, $x = 2$ ve x ekseni

y ekseni etrafında döndürülürse hacim = ?

1. adım

2. adım

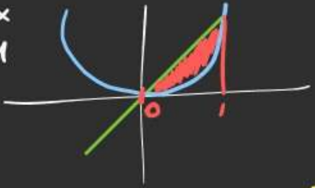
$$\left.\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 r \cdot h \cdot dx \\ &\downarrow \\ V &= 2\pi \int_0^2 x \cdot (x^2 - 0) \cdot dx \end{aligned}\right\} \quad 2\pi \cdot \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^2 \right) = \underline{\underline{8\pi}}$$

Soru

$y = x^2$, $y = x$ arasında kalan alan (y ekseni),

$x^2 = x$

$x = 0, 1$



$$2\pi \int_0^1 x \cdot (x - x^2)\, dx$$

$$x^2 - x^3$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right)$$

$$2\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Shell Metodu x ekseni için

$* \; V = 2\pi \int_a^b r \cdot h \cdot dy$

* Sınırlar y ekseninden gelir. $a \leq y \leq b$

r: her zaman $r = y$

h: [Alanın sağındaki fonk] − [Alanın solundaki fonksiyon]

Soru:

$y = x^2$, $x = 2$ ve x etrafında

$$= 2\pi \int_0^4 y \cdot (2 - \sqrt{y})\, dy$$

$$2\pi \left(y^2 - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} \Big|_0^4 \right) = \frac{32\pi}{5}$$

Yay Uzunluğu

$f(x), \quad a \leq x \leq b$

$$\mathcal{L} = \int_a^b \left(\sqrt{1+(y')^2}\right) dx$$

$$\mathcal{L} = \int_c^d \left(\sqrt{1+(x')^2}\right) dy$$

$c \leq y \leq d$

Soru

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\cancel{\int_0^2 \left(\sqrt{1+(y')^2}\right) dx} =$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+(x')^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1+9y}\, dy = \int_1^{10} \frac{\sqrt{u}}{9}\, du$$

$1+9y = u$

$9dy = du$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \boxed{10\sqrt{10}-1}$$

$f(x), \quad a \leq x \leq b$

x-ekseni etrafında

dönen yüzey alanı

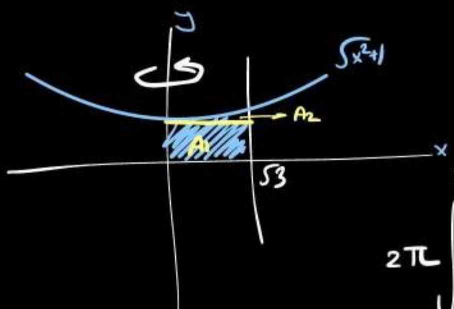
$$S = \int_a^b \left(2\pi \cdot y \sqrt{1 + (y')^2} \right) dx$$

$x = y^2$

$\sqrt{x} = f(x)$

$\pi \int_0^{\sqrt{2}} y^4$ $\quad \dfrac{4\sqrt{2}\,\pi}{5}$

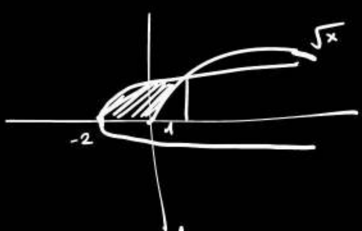
$2\pi \int_0^2 x\left(\sqrt{2} - \sqrt{x}\right) =$



$\sqrt{x^2+1} = y$

$2\pi \int_0^2 x \cdot \sqrt{x^2+1}$

$\pi \int$



$2\pi \int_{-2}^{1} y \cdot y^2 - \cancel{3y^2} + 2$

$-2y^3 + 2y \, dy$

$\boxed{3\pi}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} =$$

$$-(x^2-4x+4)+4$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$x-2=u$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-u^2}} = \arcsin\frac{x-2}{2} + c$$

$\star$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{1+e^x}\,dx \quad \Big\| \quad 1+e^x=u^2, \quad e^x dx = 2u\,du$$

$$\int |u| \cdot \frac{2u\,du}{e^x} = \frac{2u^2\,du}{(u^2-1)}$$

$$2u^2 \div (u^2-1) = 2, \quad \text{remainder } +2$$

$$= \int \left(2+\frac{2}{u^2-1}\right)du$$

$$2\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$2u + \qquad \frac{1}{(u-1)\cdot(u+1)} = \frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$$

$$A+B=0, \quad A-B=1, \quad A=1/2, \quad B=-1/2$$

$$\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\ln|u-1| - \frac{1}{\cancel{2}}\ln|u+1|\right)$$

$$2u + \ln|u-1| - \ln|u+1|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+3}}$$

$$x-1=u, \quad u=\sqrt{3}\cdot\tan t, \quad du=\sqrt{3}\cdot\sec^2 t\cdot dt$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{u^2+3}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3}\sec^2 t\,dt}{\sqrt{3+3\tan^2 t}} = \int \sec t\,dt$$

$$= \ln|\sec t + \tan t| + c$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{3+u^2}}{\sqrt{3}} + \frac{u}{\sqrt{3}}\right| + c$$

$\star$ Karekøklerde

tamkare

tan, sec, sin dönüşümü

$$\int \frac{dx}{2x(1-\sqrt{x})^2} \qquad 1 = \cancel{1+u^2} - 2u + Bu - \cancel{Bu^2} + u$$

$$\sqrt{x}=u, \quad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du$$

$$\Big\| \quad \frac{1}{u\cdot(1-u)^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1-u} + \frac{C}{(1-u)^2}$$

$$\boxed{A=1,\ C=1,\ B=1}$$

$$\int\left[\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)^2}\right]du$$

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2}\right)\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+e^x}$$

$\ln|$

$e^{kx} = u$

$e^{kx} \cdot k \cdot dx = du$

$t = \arctan(u)$

dt

$$\frac{1}{k}\int \frac{\arctan(u)}{1+u^2} \cdot \frac{du}{u}$$

$t \to 1$

$\frac{1}{\tan t} dt \to \ln|\tan t|$

$$\frac{1}{k}\int \frac{t \cdot dt}{\tan t}$$

$$\frac{1}{k} \cdot \left[t \cdot \ln|\tan t| - \int \ln|\sin t| \, dt \right.$$

$\ln|\sin t| = u \to \frac{\sin t}{\cos t} dt = du$

$dt = dv$

$t = v$

$$\int \frac{x^2+5}{x(x^2+2x+5)} dx =$$

$$\frac{x^2+5}{x \cdot (x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+2x+5}$$

$Ax^2 + (2A+B)x + 5A$

$A = 1$

$B = -2$

$$\int \frac{1}{x} + \frac{-2}{x^2+2x+5}$$

$$\ln|x| + \int \frac{-2}{(x+1)^2+4} dx \qquad x+1 = u \quad dx = du$$

$$\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}} \arctan \frac{x+1}{2}$$

$$\ln|x| - \arctan \frac{x+1}{2} + c$$

$$\int \frac{x^2}{(3-x^2)^{3/2}} dx =$$

Not: $\sqrt{1+u^2} \to \tan t$

$\sqrt{u^2-1} \to \sec t$

$\sqrt{1-u^2} \to \sin t$

$x = \sqrt{3}\sin t$

$dx = \sqrt{3}\cos t \cdot dt$

$$\frac{\sin^2 t}{(\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t})^{\frac{3}{2}}} \cdot \cos t \cdot dt$$

$$\frac{\sin^2 t}{\cancel{\cos^3 t}} \cdot \cancel{\cos t} \, dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt =$$

$\sec^2 t - 1$

$\tan t - t + c$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}$$

$$\frac{e^{f(x)}\cdot \cancel{f'(x)}}{\cancel{f'(x)}} = 1$$

$a^2 = 1$

$\underline{a = \mp 1}$

$F(2) - F(0) = \frac{1}{4}$

$x^2 = u$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_1^4 f(2u)\,du \rightarrow \frac{F(8)-F(2)}{\cancel{4}} = \frac{15}{\cancel{16}} + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{4}{2} = 2}$$

$$f(t)\,dt = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{u+1}}\cdot du$$

$t^2 = u$

$2t\,dt = du$

$\sqrt{u+1}\Big|_a^x$

$\sqrt{t^2+1}\Big|_a^x$

$\cancel{(\sqrt{a^2+1})^2 = (-1)^2}$

$a^2 + \cancel{1} = \cancel{1}$

$\boxed{a=0}$

$$\frac{f(x) \qquad + f(+x)}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1} = G'(x)$$

$\boxed{=1}$

$f(-x) = -f(x)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \boxed{1}$$

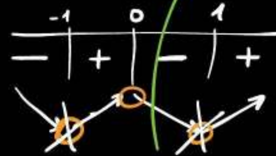
$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\Big[\underbrace{F'(6-x^2) + \ln(x^2-5)^2}_{F'(2)+0}\Big]\cdot \cancel{4} = F'(x)$$

$2F'(2) = F'(2)$

$F'(2) = 0$

$$F'(x) = \frac{(x^2-1)^3}{\sqrt{1+(x^2-1)^2}}\cdot 2x = 0$$

$x = 0, -1, +1$



0

$$G^{-1}\left(\int_1^x \frac{1+t^2}{\sqrt{3+t^2}}\,dt\right) = x$$

$$(G^{-1})'\left(\int_1^x \frac{1+t^2}{\sqrt{3+t^2}}\,dt\right)\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+3}}\right) = 1$$

$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1$

$t = \tan u$

$dt = \sec^2 u\,.\,du$

$\int \sec u\,.\,du$

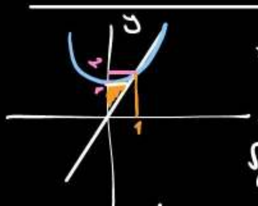
$\int \text{cosec}\,.\,du$

$t = \tan u$

$dt = \sec^2 u\,.\,du$

$$\int_1^x \frac{\sec u\,.\,du}{\tan u.}$$

$\frac{1}{\cancel{c}}\cancel{\frac{c}{s}} = \frac{1}{s}$

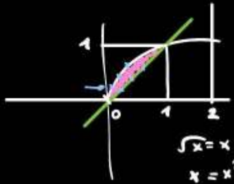


$x^2 + 1 = 2x$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\sqrt{y-1} = x$

$2\pi\int y\cdot\left(\frac{y}{2} - \sqrt{y-1}\right.$



$\sqrt{x} = x$
$x = x^2$
$x = 0, 1$

$y^2 = x$
$y = x$

$$\pi \int_0^1 \left((y^2-2)^2 - (y-2)^2\right) dy$$

$$y^4 - 4y^2 \cancel{+4} - y^2 + 4y \cancel{-4}$$

$$\int_0^1 \pi \left(y^4 - 5y^2 + 4y\right)$$

$$\int_2^5 \sqrt{1 + (y')^2}\, dy$$

$$\left((x^2-2)^{1/2} \cdot x\right)^2 = y'$$

$$\left(\sqrt{x^2-2} \cdot x\right)^2$$

$$\sqrt{x^4 - 2x^2}$$

$$\int_2^5 \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}\, dx$$

$$\frac{\sqrt{x^2-2} \cdot x}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}$$

$96 -$

$f(x)\Big|_2^{\frac{1}{2}}$

$16 - 7$

$\frac{18}{}$

$$\frac{2(x^4 - 2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{1440\,(3 \cdot (4x^3 - 4x)} \Bigg|_2^5$$

$x(x^2-1)$

$\cdot 24$

$y^2 = a$

$2y\,dy = da$

$$\sqrt{a^2 - 2a + 1}\; da$$

$$\int \frac{e^{-x}\, dx}{e^{-x} + 1}$$

$e^{-x} = u$

$+e^{-x}\, dx = -du$

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{-1}{u+1}\, du$$

$$-\ln|u+1| \Big|_1^{e^{-R}}$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R \frac{dx}{1+e^x}$$

$$-\ln(e^x + 1) + x$$

$(x^2-2)^{\frac{3}{2}}$

$$\frac{(x^4 - 2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{6x(x-1) \cdot (x+1)}$$

$\left(x\sqrt{x^2-2}\right)^2$

$$\int (x^4 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$$\sqrt{u^2 - 2u + 1}$$

$t = \tan u$

$dt = \sec^2 u \; du$

$\int \sec u \, du \qquad - \qquad \operatorname{cosec} u \, du$

$\lim_{c \to -1^+} \int_c^0 \frac{dx}{(x+1)^{3/5}}$ $\qquad x+1 = u$, $dx = du$

$\int_{c+1}^1 \frac{1}{u^{3/5}} du = u^{-3/5} du$

$\frac{5u^{2/5}}{2} \Big|_{c+1}^{1}$

$\lim_{x \to -1^+} \frac{5}{2}\left(1 - (x+1)^{2/5}\right) = \frac{5}{2}$

$\frac{x^2+5}{x.(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$

$x^2+5 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A$

$A=1$
$B=0$
$C=-2$

$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{-2}{x^2+2x+5}\right) dx$

$\frac{-2}{(x+1)^2+4}$ $\qquad x+1=u$

$\ln|x| +$

$\ln|x| - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$

$x = \sqrt{3}\sin t$

$dx = \sqrt{3}\cos t . dt$

$\frac{3\sin^2 t}{(3(\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t}))^{3/2}} . \sqrt{3}.\cos t. dt$

$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} . dt$

$\int (\underbrace{\sec^2 t - 1) dt}_{\tan t - t + c}$

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) . \Delta x$

$\Delta x = \frac{2}{n} \qquad \frac{8i^3}{n^3} + \frac{2i}{n}$

$x_i = \frac{2i}{n} \qquad \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{8i^3}{n^3} + \frac{2i}{n}\right)$

$\frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^3 + n + 1$

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2(n+1)^2}{n} + n + 1\right)$

$\frac{6n^2 +}{n^2} = \boxed{6}$

$\frac{\int_{-2}^{1} -|x| \, dx}{3} =$

$\int_{-2}^{0} x \, dx = -2 + \int_0^1 -x \, dx = -\frac{1}{2}$

$\frac{-x^2}{2}$

$\frac{\frac{-5}{2}}{3}$

$x = \sin\theta$

$dx = \cos\theta . d\theta$

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2\theta .}{\cos^4\theta} d\theta$

$\int_0^{\pi/6} \tan^2\theta . \sec^2\theta . d\theta$

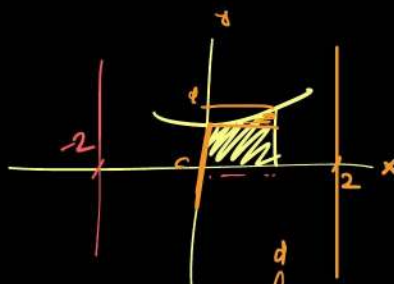
$\frac{\tan^3\theta}{3} \Big|_0^{\pi/6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 . \frac{1}{3}$

$$\pi \int_0^{\pi/4} \left(e^{2x} - \cos^2 2x\right) dx$$

$$2\pi \int (x+\pi) \cdot \left(e^x - \cos 2x\right) dx$$

$$\pi \int \left(\left(e^x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\cos 2x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) dx$$

	x-ekseninde	y-ekseninde
Disk	$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$	$\pi \int_c^d f(y)^2 dy$
Pul (Washer)	$\pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\, dx$	$\pi \int_c^d \left((f(y))^2 - (g(y))^2\right) dy$
Kabuk (Shell)	$2\pi \int_c^d y \cdot h \cdot dy$, h: sağ − sol	$2\pi \int_a^b x \cdot h \cdot dx$, h: üst − alt



$$2\pi \int_c^d y.$$

	x-etraf	y-etraf	x=2 etrafında
Disk	$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$	$\pi \int_c^d f(y)^2 dy$	$\pi \int_c^d (f(y)-2)^2 dy$
Kabuk	$2\pi \int_c^d y.(\text{sağ}-\text{sol}).dy$	$2\pi \int_a^b x(\text{üst}-\text{alt})dx$	$2\pi \int_a^b (2-y).(\text{üst}-\text{alt})$