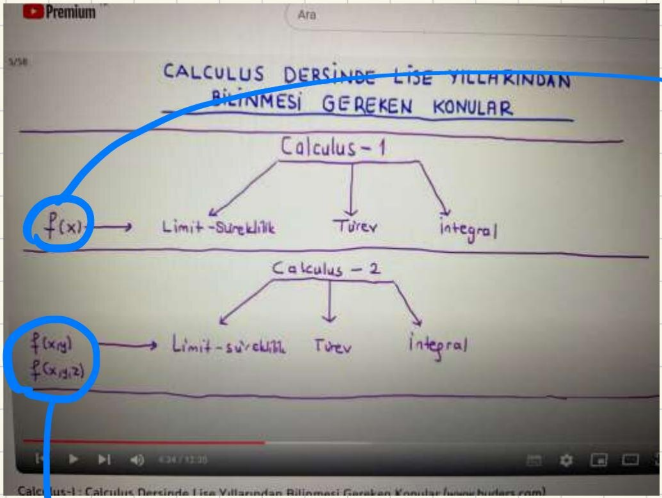
Mat 1



tek değişkenli

çok değişkenli

Bilinmesi Gerekenler

Fonksiyonlar

- Tanım görüntü kümesi bulma
- Ters fonksiyon
- Bileşke fonksiyon
- Parçalı Fonksiyonlar ve grafikleri çizme

Analitik Geometri

- Eğim Bulma
- Doğru denklemi yazma.
- Doğru grafikleri çizme
- Doğruların birbirlerine göre durumları

Trigonometri

* $30° - 45° - 60°$ ve $0° - 90° - 180° - 270° - 360°$ değerleini bulma.
* Trigo bağıntılar
* Yarım açı formülleri
* Ters trigo fonksiyonlar

Parçalı Fonksiyon Grafiği

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x>3 \\ x^2+1, & x\leq 3 \end{cases}$$

$x=3$ parçalanma noktasıdır.

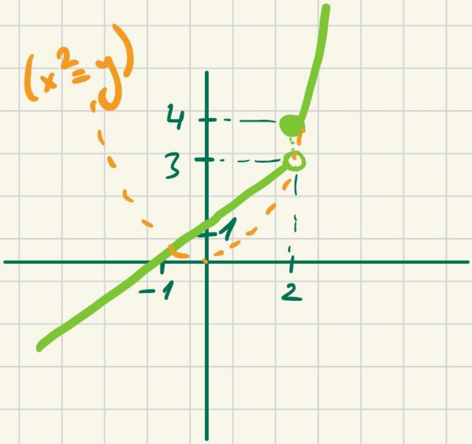
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<2 \\ 2x-1, & 2\leq x<5 \\ x^2+3, & 5\leq x \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} x=2 \\ x=5 \end{matrix}\right\}$ parçalanma noktası

Soru:

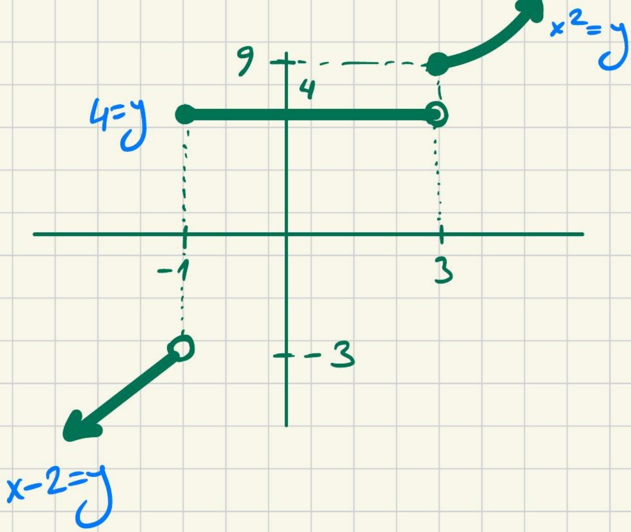
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x<2 \\ x^2, & x\geq 2 \end{cases}$$ grafiğini çiz.

$x=2$ parçalanma noktası

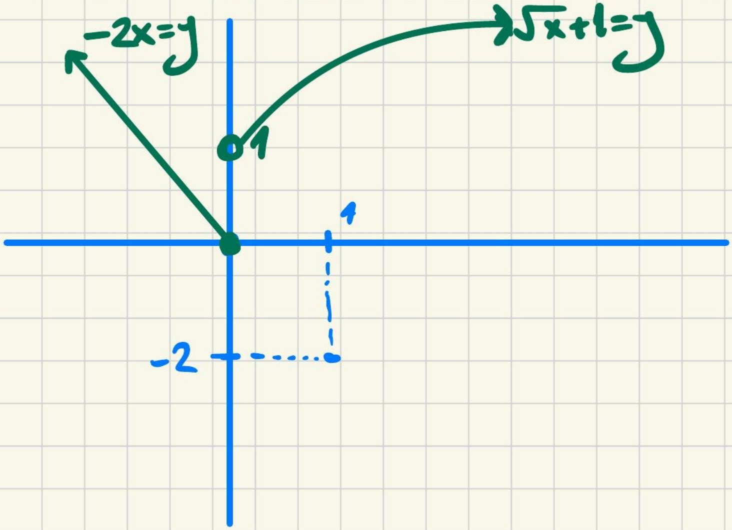


Soru:

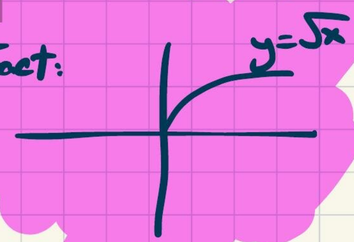
$$f(x)=\begin{cases} x-2, & x<-1 \\ 4, & -1\le x<3 \\ x^2, & 3\le x \end{cases}$$



Soru: $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0 \\ \sqrt{x}+1, & x>0 \end{cases}$ grafiğini çiziniz.



Fact:



Calculus'te Trigo Kuralları

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ → $1-\sin^2 x = \cos^2 x$ → $1-\cos^2 x = \sin^2 x$

② $\tan x . \cot x = 1$ → $\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$

③ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

④ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

Yarım Açı Kuralları

⑤ $\sin 2x = 2\sin x . \cos x$

⑥ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \longrightarrow \frac{x-1}{x+3} \geq 0$$

$x-1 \to 1$, $x+3 \to -3$

-3		1
$+$	$-$	$+$

$(-\infty,-3) \cup [1,\infty)$

farklı tanım kümesi bulma örneği

$$f(x)=\log_{(x-2)}(x+5) \longrightarrow$$

$x-2>0$	$x+5>0$	$x-2\neq 1$
$x>2$	$x>-5$	$x\neq 3$

log fonkta tanım kümesi bulma

$$f(x)=\ln(x^2-3x+2) \longrightarrow x^2-3x+2>0$$

$x \quad -2$

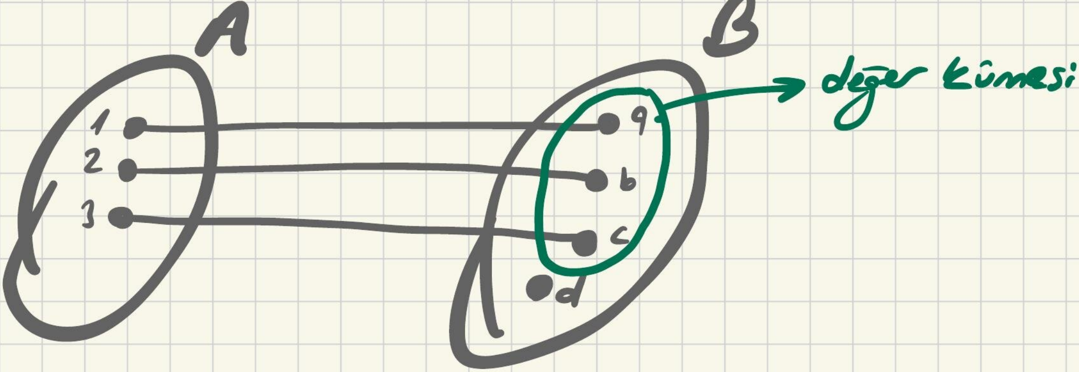
$x \quad -1$

$(x-2)(x-1)>0$

$2 \quad 1$

1		2
$+$	$-$	$+$

Görüntü Kümesi Bulma



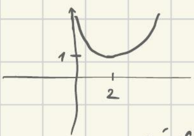
$f(x)=3$ domain = tanım kümesi =

range = görüntü kümesi = $\{3\}$

paraboller

$f(x)=x^2-4x+5$ görüntü kümesi

$T(r,k) \Longrightarrow r=\frac{-b}{2a}$ $k=f(r)$

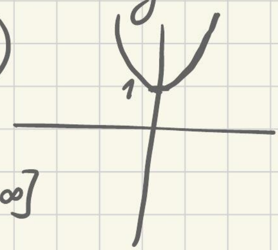


$r=2$ $k=f(2)=1$

görüntü küme = $[+1,\infty]$

$f(x)=2x^2+1$ görüntü kümesi

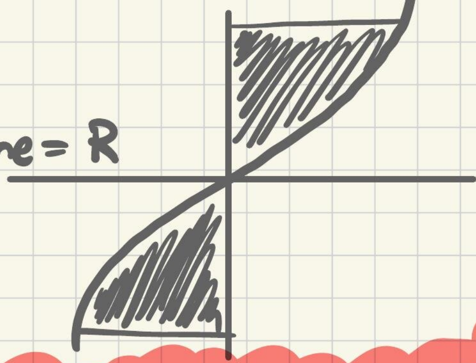
$(0,1)$



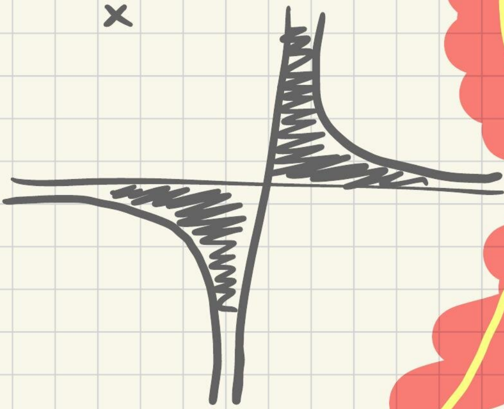
$[1,+\infty]$

$f(x) = x^3$

görüntü küme $= \mathbb{R}$

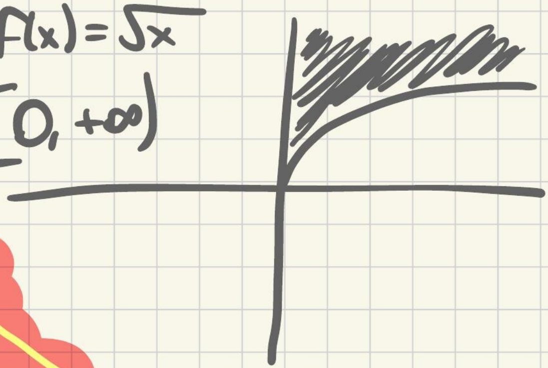


$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f(x) = \sqrt{x}$

$[0, +\infty)$



**

* $f(x) = \dfrac{3x-4}{x-5}$

$T.K = \mathbb{R} - \{5\}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{5x-4}{x-3}$

$G.K = \mathbb{R} - \{3\}$

$f(x) = \sin x \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$

$f(x) = \cos x \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$

$$\left.\begin{array}{l} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{array}\right\} \quad GK = [-1, 1]$$

$f(x) = 1 + \sin x \qquad 0 \leq 1 + \sin x \leq 2$

$f(x) = 2\cos x + 1 \qquad -1 \leq 2\cos x + 1 \leq 3$

Limit Nedir?

Limit

- Sayıya giden
- Sonsuza giden

Sayıya giden:

$\lim_{x \to 3} f(x)$

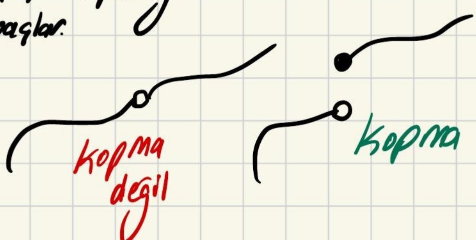
$\lim_{x \to 5} (3x - 2)$

Sonsuza giden:

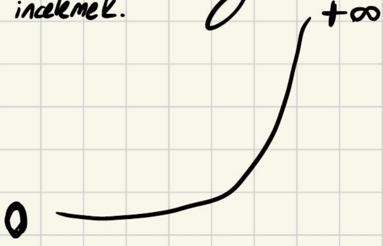
$\lim_{x \to \infty} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Amacı: Fonk. limitin aradığı noktada kopup kopmadığını belirlemesini amaçlar.



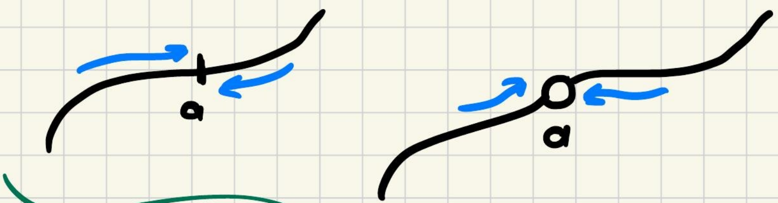
Amacı: Sonsuza giderken davranışını incelemek.



Bir Noktada Limit Olma Şartı

f(x)'in x=a nok. lim olması için

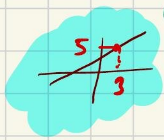
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$



Kopmaması yeterlidir.

Ör/

$\lim_{x\to 3}(2x-1)=?$



$y = 2x-1$

$\downarrow$

3

Ör/

$$\underbrace{\lim_{x\to 5}\frac{2x}{x-5}=\frac{10}{0}}_{\text{sağdan ve soldan bakılmalı}}$$

★ Önemli olan 3 ihtimal vardır.

1) Parçalı fonksiyonlarda
2) Mutlak Değerli
3) $\dfrac{\text{Sayı}}{0}$ durumu

Parçalı Fonk. Limit

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x>3 \\ x^2+1, & x\leq 3 \end{cases}$$

parçalanma noktası kopma adayıdır.

$\lim_{x\to 3} f(x) = ?$) yoktur.

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 10$ $\Big\} \neq$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x\neq 2 \\ 3, & x=2 \end{cases}$$

iken $\lim_{x\to 2} f(x) = ?$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 5$ $\Big\}$ $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$

Mutlak Değerli Limit

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = ?$

* önce mutlak d. kuralı uygulanır.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ $\Big\}$ lim yok.

** Belirsizlik'te mutlaka limit vardır.

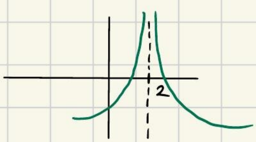
$\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$

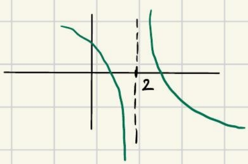
Tanımsızda Limit

$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0}$ tanımsız $\Longrightarrow$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$
$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$ $\Big\}$ lim yok.



= lim var: $+\infty$



= lim yok!

Belirsizlikte Limit (L'pital kullanmadan)

1) $\frac{0}{0}$ 3) "$\infty - \infty$" 5) 1^{∞}, ∞^{0}

2) "$\frac{\infty}{\infty}$" 4) $0.\infty$ 0^{0}

L'hospital ile hepsi çözülür.

L'hospital kuralı olmadan çözülebilir.

1) Çarpanlara Ayırma

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{0}{0}$$

2) Eşlenik Çarpımı

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+11} - 4}{2x-10} = \frac{0}{0}$$

3) Trigonometrik Kurallar

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow 1$$

⋮

Eşlenik Belirsizlikleri

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[2]{x+7} - 3}{x-2} = ? \quad \frac{0}{0}$$

$$\frac{(\sqrt{x+7} - 3).(\sqrt{x+7} + 3)}{(x-2).(\sqrt{x+7} + 3)} \qquad \frac{x+\cancel{7}-\cancel{9}}{x-2}$$

$$\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \to 25} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x+11} - 4} = ?$$

$$\frac{(\cancel{x^2-25}).(\sqrt{x+11} + 4)}{(\cancel{x-5})} = 10.8 = 80$$

$$20 . 4 = \underline{\underline{80}}$$

$$\underline{2 . 2x . \sqrt{x+11}}$$

Trigonometrik Belirsizlikler

* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

böyle kabul edilir.

* $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
* $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1$
* $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$
* $\lim_{x \to 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$
* $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

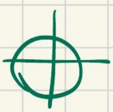
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x} = ? \rightarrow \underbrace{\frac{\sin 2x}{x}}_{2} \cdot \frac{x}{\tan 5x}$$

$$2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3} = \lim_{a \to 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$$

$a = x - 3$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(2x-3) \cdot \sin x}{\cos x \cdot x} = ?$$



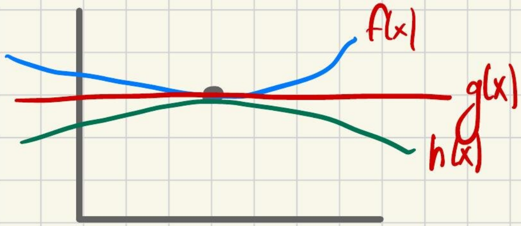
$$\frac{2x-3}{\cos x} \to -3 \cdot \frac{\sin x}{x} \to 1 = -3$$

Sıkıştırma Teoremi

Sıkıştırma Teoremi: $f(x), g(x), h(x)$ üç fonk olsun

$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim h(x) = L \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = L \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$



Soru:

$\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = ?$

$-1 \leq \left(\cos\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$

$-x \leq x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} +x = 0 \end{array}\right\} 0$

$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$

$-x \leq x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} (-x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} (x) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} x\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$

Soru:

$\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$-x^2 \leq x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

$\underbrace{-\infty \qquad\qquad +\infty}_{\text{sıkıştırma ile çözülemez.}}$

Soru:

$\sqrt{4-x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{4+x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4-x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4+x^2} = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

Sonsuza Giden Limitler

Sonsuza Gitme

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

x değerleri $+\infty$ doğru artarken y değerlerinin ne yaptığına cevaptır.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

x değerleri $-\infty$ doğru azalırken y değerlerinin ne yaptığına cevaptır.

Soru: $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2) = +\infty$ //

$x = 1 \longrightarrow 1$

$x = 10 \longrightarrow 100$

$x = 20 \longrightarrow 400$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2) = +\infty$ //

$x = -1 \longrightarrow 1$

$x = -10 \longrightarrow 100$

$x = -20 \longrightarrow 400$

önemsiz

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{+5x} \cancel{-7}) = +\infty$$

önemsiz

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 \cancel{-3x^2} \cancel{+5x} \cancel{-7}) = -\infty$$

en büyük derece önemsenir.

Sonsuza Giden Limit Kuralları

Kural:

$$\lim_{x \to \begin{smallmatrix}+\infty \\ -\infty\end{smallmatrix}} \frac{\text{Pay polinom}}{\text{Payda polinom}}$$

① Payda derece > Pay derece

Sonuç = 0

② Payda derece = Pay derece

Derece belirleyen terimlerin KATSAYI ORANI cevaptır.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{4x+5} = \frac{3}{4}$$

③ Pay derece > Payda derece

Sonuç $\to +\infty$, $\to -\infty$

yerine yaz.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-5x+4}{-5x+7} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-6x-7}{-6x+3} = +\infty$$

Alternatif Yol:

$$\lim_{x \to {+\infty \atop -\infty}} \frac{1}{x^p} = 0$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x} = \frac{1}{x}$$

Soru:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x-5}{x^2+7x-3} = \frac{x\left(2-\cancel{\frac{5}{x}}\right)^{\to 0}}{x^2\left(1+\cancel{\frac{7}{x}}^{\to 0}-\cancel{\frac{3}{x^2}}\right)^{\to 0}}$$

$$\underline{0} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x^2}$$

Pay ve Paydada Polinom Dışı ifadeler

$$x^x > x! > 5^x > 3^x > 2^x > x^{10} > x^5 > \log > \text{trigo}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to +\infty} (\sin x) \\ \lim_{x \to -\infty} (\cos x) \end{array}\right\} \lim \text{ yoktur.}$$

Soru:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5^x+3^x-1}{5^{x+1}+2^x-x^7} = ?$$

$$\frac{\cancel{5^x}\left(1+\cancel{\left(\frac{3}{5}\right)^x}^{\to 0}-\cancel{\frac{1}{5^x}}\right)^{\to 0}}{\cancel{5^x}\left(5+\cancel{\left(\frac{2}{5}\right)^x}^{\to 0}-\cancel{\frac{x^7}{5^x}}\right)^{\to 0}} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2-5x+1}{x^2+7x-3} = \frac{x^2\left(4-\cancel{\frac{5}{x}}^{\to 0}+\cancel{\frac{1}{x^2}}\right)^{\to 0}}{x^2\left(1+\cancel{\frac{7}{x}}^{\to 0}-\cancel{\frac{3}{x^2}}\right)^{\to 0}} = 4$$

$$\to \frac{8x-5}{2x+7} = \frac{8}{2} = \frac{4}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-6x+7}{2x-3} = \frac{x^3\left(1-\cancel{\frac{6}{x^2}}^{\to 0}+\cancel{\frac{7}{x^3}}\right)^{\to 0}}{x\left(2-\cancel{\frac{3}{x}}\right)^{\to 0}}$$

$$\to \frac{3x^2-6}{2} \nearrow +\infty$$

$$\frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2}$$

$$+\infty$$

Soru:

en büyükler

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x! + \ln x}{\sin x + x} = ?$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x!\left(1 + \frac{\ln x}{x!}\right)}{x\left(\frac{\sin x}{x} + 1\right)}$$

with $\frac{\ln x}{x!} \to 0$ and $\frac{\sin x}{x} \to 0$

$$\lim_{x \to \infty} (x-1)! = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \sin x = \text{lim yok}$$

$$-1 < \sin x < 1$$

$$-x < x.\sin x < x$$

Kök ve Mutlak İçeren Sonsuz Limitler

Mutlak Değer İçeren Sonsuza Giden Limitler

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{|2x-3|}^{+ \text{ (sonsuza gidiyo)}}+x}{5x+1} = \frac{3x-3}{5x+1} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|2\overset{-}{x}-3|+x}{5x+1} = \frac{-2x+3+x}{5x+1} = \frac{-x+3}{5x+1} = \frac{-1}{5}$$

$\infty + \infty = \infty$

$\infty - \infty =$ belirsizlik

Kök İçeren Sonsuza Giden Limitler

1- Kesirli

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1}+x-2}{\sqrt[3]{x^3-7x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1}+4x-3}{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}} = ?$$

$$\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\cancelto{0}{\frac{5}{x}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}\right)}+x\left(4-\cancelto{0}{\frac{3}{x}}\right)}{\sqrt[3]{x^3\left(\cancelto{0}{1+\dots}\right)}}$$

$$\frac{|x|+4x}{x} = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1}+4x-3}{\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}} = ?$$

$$\frac{|x|+4x}{x} = 3$$

2- Kesirsiz

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x}-3x+1\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-3x+4}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left(\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+x+1}\right)}$$

$\Downarrow$

$$\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow \frac{x\left(-4+\cancelto{0}{\frac{3}{x}}\right)}{|x|+|x|}$$

$$\frac{-4x}{2x} = -2$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \qquad \frac{\cancel{(1-\sqrt{x})}.\cancel{(1+\sqrt{x})}}{(\cancel{1-x}).(1+\sqrt{x})}$$

$\frac{1}{2}$ $\qquad -x^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x+1)+}{x^2-9)-} \longrightarrow$$

1) parçalı fonk ✗

2) $\frac{\text{sayı}}{0}$ ✓ $\to$ $+\infty$ / $-\infty$

3) mutlak değer içini 0'layan ✗

$\underline{\underline{-\infty}}$

$$\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$$ lim var ise bulunuz.

$\lim_{x\to 5^+} 1$, $\lim_{x\to 5^-} -1$ $\Big\}$ lim yok

$\lim_{x\to 5^+} = 1$

$\lim_{x\to 5^-} = -1$ $\Big\}$ lim yok.

Pay'da en değerli $\underline{\underline{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x+\sin x}}{\underbrace{x+\cos x}} = ?$$

Payda'da en değerli $\underline{\underline{x}}$

$\underline{\underline{1}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2} = \frac{\sin 3x}{5x}\cdot\frac{\sin 3x}{x}$$

$$\frac{\sin 3x}{5x}\cdot\frac{\sin 3x}{x} \qquad \frac{3}{5}\cdot 3 = \frac{9}{5}$$

$$\frac{3}{5}\cdot 3 = \frac{9}{5}$$

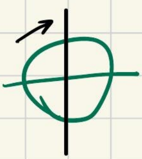
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{x-5} = \frac{x^2\left(1+\cancel{\frac{2}{x^2}}\right)^{\to 0}}{x\left(1-\cancel{\frac{5}{x}}\right)^{\to 0}} = \infty$$

$$\frac{2x}{1} \to +\infty$$

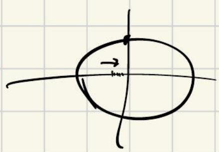
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x+8}{3x^3} = \frac{\cancel{x^2}\left(1 \to^{0} \to^{0}\right)}{3\cancel{x^2}x} = \frac{1}{3x} = 0$$

$$\frac{2x-4}{9x^2} \to \frac{2}{18x} \to \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (\sec x) = \frac{1}{\cos} = \frac{1}{0} \begin{matrix}\nearrow +\infty \\ \searrow -\infty\end{matrix}$$

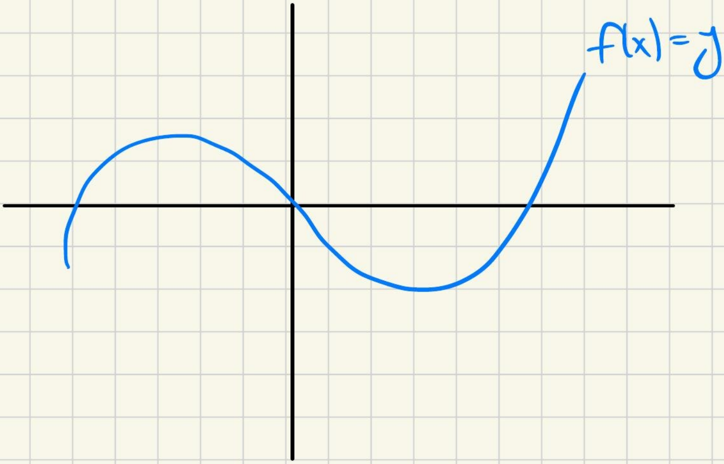


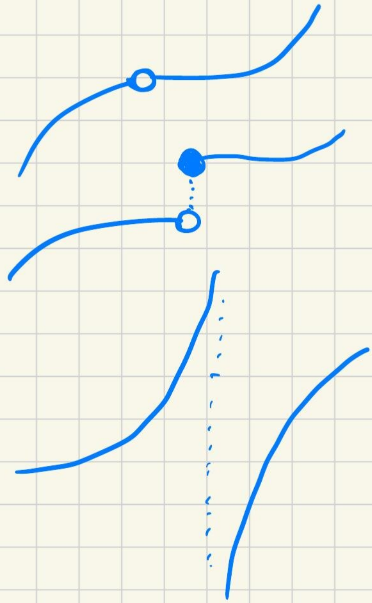
$$= \frac{1}{\underbrace{\cos(91^\circ)}_{-}} = -\infty$$



$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

Süreklilik Nedir?





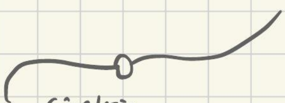
Süreksizlik

Tanımsızlıklarda tartışmasız süreksiz noktalardır.

Parçalı fonksiyonların parçalanma noktası süreksiz olabilir. (kesin değil)

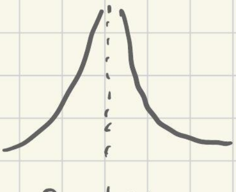
Süreklilik Şartı

her yerde sürekli



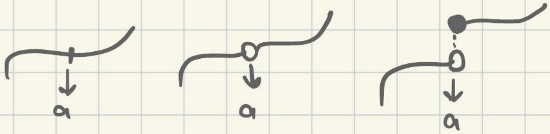
süreksiz

süreksiz



süreksiz

Grafik Yokken Süreklilik Tespiti



limit gerekli şart yeterli değil !

$\lim_{x \to a} f(x) =$	var.	var	yok.
süreklilik	var	yok	yok

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

süreklilik şartıdır.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

$f(a) =$

Süreksizlik

Tanımsızlik

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

f(3) yoktur.

$x = 3$ tanımsız süreksiz

Parçalı Fonk

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 5 \\ x+1, & x \leq 5 \end{cases}$$

süreksiz olabilir.

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\boxed{\mathbb{R} - \{-1\}}$

-1 muhakkak süreksiz yapar.

$x \geq 0$

$f(x) = \underbrace{\sqrt[3]{x-1}}_{\text{sorun yok}} + \sqrt[4]{x}$ $x \geq 0$ $[0, +\infty)$

$\dfrac{x}{x+1} \geq 0$ -1 0

$-1 \quad - \quad 0$

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ $(-\infty, -1) \cup [0, 1] \cup [3, \infty)$

$\dfrac{x}{x+1} \geq 0$ $x^2 - 4x + 3 \geq 0$

-3

-1

$-1 \quad 0$ $(x-3) \cdot (x-1) \geq 0$ $(-\infty, -1) \cup [0, 1] \cup [3, \infty)$

$-1 \quad - \quad 0$

$1 \quad 3$

$1 \quad - \quad 3$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2}, & x < 3 \\[2ex] \dfrac{2x+1}{x^2-16}, & 3 \leq x \end{cases}$$

$\dfrac{x}{x-2} \to 3$, $\dfrac{2x+1}{x^2-16} \to \dfrac{7}{-7} = -1$

süreksiz noktaları bulunuz.

tanımsız: $\underbrace{x = 2, \; x = -4, 4}_{\text{süreksiz}}$

parçalanma: $\underbrace{x = 3}_{\text{süreksiz}}$

Muhakkak

$2, -4, 4$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 3, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ bx - 1, & x > 2 \end{cases}$$

her noktada sürekli ise $a + b = ?$

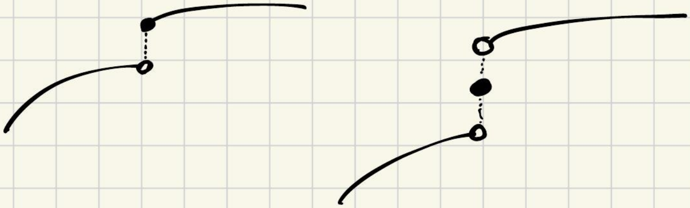
$2a + 7 = 5$ $2b - 1 = 5$

$a = -1$ $b = 3$

$\boxed{2}$

Süreksizlik Çeşitleri

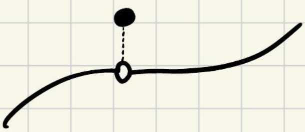
1. Atlama Süreksizliği (Jump discontinuity)



$$\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$$

$$f(a)$$

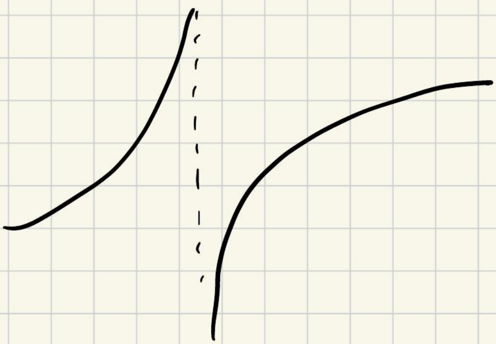
2. Kaldırılabilir Süreksizlik (Removable discontinuity)



$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \neq f(a)$$

Tanımsızlık

3. Sonsuzluk Süreksizliği (Infinity discontinuity)



$$\lim_{x \to a^+} \longrightarrow +\infty, -\infty$$

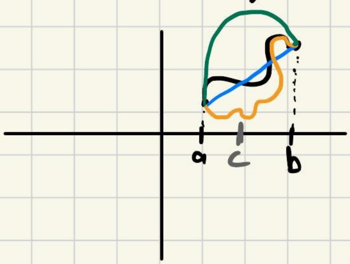
$$\lim_{x \to a^-} \longrightarrow -\infty, +\infty$$

Ara Değer Teoremi (Intermediate Value Theorem)

$f(x)$ fonk $[a,b]$ aralığında sürekli olsun.

$$f(a) \neq f(b) \text{ ise}$$

$f(a) < f(b)$

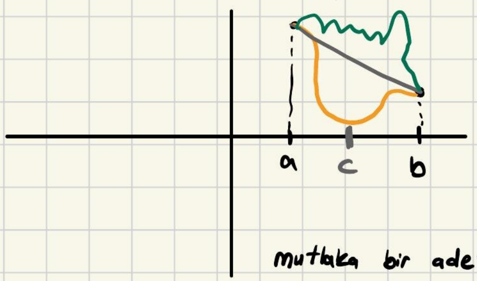


mutlaka bir adet

$f(a) < f(c) < f(b)$ olan

c değeri vardır.

$f(a) > f(b)$



mutlaka bir adet

$f(a) > f(c) > f(b)$ olan

c değeri vardır.

Ara Değer ile Kök İspatlama

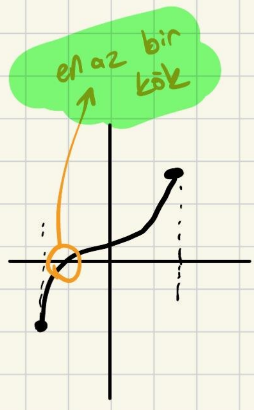
$f(x) = 0$ çıkmasını sağlayan x değerine kök denir.

$f(x)$ fonk $[a,b]$ aralığında sürekli olsun.

$f(a) . f(b) < 0$ ise

en az bir kök vardır.

$f(a)$	$f(b)$
$-$	$+$
$+$	$-$



$$\frac{e^{\tan x}}{2} - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} = f(0)$$

$$\frac{e}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

1. $$\frac{|x-a|}{x-a} \cdot g(a) + |x-a| \cdot g'(a) = f'(x)$$

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = \lim_{x\to a^-} f'(x)$$

$$\cancel{\frac{x-a}{x-a}} \cdot g(a) + 0 = \frac{-x+a}{x-a} \cdot g(a) + 0$$

$$2g(a) = 0$$

$$g(a) = 0$$

$x^3 - 5x + 1 = 0$ $[1,3]$ aralığında en az bir kökü olduğunu ispatlayınız.

süreklidir

$f(1) = -3$
$f(3) = 13$

mutlaka bir kök var.

Ara Değer ile iki Fonk Kesiştiklerini ispatlama

$f(x) = x^4 - 5x^2$ ve $g(x) = 2x^3 - 4x + 6$

süreklidir.

$x = 3$ ve $x = 4$ arasında kesiştiklerini ispatlayınız.

$x^4 - 5x^2 = 2x^3 - 4x + 6$

$h(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x - 6$

$h(3) = -12 < 0$
$h(4) = 58 > 0$

en az bir kök

Bir Aralıkta Bir Kök Olduğunu ispatlama

$f(x) = x^4 + 3x + 1$ $[-2, -1]$ tek kök olduğunu ispatlayınız.

sürekli

$f(-2) = 11 > 0$
$f(-1) = -1 < 0$

en az bir kök vardır.

$f'(x) = 4x^3 + 3$

$-2 \leq x \leq -1$

$-8 \leq x^3 \leq -1$

$-29 \leq 4x^3 + 3 \leq -1$

daima azalandır.

Türev Var Olma Şartı

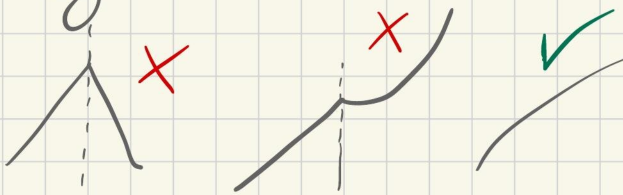
1. Şart: Fonksiyon o noktada sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

1) Sürekli
2) Smooth transition

2. Şart: $f'(a^+) = f'(a^-)$

Sağdan türev = soldan türev



(akıcı geçiş) smooth transition

$f(x) = |x|$ 0'da türev yoktur.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x<0 \\ +x, & x\geq 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ +1, & x>0 \end{cases}$$

$5 - \frac{12}{5}$

$6a+b=5$

$5a=2$

$2ax+a$

3

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+ax+b, & x\geq 2 \\ 3x-1, & x<2 \end{cases}$$

her noktada türevli ise $a+b=?$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4+2a+b$

$\lim_{x\to 2^-} = 5$

$2a+b=1$

$a=-1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+a, & x\geq 2 \\ 3, & x<2 \end{cases}$$

$a+b=2$

Türev Tanım Kuralları

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n . x^{n-1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

1. türev tanım kuralı : $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

2. türev tanım kuralı : $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

x yerine (h+a) yazılır.

$\lim_{h \to 0}$

$f(x) = x^3$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{\cancel{(x-a)} . (x^2 + ax + a^2)}{\cancel{x-a}} = 3a^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \quad \frac{h . ((a+h)^2 + (a+h).a + a^2)}{h} = 3a^2$$

Türev Kuralları

$f(x) \longrightarrow f'(x) \longrightarrow f''(x) \longrightarrow f'''(x) \longrightarrow f^{(4)}(x)$

$f(x) \longrightarrow \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \longrightarrow \frac{d^2}{dx^2}(f(x)) = f''(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{dy^2}{dx^2}$$

1- Sabit sayının türevi 0'dır.

2- $f(x) = ax \longrightarrow f'(x) = a$

3- $f(x) = x^n \longrightarrow n.x^{n-1}$

Yardımcı Kural: Toplama - Çıkarmada türev ayrı ayrı alınır.

4- Parantezli Türev

$f(x) = (g(x))^n \longrightarrow f'(x) = n.(g(x))^{n-1}.g'(x)$

5- Üstel Fonksiyon Türevi

$f(x) = a^x \quad a = sbt$

$(a^x)' = 1.a^x.\ln a$

a) $f(x) = e^{g(x)}$

e aynen yazılır. üssünün türevi yanına çarpım olarak yazılır.

$f'(x) = e^{g(x)}.g'(x).\cancel{\ln e}^{1}$

$f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = e^{-x}.-1$

b) $g(x)$ $k>0$ ve $k \neq 1$

$f'(x) = a^{g(x)}.g'(x).\ln a$

$f(x) = 2^x \rightarrow f'(x) = 2^x.1\ln 2$

$f(x) = 5^{x^3} \longrightarrow 5^{x^3}.3x^2 \ln 5$

$f(x) = 3e^{5x+4} \longrightarrow f'(x) = 3e^{5x+4}.5$

Logaritmaların Türevi

$f(x) = \ln(g(x))$

$\ln = \log_e$

$\frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \log_e e \rightarrow 1$

$f(x) = \ln(g(x))$

$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ $\quad \frac{\text{içinin türev}}{\text{içi}}$

$f(x) = \ln x \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln(x^2+1) \longrightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

$f(x) = \log_a g(x)$

$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \log_a e$

$f(x) = \log_3(2x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-1} \cdot \log_3 e$

$f(x) = \log_5(x^2+x-1) \Rightarrow$

$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \cdot \log_5 e$

Trigonometrik Türev Kuralları

$f(x) = \sin(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(x) = \sin x \longrightarrow \cos x$

$f(x) = \sin 4x \longrightarrow \cos 4x \cdot 4$

$f(x) = \sin(x^2+1) \longrightarrow \cos(x^2+1) \cdot 2x$

$f(x) = \cos(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(x) = \tan(g(x)) \longrightarrow$

$f'(x) = (1+\tan^2 g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = \sec^2 g(x) \cdot g'(x)$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(g(x))} \cdot g'(x) = \sec^2(g(x)) \cdot g'(x)$

④ $f(x) = \cot g(x) \longrightarrow f'(x) = -(1+\cot^2 g(x)) \cdot g'(x)$

$-\operatorname{cosec}^2 x$

$f'(x) = -\csc^2(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 g(x)} \cdot g'(x)$

⑤ $f(x) = \sec(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \sec g(x) \cdot \tan g(x) \cdot g'(x)$

⑥ $f(x) = \operatorname{cosec}(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\csc g(x) \cdot \cot g(x) \cdot g'(x)$

Ters Trigonometrik Fonk. Türevi

cos, cot = −
sin, tan = +

① $f(x) = \arcsin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

② $f(x) = \arccos g(x) \longrightarrow f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$

③ $f(x) = \arctan(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$

④ $f(x) = \operatorname{arccot} g(x) \longrightarrow f'(x) = -\frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$

$f(x) = \sin x^2 \longrightarrow f'(x) = \cos x^2 \quad 2x$

$f(x) = \sin^2 x \longrightarrow f'(x) = 2.(\sin x)^1 \cos x . 1$

$f(x) = \cos x^2 \longrightarrow f'(x) = -\sin x^2 . 2x$

$f(x) = \cos^2 x \longrightarrow 2.(\cos x)^1 . -\sin x . 1$

$f(x) = \ln^2 x \rightarrow 2(\ln x)^1 . \frac{1}{x}$

$f(x) = \ln x^2 \rightarrow \frac{2x}{x^2}$

Çarpım ve Bölüm Türevi

$$f(x).g(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

$f(x) = xe^x \longrightarrow f'(x) = 1.e^x + x.e^x.1 = e^x + xe^x$

$f(x) = x\ln x \longrightarrow \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f(x) = e^{2x}\cos 3x \longrightarrow e^{2x}.2.\cos 3x + e^{2x}.(-\sin 3x).3$

$f(x) = (x^3+1).\tan 2x \longrightarrow 3x^2.\tan 2x + (x^3+1).\sec^2 2x.2$

$f(x) = (2x-1)^5.(x+2)^6 \longrightarrow 5.(2x-1).2.(x+2)^6 + (2x-1)^5.6(x+2)^5.1$

Bölümün Türevi

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$$

Mutlak Değerin Türevi

$$f(x) = |g(x)| \longrightarrow f'(x) = g'(x).\frac{|g(x)|}{g(x)}$$

$$\frac{|g(x)|}{g(x)} = \begin{cases} 1 & , \ g(x) \geq 0 \\ -1 & , \ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |x^3+1| = 3x^2.\frac{|x^3+1|}{x^3+1}$$

$(x=2)$

$$f(x) = |x^3+x^2+3x-1|$$

$$f'(x) = (3x^2+2x+3).\frac{|x^3+x^2+3x-1|}{x^3+x^2+3x-1} = 11.\frac{11}{-11} = \underline{\underline{-11}}$$

★ Mutlak değerin içini "0" yapan x değerinde türev yoktur.

$$f(x) = |x-3| \longrightarrow f'(3) \text{ yoktur.}$$

Parametrik Fonksiyonların Türevi

$y = 2x - 3$

$x = t^2 + 1$

$y = 2(t^2+1) - 3 = 2t^2 - 1$

$y = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t^2 - 1 \end{cases}$

$x = f(t)$

$y = g(t)$

$\longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = y' = f'(x)$

$$\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

Soru:

$y = 3t^2 - 5t + 1$

$x = t + 6$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{6t-5}{1}$

$y = e^{\theta} + 2\theta - 1$

$x = \theta^2 - 3\theta + 2$

$\dfrac{dy}{dx} = ?$ $\quad \dfrac{e^{\theta} + 2}{2\theta - 3}$

Soru: $y = a^3 + a^2 + a + 1$

$x = 3a - 2$

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3a^2 + 2a + 1}{3}$

b) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{a=2}$ $\quad \dfrac{17}{3}$

c) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=7} \rightarrow a=3$ $\quad \dfrac{34}{3}$

Parametrik Fonksiyonun 2. Türevi

$$y = t^2 - 3t + 1 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = ?$$
$$x = t^2 + 1$$

2. adim

1. adim $\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \longrightarrow \dfrac{2t-3}{2t} = y'$ | $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{4t^2-4t+6}{4t}$

Soru: $y = a^2 + 3a$ ise $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $\qquad \cancel{\dfrac{2a+3}{4}}$

$x = 4a - 1$

$$\frac{2a+3}{4} = y' \quad \Bigg| \quad \frac{\frac{dy'}{da}}{\frac{dx}{da}} = \frac{\frac{2.\cancel{1}}{4.\cancel{1}}}{4} = \frac{1}{8}$$

Zincir Kuralı (Chain Rule)

$y = 3x^2 - 5x + 1$

$x = 2a^3 + 1$

$a = 4t^2 - 1$

$$\frac{dy}{dt} = ? \quad \Bigg\} \quad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{da} \cdot \frac{da}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

Soru: $y = 2x^2 - 5x + 1$

$x = 2t^2 + 1$

$t = 3a - 1$

$\left.\frac{dy}{da}\right|_{a=2}$ nedir

$(4x-5).(4t).\ 3$

$\downarrow$

$199\ .\ 20 \cdot 3 = 11940$

Bileşke Fonksiyonunun Türevi

$f(x) = 2x - 1$

$g(x) = 3x + 2$

$fog(x) = 2.(3x+2) - 1 = 6x + 3$

$gof(x) = 6x - 1$

$$fog'(x) = f'(g(x)).\ g'(x)$$

** $f(2x-3) \longrightarrow$ bileşke fonksiyon

Soru:

$$f(x^2) = 4x^2 - 7x + 3 \Rightarrow f'(4) = ?$$

$$f'(x^2) \cdot 2x = 8x - 7$$

$$f'(x^2) = \frac{8x-7}{2x}$$

$$f'(4) = \frac{9}{4}, \frac{23}{4}$$

Ters Fonksiyonun Türevi

$$f(x) = 3x - 1$$

$$f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

$$(f^{-1})'(x)$$

$\downarrow$

fonk tersini alır, ardından türev

$\downarrow$

$f(x) = y$ yaparız

$f^{-1}(y) = x$ ardından bileşke fonk türevi yardımıyla alırız.

Soru: $f(x) = 5x - 4$ ise

$$(f^{-1})'(3) = ?$$

$$f^{-1}(5x-4) = x$$

$\frac{y+4}{5} = x$ veya ** $[f^{-1}(5x-4)]' = [x]'$

$$(f^{-1})'(5x-4) \cdot 5 = 1$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{5}$$

$$(f^{-1})'(5x-4) = \frac{1}{5}$$

Logaritma Yardımıyla Türev Alma

1) $f(x) = x^{x+1}$

$f(x) = x^{\cos x}$

$f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

hem taban x'li ise
hem üs
logaritma kullanılmak zorunludur.

---

2) $\dfrac{(x^2+1)^4 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{\sin x \cdot (x-4)^5} \Longrightarrow$ çarpma ve bölmenin fazla x içeren durumlarında başvurulur.

---

1. Durum

$f(x)^{g(x)}$

$x^x = f(x)$

$f'(x) = ?$

1. adım

$y = x^x$

2. adım

$\ln y = \ln x^x$ / $\ln y = x \cdot \ln x$

3. adım

her taraf x'e göre türevi alınır.

$\dfrac{y'}{y} = \ln x + \cancel{x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}}$

$\boxed{y' = (\ln x + 1) \cdot x^x}$

Soru: $f(x) = x^{\cos x}$

$f'(x) = ?$

$y = x^{\cos x}$

$\ln y = (\cos x) \cdot \ln x$

$y' = \left(-\sin x \cdot \ln x) + \dfrac{\cos x}{x}\right) \cdot x^{\cos x}$

2. Durum

$$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+5)^3 \cdot (2x-1)^4 \text{ ise } f'(x) = ?$$

1. adım

$$\ln y = \ln\left[(x-2)^2 \cdot (x+5)^3 \cdot (2x-1)^4\right]$$

$$\ln y = 2\ln(x-2) + 3\ln(x+5) + 4\ln(2x-1)$$

2. adım

$$\frac{y'}{y} = \left[\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+5} + \frac{8}{2x-1}\right]$$

Soru:

$$f(x) = \frac{(3x+4) \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}{\cos x \cdot e^{3x}} \text{ ise } f'(x) = ?$$

$$\ln y = \ln(3x+4) + \frac{\ln(x^2+1)}{3} - \ln(\cos x) - 3x \cancel{\ln e}^{1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{3x+4} + \frac{2x}{3x^2+3} + \frac{(+\sin x)}{\cos x} - 3$$

Kapalı Fonksiyonların Türevi

Kapalı Fonk: Fonksiyonda y $(f(x))$ yalnız bırakılamıyorsa kapalı denir.

$f(x) = 2x+1$ ⟶ açık

$x^2+y^2=1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1-x^2}$ ⟶ kapalı

?

$x+y=\sin y$

$x^2y^3+3xy-4x+5=\cos y^2+e^{xy}$

kapalı fonk

Türevi

$x^2y^3+xy^2=5x+1 \qquad \dfrac{dy}{dx}=?$

* her iki tarafın türevi alınır.
* y'liler x'e bağlı fonk olarak kabul edilir.

$(y^2)' = 2y.y'$

$(\sin y)' = \cos y.y'$

$(x^2y^3)' = 2xy^3 + x^2.3y^2.y'$

Soru:

$x^2+y^2=5$ ise $\dfrac{dy}{dx}$ nedir?

1. adım Her iki tarafın türevi

$$2x+2yy'=0$$

2. adım y' i yalnız bırak

$$y'=\frac{-2x}{2y} \longrightarrow \boxed{y'=\frac{-x}{y}}$$

Soru:

$$x^2y^3-4xy^2=\sin x+1$$

$\dfrac{dy}{dx}$

$$2xy^3+x^2 3y^2y'-(4y^2+4x2y\cdot y')=\cos x$$

$$2xy^3+3x^2y^2y'-4y^2-8xyy'=\cos x$$

$$y'(3x^2y^2-8xy)=\cos x-2xy^3+4y^2$$

$$\boxed{y'=\frac{\cos x-2xy^3+4y^2}{3x^2y^2-8xy}}$$

Soru:

$x^2+y^3=e^{xy}-4$ ise $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$ için kaçtır?

$$2x+3y^2y'=e^{xy}\cdot(1\cdot y+x\cdot y')$$

$$3y^2y'-xe^{xy}y'=ye^{xy}-2x$$

$$\boxed{y'=\frac{ye^{xy}-2x}{3y^2-xe^{xy}}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\frac{e-2}{3-e}$$

Mat-1 Sorular

$$(\sin x)^{x^2} = y$$

$$x^2 . \ln(\sin x) = \ln y$$

$$(\sin x)^{x^2} . \left(2x . \ln(\sin x) + x^2 . \frac{\cos x}{\sin x}\right) = y'$$

$$(\ln x)^x = y$$

$$\left[x . \ln(\ln x)\right]' = \frac{y'}{y}$$

$$\left(\ln(\ln x) + \cancel{x} \frac{x'}{\cancel{x} \ln x}\right) . (\ln x)^x = y'$$

$$(3+x)^{\tan x} = y$$

$$\left[\tan x . \ln(x+3)\right]' = \frac{y'}{y}$$

$$\left(\sec^2 x . \ln(x+3) + \frac{\tan x}{x+3}\right) . (x+3)^{\tan x} = y'$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = y$$

$$\left[\ln x . \left(\ln\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right]' = \frac{y'}{y}$$

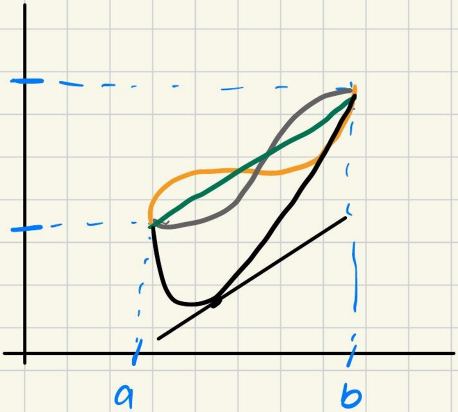
$$\left(\frac{\ln\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x} + \ln x . \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right) . \frac{-1}{x^2}}{f\left(\frac{1}{x}\right)}\right) . f\left(\frac{1}{x}\right)^{\ln x} = y'$$

$$\left[\arcsin f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$$

$$\left[(\arctan x)\right]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left[\arctan(\sec x)\right]' = \frac{\sec x . \tan x}{1+\sec^2 x}$$

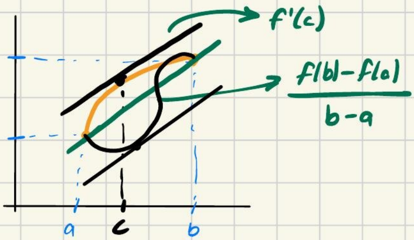
Ortalama Değer Teoremi



$$\text{ortalama değer} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{için}$$

$$c \in [a, b]$$



$$> \underbrace{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

★ en az 1 tane vardır.

Soru:

$f(x) = x^2+5$ fonk

$[1, 5]$ aralığında odt sağlayan değerleri bulun

1. adım

$f(x)$, $[1,5]$ aralığında süreklidir.

$$\frac{f(5)-f(1)}{4} = 6$$

$6 = 2x$

$3 = x$

Sonu:

$f(x) = x^3 + 2x - 5$

$[-1, 1]$ odt?

$$\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{3}{2}$$

$3 = 3x^2 + 2$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

$3 = 3x^2 + 2$

$\frac{1}{3} = x^2$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

Rolle's Teoremi

$f(x)$ fonk $[a,b]$ aralığında sürekli

ve

$f(x)$ fonk (a,b) aralığında türevlenebilir

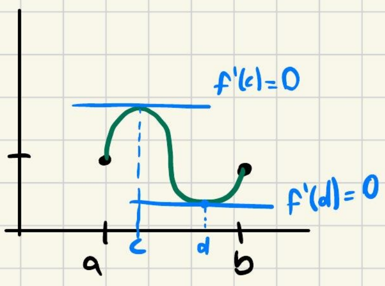
ve

$f(a) = f(b)$ ise

$f'(c) = 0$

en az bir tane var.

$c \in (a,b)$



Ara Değer

$f(a) < f(c) < f(b)$
en az bir adet olmak zorunda

Rolle Teoremi

$[a,b]$ arasında ve
$f(a) = f(b)$ ise
en az bir
$f'(c) = 0$ olmak zorunda

Ortalama Değer

$[a,b]$ arasında c ise

$$\underbrace{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}_{\text{mutlaka en az bir tane vardır}} \text{ (türev)}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1} = f(x)$$

$$f(1) = f(-1) = 0$$

$$f(x) = \frac{9x^2-4x+3}{x-2}$$

$1-4+3$

$=12$

$$\frac{(x-3).(x-1)}{x-2}$$

$\boxed{x=2}$

$f(1) = 0$

$f(3) = 0$

sağladı

$$f(-1) = 1+1-2 = 0$$

$$x^4+x^2-2 = 0$$

$x^2=a$ $\quad a^2+a-2 = 0$

$+2$

-1

$a=-2$

$a=1$

$\cancel{x^2=-2}$

$x^2=1$

$x=-1, 1$

$f(x) = |x-1|$

$[0,2]$ Rolle?

$f(0)=f(2)$

$[0,2]$ sürekli mi?

$(0,2)$ türevli mi?

$$f(x)\begin{cases} \underbrace{-x+1}_{-1}, & x<1 \\ \underbrace{x-1}_{1}, & x\geq 1 \end{cases}$$

1. şart

$f(x)$, $[1,3]$ aralığında sürekli olmalı

$f(x)$, $(1,3)$ aralığında türevli olması

$f(1) = f(3)$

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-}}_{0} = \underbrace{\lim_{x\to 1^+}}_{0} = \underbrace{f(1)}_{0}$$

– sürekli

– türevli değil.

Soru:

$f(x) = x^2$ $(-2,2)$ $f'(x)$'i 0 yapan bir c

değeri olduğunu Rolle's Teoremi ile ispatlayınız.

$f(-2) = f(2) = 4$

$f(x)$ $(-2,2)$ sürekli, türevlenebilir

Soru: $f(x) = x^2 - x$ $(0,1)$ aralığında

$f(0) = f(1) = 0$

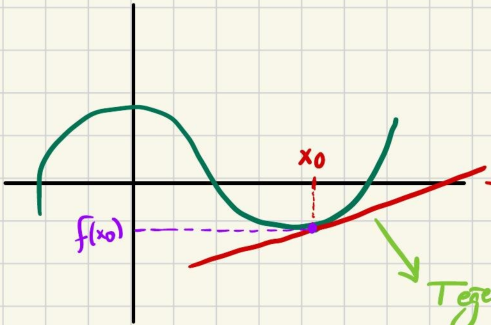
$f(x)$ sürekli, türevlenebilir

$$2x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

Teğetin Eğimi ve Denklemi: (Tangent Line)

$\text{eğim} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



$f(x)$ fonk. x_0 noktasından çizilen teğet doğru

Teğet doğru eğimi $= f'(x_0)$
(slope)

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Soru: $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$, $x = 1$ apsisli noktadan çizilen teğet eğim ve denklemi nedir?

$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \rightarrow f'(1) = 6$

$f(1) = 2$

$y - 2 = 6(x - 1)$

$y = 6x - 4$

Soru: $f(x) = e^{2x-1}$, $x = 0$ teğet denklemi nedir?

$f'(x) = 2e^{2x-1}$ $\quad f'(0) = \dfrac{2}{e}$

$f(0) = \dfrac{1}{e}$

$y = \dfrac{2x}{e} + \dfrac{1}{e}$

Soru: $x^2+2xy+y^3=4$, $(1,1)$ nok çizilen teğet denklem nedir?

$$2x+2y+2xy'+3y^2\cdot y'=0$$

$$y'(2x+3y^2)=-2(x+y)$$

$$y'=\frac{-2(x+y)}{2x+3y^2} \to \frac{-4}{5}=m$$

$$y-1=\frac{-4}{5}(x-1)$$

$$y=\frac{-4x+9}{5}$$

Normalin Eğimi ve Denklemi

Dik doğruların eğimleri çarpımı -1'dir.

$$m_{teğet}\cdot m_{normal}=-1$$

$$m_{normal}=\frac{-1}{f'(x_0)}$$

Soru: $f(x)=x^3+2x-1$, $x=2$ apsisli normalin eğimi ve denklem nedir?

$f'(2)=$ eğimi

$f'(x)=3x^2+2$

$m_{normal}\ 14=-1$

$$y-11=\frac{-1}{14}\cdot(x-2)$$

Belirsizlik Çeşitleri ve L'Hospital Kuralı

Belirsizlik Çeşitleri

1. Çeşit
$\frac{0}{0}$ belirsizliği

2. Çeşit
$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği

3. Çeşit
$\infty - \infty$ belirsizliği

4. Çeşit
$\infty . 0$ belirsizliği

5. Çeşit
1^{∞} veya 0^{0} veya ∞^{0} belirsizliği

L'Hospital Kuralı

Belirsizlikten Türev yardımıyla kurtulma işidir.

1. Çeşit ve 2. Çeşitleri çözer.

3., 4. ve 5. çeşit belirsizliklerde 1. ve 2. çeşit benzetip ardından L'Hospital uygulanır.

$\frac{0}{0}$ Belirsizliğinin L'Hospital Kuralı ile Çözümü

* Türev yardımıyla belirsizlikten kurtulma

Ör/ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{3x-6} = ?$ $\quad \frac{2x}{3} \xrightarrow{(x=2)} \frac{4}{3}$

Ör/ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = ?$ $\quad \frac{3\cos 3x}{2} \xrightarrow{x=0} \frac{3}{2}$

Ör/ $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{2x-6} = ?$ $\quad \frac{3x^2}{2} = \frac{27}{2}$

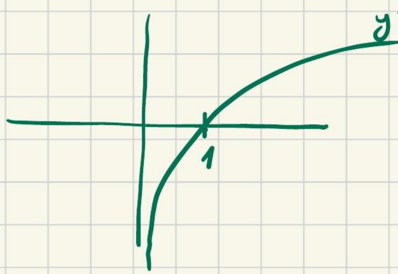
Ör/ $\lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49} = ?$ $\quad \frac{(x+2)^{-\frac{1}{2}}}{2} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{84}$

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizliğinin L'Hospital ile Çözümü

Payın ve paydanın türevleri belirsizlik bitesiye kadar alınır.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+4}{2x^2-5x+1} = ?$ $\quad \frac{\infty}{\infty} \to \frac{2x-3}{4x-5} \to \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Soru: $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = ?$



$\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} \to 0$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 7}{x^2 + 6x - 1} = ?$$

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{2x + 6} \rightarrow \frac{6x - 8}{2} = \frac{-\infty}{2} \downarrow -\infty$$

$\infty - \infty$ Belirsizliğin L'Hospital ile Çözümü

$\infty - \infty \longrightarrow \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ benzetilmelidir.

$\downarrow$

Payda eşitlendiğinde ortaya $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği gelir.

Soru: $\lim_{x \to 2} \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} = ?$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4 - x - 2}{x^2 - 4} \rightarrow \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

Soru: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = ?$

$$\frac{x - \sin x}{\sin x . x} \longrightarrow \frac{1 - \cos x}{x.\cos x + \sin x} \rightarrow \frac{+\sin x}{\cos x - x.\sin x + \cos x} \Rightarrow 0$$

$$\frac{x - \sin x}{\sin x . x} \xrightarrow[\lim_{x \to 0}]{\frac{dy}{dx}} \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x . x + \sin x . 1} \right) \xrightarrow{\frac{dy}{dx}} \frac{+\sin x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} \downarrow 0$$

$0.\infty$ Belirsizliğinin L'Hospital ile Çözümü

$0.\infty \longrightarrow \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ yapılmalıdır.

$$0.\infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{veya} \quad 0.\infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

Soru: $\lim_{x \to 0^+} x.\ln x = ?$

$0.\ln(0^+)$

$0.(-\infty)$

$$\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

$\downarrow$

$$\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{1}{x} : -x^2 = -x \longrightarrow 0$$

Soru: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right).\tan x = ?$

$\downarrow$

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)'}{(\cot x)'} = \frac{0}{0} \longrightarrow \frac{1}{-\operatorname{cosec}^2 x} = -\sin^2 \frac{\pi}{2} = -1$$

1^∞, 0^0 ve ∞^0 Belirsizliklerinin Çözümü

1^∞, 0^0 ve ∞^0 $\longrightarrow$ $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ benzetilmelidir.

Soru: $\lim_{x \to 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}} = ?$

$y = (x+1)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow \ln y = \frac{\ln(x+1)}{x}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} \longrightarrow \frac{0}{0}$

$\frac{1}{x+1} = 1$

$\ln y = 1$

$y = e^1$

$y = e$

Soru: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = ? \longrightarrow 1^\infty$

$y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

$\ln y = x . [\ln(x+1) - \ln(x-1)]$

$\Downarrow$

$\lim_{x \to \infty} x . [\ln(x+1) - \ln(x-1)] = 0 . \infty$ eyvah!

$\Downarrow$

$\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{1(x-1) - 1(x+1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{(x+1)}{(x-1)}}}{\dfrac{-1}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

$\ln y = 2$

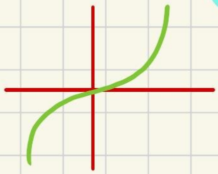
$y = e^2$

Hiperbolik Fonksiyonlar

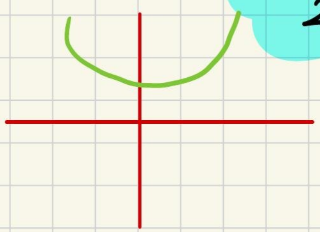
$\left.\begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \\ \tan x \\ \cot x \end{array}\right\}$ trigonometrik ifadeler

$\left.\begin{array}{l} \sinh(x) \\ \cosh(x) \\ \tanh(x) \\ \coth(x) \\ \mathrm{sech}(x) \\ \mathrm{cosech}(x) \end{array}\right\}$ hiperbolik ifadeler

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$



$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$



$$f(x) = \sinh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$$

$$f(x) = \tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$f(x) = \coth(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$f(x) = \mathrm{sech}(x) = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$f(x) = \mathrm{csch}(x) = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

① $f(x) = \sinh(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \cosh(g(x)) \cdot g'(x)$

$\sinh(x) \longrightarrow f'(x) = \cosh(x)$

$\sinh(4x) \longrightarrow f'(x) = \cosh(4x) \cdot 4$

"–" yok!

② $f(x) = \cosh(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \sinh(g(x)) \cdot g'(x)$

$f(x) = \cosh(x^2) \longrightarrow f'(x) = \sinh(x^2) \cdot 2x$

③ $f(x) = \tanh(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \text{sech}^2(g(x)) \cdot g'(x)$

"–" normaldeki gibi var.

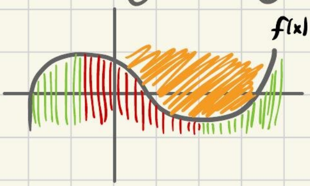
④ $f(x) = \coth(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\text{csch}^2(g(x)) \cdot g'(x)$

⑤ $f(x) = \text{sech}(g(x)) \longrightarrow -\text{sech}(g(x)) \cdot \tanh(g(x)) \cdot g'(x)$

⑥ $f(x) = \text{csch}(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\text{csch}(g(x)) \cdot \cot(g(x)) \cdot g'(x)$

1. ve 2. Türevin Yorumu

f(x) grafiği yokken f(x)'in grafiği hakkında bilgiler verir.



f'(x)

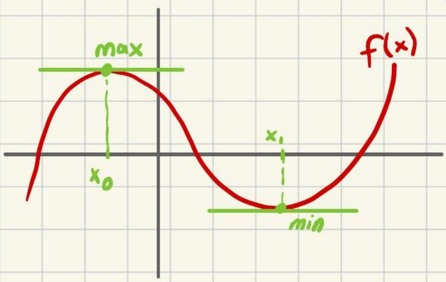
* Artan azalan aralığını verir.
* Max, min noktaları bulmayı sağlar.

f''(x)

* eğriliğin yönünü belirlemeyi sağlar.

1. Türevin Yorumu

$f(x) = \ldots\ldots \longrightarrow f'(x)$ → f(x) artan – azalan; → f(x) max – min noktalar



* max – min noktalardan çizilen teğetler x eksenine paralel olur.

* x'e paralel doğruların eğimleri 0'dır.

critical points | ekstremum apsisleri

$f'(x) = 0$

YTU – Fen-Edebiyat Fakültesi I. Vize Sınav Soru ve Cevap Kağıdı		Not Tablosu				
		1.S	2.S	3.S	4.S	Σ
Adı Soyadı						
Numarası						
Bölümü		Grup No		Tarih	02.11.2019	
Dersin Adı	MAT1071 Matematik I		Süre	80 dk	Sınıf	
Öğretim Üyesi				İmza		

YÖK nun 2547 sayılı Kanunun ***Öğrenci Disiplin Yönetmeliğinin*** 9. Maddesi olan ***"Sınavlarda kopya yapmak ve yaptırmak veya buna teşebbüs etmek"*** fiili işleyenler **bir veya iki yarıyıl uzaklaştırma** cezası alırlar.

1.a) $f(x)=\dfrac{\ln(18-2x^2)}{|2x-5|}+\arcsin(x-3)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. **(13P)**

$18-2x^2>0$

$18>2x^2$

$9>x^2$

$(-3,3)$

$2x-5\neq 0$

$x\neq \frac{5}{2}$

$-1\leq x-3\leq 1$

$2\leq x\leq 4$

$[2,4]$

$18-2x^2>0$

$9-x^2>0$

$9>x^2$

$x^2<9$

$-3<x<3$

$(-3,3)$

$T.K: \left[2,\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2},3\right)$

$-1<x-3\leq 1$

$|2x-5|\neq 0$

$x\neq\frac{5}{2}$

1.b) $\sqrt[4]{18}$ sayısının yaklaşık değerini lineer yaklaşım veya diferansiyel hesap kullanarak hesaplayınız. **(12P)**

$f(x)=\sqrt[4]{x}$, $a=16$, $f(16)=2$

$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$, $f'(16)=\frac{1}{32}$

$f(x)\approx L(x)=f(16)+f'(16)(x-16)$

$L(x)=2+\frac{1}{32}(x-16)$

$f(18)\approx L(18)=2+\frac{1}{32}(18-16)=2+\frac{1}{16}=\frac{33}{16}$

$f(18)\approx\frac{33}{16}$

$f(x)=\sqrt[4]{x}$

$f(x)=x^{\frac{1}{4}}$

$f'(x)=\dfrac{x^{-\frac{3}{4}}}{4}$

$f(16)=2$

$a=16$

$y-2=2^{-5}(x-16)$

$y=\dfrac{(x-16)}{32}+2$

$y=\dfrac{x+48}{32}$

$\frac{66}{32}=\frac{33}{16}$

Scanned with CamScanner

2) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x^2}{x^4} & , x<0 \\ \dfrac{2}{\pi}\arcsin x+\dfrac{3}{\pi}\arccos x & , 0\le x\le 1 \\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1} & , x>1 \end{cases}$$ fonksiyonu için:

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ ve $\lim_{x\to 1} f(x)$ limitlerinin varlığını araştırınız. **(L'Hopital Kuralı kullanılmayacaktır)**

(17P)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-\cos x^2)}{x^4}\cdot\frac{(1+\cos x^2)}{(1+\cos x^2)}=\lim_{x\to 0^-}\underbrace{\frac{\sin^2 x^2}{x^4}}_{1}\cdot\frac{1}{1+\cos x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2}{\pi}\underbrace{\arcsin x}_{0}+\frac{3}{\pi}\underbrace{\arccos x}_{\frac{\pi}{2}}\right]=\frac{3}{2}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan limit mevcut değildir.

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{2}{\pi}\underbrace{\arcsin x}_{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{\pi}\underbrace{\arccos x}_{0}\right]=1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\underbrace{(x-1)}_{0}\underbrace{\sin\frac{1}{x-1}}_{\substack{A \\ -1\le A\le 1}}=0$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan limit mevcut değildir.

b) $x=0$ ve $x=1$ noktalarında f fonksiyonunun sürekliliğini araştırıp, süreksizlik olması halinde türünü belirleyiniz. **(8P)**

$\lim_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan $x=0$ da sıçramalı süreksizlik vardır.

$\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim_{x\to 1^-} f(x)$ olduğundan $x=1$ de sıçramalı süreksizlik vardır.

3.a) **Kapalı Türetme Yöntemini kullanarak,** $2x + \cos(x+y) = y^2 - \pi$ ile kapalı olarak tanımlı $y = f(x)$ eğrisinin $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ noktasındaki normal doğrusunun denklemini bulunuz. **(12P)**

$2 - (1+y')\sin(x+y) = 2y.y'$

$x = \frac{-\pi}{2}$ ve $y=0$ için;

$2 + (1+y') = 0$

$m_T = y' = -3 \Rightarrow m_N = \frac{1}{3}$

N.D.D. $y - 0 = \frac{1}{3}\left(x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{\pi}{6}$ //

$2 - \sin(x+y).(1+y') = 2yy'$

$x \to \frac{-\pi}{2}$, $y \to 0$, $y \to 0$

$2 + 1.(1+y') = 0$

$1 + y' = -2$

$y' = -3$

$y = -3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$y = x.\sec x$

$f^{-1}(x.\sec x) = x$

$(f^{-1})'(x.\sec x).\left(\frac{x.\sin x}{\cos^2 x}\right) = 1$

$x.\sec x = \frac{2\pi}{3}$

$\frac{x}{\cos x} = \frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{2\pi\cos x}{3}$

$\frac{2\pi.\sin x}{3.\cos}$

3.b) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x.\sec x$ fonksiyonunun tersinin mevcut olduğunu gösteriniz ve $(f^{-1})'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ değerini bulunuz. **(13P)**

$f'(x) = \sec x + x.\sec x.\tan x > 0 \quad \left(\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

olduğundan f artandır $\Rightarrow f$, 1-1 $\Rightarrow f$'in tersi mevcuttur.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $(f^{-1})'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(\frac{2\pi}{3})}_{a})}$

$f^{-1}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a \Rightarrow f(a) = \frac{2\pi}{3}$

$a.\sec a = \frac{2\pi}{3}$

$a = \frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})}$

$= \frac{3}{6 + 2\sqrt{3}\pi}$ //

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sec\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sec\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}$

$= 2 + \frac{\pi}{3}.2.\sqrt{3}$

$= \frac{6 + 2\sqrt{3}\pi}{3}$

$f^{-1}(x.\sec x) = x$

$(f^{-1})'(x.\sec x).\left(\sec x + \frac{\sin x.}{\cos^2 x}x\right) = 1$

$\frac{x}{\cos x} = \frac{2\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3}$

4.a) $\lim_{x\to 0}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x^2+2x}} = y$ limitini hesaplayınız. **(14P)**

$$y=(1+\arctan x)^{\frac{1}{x^2+2x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x^2+2x}\cdot \ln(1+\arctan x)$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arctan x)}{x^2+2x} = \left(\frac{0}{0}\text{ bl.}\right)$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\arctan x}}{2x+2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \frac{1}{2}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right)=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+\arctan x)^{\frac{1}{x^2+2x}} = e^{1/2} \quad //$$

$$\frac{\ln(1+\arctan x)}{x^2+2x} = \ln y$$

$$\left.\frac{\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1+\cancel{\arctan x}^{0}}}{2x+2}\right)\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \frac{1}{2}$$

$$\log_e \lim_{x\to 0} y = \frac{1}{2}$$

$$e^{1/2}$$

4.b) $\sqrt[3]{x-1}-3x=0$ denkleminin $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ aralığında bir kökünün var olup olmadığını araştırınız. **(11P)**

$f(x)=\sqrt[3]{x-1}-3x$ fonksiyonu $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ aralığında süreklidir.

$f(0)=-1$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\sqrt[3]{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}-\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=a>0$

dolayısıyla f $[-1,a]$ aralığında her değeri alır. O halde $0\in[-1,a]$ değerini de alır. Yani $f(c)=0$ olacak şekilde $c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ vardır.

veya

$f(0)=-1<f(c)=0<f\left(-\frac{1}{2}\right)=a$ olduğundan Ara Değer Teoremine göre $f(c)=0$ olacak şekilde $c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ vardır.

Başarılar...

MAT1071-MATEMATİK I 1. VİZE
ÖRNEK SINAV

1.

$f(x) = \dfrac{\arccos(x+1)}{\left|x+\dfrac{1}{2}\right|-1} + \ln(16-x^2)$ fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

$\left(1+\dfrac{1}{6(x-1)}\right)^{6x} = y$

a) $[-2, 0]$

b) $\left[-2, -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{2}, 0\right]$

$6x \cdot \ln\left(\dfrac{6x-5}{6x-6}\right) = \ln y$

c) $[-4, -2] \cup (2, 4)$

d) $\left(-2, \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, 2\right]$

e) $\left(-4, -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{3}{2}, 4\right)$

$\lim_{x\to\infty} 6x.$

2.

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{6(x-1)}\right)^{6x}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

$\left(\dfrac{6x-5}{6x-6}\right)^{6x} = y$

a) 1

b) 0

c) e

d) $\dfrac{1}{e}$

e) Limit mevcut değildir.

3.

X $\quad X+h$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f\left(x-\dfrac{h}{2}\right)-f\left(x+\dfrac{h}{2}\right)}{h}$ limitinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $-f'(x)$

b) $f'(x)$

c) $2f'(x)$

d) $\dfrac{1}{2}f'(x)$

e) $-\dfrac{1}{2}f'(x)$

4.

$+1$ -2 $\quad \dfrac{(x-2).(x+1)}{(x-6).(x+1)}$

$f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x-6}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

-6 $+1$

I. $x=-1$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır.

II. $x=6$ noktasında sonsuz süreksizdir.

III. $x=2$ noktasında sıçramalı süreksizliği vardır.

a) Yalnız I

b) I ve II

c) II ve III

d) Yalnız II

e) I, II ve III

$\frac{1}{\pi} - 1 = b$

5.

$\frac{x}{y} + \cos xy + \cancel{ax}^{\,0} = b$ eğrisinin $(1, \pi)$ noktasındaki teğet doğrusunun eğiminin π olmasını sağlayan a ve b değerleri için $a + b$ kaçtır?

$\frac{y - x.y'}{y^2} \underbrace{- \sin xy . (xy')}_{0} + \cancel{a}^{\,0} = 0$

$\frac{\pi - y'}{\pi^2} + a = 0$

a) ~~$\frac{1}{\pi}$~~

b) ~~$\frac{2}{\pi}$~~

c) $\frac{1}{\pi} - 1$

d) ~~2~~

e) ~~3~~

$x = \frac{a\sqrt{(b^2 - y^2)}}{b}$

6.

a ve b sabit olmak üzere, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ biçiminde verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için y'' türevi aşağıdakilerden hangisidir?

$2b^2x + 2a^2y.y' = 0$

$y' = \frac{-2b^2x}{2a^2y}$

$-4a^2b^2y + 4a^2b^2x\,y.y'$

$\frac{(-2b^2 . 2a^2y) - (-2b^2x).(2a^2y.y')}{(2a^2y)^2}$

$a^2y^2 - a^2b^2$

$(-y + xy.y')$

a) $\frac{b^4}{a^2y^2}$

b) $\frac{a^4}{b^2y^2}$

c) $-\frac{a^4}{b^2y^3}$

d) $-\frac{b^4}{a^2y^3}$

e) $\frac{b^4}{a^3y^2}$

$\frac{b^2.(y^2 - b^2 - y)}{a^2y}$

$\frac{b^2.\ (xy' - 1)}{a^2y}$

$\frac{(y^2 - b^2)}{y} - 1$

$\frac{b^2y^2 - b^4 - b^2y}{a^2y}$

7.

$f(x) = \ln(3x - 1)$ olduğuna göre $f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)$ kaçtır?

$f^{-1}(\ln(3x-1)) = x$

$\log_e(3x - 1) = 0$

$3x - 1 = 1$

$\boxed{x = \frac{2}{3}}$

$(f^{-1})'(\ln(3x-1)) . \frac{3}{3x-1} = 1$

$= \frac{3x-1}{3}$

$\frac{\cancel{3}\frac{2}{\cancel{3}} - 1}{3} = \frac{1}{3}$

a) ~~−2~~

b) ~~−1~~

c) ~~0~~

d) 1

e) ~~2~~

$x^3+7x+9=0$

8.

$x^3 + 7x = -9$ denkleminin aşağıdaki aralıklardan hangisinde en az bir reel çözümü vardır?

a) $[-2, -1]$

b) $[-1, 0]$

c) $[0, 1]$

d) $[1, 2]$

e) $[2, 3]$

9.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$ limitinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

$\dfrac{\sqrt{1-\cos x} \cdot \sqrt{1+\cos x}}{x \cdot \sqrt{1+\cos x}}$

$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{x \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sin x}{x \cdot \sqrt{2}}$ $\quad c^2+s^2$

$1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) 0

e) Limit mevcut değildir.

$9d - 4 = 3c + d$

$8d$

10.

$f(x) = \begin{cases} cx + d, & x \leq 3 \\ dx^2 - 4, & x > 3 \end{cases}$ fonksiyonu $x = 3$ noktasında türevlenebilir ise c ve d sabit olmak üzere $c - d$ kaçtır?

$8d - 4 - c = 0$ $\quad +c$

$c = 6d$

$8d - 3c = 4$

$3c$

$8d - 3c = 4$

$-4 / 2d - c = 0$ $\quad 8d - 3c = 4$

$+4c$ $\quad -18d + 3c = 0$

$c = 4$ $\quad -10d = 4$

$d = 2$ $\quad d = \frac{-4}{10}$

$\frac{-24}{10} + \frac{4}{10} = -2$

a) $-\dfrac{2}{5}$

b) -1

c) -2

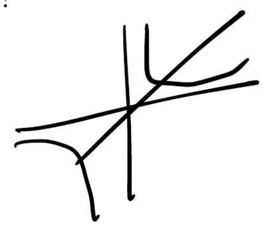
d) $-\dfrac{12}{5}$

e) 3

$f(x) = x$

11.

$f(x)$ fonksiyonu bir (a, b) aralığında pozitif tanımlı ve artan ise aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi bu aralıkta <u>azalandır</u>?



a) $-\frac{1}{f(x)}$

~~b) $-\frac{1}{f^2(x)}$~~

~~c) $f^2(x)$~~

~~d) $f^3(x)$~~

~~e) $2f(x)$~~

$1 = b$

12.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1-x}{|1-x|}, & x > 1 \end{cases}$$ -1

$1 + 2$

fonksiyonunun $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sürekli olmasını sağlayan a ve b değerleri için $b - a$ kaçtır?

$a + b = -1$

$-2 \quad 1$

~~a) -1~~

~~b) 0~~

~~c) 1~~

~~d) 2~~

e) 3

$\sin(4x + 3x) = \cancel{\sin 4x . \cos 3x} + \cos 4x . \sin 3x$

13.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{[\sin 7x - \cancel{\sin 4x \cos 3x}]^{100}}{x^{99}}$ limitinin değeri kaçtır?

$$\frac{[\cos 4x . \sin 3x]^{100}}{x^{99}}$$

a) 0

~~b) 3^{100}~~

~~c) $\frac{1}{3^{100}}$~~

~~d) 7^{100}~~

~~e) $\frac{1}{7^{100}}$~~

$$\frac{[\cos 4x]^{99} . \cos 4x . (\sin 3x)^{100}}{x^{99}}$$

14.

$\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{6}+t\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{t}$ limitinin değeri aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\dfrac{4}{3}$

b) $\sqrt{3}$

c) 0

d) $\dfrac{3}{4}$

e) 1

$\sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\frac{1}{\cos^2 30^\circ}$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\frac{3}{4}$

15.

$\arctan(1) = 45$

arctan(1.04) ifadesinin yaklaşık değeri aşağıdakilerden hangisidir?

$f(x) = \arctan x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$f'(1) = \frac{1}{2}$

a) $\dfrac{25\pi+2}{100}$

b) $\dfrac{50\pi+2}{100}$

c) $\dfrac{5\pi+4}{100}$

d) $\dfrac{50\pi+4}{100}$

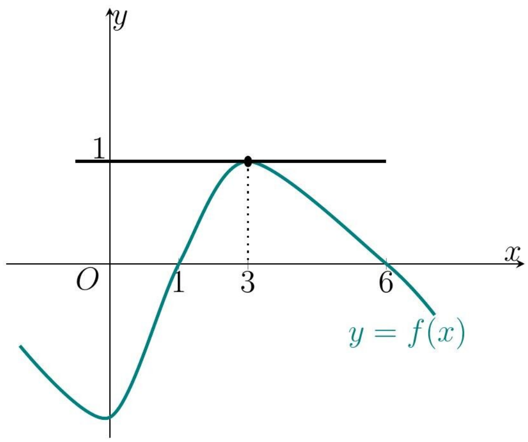
e) $\dfrac{5\pi+2}{100}$

$y-\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot(x-1)$

$y-\frac{\pi}{4} = \frac{x-1}{2}$ $\rightarrow$ $\frac{2}{100} = -\frac{\pi}{4}+y$

$\boxed{\frac{2+25\pi}{100}} = y$

16.



$f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandaki şekilde verilmiştir. $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ biçiminde tanımlandığına göre $g(x)$ fonksiyonunun $x = 3$ noktasındaki normal doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

$$\frac{f'(x).x - f(x)}{x^2} = g'(x)$$

$$-\frac{1}{9} = g'(3)$$

$$\frac{1}{3} = g(3)$$

$$+9(x-3) = y - \frac{1}{3}$$

$9x - 27$

$\frac{-1}{9} . x^{-9} = 1$

a) $y = 3x - \dfrac{40}{3}$

b) $y = 9x - \dfrac{80}{3}$

c) $y = -3x + \dfrac{20}{3}$

d) $y = -9x - \dfrac{40}{3}$

e) $y = 3x + \dfrac{80}{3}$

$\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} . \log_5 e$

$\frac{1}{2x}$

17.

$f(x) = [\log_5(\sqrt{x})]\,[\sin(x^e)]$ ise $f'(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\ln 25 \cdot x}\cos(x^e) + \sin(x^e)(ex^{e-1})\log_5(\sqrt{x})$

b) $f'(x) = 2\ln 5 \cdot x \sin(x^e) + \cos(x^e)(ex^{e-1})\log_5(\sqrt{x})$

c) $f'(x) = 2\ln 25 \cdot x \sin(x^e) + \cos(x^e)\left(ex^{e^{-1}}\right)\log_5(\sqrt{x})$

d) $f'(x) = 2\ln 25 \cdot x \sin(x^e) + \cos(x^e)(\ln x^e)\log_5(\sqrt{x})$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\ln 5 \cdot x}\sin(x^e) + \cos(x^e)(ex^{e-1})\log_5(\sqrt{x})$

18.

f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 2$$
$$f(2) = 3, \quad f'(2) = 4$$

ve $f\left(tf(s)\right) = 2t^2 - 5$ ise $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{(t,s)=(2,1)}$ değeri kaçtır?

$\underbrace{f'(t.f(s))}_{4} . \left(f(s) + t.f'(s).s'\right) = \cancel{8}$

$\cancel{2}$

1

$\frac{1}{4}$

a) $-\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $-\dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{1}{4}$

e) -1

19.

$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri doğrudur?

$2\ln x + \cancel{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \ln y$

I. Tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ dır

II. $x = 0$ noktasındaki limiti 0 dır

III. $x = 0$ noktasında süreklidir

a) Yalnız I

b) Yalnız II

c) Yalnız III

d) II ve III

e) I, II ve III

20.

$\dfrac{d}{dx}\ln\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right|$ türevinin sonucu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\cancel{\dfrac{-\pi}{x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}}$

b) $\cancel{-\cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}$

c) $\cancel{\dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}}$

d) $\cancel{\dfrac{\pi}{x}\cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)}$

e) $-\dfrac{\pi}{x^2}\cot\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$

$$\frac{\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)' \cdot \dfrac{\cancel{\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|}}{\sin\frac{\pi}{x}}}{\cancel{\left|\sin\frac{\pi}{x}\right|}}$$

$$\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(\pi x^{-1}\right)'$$

$$\downarrow$$

$$\frac{-\pi}{x^2}$$

Çıkarım

$f(x) \longrightarrow$ **1. adım** $f'(x)=0$ x'ler bulunur $\longrightarrow$ Türevin işaret tablosu

Soru: $f(x) = x^3 - 27x + 1$ fonk

$3x^2 - 27 = 0$

$x^2 = 9$

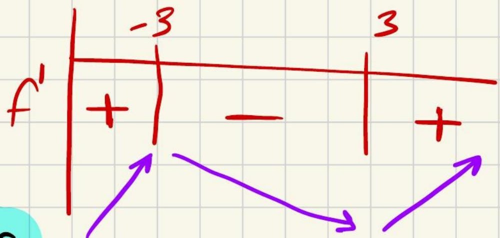
$x = \pm 3$

a) f(x) in ekstremum apsisleri ± 3

b) artan azalan $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ artan

c) mak- min noktalarını bulun.

$\underbrace{(-3, 55)}_{\text{maks}} \;/\; \underbrace{(3, -53)}_{\text{min}}$



Not: $f'(x) = 0$ yapan her x, ekstremum apsisi olmayabilir.

$f'(x) = 0$ + türevin işareti o noktada değişmelidir $\Longrightarrow$ ekstremum apsisi

Daima Artan ve Azalan Fonksiyonlar

$f'(x) > 0$ ise artandır.

$f'(x) < 0$ ise azalandır.

Daima artanda $f'(x) = 0$ yapan x yoktur.
Bu durumda $f'(x) > 0$ olur.

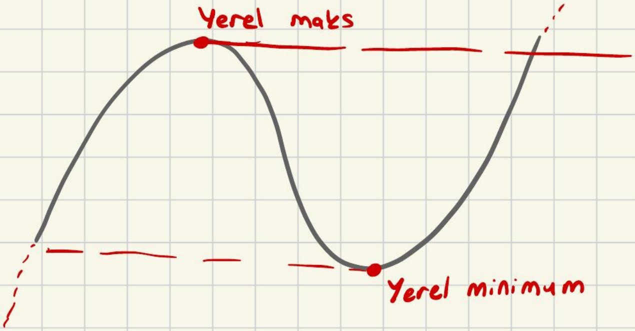
Örnek: $3x^2 + 1 = f'(x)$ ise
$f(x)$ daima artandır.

Daima azalanda $f'(x)$ daima negatiftir.

Yerel ve Mutlak Maks ve Min Arasındaki Fark

Maksimum

Yerel (local) maks	Mutlak (absolute) maks
Yerel (local) min	Mutlak (absolute) min

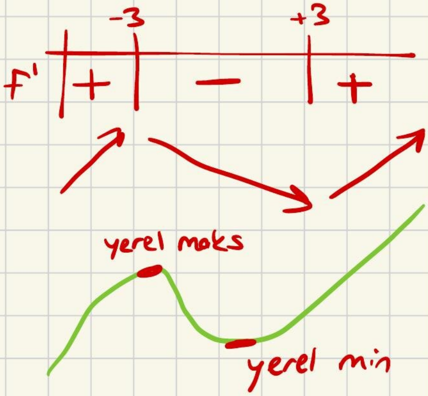


Not: Mutlak maks-min, aynı zamanda birer yerel maks-min olarak kabul edilir.

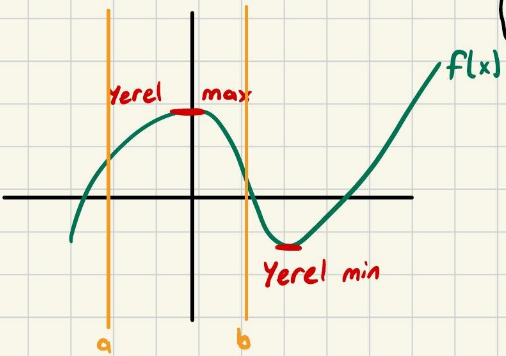
Soru: $x^3-27x+1$ maks, min bul.
sınıflandır.

$3x^2-27=f'(x)$

$x=\pm 3$



Verilen Aralıkta Maksimum - Minimum Noktalarını Bulma



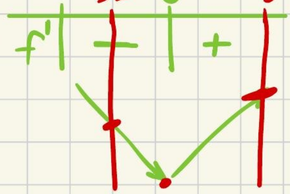
$[a,b]$ aralığında
bu aralıkta mutlaka mutlak
maks - min olur.

Adaylar

1. Sınırlar max- min adayıdır.
2. Sınırlar içindeki ekstremumlar

Soru: $f(x)=x^2$ fonk $[-2,3]$ aralığında mutlakları bul.

$f'(x)=2x \longrightarrow$

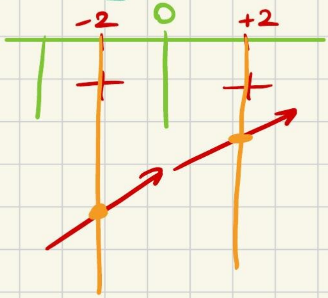


$(0,0)$ mutlak minimum

$(3,9)$ mutlak maksimum

Soru: $f(x) = x^3 + 1 \quad [-2, 2]$ ar. mutlak bul.

$3x^2 \longrightarrow f'$

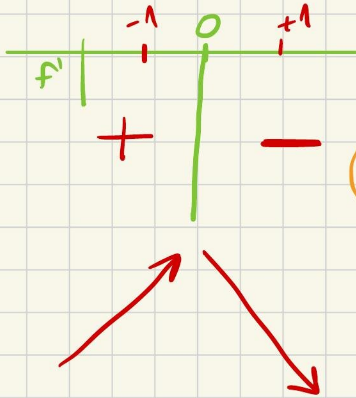


$(-2, -7)$ mutlak min

$(2, 9)$ mutlak max

Soru: $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad [-1, 1]$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \longrightarrow f'$



$(0, 1)$ mutlak maks

$(-1, 1/2)$ ve $(1, 1/2)$ mutlak min

$\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0$

$f'(1) = \dfrac{+2}{4}$

Maksimum ve Minimum Noktaları 2. Türev ile Belirleme

(Second Derivative Test)

1. Yol

$f(x) \longrightarrow f'(x) = 0 \longrightarrow$ işaret tablo

2. Yol

$f(x) \longrightarrow f'(x) = 0$ türevi 0 yapan bir nokta x_1 olsun.

$f'(x_1) = 0$

$f'(x_1) = 0$ iken

- $f''(x_1) > 0$ min apsis
- $f''(x_1) < 0$ maks apsis
- $f''(x_1) = 0$ max – min değildir.

Soru: $x^3 - 27x + 1 = f(x)$

$3x^2 - 27$ f' $\quad x = \pm 3$

$\downarrow$

$6x$ f'' $\longrightarrow$ $(+3, 18) \longrightarrow$ min apsis

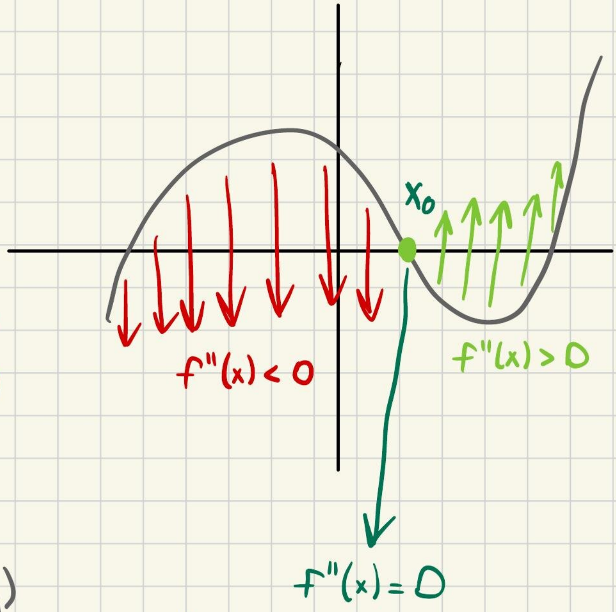
$(-3, -18) \longrightarrow$ max apsis

2. Türevin Yorumu

$f(x) \longrightarrow f''(x)$

?

$f''(x) = 0$ yapan noktaya dönüm, büküm (inflection point) noktası denir.



$f''(x) < 0$ eğriliğin yönü aşağı (iç bükey) (konkav)

$f''(x) > 0$ eğriliğin yönü yukarı (dış bükey) (konveks)

$f''(x) = 0$ yapan her x dönüm noktası olmayabilir.

		a	
f''	+		−

		a	
~~f''~~	~~+~~		~~+~~

Soru: $x^3 - 27x + 1$

a) büküm nok. $(0,1)$

b) içbükey, dışbükey nok. nelerdir.

$(-\infty, 0)$ iç bükey konkav

$(0, \infty)$ dış bükey konveks

$3x^2 - 27$

$6x = f''(x)$

$6x = 0$

$x = 0$

	0	
f''	$-$	$+$
	konkav	konveks

$(0,1)$ büküm noktası

Optimizasyon Problemleri

Bir şeyin alabileceği en büyük veya en küçük değerin 1. Türev yardımıyla hesaplanmasına optimizasyon problemleri denir.

Soru: $x + 3y = 18$ ise $x.y$ en fazla kaçtır?

1. adım

$x.y$ tek bilinmeyene çevrilmelidir.

$x = 18 - 3y \longrightarrow x.y = (18y - 3y^2)$ maks değer

2. adım

$18 - 6y = 0$

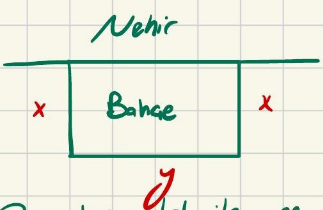
$y = 3$

y		3	
$18-6y$	+		−
	↗		↘

$\overset{x\ \ y}{(9,3)}$ ✓

27

Soru:



200 metre tel ile en büyük alanlı dikdörtgen şeklinde tel ile çevirmek istiyor.

$2x + y = 200$

$y = 200 - 2x$

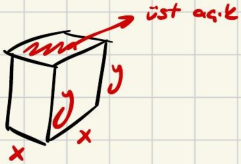
$x.y = 200x - 2x^2$

$200 - 4x = 0$

$x = 50$

$(50, 100)$

400 cm² lik karton ile dik prizma yapılmak isteniyor.
Hacmin en çok olması için dik prizmanın boyutları ne olmalıdır.



$x^2 + 4xy = 400$

$y = \frac{100}{x} - \frac{x}{4}$

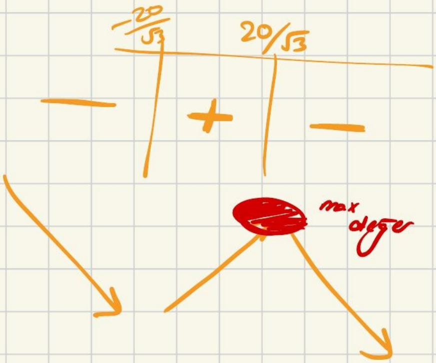
$x^2 \cdot y = max$

$\left(100x - \frac{x^3}{4}\right) = max$

$100 - \frac{3x^2}{4} = 0$

$x = \frac{20}{\sqrt{3}}$

$y = 5\sqrt{3} - \frac{5}{\sqrt{3}}$



Soru: $f(x) = x^2 - 5x + 4$ fonk üzeri noktalardan koordinat top en küçük olan noktayı bulun.

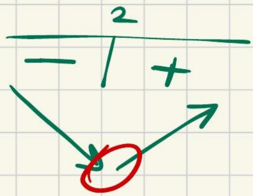
$4 - 10 + 4$

$(x, x^2 - 5x + 4)$

$x^2 - 4x + 4 \rightarrow$ min değer

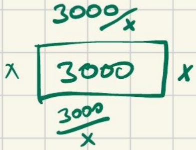
$2x - 4 = 0$

$x = 2$



$(2, -2) = 0$

Soru: $3000\ m^2$lik bir arazi telle kaplanacak. 3 kenarı metresi 3 lira bir kenarı metresi 1 lira olan tel kullanılacaktır. En ucuz maliyet?



$$2x+\frac{3000}{x}$$

$$3\cdot\left(\frac{2x^2+3000}{x}\right)+\frac{3000}{x}$$

$$\frac{6x^2+12000}{x}=f(x)$$

$$6x+\frac{12000}{x}=f(x)$$

$$\downarrow$$

$$6-\frac{12000}{x^2}=0$$

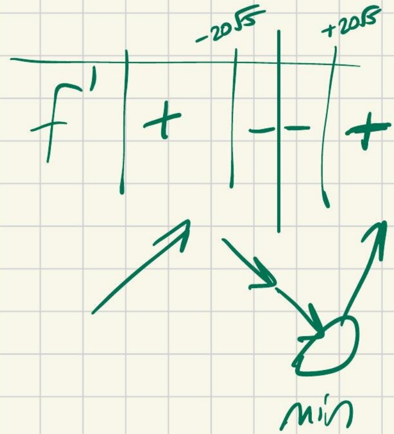
$$6=\frac{12000}{x^2}$$

$$\cancel{6}x^2=$$

$$x^2=2000$$

$$x=\mp\sqrt{2000}\longrightarrow 20\sqrt{5}$$

$$y=30\sqrt{5}$$



$$\left[f\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right)\right]'$$

$$= f\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right) \cdot \left(1 \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right) + x \cdot g\left(x^2 \cos x\right) \cdot \left(2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)\right)\right)$$

$$\left[f(x)\right]' = f(x) \cdot f'(x)$$

$$f'\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right) \cdot \left[1 \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right) + \left(x \cdot g'\left(x^2 \cdot \cos x\right) \cdot \left(2x \cos x - x^2 \cdot \sin x\right)\right)\right]$$

$$\frac{x+\sin x}{\sin x} = 2$$

Çözüm Limiti alınan ifadenin bütün terimlerini x ile bölerek

$$\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{\arctan x} = \lim_{x\to0}\frac{1+(\sin x)/x}{(\arctan x)/x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

elde ederiz. ◄

[redacted] $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2+\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm Uygun düzenlemeler yapar ve ilgili formülleri kullanırsak

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x^2+\ln(1+x^2)}{1-\cos x} &= \lim_{x\to0}\left\{\frac{x^2}{1-\cos x}\left[1+\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]\right\}\\ &= \lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}}\left[1+\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right]\right\} = 2(1+1) = 4\end{aligned}$$

olacaktır. ◄

[redacted] $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x)}{x^2-\sin x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm Not olarak

Çözüm Ö

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+}}{\sqrt{}}$

çıkar. ◄

[redacted]

Çözüm

oldukl

bulun

$$\frac{2x+\frac{2x}{x^2+1}}{+\sin x}$$

$$\cancel{2x^2}+2-\cancel{4x^2}$$

$$\frac{2+\frac{\cancel{-2x^2}+2}{(x^2+1)^2}}{+\cos x} \longrightarrow \frac{4}{+1} = \boxed{4}$$

2

$$\frac{}{(x-\sqrt{x^2-4x}} \Rightarrow$$

$$\frac{}{x-\sqrt{x^2-4x}} =$$

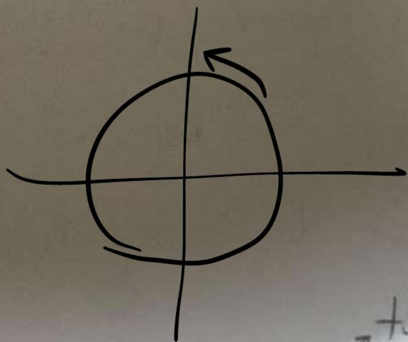
$2x$

$$x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}$$

$x - |x| \cdot 1$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cot x)^{\cos x} = ?$ A) e^2 B) e C) e^{-1} D) 1 E) -1

0^0 belirsizliği



türevi = 1

$\cos(\sin x) \cdot \cos x =$

$$(\cot x)^{\cos x} = y$$

$$\cos x \cdot \ln(\cot x) = \ln y$$

$$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cot x)}{\sec} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln y$$

$\log_e \dots = 0$

$$\frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{\sec x \tan x}$$

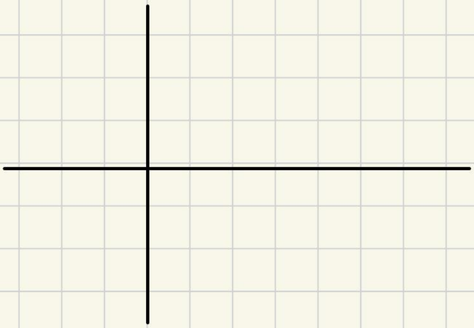
c.s

$$\frac{-1}{\sin} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cos}\cdot s} \quad \left(\frac{-\cos 0}{\sin^2 1}\right)^0$$

Asimptot

Bir doğru çiziminde çizimi kolaylaştıran denklemlerdir.

doğru denklemi



* fonksiyon grafiğinin yaklaşması gereken doğrulardır.

1. Düşey Asimptot (Vertical Asymptot)
2. Yatay Asimptot (Horizontal Asymptot)
3. Eğik ve eğri Asimptot (Oblique Asymptot)

Düşey Asimptot

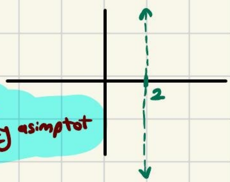
Tanımsızlıktan oluşan asimptottur.

$f(x) = 2x-1$ ✗

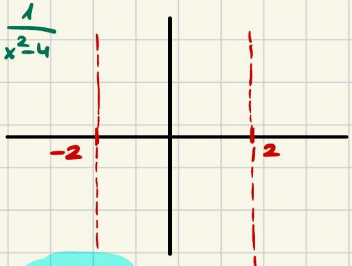
$f(x) = \frac{3x-2}{3}$ ✗

$f(x) = \frac{x}{x-2}$

$x=2$ fonk düşey asimptot



$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$



$x=-2$

$x=2$

$f(x) = \log_2(x+5)$ $\quad x=-5$

Yatay Asimptot

$y =$ fonksiyonun $+\infty$ veya $-\infty$'a giderkenki limit değeri

* limit değeri $+\infty, -\infty$ olursa yatay asimptotu yoktur.

$\lim_{x \to +\infty} (2x-3) = +\infty$
$\lim_{x \to -\infty} (2x-3) = -\infty$
yatay asimptot yok.

* sadece sayı çıkması gerekir.

Ör/ $f(x) = \dfrac{3x-2}{4x+5}$ yatay asimptot nedir?

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{4x+5} = \frac{3}{4}$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x-2}{4x+5} = \frac{3}{4}$$

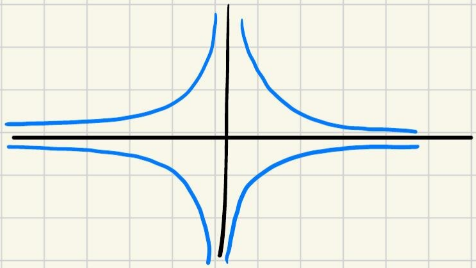
$y = 3/4$

* sadece bir sonsuza giderken sayı varsa yatay asimptot var kabul edilir. Fakat diğer sonsuza giderken yoktur.

Ör/ $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$ yatay asimptotu nedir.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2}{2x} = 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} = \frac{2}{2x} = 0$$

$y = 0$



Eğik ve Eğri Asimptot

* Yatay asimptot olmayan durumlarda karşımıza çıkar.

Eğik Asimptot

1. Çeşit

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

"payın derecesi paydanın derecesinden bir fazla ise"

2. Çeşit

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

"Kök ve içinde 2. derece fonksiyon varsa"

Eğri Asimptot

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$$

"payın derecesi paydadan iki ve daha fazlası ise"

Eğik Asimptot 1. Çeşit

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-2}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{pay} & \text{payda} \\ \hline & \text{bölüm} \end{array}$$

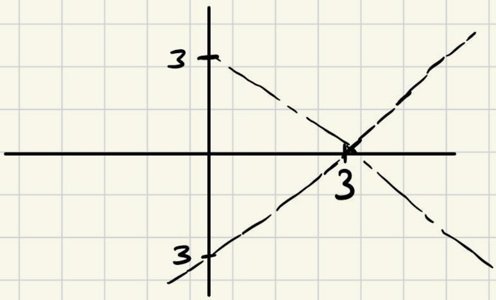
$$\boxed{y = \text{bölüm}}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x+1 & x-2 \\ \hline -\;x^2-2x & x+1 \\ \hline 0+x+1 & \\ -\;x-2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$y = x+1$$

Eğik Asimptot 2. Çeşit

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} \implies y = \mp\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$



$f(x) = \sqrt{x^2-6x+1}$ eğik asimptot?

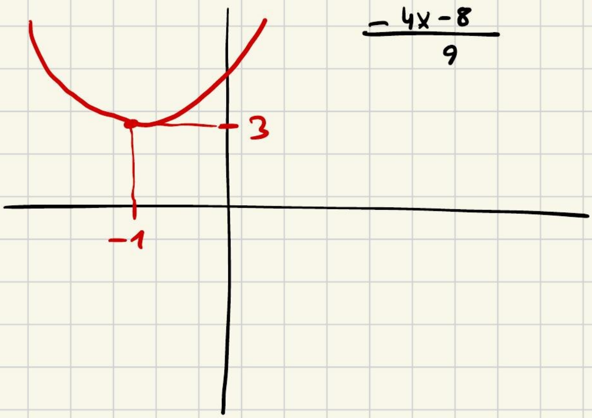
$\pm 1(x-3)$ → $y = x-3$, $y = 3-x$

Eğri Asimptot

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x-2 \\ \hline -(x^3-2x^2) & x^2+2x+4 \\ 2x^2+1 & \\ -(2x^2-4x) & \\ 4x+1 & \\ -(4x-8) & \\ 9 & \end{array}$$

$$y = x^2+2x+4$$



Türev Kullanarak Fonksiyon Çizme

1. Tanım Kümesi
2. Eksenleri kestiği noktayı bul.
3. Asimptotlar bulunmalıdır. (varsa)
4. Düşey Asimptot değerine sağdan ve soldan limitleri hesaplanır.
5. 1. Türevi alıp = 0
   * artan - azalan aralık
   * varsalar max ve min noktaları bul.
6. 2. Türevi alıp = 0
   * Konveks (dış-bükey), konkav (iç-bükey)
   * büküm noktası
7. Grafik Çizilir.
   1. Asimptotlar çizilir.
   2. Maksi/Min nokta, büküm noktası
   3. x ve y eksenlerini kestiği nokta
   4. çizim

Soru /

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

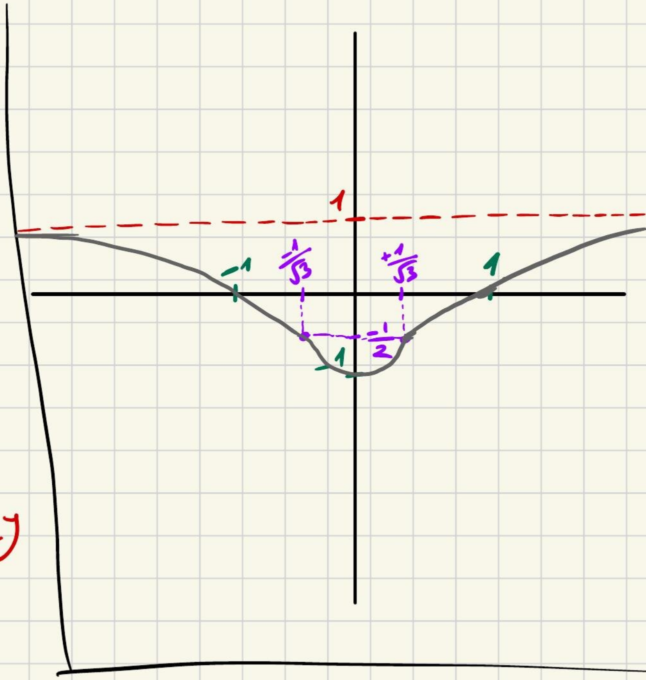
Tanım Kümesi = R

$x=0$ için $y=-1$ $(0,-1)$

$y=0$ için $x=-1,1$ $(-1,0),(1,0)$

düşey asimptot yok

yatay asimptot $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 = y$



$$\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1).\,2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$$

$x=0$

* paydayı sıfır yapanlar da işaret tablosunda bulunmalı

		0	
f'	−		+
	↘		↗

$$\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = 0$$

$x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \mp\sqrt{\frac{1}{3}}$

		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	
f''	−		+		−
	∩ konkav		∪ konveks		∩ konkav

1) Tanım Küme
2) x, y
3) asimptotlar
4) düşey asimptot için sağdan soldan limit
5) 1. Türev
6) 2. Türev
7) Çizim

$\mathbb{R} - \{1\}$

$\left.\begin{matrix}(0,0)\\(0,0)\end{matrix}\right\}(0,0)$

$x=1$ düşey asimptot $\longrightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \;/\; \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to \mp\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 = y$ yatay asimptot

$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x.1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = 0$ için

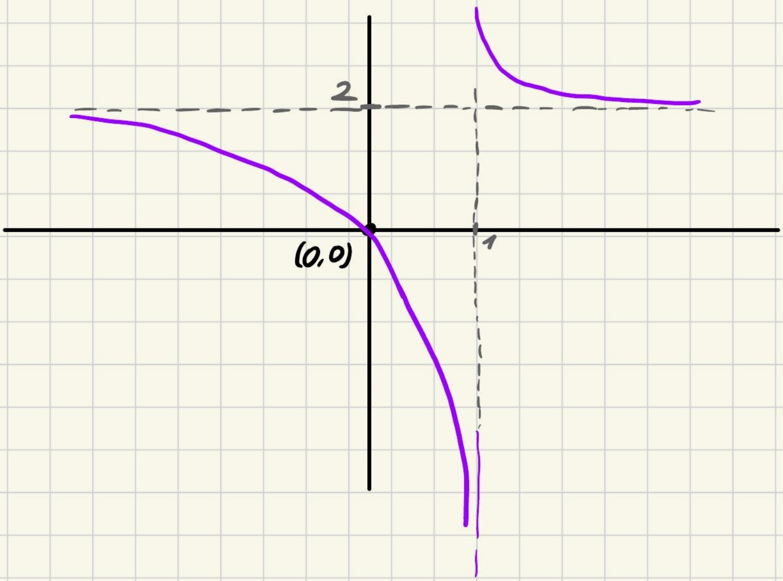
		1	
f'	$-$	‖	$-$

$\frac{+2.(2x-2).}{(x-1)^4} = 0$ için

$x-1=0$

$\boxed{x=1}$

		1	
f''	$-$	‖	$+$
	$\cap$		$\cup$



$f(x) = x^3 - 27x + 1$

1) Tanım Kümesi:
2) x, y
3) düşey asimp
4) yatay asimp
5) 1. Türev
6) 2. Türev
7) Çiz.

$\mathbb{R}$

$(0,1)$

~~(?,0)~~

$x^3 - 27x + 1 = 0$?

Kesirli olmadığı için asimptot yok.

$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0$ için

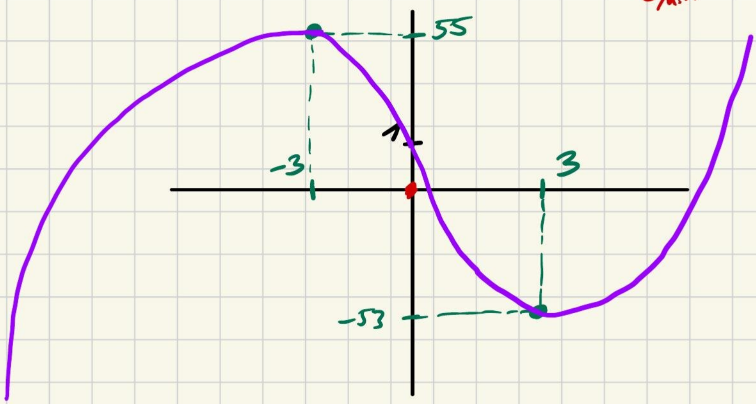
$x^2 = 9$

$x = -3, 3$

		-3		3	
f'	$+$		$-$		$+$
		max		min	

$f''(x) = 6x = 0$ için

	$x=0$	
$-$		$+$
$\cap$		$\cup$



$f(x) = x\cdot\sqrt{4-x^2}$

1) Tanım

$4-x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 4$

$-2 \leq x \leq 2$

$[-2,2]$

2) (x,y)

(0,0)

(-2,0)

(2,0)

asimptot yok

$\sqrt{4x^2-x^4} = f(x)$

$\frac{8x-4x^{\cancel{3}2}}{2\cancel{x}\sqrt{4-x^2}} = f'(x)$

$\frac{8-4x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = f'(x)$

$8x-4x^3=0$

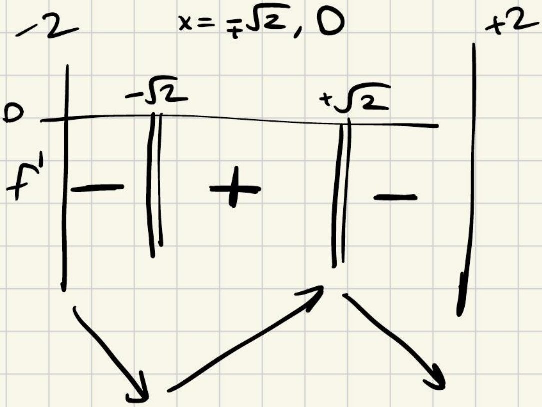
$4x^{\cancel{3}} = 8\cancel{x}$

$x^2=2$

$x=\mp\sqrt{2}, 0$

$f''(x)=$

$-8x(2\sqrt{4-x^2}) - (8-4x^2)\cdot\frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} = 0$

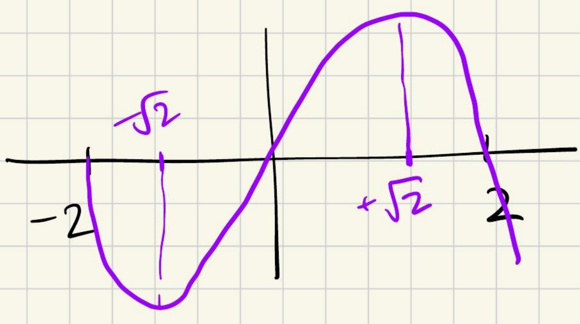


$8\cdot(4-x^2) = (8-4x^2)$

$2\cdot(4-x^2) = (2-x^2)$

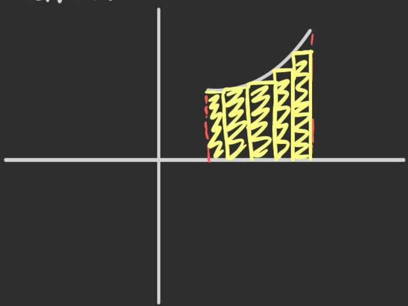
$8-2x^2 = 2-x^2$

$x=0$

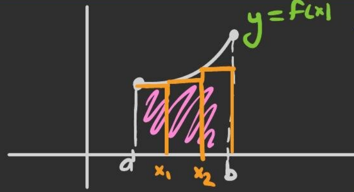


Riemann Toplamı

* Bir eğrinin altında kalan alanı



Sol Riemann Toplamı



* n eşit alt aralığa böl
* sol uçları ile dikdörtgen oluştur.
* Alanları topla

$$\Delta x = \frac{b-a}{3}$$

$$f(a).\Delta x + f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x$$

Soru

$f(x) = x^2+1$

$[2,10]$ 4 parça

sol riemann

2,4
4,6
6,8
8,10

$\Delta x = \frac{10-2}{4} = 2$

$5.2+17.2+37.2+65.2 =$

$248 =$

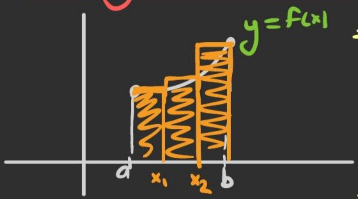
Soru:

$\int_1^3 x^3\,dx$ integralini $n=3$ alarak sol rieman ile yaklaşık hesaplayınız.

$\Delta x = \frac{2}{3}$ $\left[1,\frac{5}{3}\right]$ $\left[\frac{5}{3},\frac{7}{3}\right]$ $\left[\frac{7}{3},3\right]$

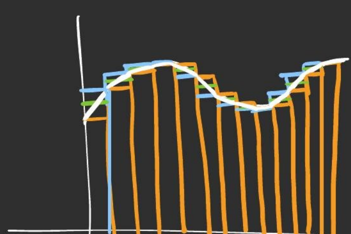
$\frac{990}{81}$ //

Sağ Riemann Toplamı



* n eşit alt aralığa böl
* sağ uçları ile dikdörtgen oluştur.
* Alanları topla

$$f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + f(b).\Delta x$$



Soru:

$(1 - x^2) = f(x)$

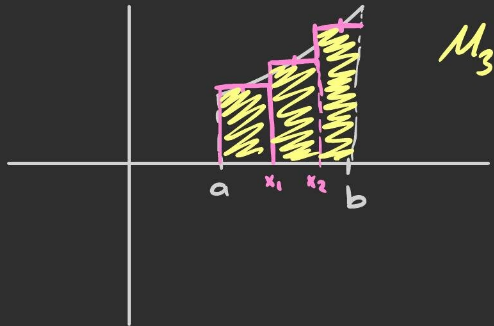
$[1,5]$, 4 parça

$$\left.\begin{array}{l} [1,2] \longrightarrow 3 \\ [2,3] \longrightarrow 8 \\ [3,4] \longrightarrow 15 \\ [4,5] \longrightarrow 24 \end{array}\right\} -50$$

$$\int_0^2 x^2\,dx \qquad n=4$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{array}\right\} \frac{15}{4}$$

Orta Nokta Riemann Toplamı



$$M_3 = \Delta x \left(f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+b}{2}\right) \right)$$

Soru

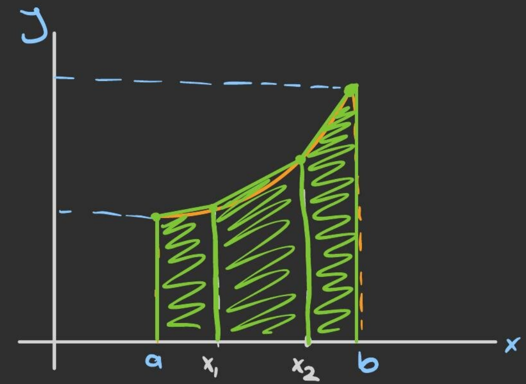
$f(x) = x^2 + 1$

$[1,4]$, 3 parça

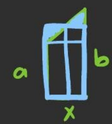
$$\left.\begin{array}{l} [1,2] \longrightarrow 13/4 \\ [2,3] \longrightarrow 29/4 \\ [3,4] \longrightarrow 53/4 \end{array}\right\} 95/4$$

Yamuk Alanı ile Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ arasında sürekli olsun.



* n eşit alt aralıkta yamuk alanı ile riemann toplamı, bu sınırların oluşturduğu yamukla elde edilir.



$$\frac{a+b}{2}\cdot h$$

$n=3$

$a \leq x \leq x_1$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$x_2 \leq x \leq b$

$$T_3 = \frac{f(a)+f(x_1)}{2}\cdot \Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\cdot \Delta x + \frac{f(x_2)+f(b)}{2}\cdot \Delta x$$

* Yamuk alanı ile R.T, sol ve sağ toplamın ortalamasına eşittir. (aritmetik)

Soru:

$f(x) = x^3+1$ fonk

$[1,5]$, $n=4$

Yamuk alanı = ?

$1,2 \longrightarrow 11/2$

$2,3 \longrightarrow$ ⋮

$3,4 \longrightarrow$ ⋮

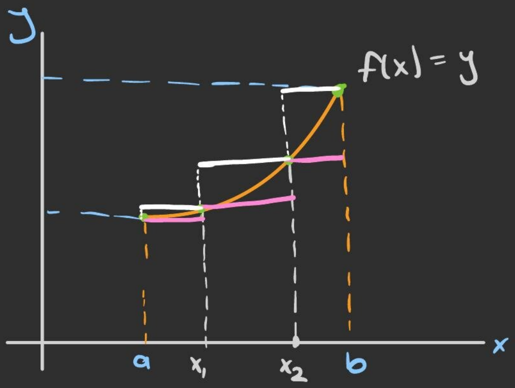
$4,5$

$+$

$332/2 = 166$

Alt Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ sürekli



* fonksiyon artansa

alt riemann toplamı = sol riemann toplamı

* fonksiyon azalansa

alt riemann toplamı = sağ riemann toplamı

$a \leq x \leq x_1$
$x_1 \leq x \leq x_2$
$x_2 \leq x \leq b$

aralıkta hangisi küçükse o alınır.

Soru

$f(x) = (x-1)^2$

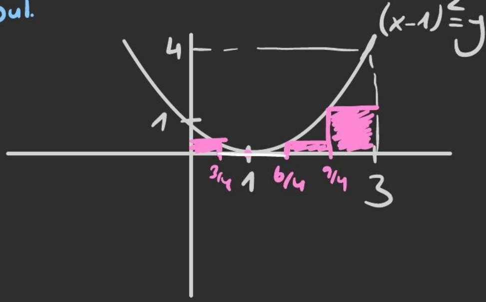
$[0,3]$ aralığında

$n=4$

alt riemann toplamı bul.

$0, 3/4 \longrightarrow f(3/4)$
$3/4, 6/4 \longrightarrow f(1)$
$6/4, 9/4 \longrightarrow f(3/2)$
$9/4, 3 \longrightarrow f(9/4)$

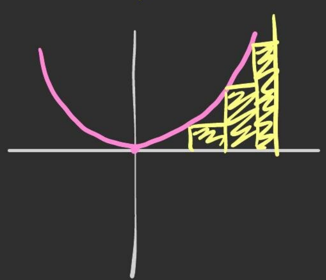
$45/32$



Soru:

$y = x^2$, $[1,3]$

$n=3$, alt riemann toplamı

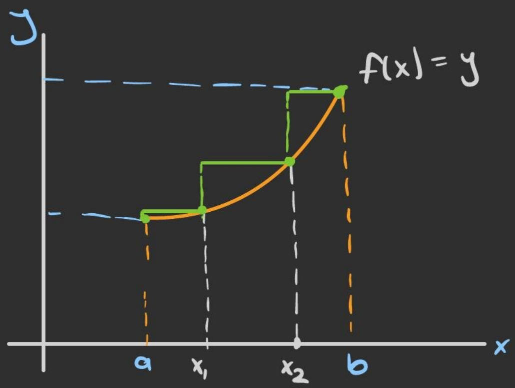


$1, 5/3 \rightarrow$
$5/3, 7/3 \rightarrow$
$7/3, 3 \rightarrow$

$166/27$

Üst Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ sürekli



$a \leq x \leq x_1$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$x_2 \leq x \leq b$

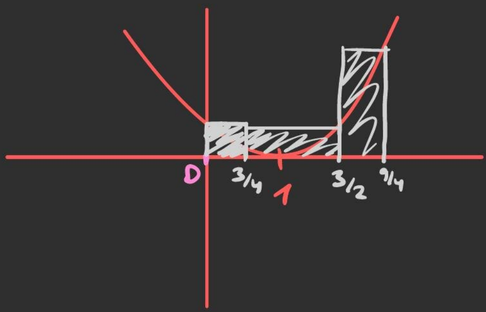
aralıkta hangisi büyükse onu seç

Soru:

$y = (x-1)^2$

$[0,3]$, $n=4$

üst riemann toplamı = ?



$0, 3/4 \rightarrow$

$3/4, 6/4 \rightarrow$

$6/4, 9/4 \rightarrow$

$9/4, 3 \rightarrow$

$325/64$

Toplam Sembolü ve Özellikleri (Sigma Notation)

$\sum$ = toplam sembolü

$$\sum_{k=1}^{5} f(k) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$$

5 → bitiş değeri

k=1 → başlangıç değeri

$\{1,2,3,4,5\}$

$$\sum_{n=0}^{3}(n^3+1) = 1+2+9+28=40$$

Özellik 1:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3\sum_{i=1}^{n} i$$

Özellik 2:

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+5k+6) = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 5k + \underbrace{\sum_{k=1}^{10} 6}_{60}$$

Toplam Sembolünü Kısa Yoldan Hesaplama

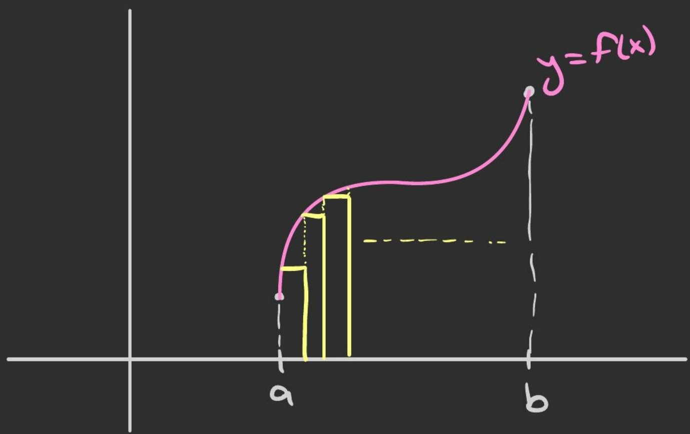
① $\sum_{k=m}^{n} a = a.(n-m+1)$

② $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$

Riemann Toplamının Limiti



$n = 3$
$n = 4$
5
6
$\vdots$
$n = n \to \infty$

$$\int_a^b f(x).\,dx = \text{gerçek alan}$$

Sağ Riemann Toplamının Limiti

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x . i$$

Ör/ $x_1 = a + \Delta x$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sol Riemann Toplamının Limiti

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x\,(i-1)$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\,\Delta x = \int_a^b f(x).\,dx$$

Soru:

$y=x^2$

$[1,3]$

Riemann toplam limiti ile bul.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i$$

$$x_i = a + \frac{2i}{n}$$

$$f(x_i) = \left(a+\frac{2i}{n}\right)^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{8i}{n^2}+\frac{8i^2}{n^3}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{8}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{4n+4}{n}+\frac{8n^2+12n+4}{3n^2}\right) = 26/3$$

$\int_0^3 x\,dx$ sonucunu riemann toplamının limitini kullanarak bulunuz.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i = \frac{3i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{9i}{n^2} = \frac{9n+9}{2n} = \frac{9}{2}$$

Riemann Toplamının Limitini: Belirli İntegral ile Çözme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$x_i = a + \Delta x i$

$b-a=3$

$5-2$

$f(x_i) = 2 + \frac{3i}{n}$

$\int_2^5$

Soru

$\frac{3}{n}$ → Δx

Δx ifadesini belirli integral

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\overset{a}{2} + \frac{3k}{n}\right)}_{f(xi)}$$

$$\Delta x = \frac{3}{n} \rightarrow b-a=3$$

5 2

$$\Rightarrow \int_2^5 x\,dx = 21/2$$

$$x_k = a + \Delta x.k = 2 + \frac{3k}{n}$$

$b-a=3$

$x_i = a + \Delta x i$

$2 + \frac{3k}{n}$

Soru:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^5+2^5+3^5+\dots\dots}{n^6}\right)=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x=\int_a^b f(x).dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^5}{n^5}+\frac{2^5}{n^5}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\cdot\left(\underbrace{\frac{i^5}{n^5}}_{\boxed{x^5}}\right)$$

$$\Delta x=\frac{1}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x i$$

$\downarrow$

0 ise $b=1$

$$\boxed{\int_0^1 x^5\,dx=\frac{1}{6}}\;=$$

Soru:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{2}{n}\right)+\sin\left(\frac{3}{n}\right)\dots\dots}{n}\right)=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{i}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\underbrace{\left(\sin\left(\frac{i}{n}\right)\right)}_{f(x_i)}$$

$$b-a=1 \quad (b=1)$$

$$\cancel{a}+\frac{i}{n}=x_i \quad (a=0)$$

$$\sin\left(\frac{i}{n}\right)=f(x_i)$$

$$\sin(x)=f(x)$$

$$\int_0^1 \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^1$$

$$=$$

Riemann Toplamı Örnek Soru-1

$f(x) = x^2$ fonksiyonu $[1,5]$ aralığında 4 eşit alt aralığa bölünüyor.

a) Buna göre, Riemann alt toplamını bulunuz.

b) Buna göre, Riemann üst toplamını bulunuz.

c) Her aralığın orta noktasına göre hesaplanan Riemann toplamını bulunuz.

1,2	$\to$ 1	4	2,25
2,3	$\to$ 4	9	6,25
3,4	$\to$ 9	16	12,25
4,5	$\to$ 16	25	20,25
	30	54	41

Toplam Sembolü Örnek Soru-3

Toplam Sembolü Örnek Soru-3

Aşağıda verilen ifadelerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\sum_{k=1}^{10} k^3 \rightarrow \left[\frac{n.n+1}{2}\right]^2 = \left[\frac{10.11}{2}\right]^2 = 55^2$

b) $\sum_{k=\cancel{1}\,1}^{\cancel{30}\,27} (\cancel{2k-3})\ 2k+3 = 2\sum_{k=1}^{27} k + \sum_{1}^{27} 3 = 27.28 + 27.3$

$31.27 =$

c) $\sum_{i=\cancel{-2}\,1}^{\cancel{12}\,15} (k^2+k) \quad 15(k^2+k)$

Integrale Giriş

* Türevin tersi

$f'(x) \longrightarrow f(x)$

* $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

* $\Sigma \longrightarrow$ ayrık değerlerde toplama
* $\int \longrightarrow$ sürekli değerlerde toplama

Integral Çeşitleri

Belirsiz integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

sınırları olmayan integral

Belirli integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ldots\ldots$$

Integral Alma Kuralları

1) Sabit Sayının İntegrali

$$\int 3\,dx = 3x + c$$

$$\int \frac{1}{5}\,dx = \frac{x}{5} + c$$

Belirsiz integralde zorunlu

$$\int -2\,dx = -2x + c$$

2) Üslü Sayının İntegrali

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + c$$

$x^{\frac{1}{3}}$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

Yardımcı Kurallar

a)

$$\int a f(x)\,dx = a.\int f(x).dx$$

$$\int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + c$$

b)

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (x^2 - 7x + 4)\,dx = \int x^2\,dx + \int -7x\,dx + \int 4\,dx$$

(c) $$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1).(a)}$$

** parantez içi sadece 1. derece iken uygulanabilir.

$$\int \sqrt[3]{5x-2}\,dx = \frac{(5x-2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}.5} + c$$

---

(4) Üstel Fonksiyonların İntegrali

(a) $$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

e aynen yazılır.
üssünün türevine bölünür.

e'nin üssü 1. derece ise uygulanabilir.

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int e^{-x} dx = \frac{e^{-x}}{-1} + c$$

$$\int e^{3x+1} dx = \frac{e^{3x+1}}{3} + c$$

$$\int 2e^{5x} = \frac{2.e^{5x}}{5} + c$$

$\int e^{x^2} dx$ = kurala uymaz.

$\int x.e^x\,dx$ = kurala uymaz.

(b) $$\int a^{mx+n}\,dx = \frac{a^{mx+n}}{m.\ln a} + c$$

üs 1. derece olmalıdır.

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{1.\ln 5} + c$$

5) Sonucu "ln" çıkanlar

$$\frac{\text{Sayı}}{\text{1. derece fonk.}} = \ln$$

$* \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$* \int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + c$

$* \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c =$

$$\int \frac{2}{x} dx = 2\ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{3}{2x} dx = 3 \cdot \int \frac{1}{2x} dx = \frac{3 \cdot \ln|2x|}{2} + c$$

$$\int \frac{2}{x+5} dx = 2 \int \frac{1}{x+5} dx = 2\ln|x+5| + c$$

6) Trigonometrik İntegral Kuralları

(a) $\int \sin(ax+b)\, dx = \frac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

1. derece

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$\int \sin 5x \, dx = \frac{-\cos 5x}{5} + c$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{5}\right) dx = \frac{-\cos(x/5)}{\frac{1}{5}} + c$$

Hatırlatma: Fonk.lar için Ortalama Değer Teorisi

f, $[a,b]$ sürekli

f, (a,b) türevli

$$\underbrace{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{en az bir } c\in(a,b)}$$

integraller için ODT

f, $[a,b]$ sürekli

$$\text{ort}(f) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(c) \text{ olmak üzere}$$

en az bir c vardır.

Soru: $|x-1|$, $[-1,2]$ aralığında ortalama değeri?

$$\text{ort}(f) = \frac{\int_{-1}^{2}|x-1|\,dx}{2-(-1)} = \frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^{1}(-x+1)\,dx + \int_{1}^{2}(x-1)\,dx =$$

$$\underbrace{\frac{-x^2}{2}+x}\qquad \underbrace{\frac{x^2}{2}-x}$$

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{-3}{2}\right) = 2 + \underbrace{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}_{5/2}$$

Leibniz Yöntemi

$$\left[F(x)\right]' = \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right]'$$

$$F'(x) = f(g(x)).g'(x) - f(h(x)).h'(x)$$

$$y = \int_a^{x^3} (t^3+1)\,dt \,, \quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}\,dt \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt}{x^3 - 2x^2 + x} \quad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L'H} \frac{\left[\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt\right]'}{3x^2 - 4x + 1}$$

$\tan(t-1) = f(x)$

$\to \tan(x^3 - 1) \cdot 3x^2$

$f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$ çiziniz.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

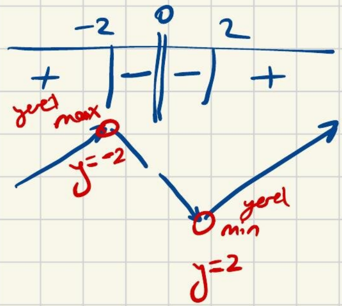
$\left.\begin{array}{l} \cancel{x,0} \\ \cancel{y,0} \end{array}\right\}$ kök yok.

tek fonk

$f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2} = 0$ iken

$x = -2, 2$

$x \neq 0$



$x = 0$ kritik nokta değildir. Çünkü tanım kümesinde yok.

Kalkülüsün Temel Teoremi

(1) $$F(x) = \int_{x+3x^2}^{5x} (y+\sqrt{y^2+1} \,, \quad F'(x) = ?$$

(2) $$\int_{\pi/2}^{\pi} \sec^2 x \,.\, dx = \tan x \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

Ör/ $$\int_{\pi/2}^{\pi} \sec^2(xy) \,.\, dx = \frac{\tan(xy)}{y} \Bigg|_{\pi/2}^{\pi}$$

Ör/ $$\int \sec^2 x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

Integraller için ODT

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Integral için Min-Max Değer

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x).dx \leq M(b-a)$$

Fundamental Theorem of Calculus (Part-1)

* $$F(x) = \int_a^x f(t).dt$$

then,

$F'(x) = f(x)$ over $[a,b]$.

Fundamental Theorem of Calculus (part 2)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

★ $\sin(x)]' = \cos x$

$[\cos(x)]' = -\sin x$

$[\tan(x)]' = \sec^2 x$

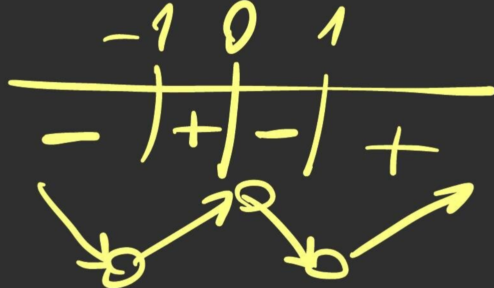
$[\cot(x)]' = -\operatorname{cosec}^2 x$

★ $[\sec(x)]' = \sec x . \tan x$

$[\operatorname{cosec}(x)]' = -\operatorname{cosec} x . \cot x$

$f(x) = x^2 - 2\ln(1+x^2)$

extremum değerleri bul.



$$2x - 2\cdot\frac{2x}{1+x^2} = 0$$

$$\cancel{2x} = \frac{2\cdot\cancel{2x}}{1+x^2} \qquad \cancel{1}+x^2 = \cancel{2}^{\,1}$$

$x = -1, 1, 0$

$f(-1) = 1 - 2\ln 2$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1 - 2\ln 2$

$f' = 0$ veya tanımsız noktaları

---

2. Yol,

$x = 0 \mid x = 1$

$x = -1$

$f'(x) = 0 \quad \cancel{f'(x) = \text{tanımsız}}$

$\Downarrow$

$f''(x) =$

$$2 - 4\left[\frac{1.(1+x^2) - x.2x}{(1+x^2)^2}\right] =$$

$f''(0) = -2 < 0$ yerel maks

$f''(1) = 2 > 0$

$f''(-1) = 2 > 0$

yerel min

$$\int_0^{\pi/4} e^{-2\ln\cos x}\,dx =$$

$$(e^{-2})^{\ln\cos x}$$

$$(e^{\ln\cos x})^{-2} = (\cos^{-2}x)\,dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos^{-2}x\,dx = \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \cdot dx$$

$$\Downarrow$$

$$\tan x \Big|_0^{\pi/4} = \boxed{1}$$

$$\int_1^2 e^{-\ln(4+x^2)}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\underbrace{f(x) = \frac{5x+7}{x-3}}$$

$x=3$ düşey asimptot

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5x+7}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{5x+7}{x-3} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{5x^2+7}{x-3}$$

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt \quad \text{için,}$$

$F(x)$, artan, azalan, yukarı kon. aşağı konkav, yerel extremum?

$$F'(x) = 2x \cdot e^{-x^4}$$

Belirli integral (Definite integral)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

* c yazılmaz.

$$\int_1^3 2\,dx = 2x\Big|_1^3 = 4$$

$$\int_0^2 (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_0^2 = 6$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Belirli integral Özellikleri

1. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2. $$\int_a^b f(x)\,dx = m \Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = -m$$

3. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4) f(x) çift fonk ise;

$f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = 2 \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

5) f(x) tek fonk. ise;

$f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

Mutlak Değerli İntegralleri Çözme

* Mutlak değer içini sıfır yapan değer sınırlarından ayrılır.

Reminder:

$$\left[\arctan f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$\left[\arcsin f(x)\right]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$\left[\arccos f(x)\right]' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$\left[\operatorname{arccot} f(x)\right]' = \frac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$$

Fundamental Theorem of Calculus

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{f(x)} h(t)\,dt\right) = \underbrace{h(f(x)) \cdot f'(x) - h(g(x)) \cdot g'(x)}_{\text{Liebniz Theorem}}$$

$$f(x) = \int_{x}^{x^2+1} \cos(t^2)\,dt \Rightarrow f'(x) = \cos((x^2+1)^2).\,2x - \cos(x^2).\,1$$

$$\cos((x^2+1)^2).\,2x - \cos(x^2).\,1$$

$$f(x) = \int_{2}^{7} \frac{1}{1+t^6}\,dt \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$0$$

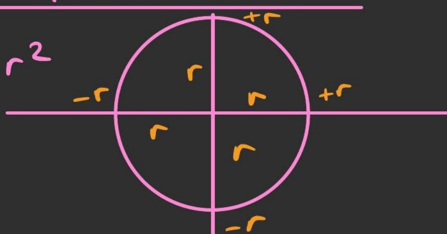
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{\ln x} \tan(t^2)\,dt\right) = \frac{\tan(\ln^2 x)}{x} - \tan(x^6).\,3x^2$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\int_{2}^{x} \frac{1}{1+t^3}\,dt}{x^2-4} \underset{L'H}{=} \frac{\frac{1}{1+x^3}}{2x} = \frac{1}{2x.(1+x^3)} = \frac{1}{36}$$

Çember Yardımıyla integral Çözme

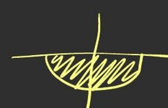
Merkezil Çember Denklemi

$x^2+y^2=r^2$

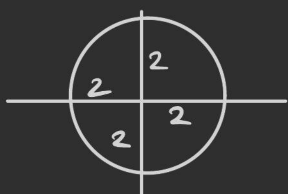


$x^2+y^2=r^2$

$y=\sqrt{r^2-x^2}$ // $y=-\sqrt{r^2-x^2}$



$x^2+y^2=4$



Integral Alma Yöntemleri

* Önce integral alma kurallarına bakılır. Yoksa yöntemlere başvurulur.

* Yöntemler, kurallara dönüştürür.

1 Değişken Değiştirme (u- substitution)

* Bu yöntem için

$$\int f(x) \cdot f'(x)\, dx$$ → $f'(x)$ ve dx çarpım durumunda olmalıdır.

* $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x\, dx$

* $\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

⋮

$$\frac{du}{dx} = \frac{d f(x)}{dx}$$

$$du = f'(x) \cdot dx$$

Soru:

$$\int e^{\overset{u}{x^3}} \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{du} =$$

$$\int e^u \cdot du = \frac{e^u}{1} + c$$

$$= e^{x^3} + c$$

* $u = f(x)$, $du = f'(x) \cdot dx$ $\Big\}$ $x \longrightarrow u$

* Sonuç u'lu çıkar. u yerine $f(x)$ konur.

Soru:

$du = (2x-5).dx$

$$\int \underbrace{(x^2-5x+1)}_{u}^{10}\cdot\underbrace{(2x-5)\,dx}_{du}$$

$$\int u^{10}\cdot du = \frac{u^{11}}{11}+c = \frac{(x^2-5x+1)^{11}}{11}+c$$

Soru:

$$\int \frac{2x}{\underbrace{x^2+1}_{u}}\,dx = \int \frac{\overset{\frac{1}{u}}{\cancel{(x^2+1)}^{2}}\cdot \cancel{-}2x\,dx}{\underbrace{(x^2+1)^2}_{du}}\;\underbrace{x^2+1}_{u}\;\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$x^2+1=u$

$2x\,dx=du$

$\int \frac{1}{u}\cdot du = \ln|x^2+1|+c =$

$$\int \frac{1}{u}\cdot du = \int \ln|u|+c = \ln|x^2+1|+c$$

Soru:

$$\int \sqrt{\underbrace{x^3+1}_{u}}\cdot \underbrace{3x^2\,dx}_{du} = \int \frac{\cancel{2}\overset{u}{(x^3+1)}}{\cancel{2}\sqrt{x^3+1}}\cdot \overset{du}{3x^2\,dx}$$

$u = x^3+1$

$du = 3x^2\,dx$

$$= \int \sqrt{u}\cdot du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}+c = \frac{2\sqrt{(x^3+1)^3}}{3}+c$$

Soru:

$$\int e^{\overset{u}{\sin x}} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{du} = \int du = u + c = e^{\sin x} + c$$

$u = \sin x$

$du = \cos x \, dx$

$$\int e^u \, du = e^u + c$$

Soru: $\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$u \, du = \frac{u^2}{2} + c$

Soru:

$$\int \frac{\sin(\overset{u}{\ln x})}{x} dx = \int \sin(u) \, du = -\cos(u) + c = -\cos(\ln x) + c$$

$$\int \sin(u) \, du = -\cos(u) + c$$

Soru:

$$\int \cos(\underset{u}{x^2}) \cdot \underbrace{2x \, dx}_{du} = \int \cos(u) \cdot du = \sin(u) + c = \sin(x^2) + c$$

$\sin(u) + c$

$$\int e^{\overset{u}{x^3}} \cdot \underbrace{x^2 \cdot dx}_{\frac{du}{3}} = \int \frac{e^u}{3} \cdot du = \frac{e^u}{3} + c = \frac{e^{x^3}}{3} + c$$

$x^3 = u$

$dx \quad x^2 = \frac{du}{3}$

$$\int \frac{e^u}{3} du = \frac{e^u}{3} + c$$

Soru

$$\int \frac{x}{x^2+1} \cdot dx = \int \frac{1}{2u}\, du = \frac{\ln|u|}{2} + c = \frac{\ln|x^2+1|}{2} + c$$

$x^2+1 = u$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

Soru

$$\int \sqrt[3]{x^3+1} \cdot x^2\, dx = \int \frac{\sqrt[3]{u} \cdot du}{3} = \frac{3u^{\frac{4}{3}}}{12} + c = \frac{3(x^3+1)^4}{12} + c$$

$x^2 dx = \frac{du}{3}$

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int 2\sin(u) \cdot du = -2\cos(u) + c = -2\cos(\sqrt{x}) + c$$

u

$2du$

$x^{\frac{1}{2}} = u$

$\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2du \qquad \int 2\sin(u)\, du$

Soru $\qquad -2\cos(\sqrt{x}) + c$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(\arcsin x)^2}{2} + c$$

u

du

$\arcsin x = u$

$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$

Soru

$$\int \sin^3 x \cdot \cos x\, dx = \int u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4} + c = \frac{\sin^4 x}{4} + c$$

Soru

$$\int \tan^3 x \cdot \sec^2 x\, dx = \int u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4} + c$$

$\tan x = u$

$\sec^2 x\, dx = du \qquad \frac{u^4}{4} + c$

$u^3 \cdot du$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x+1} \cdot dx = \int \frac{1}{u+1}\, du = \ln|u+1|+c$$

$$\ln|\sin x+1|+c$$

Soru:

$$\int \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) dx = \sin(u)+c = \sin\left(\frac{1}{x}\right)+c$$

Kısmi İntegral

L ogaritma ⟶ $\ln x,\ \ln^2 x,\ \ln(2x+1),\ \log_2 x$
A rc'lılar ⟶ arcsinx, ...
P olinom ⟶ $x,\ 2x-1,\ x^2,\ x^3+x^2+5$ ($\frac{1}{x}$ veya $\sqrt{x}$ değildir)
T rigonometri ⟶ sinx, cos3x ....
Ü steller ⟶ $5^x,\ e^x,\ e^{3x},\ 2^x$ ....

* yalnız durumda,
* çarpım durumunda çözer
* bölü durumunu çözmez.

Yöntem

* integral u ve dv diye iki parçaya ayrılır.
* Neye u denileceğini LAPTÜ belirler.
* Önceki u'dur.
* geriye kalan her şey dv'dir.
* x olanın türevi yazılır.
* dv'nin integrali alınır.
* c ilk başta yazılmaz.
* $u.v - \int v\,du$ = sonucu verir.

Soru

$$\int \ln x\,dx =$$

$\ln x = u \longrightarrow \frac{1}{x}dx = du$

$dv = dx \longrightarrow v = x$

$$\ln x . x - \int \cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}}dx =$$

$$x\ln x - x + c =$$

$$\int \underset{u}{x}\,\underbrace{e^x dx}_{dv}$$

$u = x$
$du = dx$
$e^x dx = dv$
$e^x = v$

$$x.e^x - \int e^x dx$$

$$\underline{x.e^x - e^x + c}$$

$u = x \mid e^x dx = dv$

$\Downarrow$

$du = 1.dx \mid \int e^x dx = \int dv$

$du = dx \mid e^x + c = v$

c ilk yazılmaz.

$$x.e^x - \int e^x dx = \underline{e^x(x-1) + c}$$

Soru

LAPTU

$$u.v - \int v\,du$$

$$\int \underset{pol.}{x}\,\underset{trigo}{\cos x}\,dx = ?$$

$x = u \longrightarrow dx = du$

$\cos x\,dx = dv \longrightarrow \sin x = v$

$$x.\sin x - \int \sin x\,dx = x.\sin x + \cos x + c$$

$$\frac{x}{x^2+1} . e^{|x|} . dx$$

$x^2 + 1 = u$
$x = \sqrt{u-1}$

$x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\frac{1}{2u} . e^{|\sqrt{u-1}|} . du$$

Polinom Bölmesi ile İntegral

$$\int \frac{\text{Pay}}{\text{Payda}}\,dx$$

① Pay ve payda polinom olmalı

② Payın derece paydadan büyük ya da eşit olmalı.

$\underbrace{\hspace{6cm}}$

Bu durumda bu yöntem zorunludur!

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx \rightarrow \begin{array}{r|l} x & x+2 \\ \underline{-\quad} & 1 \\ -2 & \end{array} = \int 1 + \frac{-2}{x+2}\,dx$$

$$\underline{x-2\ln|x+2|+c}$$

$$\int \frac{x^2}{x-1}\,dx \Rightarrow \begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \underline{-\ x^2-x} & x+1 \\ +x & \\ \underline{-\ x-1} & \\ +1 & \end{array} \Rightarrow \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right) dx$$

$$\underline{\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+c}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \begin{array}{r|l} x^3 & x^2+1 \\ \underline{-\ x^3+x} & x \\ -x & \end{array} \Rightarrow \int \left(x+\frac{-x}{x^2+1}\right) dx \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{\underset{u}{x^2+1}}\,dx$$

$x^2+1=u$

$2x\,dx=du$ $\Big|$ $\frac{1}{2}\ln|u|+c$

Basit Kesirlere Ayırarak İntegral Alma

$$\int \frac{\text{Pay}}{\text{Payda}}\,dx$$

① Pay ve payda polinom

② Paydanın derecesi > Payın derecesi

③ Payda çarpanlara ayrılabilir olmalıdır.

1. Çeşit

Payda tamamen 1. derece ise

**

$$\int \frac{2x-5}{x^2-3x-4} \;\Big|\; \frac{2x-5}{(x-4).(x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \int \frac{3/5}{x-4} + \frac{7/5}{x+1}\,dx$$

$\begin{matrix} x & -4 \\ x & +1 \end{matrix}$

$$\frac{2x-5}{(x-4).(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx-4B}{(x-4).(x+1)}$$

$A+B=2$

$A-4B=-5$ $\Rightarrow$ $A=3/5$, $B=7/5$

$$\frac{3}{5}\ln|x-4| + \frac{7}{5}\ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$$

$(x-2).(x+2)$

$A+B=0$

$2A-2B=1$

$4A=1$

$A=1/4$

$B=-1/4$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1/4}{x-2}+\frac{-1/4}{x+2}\right)dx$$

$$\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$$

2. Çeşit

Paydada 2. derece çarpan bulunursa

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1).(x-2)}\,dx = \frac{A}{x-2}+\frac{Bx+c}{x^2+1} \;!$$

$Ax^2+Bx^2+A-2C+Cx-2Bx=$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ C-2B=2 \\ A-2C=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{x-2}+\frac{-x}{x^2+1}\right)dx$$

$x^2+1=u$

$2x\,dx=du$

$$\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|u|+c$$

3. Çeşit

Paydada tamkare ifadeler bulunursa

$$\int \frac{2x+1}{(x-3)^2.(x+1)}\,dx = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}$$

$Ax^2-6Ax+9A$

$Bx^2-2Bx-3B$

$+Cx+C$

$A+B=0$

$-6A-2B+C=2$

$9A-3B+C=1$

$A=-1/16$

$B=1/16$

$C=7/4$

$$\frac{-1}{16}\ln|x+1|+\frac{1}{16}\ln|x-3|+\frac{7}{4}\int \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$

u, du

$$\int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$\frac{-1}{u}+c$$

$$=-\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{x-3}+c$$

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x \cdot dx$$

$\downarrow$

$$(1-\cos^2 x)^2 \cdot \cos^2 x \cdot \underbrace{\sin x \cdot dx}_{-t^2\, dt}$$

$\cos x = t$

$-\sin x\, dx = dt$

$-t^2(1-t^2)^2$

$$\int \left(-t^6 + 2t^4 - t^2\right) dt$$

$\ln(g(x)) = \sin x \cdot \ln(f(x))$

$$g'(x) = \left(\cos x \cdot \ln(f(x)) + \sin x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right)\left[f(x)\right]^{\sin x}$$

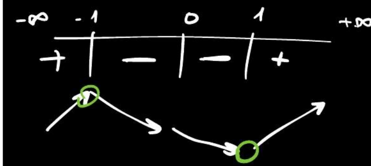
$$\frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} = f(x)$$

Düşey $\Rightarrow$ $x = 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} = 1$$

$x^2(x^2 - 1) =$ $x = 0 \rightarrow$ tanımsız

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right\}$ kritik



$\arctan x^2 = u$

$\frac{2x}{1+x^4}\, dx = du$

$x\, dx = dv$

$\frac{x^2}{2} = v$

$$\frac{\arctan x^2 \cdot x^2}{2} - \int \frac{x^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}x^2}{1+x^4}\, dx$$

$$\frac{x^3}{1+x^4}\, dx$$

$$\int \frac{x^3}{x^4+1}\, dx$$

$x^4 + 1 = u$

$4x^3\, dx = du$

$$\frac{\cancel{x^3}}{4} \cdot \frac{du}{4\cancel{x^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\, du$$

$$\frac{\ln|x^4+1|}{4}$$

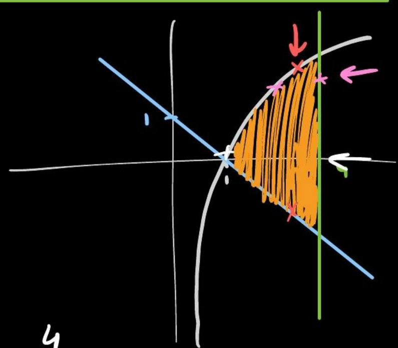
$$\int_0^{\pi/4} e^{\tan x} \cdot e^{-\ln(\cos x)}$$

$$e^{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$\tan x = u$

$$\int_0^1 e^u\, du$$

$$e^u \Big|_0^1 = \boxed{e - 1}$$



$$\int_1^4 \left(\ln x - (1-x)\right) dx$$

$\ln x = y$

$e^y = x$

$$\ln(\cot x)^{1/\ln x} = \ln y$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \cot x}{\ln(x)} = \ln y$$

$$\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{\cot} \cdot x =$$

$$\frac{-x}{s \cdot c} \quad -1 \cdot \frac{1}{\cos} \quad 1 \quad -1 = \ln y$$

$$e^{-1} =$$

$$\int \sqrt{1+(y')^2} = L$$

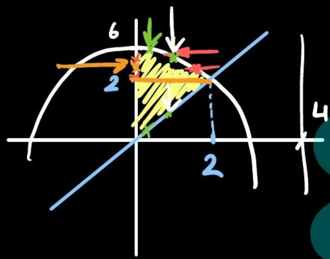
$$\frac{\cos x}{\sin x} = y'$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{cosec}^2}$$

$$\frac{1}{\sin} \qquad \pi/2$$

$$\pi/4 \quad 4.5$$

$$\ln|\sin x| \Big|_{\pi/4}$$



$$\pi\int_2^6 (\sqrt{6-y})^2 dy + \pi\int_0^2 y^2 dy$$

$$x = \sqrt{6-y}$$

$$6 - x^2 = y$$

$$6 - x^2 = x$$

$$\pi\int_0^2 \left((6-x^2)^2 - x^2\right) dx$$

$$2\pi\int_0^2 (4-x)\cdot(6-x^2-x)$$

$$\int \cos(\ln(x))\,dx = I$$

$\cos(\ln(x)) = u \qquad dx = dv$

$-\sin(\ln(x)) \cdot \frac{dx}{x} = du \qquad x = v$

$$x \cdot \cos(\ln|x|) + \int \sin(\ln(x)) \cdot dx$$

$\sin \ln(x) = u \qquad dx = dv$

$\frac{\cos \ln(x)}{x}\, dx = du \qquad x = v$

$$x \cdot \sin \ln x \underbrace{- \int \cos \ln(x)\, dx}_{-I} = I$$

$$\frac{x \cdot \sin \ln x + x \cdot \cos \ln(x)}{2} + C$$

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1} = 0 \text{ en az bir noktada}$$

$$\frac{2 - \pi c}{\sqrt{1 - c^2}} = 0$$

$$2 = \pi c$$

$$\boxed{\frac{2}{\pi} = c}$$

$$\int_1^e \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{h \to 1^+} \int_h^e \frac{dx}{x \cdot \ln x}$$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$$\int_{\ln h}^{1} \frac{1}{u}\, du$$

$- \ln|\ln h|$

$$\int \frac{\cos^3 t}{\sin^3 t - \sin^2 t - 6 \sin t}\, dt$$

$\sin t = u$

$\cos t \cdot dt = du$

$1 - \cos^2 t = u^2$

$$\frac{\cos^3 t}{\sin t\,(\sin^2 t - \sin t - 6)}$$

-3

$+2$

$$\frac{\cos^3 t}{\sin t \cdot (\sin t - 3) \cdot (\sin t + 2)}$$

$$\int \frac{1 - u^2}{u \cdot (u-3) \cdot (u+2)}\, du =$$

$f'(x) = \sqrt{16-x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

$-2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}$

$16 - \cancel{x^2} + 2\cancel{x^2}$

tanımsız

$x = -4, 4$

$\dfrac{16-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

-4		$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		4
	$-$		$+$		$-$	

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3 \cdot \sqrt{(x+1)^2-4}}$$

$x+1 = 2\sec t \implies dx = 2\sec t . \tan t . dt$

$$\int \frac{dt}{8\sec^2 .}$$

$$\frac{1}{8}\int \cos^2 t\, dt =$$

$1 + \cos 2t$

$\cancel{6} = \cancel{2}\sqrt{a}$

3

$\underline{a = 9}$

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

$x^{\frac{3}{2}}$

$$\int \sec^2\sqrt{x} . dx$$

$\sqrt{x} = t$

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$

$$2\int \sec^2 t \quad t . dt$$

$t = u$	$\sec^2 t\, dt = dv$
$dt = du$	$\tan t = v$

$$2\left(\tan t . t - \int \tan t\, dt\right)$$

$$\int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

$\cos t = x$

$-\sin t\, dt = dx$

$$\int \frac{-1}{x} dx$$

$-\ln|\cos t|$

$$\lim_{R\to 0^+}\int_R^1 \frac{dx}{x\cdot(1+\ln^2 x)}$$

$\ln x = u$

$\frac{1}{x}\cdot dx = du$

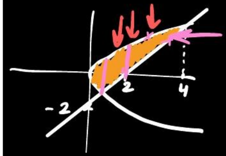
$$\frac{du}{(1+u^2)}$$

$$\arctan(\ln x)\Big|_R^1$$

$$0-\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$

$e^{\arctan x}\cdot -x^2+1$

$3x+x^3$



$y-x=-2$

$y=x-2$

$$\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}}}}{\cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}}}} \qquad \frac{\frac{1}{x+1}}{1}$$

$$\frac{2(x^2-1)^3\cdot x}{\sqrt{1+(x^2-1)^2}} = 0$$

$x=0$

$x=1,-1$

$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 …
$-$	$+$	$-$	$+$
↘	↗	↘	↗

$t=\tan u$

$\frac{1}{x}dt = \sec^2 u\,.\,du$

$$\int_{\arctan(x^{-1})}^{\arctan 1} \frac{1}{\cos u}\,du = \ln|\cos(u)|\Big|_{\arctan(\frac{1}{x})}^{\arctan 1}$$

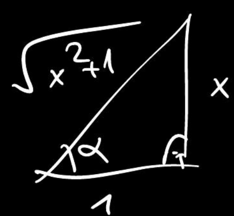
$t=\tan u$

$dt=\sec^2 u\,.\,du$

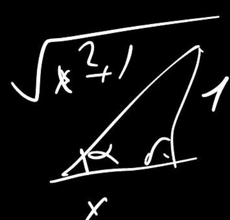
$$\int_{\arctan(1)}^{\arctan(x)} \frac{\sec u\,.\,du}{\tan.\ \cancel{\frac{1}{c}\cdot\frac{c}{s}}} \to \ln|\sin x|\Big|_{\arctan 1}^{\arctan(x)}$$

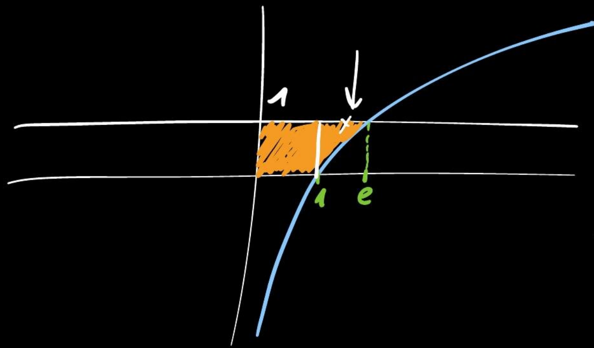
$$\cancel{\ln|\cos(\arctan 1)| - \ln|\sin(\arctan 1)}$$

$$\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$



x





$$\int_2^5 \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$x\sqrt{x^2-2} = y'$$

$$1 + x^2(x^2-2) = x^4-2x^2+1$$

$$\sqrt{x^4-2x^2+1}$$

-1

-1

$$\sqrt{(x^2-1)^2} = \int_2^5 x^2-1$$

$$\frac{x^3}{3}-x$$

$125-8$

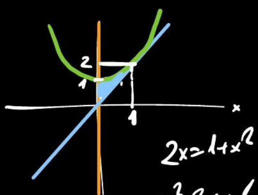
$117 \mid 3$

$\;\;-9 \mid 39$

$\;\;27$

$$39-3=\underline{\underline{36}}$$

$$\int_0^1 dx + \int_1^e 1-\ln x$$



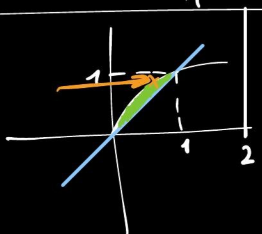
$2x=1+x^2$

x^2-2x+1

-1

-1

$$2\pi\int_1^2 y\cdot\frac{y}{2} -$$



$$\pi\int_0^1 \left((y^2-2)^2-(y-2)^2\right)dy$$

$$2\pi\int_0^1 (2-x)\cdot(\sqrt{x}-x)\,dx$$

Trigonometrik Dönüşüm İle İntegral Alma

(1) Yarım Açı Yardımıyla integral Alma

$$\int \sin^2 x \, dx, \quad \int \cos^2 x \, dx, \quad \int \sin^4 5x \, dx, \ldots$$

★ Çift dereceye sahip sin ve cos'lu integrallerde

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \boxed{2\cos^2 x - 1} = \boxed{1 - 2\sin^2 x}$$

★★

$$\frac{\cos 2x + 1}{2} = \cos^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad ★★$$

Soru

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + c$$

$$\int \cos^2 3x \, dx = \int \frac{\cos 6x + 1}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x + \frac{\sin 6x}{6}\right) + c$$

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \, dx$$

$$\int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx$$

$$\frac{1}{4}\left(x - \frac{2\sin 2x}{2}\right) + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \, dx$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$$

② $\left[\sin^2 x + \cos^2 x = 1\right]$ özdeşliği ile integral çözme

$\int \sin^3 x \, dx$, $\int \cos^5 x \, dx$ | $\int \sin^3 x . \cos^5 x \, dx$, $\int \sin^3 x . \cos^4 x$

* tek başına üssü tek olan durumlarda | * çarpım durumunda ikisi tek veya biri tek durumunda

Soru:

* değişken değiştirme

$$\int \sin^3 x \, dx = ? \quad \int \sin^2 x . \sin x . dx = \int (1 - \underbrace{\cos^2 x}_{u}) . \overbrace{(\sin x) . dx}^{-du}$$

$$= -\int (1-u^2) . du \qquad = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

Soru:

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^2 x . \cos^2 x . \cos x \, dx$$

$$\int (1 - \underbrace{\sin^2 x}_{u})^2 . \overbrace{\cos x \, dx}^{du} = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

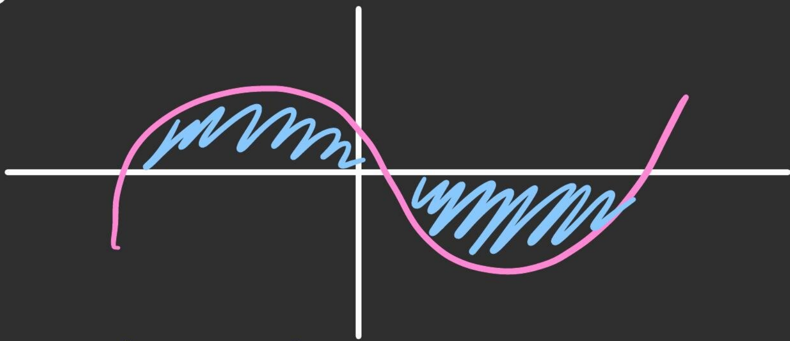
Soru:

$$\int \sin^3 x . \cos^4 x . dx = \int \sin^2 x . \sin x . \cos^4 x . dx$$

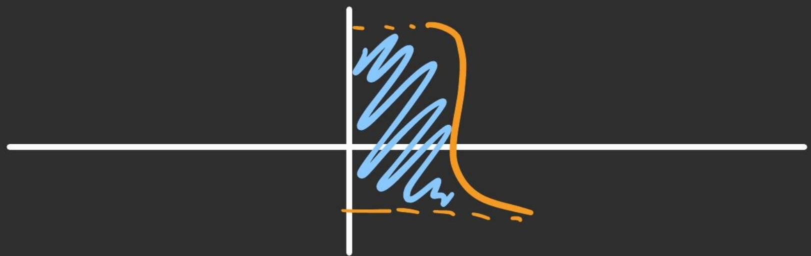
$$= \int (1 - \underbrace{\cos^2 x}_{u}) . \cos^4 x . \overbrace{\sin x \, dx}^{-du}$$

$$= -\int (1-u^2) u^4 du = \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

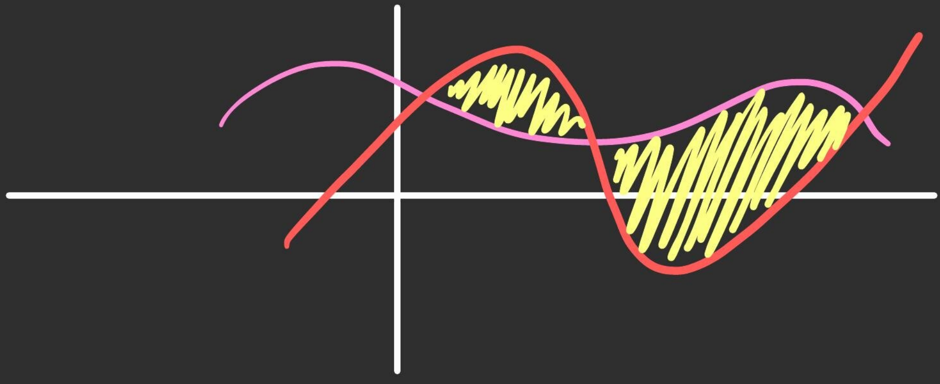
Integralde Alan Çeşitleri



x-ekseni ile arada kalan alan



y-ekseni ile arada kalan alan



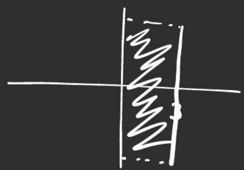
iki eğri arasında alan

Integralde Alan Hesaplarken Çizimi Bilinmesi Gereken Fonksiyonlar

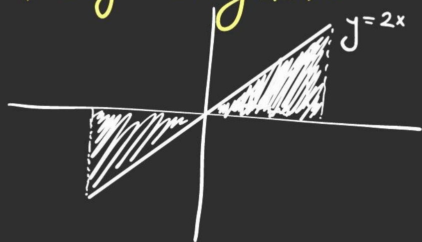
1 Doğru Grafikleri

* Eksenlere dik

$x=3$



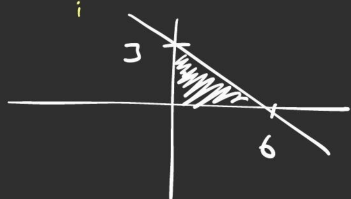
* Orijinden geçenler



* $x+2y=6$

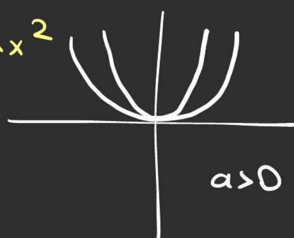
$y=3x+12$

⋮

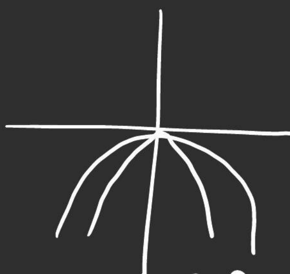


2 Parabol Grafikleri

* $y=ax^2$



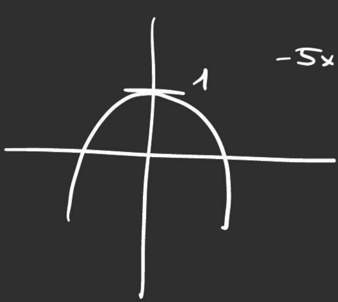
$a>0$



$a<0$

* $y=ax^2 \pm k$

$x^2+1=y$



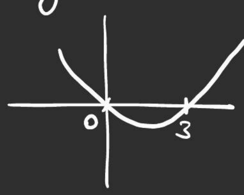
$-5x^2+1=y$

* $y=ax^2+bx+c$

$a \rightarrow$ kolların yönü

$y=0 \Rightarrow$ x-eksenini kestiği noktalar

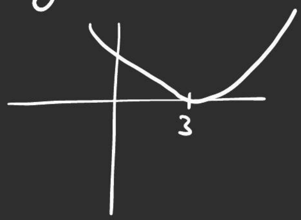
$y=x^2-3x$



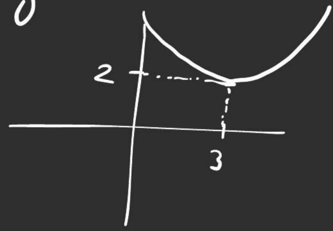
$y=x^2+2x-3$

* $y = a(x-r)^2 + k$ $\quad$ (r,k) = tepe noktası

$y = (x-3)^2$



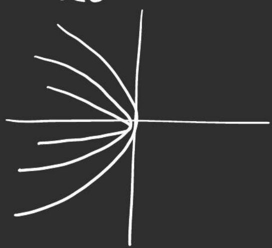
$y = (x-3)^2 + 2$



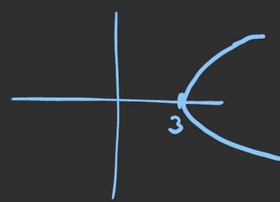
* $x = ay^2$

$a>0$

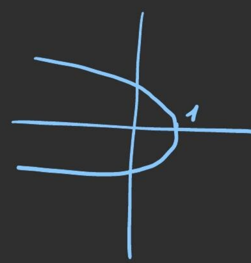
$a<0$



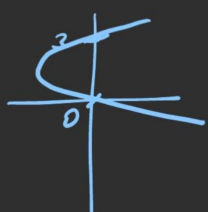
$x = y^2 + 3$



$x = -2y^2 + 1$



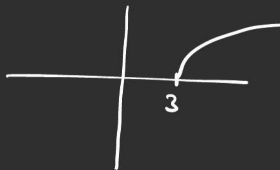
* $x = y^2 - 3y$



3 Özel Grafikler

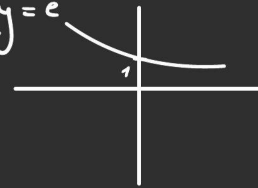
$y=\sqrt{x}$

$y=\sqrt{x-3}$



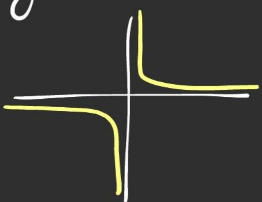
$y=e^{x}$

$y=e^{-x}$



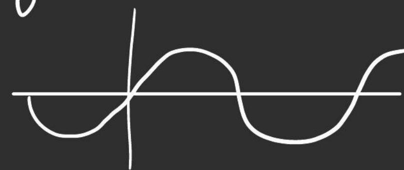
$y=\ln x$

$y=\frac{1}{x}$

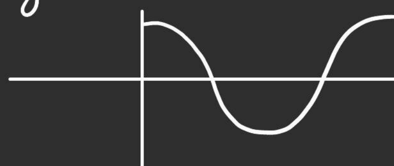


$y=\frac{1}{x^2}$

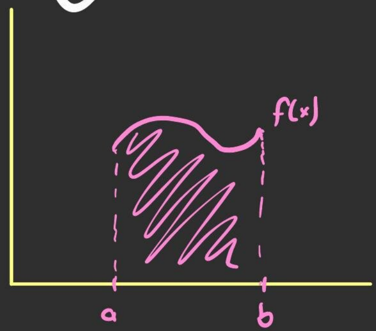
* $y=\sin x$



$y=\cos x$



Integralde Alan



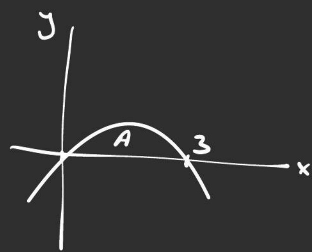
Alan = $\int_a^b f(x)\,dx$

Eğriler Arasında Alan

Alan = $\int_{x=a}^{x=b} \left(f(x)-g(x)\right)dx$

x ekseni üzerinde parabol altında kalan bölgenin alanı

$3x-x^2=f(x)$

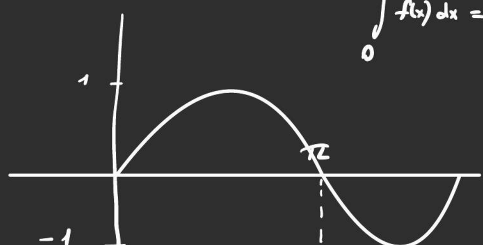


$A=\int_0^3 (3x-x^2)\,dx$

$9/2=$

$\sin x = f(x)$ $(0,2\pi)$

$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi}$



$1-1=$

$\underline{0}=$

**

$-1\leq x\leq 2$ için $f(x)=x^3-x^2-2x$

- çizilemeyen fonk. için;

* türev al.

$f'(x)=3x^2-2x-2$

$x=0,2,-1$

$\int_{-1}^{0} (x^3-x^2-2)\,dx$

+

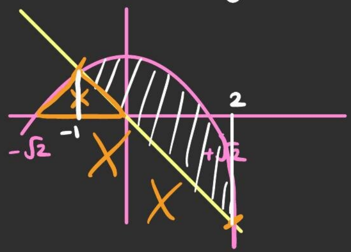
$\int_{0}^{2} (x^3-x^2-2)\,dx$

=

$\frac{28}{12}$

Sorular:

$y = 2 - x^2$ parabolü ve $y = -x$ ile çevrili bölge alanı = ?

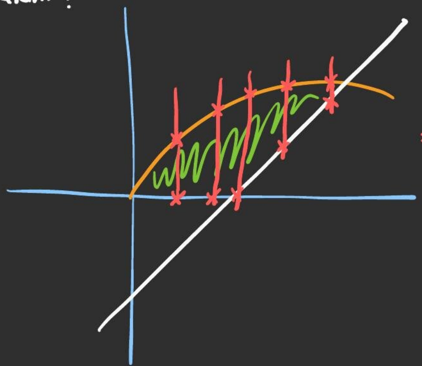


$2 - x^2 = -x$

$\boxed{x = 2, -1}$

$$\int_{-1}^{2} \left[(2-x^2) - (-x)\right] dx =$$

Birinci dörtte birlik bölgede üstten $y = \sqrt{x}$ alttan x ekseni ve $y = x - 2$ ile sınırlı bölgenin alanı ?



$\Rightarrow$

$$A = \int_0^2 (\sqrt{x} - 0)\,dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - (x-2))\,dx =$$

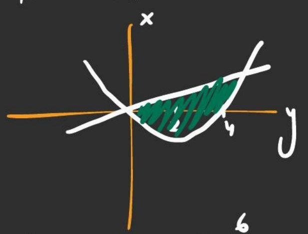
$10/3 =$

Soru:

$y^2 - 4y$, $2y$ fonk alan

$y^2 - 4y = 2y$

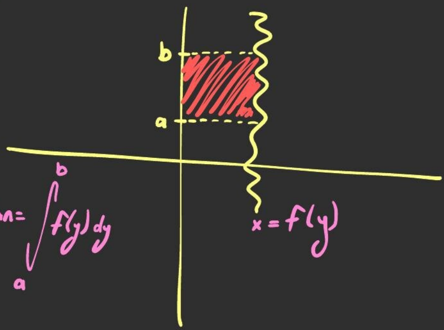
$\boxed{y = 0, 6}$



$$\int_0^6 6y - y^2 = \underbrace{3y^2 - \frac{y^3}{3} \Big|_0^6}_{\boxed{+36}}$$

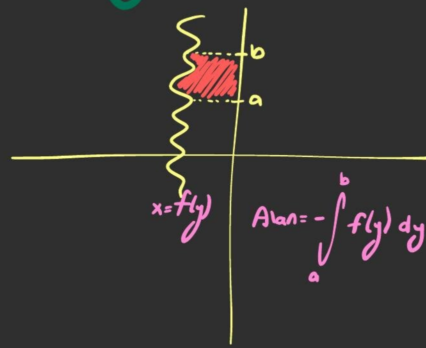
y-ekseni ile Alan Hesaplama

y-ekseninin sağında



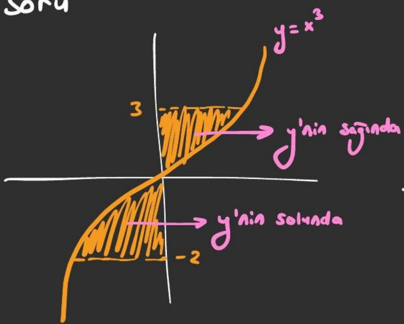
$$\text{Alan} = \int_a^b f(y)\,dy$$

y ekseninin solunda



$$\text{Alan} = -\int_a^b f(y)\,dy$$

Soru



$$\sqrt[3]{y} = x$$
$$\downarrow$$
$$f(y) = \sqrt[3]{y}$$

$$-\int_{-2}^{0} y^{\frac{1}{3}} = \frac{-3y^{\frac{4}{3}}}{4}\Big|_{-2}^{0}$$

$$\boxed{+\frac{3\sqrt[3]{16}}{4} + \frac{3\sqrt[3]{81}}{4}}$$

Soru:

$x = y^2 - 4$ ile y ekseni arası kalan alan=?

$$y^2 - 4 = 0$$
$$y = \mp 2$$

$$-\int_{-2}^{0} (y^2 - 4)\,dy = \frac{-y^3}{3} + 4y\Big|_{-2}^{0}$$

$$16 \quad \frac{-16}{3} \quad \boxed{\frac{32}{3}}$$

iki grafik arasında kalan alan

Soru

$$x^2 = x$$

$$\boxed{x = 0, 1}$$

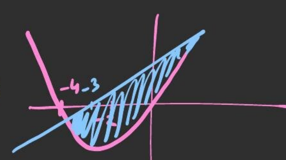
$$\int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \boxed{\frac{-1}{6}}$$

$\frac{+1}{6}$ alan

$$x^2 + \cancel{4x} = \cancel{2x} + 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$\begin{matrix} +3 \\ -1 \end{matrix}$$

$$x = -3, 1$$



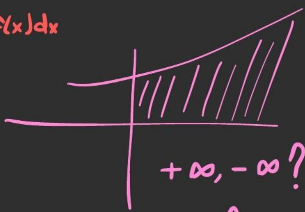
$$\int_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)\,dx = \frac{-32}{3} \,//\, \frac{+32}{3}$$

Genelleştirilmiş integral (Improper Integral)

1 Sınırlarında sonsuz içeren

* $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ * $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$



$+\infty, -\infty$? ⟶ Iraksak

Sayı ? ⟶ Yakınsak

2 Sınırlarında tanımsızlık içeren integraller

$\int_1^3 \frac{1}{x-3}$ $\int_1^3 \frac{1}{x-2}$

---

1 Sınırlarında Sonsuz İçeren

* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{h\to\infty} \int_a^h f(x)\,dx$

Soru: $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x}\,dx$

$= \lim_{t\to+\infty} \ln x \Big|_2^t = \lim_{t\to+\infty} \overbrace{\ln t}^{\infty} - \ln 2$

$= +\infty$

* Sonuç ⟶ $\pm\infty$ Iraksak
⟶ Sayı Yakınsak

* $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$

$\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^1 e^x\,dx$

$= \lim_{t\to-\infty} (\overbrace{e}^{e} - \underbrace{e^t}_{0}) = e$

---

* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)\,dx$

Soru

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx = ?$$

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\arctan x\Big|_{-\infty}^{0} \qquad\qquad \frac{\pi}{2}$$

$$0-\underbrace{\arctan(-\infty)}_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} \quad + \quad \frac{\pi}{2} = \pi$$

---

(2) Sınırlarında tanımsızlık içeren

* Üst sınırın tanımsız yapması
* Alt sınırın tanımsız yapması
* Sınırları arasındaki bir değeri tanımsız yapması

$$* \int_{1}^{3}\frac{1}{x-3}dx \longrightarrow \lim_{t\to3^-}\int_{1}^{t}\frac{1}{x-3}dx$$

* üst sınırda limite soldan yaklaşılır.

$$\lim_{t\to3^-}\left(\ln|x-3|\right)\Big|_{1}^{t}$$

$$\lim_{t\to3^-}\ln\left|\frac{t-3}{2}\right|$$

$$=\ln|0^-| = \ln 0^+$$

$$=-\infty$$

$$* \int_{1}^{3}\frac{1}{x-2}dx$$

$$\lim_{t\to2^-}\int_{1}^{t}\frac{1}{x-2}dx + \lim_{t\to2^+}\int_{t}^{3}\frac{1}{x-2}dx$$

$$* \int_{1}^{3}\frac{1}{x-1}dx = \lim_{t\to1^+}\int_{t}^{3}\frac{1}{x-1}dx$$

$$\ln|x-1|\Big|_{t}^{3}$$

$$\ln\left|\frac{2}{t-1}\right| = \ln\infty = \infty$$

Integralde Hacim Hesaplama

*** Disk Metodu**

x-ekseni etrafinda
y-ekseni etrafinda (eksene temas varken)

iki grafik arasinda kalan alanın
x veya y ekseni etrafinda döndürülmesi

*** Shell Metodu**

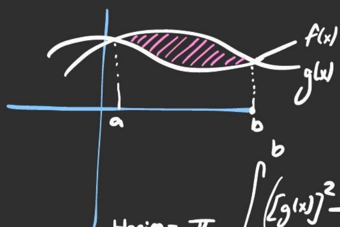
x-ekseni etrafinda döndürme
y-ekseni " "
x=a veya y=b " "

Disk Metodu

* x-ekseni etrafinda

$$\text{Hacim} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

veya

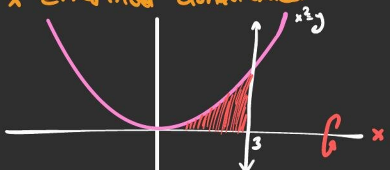


$$\text{Hacim} = \pi \cdot \int_a^b \left([g(x)]^2 - [f(x)]^2\right) dx$$

WASHER METODU !

Soru

$y = x^2$, $x = 3$ ve x arasında
x etrafında dönderilmesi



$$\pi \cdot \int_0^3 (x^2)^2 \, dx = \frac{243\pi}{5}$$

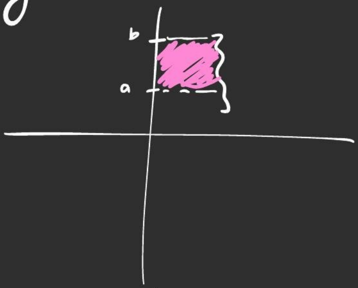
Soru

$y = x^2 + 1$, $y = 5$ ve y ekseni

$$\pi \int \left(25 - (x^2+1)^2\right) dx$$

Disk Metodu

* y-etrafında

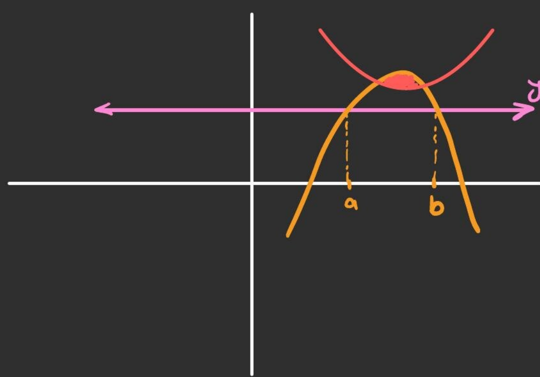


$$\text{Hacim} = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy \quad / \quad \text{Hacim} = \pi \cdot \int_a^b \left([g(y)]^2 - [f(y)]^2\right) dy$$

* Yatay doğru etrafında döndürme

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x) - a)^2 \, dx$$

WASHER METODU !

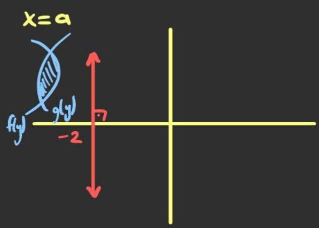


Soru
$y = x^2$, $y = 4$ ve y ekseni arasında
$y=4$ doğrusu etrafında

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 \, dx$$

$$= \frac{256\pi}{15}$$

* Düşey doğru etrafında döndürme

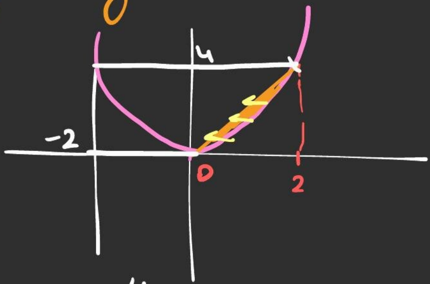


$$V=\pi\int_a^b\left[(g(y)-a)^2-(f(y)-a)^2\right]dy \quad (\text{Washer})$$

$$V=\pi\int_a^b\left[f(y)\right]^2$$

Soru:

$y=x^2$, $y=2x$, $x=-2$ etrafında döndürünüz.



$$x^2 \stackrel{?}{=} 2x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}}$$

$$V=\pi\int_0^4\left[(\sqrt{y}+2)^2-\left(\frac{y}{2}+2\right)^2\right]dy$$

$$V=8\pi$$

Shell Metodu y ekseni için

$$* \quad V = 2\pi \int_a^b r \cdot h \cdot dx$$

* Sınırlar x ekseninden gelir.

$a \leq x \leq b$

r: shell yarıçapı $\Rightarrow$ $r = x$

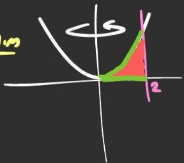
h: shell yüksekliği $\Rightarrow$ h = [alanın üst sınır fonksiyonu] − [alanın alt sınır fonksiyonu]

Soru

$y = x^2$, $x = 2$ ve x ekseni

y ekseni etrafında döndürülürse hacim = ?

1.adım



2.adım

$$V = 2\pi \int_0^2 r \cdot h \cdot dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 x \cdot (x^2 - 0) \cdot dx$$

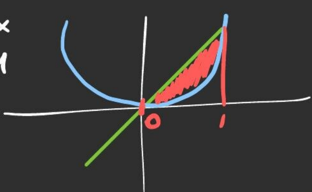
$$2\pi \cdot \left(\frac{x^4}{4} \Big|_0^2 \right) = \underline{\underline{8\pi}}$$

Soru

$y = x^2$, $y = x$ arasında kalan alan (y ekseni),

$x^2 = x$

$x = 0, 1$



$$2\pi \int_0^1 x \cdot (x - x^2)\, dx$$

$$x^2 - x^3$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 \right)$$

$$2\pi \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Shell Metodu x ekseni için

* $V = 2\pi \int_a^b r \cdot h \cdot dy$

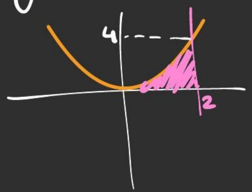
* Sınırlar y ekseninden gelir. $a \leq y \leq b$

r: her zaman $r = y$

h: [Alanın sağındaki fonk] − [Alanın solundaki fonksiyon]

Soru:

$y = x^2$, $x = 2$ ve x etrafında



$$= 2\pi \int_0^4 y \cdot (2 - \sqrt{y})\, dy$$

$$2\pi \left(y^2 - \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} \Big|_0^4 \right) = \frac{32\pi}{5}$$

Yay Uzunluğu

$f(x), \quad a \le x \le b$

$$\mathcal{L} = \int_a^b \left(\sqrt{1+(y')^2}\right) dx$$

$$\mathcal{L} = \int_c^d \left(\sqrt{1+(x')^2}\right) dy$$

$c \le y \le d$

Soru

$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad 0 \le x \le 2$

$$\cancel{\int_0^2 \left(\sqrt{1+(y')^2}\right) dx} =$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+(x')^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1+9y}\; dy = \int_1^{10} \frac{\sqrt{u}}{9}\, du$$

$1+9y=u$

$9dy=du$

$$\frac{1}{9}\,\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{10} = \boxed{10\sqrt{10}-1}$$

$f(x)$, $a \leq x \leq b$

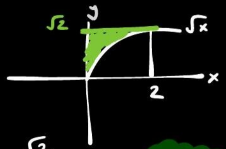
x-ekseni etrafında

dönen yüzey alanı

$$S = \int_a^b \left(2\pi \cdot y \sqrt{1 + (y')^2}\right) dx$$

$x = y^2$

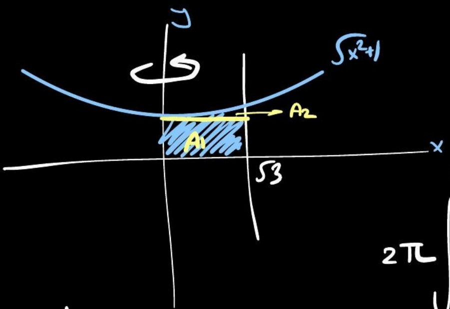
$\sqrt{x} = f(x)$



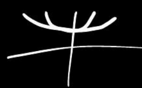
$\pi \int_0^{\sqrt{2}} y^4$

$\frac{4\sqrt{2}\pi}{5}$

$2\pi \int_0^2 x(\sqrt{2} - \sqrt{x}) =$

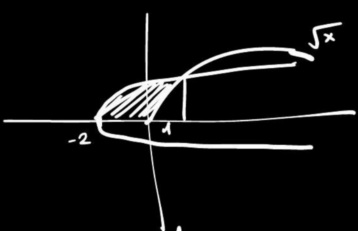


$\sqrt{x^2+1} = y$



$2\pi \int_0 x \cdot \sqrt{x^2+1}$

$\pi \int$



$2\pi \int_{-2}^{1} y \cdot y^2 - \cancel{3y^2} + 2$

$-2y^3 + 2y \, dy$

$\boxed{3\pi}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} =$$

$$-(x^2-4x+4)+4$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}}$$

$$x-2=u$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-u^2}} = \arcsin\frac{x-2}{2}+c$$

* $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \sqrt{1+e^x}\,dx \quad \Big\| \quad 1+e^x=u^2,\quad e^x dx = 2u\,du$$

$$\int |u| \cdot \frac{2u\,du}{e^x} = \frac{2u^2\,du}{(u^2-1)}$$

$$2u^2 \,|\, u^2-1 \;\; \text{(division: } -(2u^2-2) = 2,\ \text{remainder } +2)$$

$$= \int \left(2+\frac{2}{u^2-1}\right)du$$

$$2\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$2u+ \qquad \frac{1}{(u-1).(u+1)} = \frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$$

$$A+B=0,\quad A-B=1,\quad A=1/2,\quad B=-1/2$$

$$\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\ln|u-1| - \frac{1}{\cancel{2}}\ln|u+1|\right)$$

$$2u+\ln|u-1|-\ln|u+1|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+3}} \qquad x-1=u,\quad u=\sqrt{3}.\tan t,\quad du=\sqrt{3}.\sec^2 t.\,dt$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{u^2+3}}$$

$$= \int \frac{\sqrt{3}\sec^2 t\,dt}{\sqrt{3+3\tan^2 t}} = \int \sec t\,dt$$

$$= \ln|\sec t+\tan t|+c$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{3+u^2}}{\sqrt{3}}+\frac{u}{\sqrt{3}}\right|+c$$

---

* Kareköklerde
tam kare
tan, sec, sin dönüşümü

$$\int \frac{dx}{2x(1-\sqrt{x})^2} \qquad 1 = \cancel{1+u^2} - 2u + Bu - \cancel{Bu^2} + u$$

$$\sqrt{x}=u,\quad \frac{dx}{2\sqrt{x}}=du$$

$$\Big\| \quad \frac{1}{u.(1-u)^2} = \frac{A}{u}+\frac{B}{1-u}+\frac{C}{(1-u)^2}$$

$$\boxed{A=1,\ C=1,\ B=1}$$

$$\int\left[\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right]du$$

$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{1-\sqrt{x}}+\frac{1}{(1-\sqrt{x})^2}\right).\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+e^x}$$

$\ln|$

$e^{kx} = u$

$e^{kx} \cdot k \cdot dx = du$

$t = \arctan(u)$

$$\frac{1}{k}\int \frac{\arctan(u)}{1+u^2} \cdot \frac{du}{u} \quad \to dt$$

$t \to 1$

$$\frac{1}{k}\int \frac{t \cdot dt}{\tan t}$$

$\frac{1}{\tan t} dt \to \ln|\tan t|$

$$\frac{1}{k} \cdot \left[t \cdot \ln|\tan t| - \int \ln|\sin t| \, dt \right.$$

$\ln|\sin t| = u \to \frac{\sin t}{\cos t} dt = du$

$dt = dv$

$t = v$

$$\int \frac{x^2+5}{x(x^2+2x+5)} dx =$$

$$\frac{x^2+5}{x \cdot (x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2+2x+5}$$

$Ax^2 + (2A+B)x + 5A$

$A = 1$

$B = -2$

$$\int \frac{1}{x} + \frac{-2}{x^2+2x+5}$$

$$\ln|x| + \int \frac{-2}{(x+1)^2+4} dx \qquad \begin{matrix} x+1 = u \\ dx = du \end{matrix}$$

$$\frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}} \arctan \frac{x+1}{2}$$

$$\ln|x| - \arctan \frac{x+1}{2} + c$$

$$\int \frac{x^2}{(3-x^2)^{3/2}} dx =$$

Not: $\sqrt{1+u^2} \to \tan t$

$\sec t \leftarrow \sqrt{u^2-1}$

$\sqrt{1-u^2} \to \sin t$

$x = \sqrt{3}\sin t$

$dx = \sqrt{3}\cos t \cdot dt$

$$\frac{\sin^2 t}{\underbrace{(1-\sin^2 t)}_{\cos^2 t}^{\frac{3}{2}}} \cdot \cos t \cdot dt$$

$$\frac{\sin^2 t}{\cancel{\cos^3 t}} \cdot \cancel{\cos t}\, dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} dt =$$

$\sec^2 t - 1$

$\tan t - t + c$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)}$$

$$\frac{e^{f(x)} \cdot \cancel{f'(x)}}{\cancel{f'(x)}} = 1$$

$a^2 = 1$

$a = \mp 1$

$F(2) - F(0) = \frac{1}{4}$

$x^2 = u$

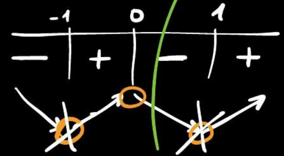
$x\,dx = \frac{du}{2}$

$$\frac{1}{2}\int_1^4 f(2u) \cdot du \rightarrow \frac{F(8) - F(2)}{\cancel{4}} = \frac{15}{\cancel{16}} + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{4}{2} = 2}$$

$$F'(x) = \frac{(x^2-1)^3}{\sqrt{1+(x^2-1)^2}} \cdot 2x = 0$$

$x = 0, -1, +1$



$$f(t)\,dt = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{u+1}} \cdot du$$

$t^2 = u$

$2t\,dt = du$

$$\sqrt{u+1}\,\Big|_a^x$$

$$\sqrt{t^2+1}\,\Big|_a^x$$

$$\cancel{(\sqrt{a^2+1})^2 = (-1)^2}$$

$a^2 + \cancel{1} = \cancel{1}$

$$\boxed{a = 0}$$

$$G\left(\int_1^x \frac{1+t^2}{\sqrt{3+t^2}}\,dt\right) = x$$

$$(G^{-1})'\left(\int_1^x \frac{1+t^2}{\sqrt{3+t^2}}\,dt\right)\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+3}}\right) = 1$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = 1$$

$$\frac{f(x) \qquad + f(+x)}{x^2+1} = \frac{2}{x^2+1} = G'(x)$$

$$\boxed{=1}$$

$f(-x) = -f(x)$

$t = \tan u$

$dt = \sec^2 u \cdot du$

$\int \sec u \cdot du$

$\int \operatorname{cosec} \cdot du$

$t = \tan u$

$dt = \sec^2 u \cdot du$

$$\int_1^x \frac{\sec u \cdot du}{\tan u}$$

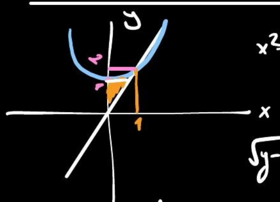
$$\frac{1}{\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{s} = \frac{1}{s}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \boxed{1}$$

$$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \Big[\underbrace{F'(6-x^2) + \ln(x^2-5)^2}_{F'(2)+0}\Big] \cdot \cancel{4} = F'(x)$$

$2F'(2) = F'(2)$

$F'(2) = 0$

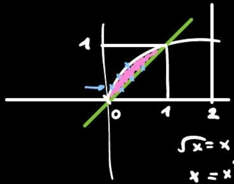


$x^2 + 1 = 2x$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\sqrt{y-1} = x$

$$2\pi \int y \cdot \left(\frac{y}{2} - \sqrt{y-1}\right.$$



$\sqrt{x} = x$

$x = x^2$

$x = 0, 1$

$y^2 = x$

$y = x$

$$\pi \int_0^1 \left((y^2-2)^2 - (y-2)^2\right) dy$$

$$y^4 - 4y^2 \cancel{+4} - y^2 + 4y \cancel{-4}$$

$$\int_0^1 \pi \left(y^4 - 5y^2 + 4y\right)$$

$$\int_2^5 \sqrt{1 + (y')^2}\, dy$$

$$\frac{\sqrt{x^2-2}\,.\,x}{\sqrt{x^4-2x^2+1}}$$

$y^2 = a$

$2y\,dy = da$

$$\sqrt{a^2 - 2a + 1}\ da$$

$$\left((x^2-2)^{1/2}\,.\,x\right)^2 = y'$$

$\sqrt{x^2-2}\,.\,x$

$$\left(\sqrt{x^4-2x^2}\right)^2$$

$$\int_2^5 \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}\ dx$$

$96 -$ $\quad 2 \quad f(x)|^{\frac{1}{2}}$

$16 - 7$

18

$$\frac{2(x^4 - 2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{144\,(3.(4x^3 - 4x)}\Bigg|_2^5$$

$x(x^2-1)$

$.\,24$

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}\, dx$$

$e^{-x} = u$

$+e^{-x}\,dx = -du$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{-1}{u+1}\, du$$

$$-\ln|u+1| \Big|_1^{e^{-R}}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+e^x}$$

$$-\ln(e^x+1) + x$$

$(x^2-2)^{\frac{3}{2}}$

$\left(x\sqrt{x^2-2}\right)^2$

$$\frac{(x^4 - 2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{6x(x-1).(x+1)}$$

$$\int (x^4 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$x^2 = u$

$2x\,dx = du$

$$\sqrt{u^2 - 2u + 1}$$

$t = \tan u$

$dt = \sec^2 u \, du$

$$\int \sec u \, du \quad - \quad \operatorname{cosec} u \, du$$

$$\lim_{c \to -1^+} \int_c^0 \frac{dx}{(x+1)^{3/5}}$$

$x+1=u$

$dx = du$

$$\int_{c+1}^1 \frac{1}{u^{3/5}} du = u^{-3/5} du$$

$$\frac{5u^{\frac{2}{5}}}{2} \Big|_{c+1}^{1}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{5}{2}\left(1 - (c+1)^{2/5}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$\Delta x = \frac{2}{n} \qquad \frac{8i^3}{n^3} + \frac{2i}{n}$$

$$x_i = \frac{2i}{n} \qquad \frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^n \frac{8i^3}{n^3} + \frac{2i}{n}\right)$$

$$\frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^3 + n+1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2(n+1)^2}{n} + n+1\right)$$

$$\frac{6n^2+}{n^2} = \boxed{6}$$

$$\frac{\int_{-2}^{1} -|x| \, dx}{3} =$$

$$\int_{-2}^0 x \, dx = -2 + \int_0^1 -x \, dx = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-x^2}{2}$$

$$\frac{\frac{-5}{2}}{3}$$

$$\frac{x^2+5}{x \cdot (x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$$

$$x^2+5 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + 5A$$

$A=1$

$B=0$

$C=-2$

$$\int \left(\frac{1}{x} + \frac{-2}{x^2+2x+5}\right) dx$$

$$\ln|x| + \qquad \frac{-2}{(x+1)^2+4} \qquad x+1=u$$

$$\ln|x| - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$x = \sqrt{3} \sin t$

$dx = \sqrt{3} \cos t \cdot dt$

$$\frac{3\sin^2 t}{\left(3(\underbrace{1-\sin^2 t}_{\cos^2 t})\right)^{3/2}} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos t \cdot dt$$

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \cdot dt$$

$$\int \underbrace{(\sec^2 t - 1) \, dt}_{\tan t - t + c}$$

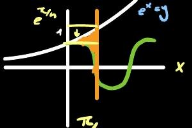
$x = \sin \theta$

$dx = \cos\theta \cdot d\theta$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} d\theta$$

$$\int_0^{\pi/6} \tan^2\theta \cdot \sec^2\theta \cdot d\theta$$

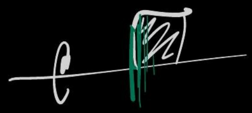
$$\frac{\tan^3\theta}{3} \Big|_0^{\pi/6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$$



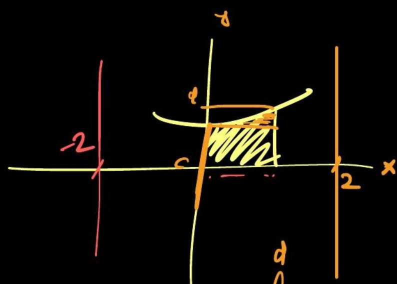
$$\pi \int_0^{\pi/4} \left(e^{2x} - \cos^2 2x\right) dx$$

$$2\pi \int (x+\pi) \cdot \left(e^x - \cos 2x\right) dx$$

$$\pi \int \left(\left(e^x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\cos 2x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \right) dx$$



	x-ekseninde	y-ekseninde
Disk	$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx$	$\pi \int_c^d f(y)^2 dy$
Pul (Washer)	$\pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$	$\pi \int_c^d \left((f(y))^2 - (g(y))^2\right) dy$
Kabuk (Shell)	$2\pi \int_c^d y \cdot h \cdot dy$, $h \to$ sağ − sol	$2\pi \int_a^b x \cdot h \cdot dx$, $h \to$ üst − alt



$$2\pi \int_c^d y \cdot$$

	x-etraf	y-etraf	x=2 etrafında
Disk	$\pi \int_a^b f(x)^2 dx$	$\pi \int_c^d f(y)^2 dy$	$\pi \int_c^d (f(y) - 2)^2 dy$
Kabuk	$2\pi \int_c^d y \cdot (\text{sağ} - \text{sol}) \cdot dy$	$2\pi \int_a^b x (\text{üst} - \text{alt}) dx$	$2\pi \int_a^b (2 - y) \cdot (\text{üst} - \text{alt})$