

Alan Hesabı

① $[a,b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olmak üzere; $\int_a^b f(x)dx$ integrali: f' in grafiği, x-ekseni, $x=a$ ve $x=b$ doğruları arasındaki alanı verir.

* $y = (2 + \sin \frac{x}{2})^2 \cdot \cos \frac{x}{2}$, x-ekseni, $x=0$, $x=\pi$ aralığında kalan alanını bulunuz.

$0 \leq x \leq \pi$ için $y \geq 0$ dir. Dolayısıyla alan:

$$A = \int_0^\pi (2 + \sin \frac{x}{2})^2 \cdot \cos \frac{x}{2} dx$$

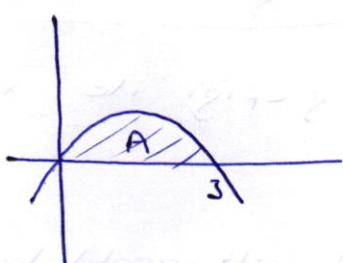
$$\begin{aligned} & 2 + \sin \frac{x}{2} = u & x=0 \rightarrow u=2 \\ & \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx = du & x=\pi \rightarrow u=3 \end{aligned}$$

$$= \int_2^3 2u^2 du = \frac{2u^3}{3} \Big|_2^3 = \frac{2}{3}(27 - 8) = \frac{38}{3}$$

* x-ekseni üzerinde, $y=3x-x^2$ eğrisi altında kalan bölgenin alanı?

$$y=3x-x^2 \rightarrow \text{Kolları, egrisi}$$

$$\text{en altta x-eksenini kesen noktaları } y=3x-x^2=0 \rightarrow x=0 \text{ ve } x=3$$



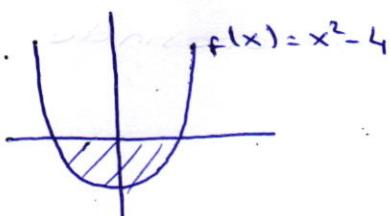
$$A = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^3$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}$$

② Toplam Alan:

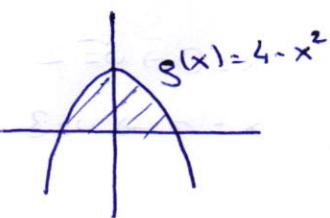
$f(x) = x^2 - 4$ ve $g(x) = 4 - x^2$ olsun.

- a) f ve g nin $[-2, 2]$ deki belirli integrallerini.
 b) $[-2, 2]$ arasında grafikleri ve x-ekseni arasındaki alanları hesaplayınız.



$$a) I = \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \frac{x^3}{3} - 4x \Big|_{-2}^2 = -\frac{32}{3}$$

$$b) A = |I| = \left| \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx \right| = \frac{32}{3}$$



$$a) I = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

$$b) A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \frac{32}{3}$$

* $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve x-ekseni ile sınırlı bölgenin alanını hesapırken; fonksiyon hem pozitif hem de negatif değerler alırsa, $[a,b]$ aralığını fonksiyonun işaret değiştirmediği alt aralıklara ayırmalıyız. Toplam alan; $f(x)$ in işaret değiştirmediği her alt aralık üzerindeki belirli integrinin mutlak değerleri toplamıdır.

ÖZET: $[a,b]$ üzerinde $y=f(x)$ in grafiği ile x-ekseni arasında kalan alanı hesapırken;

- ① f in sıfır olduğu yerlerde $[a,b]$ alt aralıklara bölünür
- ② Her alt aralıkta f in integrali hesaplanır
- ③ integralerin mutlak değerleri toplanır

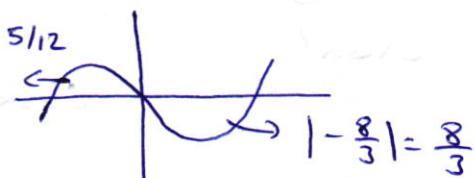
④ $-1 \leq x \leq 2$ ikin $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ in grafigi ile x-eksenin arasindaki bolgenin alani?

① f in sifirleri: $f(x) = x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow x=0, x=2, x=-1 \in [-1, 2]$

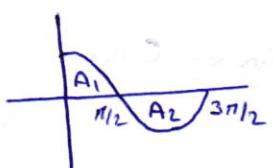
$$[-1, 0] \Rightarrow [0, 2]$$

$$\textcircled{2} \quad \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{5}{12} \quad \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx = -\frac{8}{3}$$

$$\textcircled{3} \quad A = \frac{5}{12} + \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{37}{12}$$



⑤ $y = \cos x$, $x=0$, $y=0$, $x=\frac{3\pi}{2}$ arasindaki alan?



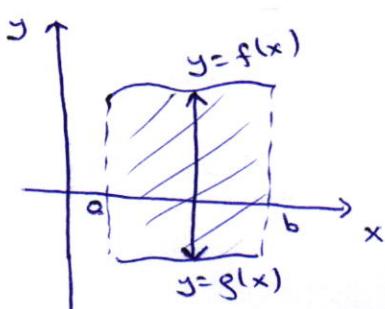
$$A_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

$$A_2 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -1 - 1 = -2 \Rightarrow A_2 = |-2| = 2$$

$$A = A_1 + A_2 \Rightarrow A = 1 + 2 = 3$$

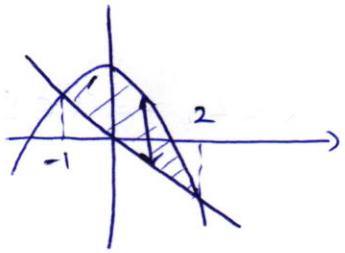
③ iki Egri Arasindaki Alan

Eger f ve g , $[a, b]$ de $f(x) \geq g(x)$ (f, g pozitif olmak zorunda degil) olmak üzere sürekli ise bu durumda $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ arasi kalan alan:



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

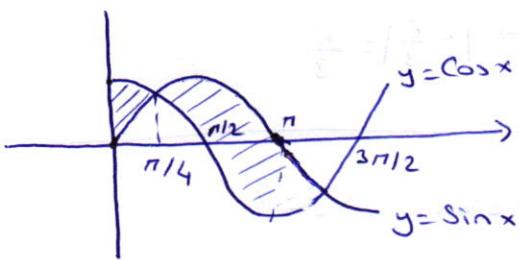
*) $y=2-x^2$ ve $y=-x$ ile sınırlı bölgenin alanı?



$$\begin{aligned} y &= 2-x^2 \\ y &= -x \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2-x^2 = -x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array} \right. \text{ de kesisikler}$$

$$A = \int_{-1}^2 (2-x^2 - (-x)) dx = 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

*) $x=0$ dan , $x=\pi$ ye : $y=\sin x$ ve $y=\cos x$ eğrileri arası
dakika toplam alanı?



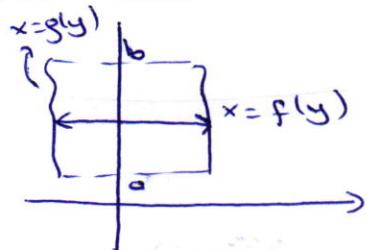
$$\cos x = \sin x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= \sin x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} + (-\sin x - \cos x) \Big|_{\pi/4}^{\pi}$$

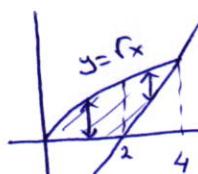
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}$$

y 'ye göre integral



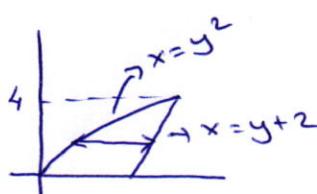
$$A = \int_a^b (f(y) - g(y)) dy$$

*) 1. Bölgede , üstten $y=\sqrt{x}$, alttan x -ekseni ve $y=x-2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı?



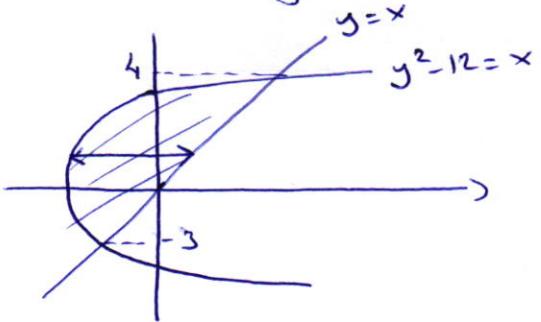
$$x' e göre integral : A = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - (x-2)) dx = \frac{10}{3}$$

y 'ye göre integral :



$$A = \int_0^4 (y+2 - y^2) dy = \frac{10}{3}$$

*) $x = y^2 - 12$ eğrisinin sağında, $y = x$ doğrusunun solunda kalan bölgenin alanı?



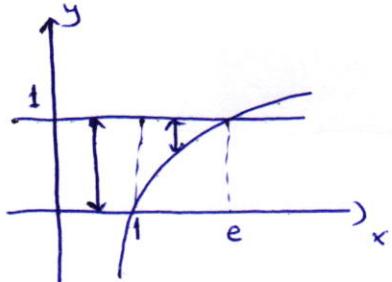
$$y^2 - 12 = y \Rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow y = -3, y = 4$$

$$A = \int_{-3}^4 (y - y^2 + 12) dy = \frac{343}{6}$$

*) $y = \ln x$ eğrisi ve $x=0, y=0, y=1$ doğruları ile sınırlı bölgenin alanını veren integrali:

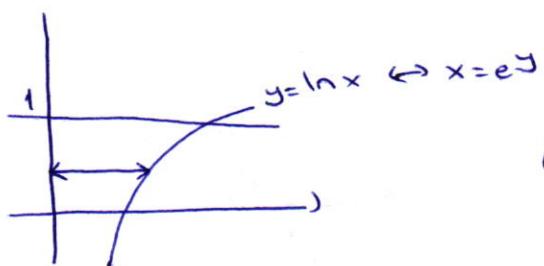
a) x' e göre integral ile

b) y' ye göre integral ile yazınız.



a) x' e göre

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 1 dx + \int_1^e (1 - \ln x) dx \\ &= 1 + \left(x - x \ln x + x \right) \Big|_1^e = e - 1 \end{aligned}$$



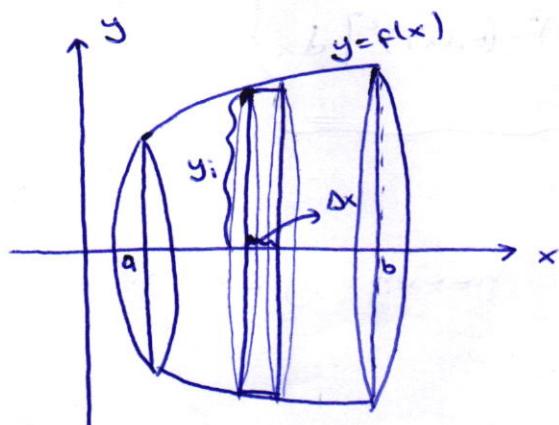
$$A = \int_0^1 e^y dy = e^y \Big|_0^1 = e - 1$$

DÖNEL YÜZEYLERİN SINIRLADIKLARI HACİMLERİN HESABI

① Düzlemsel Ölçümler:

a) Disk Yöntemi:

$y=f(x)$ eğrisi ile $x=a$, $x=b$ doğruları ve x -ekseninin sınırladığı düzleme seklin x -eksen etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini hesaplamak isteyelim.



Bunun için düzleme sekli n dikdörtgene bölelim. Bu dikdörtgenler dönmeye esasında dik silindirler meydana getirirler. Bu silindirlerin hacimlerinin toplamının limiti oradan hacmi verir.

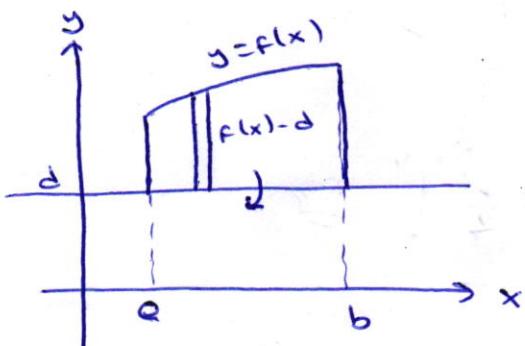
$$\Delta V_i = \pi(y_i)^2 \Delta x$$

\nwarrow yükseklik
 \swarrow silindirin
yapısı.

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi(y_i)^2 \Delta x$$

$$= \int_a^b \pi y^2 dx \Rightarrow V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

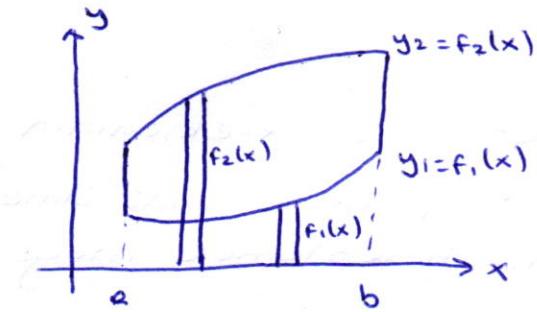
* $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=d$ bölgesi $y=d$ etrafında çevrilirse hacim:



$$V = \pi \int_a^b (f(x)-d)^2 dx$$

b) Pü1 Yöntemi:

* $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ bölgeleri x -ekseni etrafında çevrilirse hacim:

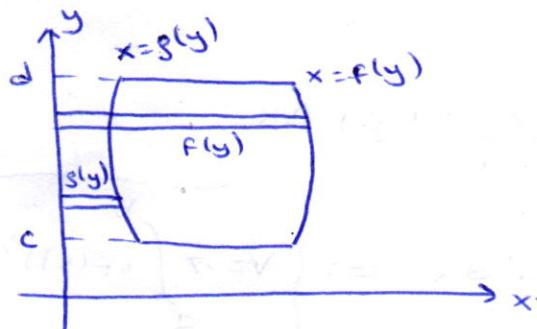


$$V = V_b - V_k$$

$$= \pi \int_a^b (f_2(x))^2 dx - \pi \int_a^b (f_1(x))^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b [(f_2(x))^2 - (f_1(x))^2] dx$$

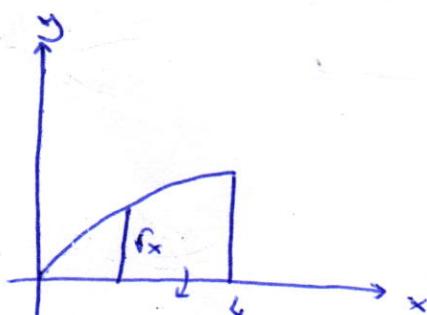
* $x=g(y)$, $x=f(y)$, $y=c$, $y=d$ arasındaki hacim y -ekseni etrafında çevrilirse hacim:



$$V = V_b - V_k = \pi \int_c^d (f(y))^2 dy - \pi \int_c^d (g(y))^2 dy$$

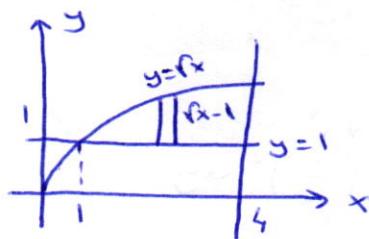
$$V = \pi \int_c^d [(f(y))^2 - (g(y))^2] dy$$

*) $y=f(x)$, $0 \leq x \leq 4$ ve $y=0$ arasındaki bölge x -ekseni etrafında çevrilirse hacim?



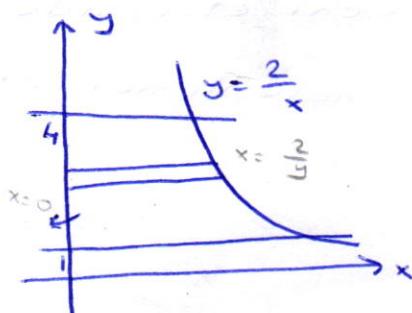
$$V = \pi \int_0^4 (f(x))^2 dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$$

*) $y = f(x)$, $y = 1$, $x = 4$ arasındaki bölge $y = 1$ etrafında
cevrilirse hacim?



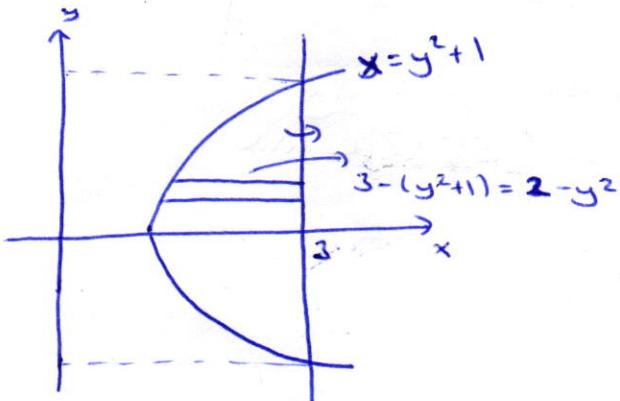
$$V = \pi \int_1^4 (f(x)-1)^2 dx = \pi \int_1^4 (x-2f(x)-1) dx \\ = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3} x^{3/2} - x \right) \Big|_1^4 = \frac{7\pi}{6}$$

*) y -ekseni, $x = \frac{2}{y}$, $1 \leq y \leq 4$ arasındaki bölge y -ekseni
etrafında cevrilirse hacim?



$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = \frac{3\pi}{4}$$

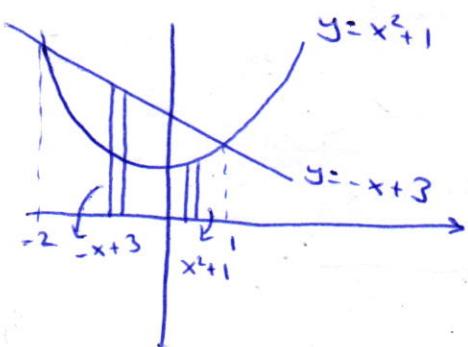
*) $x = y^2 + 1$, $x = 3$ arasındaki bölge $x = 3$ etrafında
cevrilirse hacim?



$$y^2 + 1 = 3 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2}$$

$$V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-y^2)^2 dy = \frac{64\sqrt{2}\pi}{15}$$

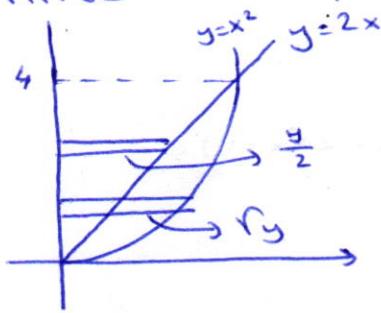
*) $y = x^2 + 1$, $y = -x + 3$ arasındaki bölge x -ekseni etrafında
cevrilirse hacim?



$$x^2 + 1 = -x + 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$$

$$V = V_b - V_k = \pi \int_{-2}^1 (-x+3)^2 dx - \pi \int_{-2}^1 (x^2+1)^2 dx \\ = \frac{117}{5}\pi$$

① $y=x^2$, $y=2x$ arasındaki bölge y-ekseni etrafında çevrilince hacim?



$$x^2 = 2x \rightarrow x=0, x=2$$

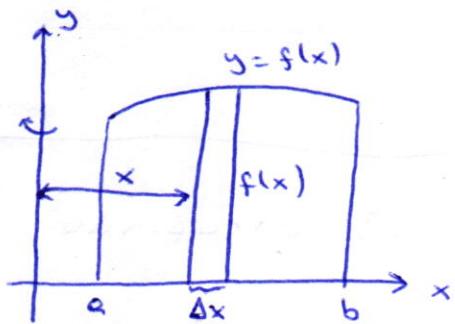
$$V = V_b - V_k$$

$$= \pi \int_0^4 (r_y)^2 dy - \pi \int_0^4 \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy$$

$$= \frac{8}{3} \pi$$

② Silindirik Kabuklar (Kabuk Yöntemi):

* $y=f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşturulan cismin hacmini herhangi isteyelim.



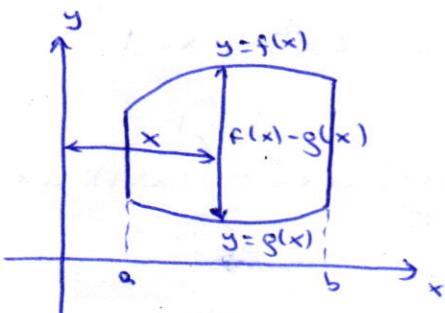
$$V = 2\pi \int_a^b (\text{Kabuk Yanıçap}) \cdot (\text{Kabuk Yüksekliği}) dx$$

dönme eksenine
olan uzaklık

kalınlık

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

* $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ bölgesi y-ekseni etrafında çevrilince:



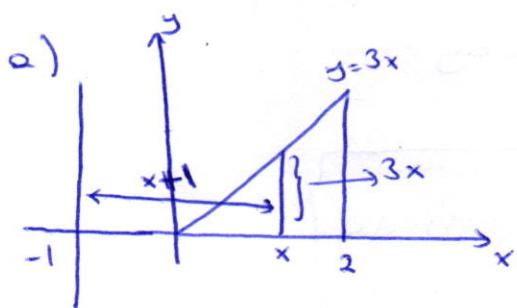
$$V = 2\pi \int_a^b (x \cdot r) (x \cdot r) dx$$

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

*) $y=3x$, $y=0$, $x=2$ bölgeinin $x=-1$ etrafında çevrilmesi ile oluşan hacmi

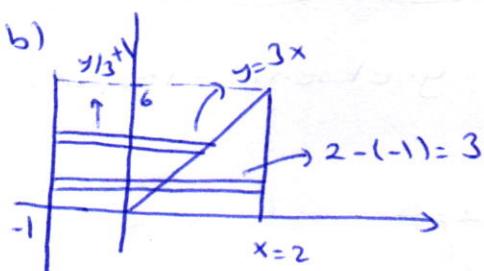
a) Kabuk yöntemi

b) Pül yöntemi ile hesaplayın.



$$V = 2\pi \int_0^2 (x+1)(3x) dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (x+1) \cdot 3x dx = 28\pi$$



$$V = V_b - V_k$$

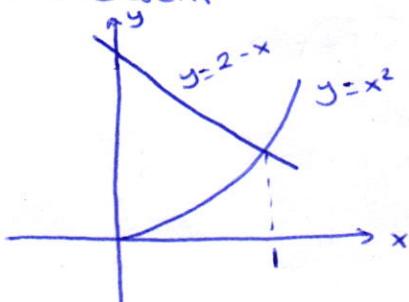
$$V = \pi \int_0^6 3^2 dy - \pi \int_0^6 \left(\frac{y}{3} + 1\right)^2 dy = 28\pi$$

*) $y=x^2$, $y=2-x$, $x \geq 0$ bölgeinin:

a) Alanı

b) $x=2$ etrafında çevrilmesiyle oluşan hacim?

b) x -ekseni "



$$x^2 = 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

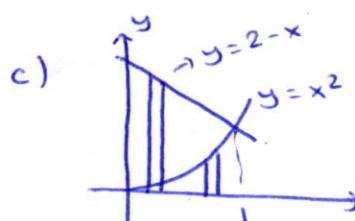
$$x = -2$$

c) $A = \int_0^1 (2-x-x^2) dx$

b)

$$V = 2\pi \int_0^1 (x \cdot 4)(x \cdot 4) dx$$

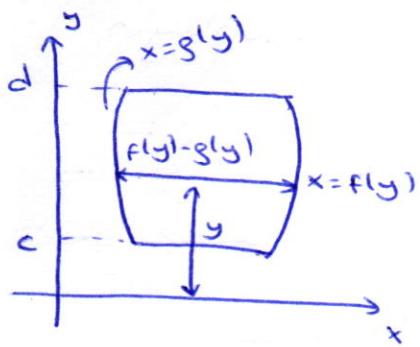
$$= 2\pi \int_0^1 (2-x) \cdot (2-x-x^2) dx$$



$$V = V_b - V_k$$

$$V = \pi \int_0^1 ((2-x)^2 - (x^2)^2) dx$$

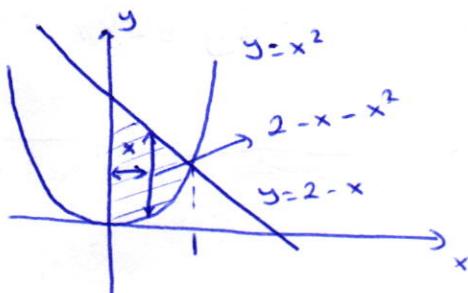
* $x=f(y)$, $x=g(y)$, $y=c$, $y=d$ bölgelerinin x -ekseni etrafında
cevrilmesi:



$$V = 2\pi \int_c^d (x \cdot y) (x \cdot y) dy$$

$$V = 2\pi \int_c^d y \cdot (f(y) - g(y)) dy$$

* $y=x^2$, $y=2-x$, $x=0$, $x>0$ bölgelerinin y -ekseni etrafında
cevrilmesiyle oluşan hacim?

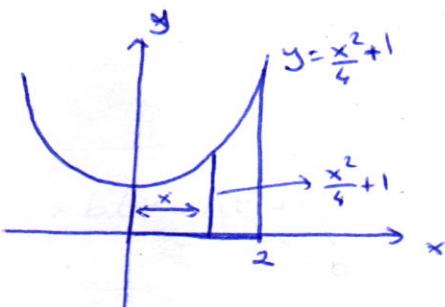


$$x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \quad x=1 \quad x=-2$$

$$V = 2\pi \int_0^1 (x \cdot y) (x \cdot y) dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \cdot (2 - x - x^2) dx = \frac{5\pi}{6}$$

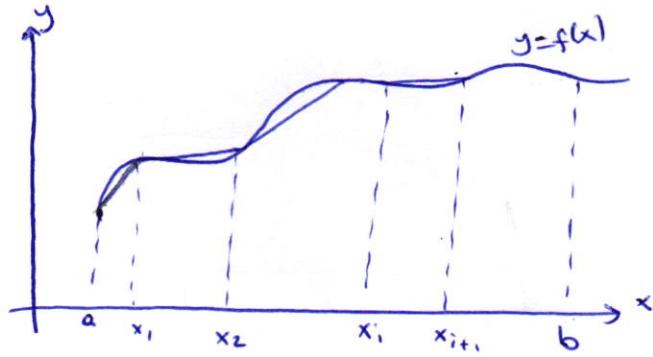
* $y=1+\frac{x^2}{4}$, $x=2$, $x=0$, $y=0$ \Rightarrow y -ekseni etrafında ceviri



$$V = 2\pi \int_0^2 (x \cdot y) (x \cdot y) dx$$

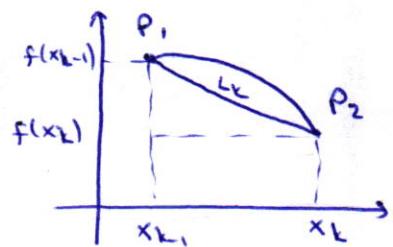
$$= 2\pi \int_0^2 x \cdot \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx = 6\pi$$

Yay Uzunluğu



$y=f(x)$ eğrisinin $a \leq x \leq b$ aralığındaki uzunluğunu hesaplamak isteyelim.

$[a, b]$ aralığını n alt aralığa bölelim.



$$L_k = |\vec{P_1 P_2}| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$\Delta y_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

O.O.T. göre $\Delta y_k = f'(c_k) \cdot \Delta x_k$ ols. bir $c \in (x_{k-1}, x_k)$ vardır. Böylece

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k) \Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(c_k))^2} \Delta x_k$$

İçin bu toplamın limiti oranın uzunluğu verir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n L_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

* $f'(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ise $y=f(x)$ in $[a, b]$ aralığındaki uzunluğu

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

* Eğer $g(y)$ fonksiyonu $[c, d]$ de sürekli ise $x=g(y)$ in $[c, d]$ aralığındaki uzunluğu:

$$S = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \quad 1 \leq x \leq 4$$

eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

$$f'(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}$$

$$(f'(x))^2 = \frac{x^4}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4}$$

$$1 + (f'(x))^2 = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}$$

$$S = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left. \frac{x^3}{12} - \frac{1}{x} \right|_1^4 = \underline{\underline{6}}$$

\textcircled{5} $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ eğrisinin $x=0$ dan $x=2$ 'ye uzunluğu?

$$y' = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{1/3} \text{ türki } x=0 \text{ da tanımlı değildir.}$$

Bu nedenle fonksiyon $y^{3/2} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2y^{3/2}$ şeklinde yeniden düberteriz.

$$x = 2y^{3/2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 3y^{1/2} \rightarrow \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 9y \rightarrow 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + 9y$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1+9y} dy = \int_1^{10} u^{1/2} \frac{du}{9} = \frac{2}{27} u^{3/2} \Big|_1^{10} = \underline{\underline{\frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1)}}$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow y=0 \\ x=2 \rightarrow y=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= 1+9y \\ du &= 9dy \\ y=0 &\rightarrow u=1 \\ y=1 &\rightarrow u=10 \end{aligned}$$

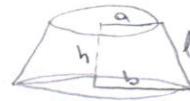
Dönel Yüzeylerin Alanları

(4)

* Eğer $f(x) \geq 0$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve türevlenebilen bir fonk. ise $y=f(x)$ 'in grafiğinin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle olusan yüzeyin alanı:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$



$$V.A = \pi(a+b)\sqrt{h^2 + (b-a)^2}$$

$$= \pi(a+b)l$$

* $x=g(y) \geq 0$ $[c, d]$ aralığında y -ekseni etrafında döndürülmesiyle olusan yüzey alanı:

$$S = 2\pi \int_c^d g(y) \sqrt{1+(g(y))'^2} dy$$

*) $x=1-y$, $0 \leq y \leq 1$, doğru parçasını y -ekseni etrafında çevirdiğimizde olusan koninin genel yüzey alanı?

$$S = 2\pi \int_0^1 (1-y) \sqrt{1+(-1)^2} dy = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+(y^2)} dy = \sqrt{2}\pi$$

*) $y = \sqrt{x+1}$, $1 \leq x \leq 5$ x -ekseni $\rightarrow S = 2\pi \int_1^5 \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{1+(\sqrt{x+1})'^2} dx$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad (y')^2 = \frac{1}{4(x+1)} \quad 1+(y')^2 = \frac{4x+5}{4(x+1)} \quad \sqrt{1+(y')^2} = \frac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{x+1}}$$

$$S = 2\pi \int_1^5 \sqrt{x+1} \cdot \frac{\sqrt{4x+5}}{2\sqrt{x+1}} dx = 2\pi \int_1^5 \sqrt{4x+5} dx = 2\pi \int_9^{25} \frac{\sqrt{u}}{4} du = 2\pi \frac{u^{3/2}}{4 \cdot \frac{3}{2}} \Big|_9^{25}$$

$$4x+5 = u \quad 4dx = du$$

$$x=1 \rightarrow u=9$$

$$x=5 \rightarrow u=25$$

$$= \frac{49}{3}\pi$$

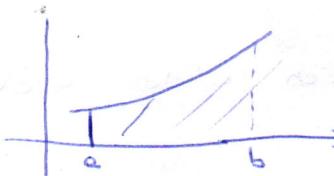
(14)

Genelleştirilmiş integraller

1. Tip improper integraller

① Eğer $f(x)$, $[a, \infty)$ da sürekli ise:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$



② Eğer $f(x)$, $(-\infty, a]$ da sürekli ise:

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^a f(x) dx$$

③ Eğer $f(x)$, $(-\infty, \infty)$ aralığında sürekli ise, c herhangi bir reel sayı olmak üzere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^c f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_c^R f(x) dx$$

Her bir durumda, limit sonucu sınırlı ise improper integral yoksa ve limit değeri integralin değeridir. Eğer limit yoksa veya $\pm\infty$ ise integral瑕ektir.

2. Tip improper integraller

④ Eğer $f(x)$, $[a, b]$ de sürekli, a da süreksiz ise:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx$$

② $f(x)$, $[a,b]$ de sürekli, b de süreksiz ise;

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

③ $f(x)$, $a < c < b$ iken c' de süreksiz, $[a,c) \cup (c,b]$ de sürekli ise;

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Her bir durumda limit sonlu ise int. yokluktan ve değeri bu limit değeridir. Limit yoksa veya sonuc $\pm\infty$ ise int. yokluktur.

*) $y = \frac{\ln x}{x^2}$ eğrisi altında $x=1$ den $x=\infty$ 'a kadar olan alan, hesapla!

$$I = \int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \ln x &= u & \frac{dx}{x} &= du \\ \frac{dx}{x^2} &= dv & v &= -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^R + \int_1^R \frac{dx}{x^2} \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln R}{R} - \frac{1}{x} \Big|_1^R \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\ln R}{R} - \frac{1}{R} + 1 \right] = 1$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} = 0$$

$$*) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{R \rightarrow -\infty} \operatorname{Arctan} x \Big|_R^0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan} x \Big|_0^R$$

$$= \underbrace{\lim_{R \rightarrow -\infty} (-\operatorname{Arctan} R)}_{-\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \underbrace{\lim_{R \rightarrow \infty} \operatorname{Arctan} R}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}$$

(15)

$$\textcircled{*} \int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{dx}{1-x} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \left[-\ln|1-x| \right]_0^c$$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left[-\ln|1-c| \right] = +\infty \rightarrow \text{integral iraksochtig}$$

$$\textcircled{*} \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{c \rightarrow 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$\int_0^1 + \int_1^3$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^-} \left[3(x-1)^{1/3} \right]_0^c + \lim_{c \rightarrow 1^+} \left[3(x-1)^{1/3} \right]_c^3$$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^-} \underbrace{\left(3(c-1)^{1/3} + 3 \right)}_0 + \lim_{c \rightarrow 1^+} \underbrace{\left(3 \cdot 2^{1/3} - 3 \cdot (c-1)^{1/3} \right)}_0$$

$$= 3 + 3\sqrt[3]{2}$$

(18)