$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

- Dizinin limiti varsa tektir.
- Eğer dizinin genel teriminin limiti bir R sayıya eşit çıkarsa dizi yakınsaktır ve sınırlıdır.
- Yakınsak her dizi sınırlıdır. Tersi doğru olmayabilir.
- Sınırlı bir dizide EKÜS ve EBAS olmayabilir.
- Monoton ve yakınsak bir dizinin ilk terimi ile limitinden hangisi büyük ise o EKÜS, hangisi küçük ise o EBAS'tır.

$\lim_{n\to\infty} a_n = k$ ise $\lim a_{n-1} = k$'dır

Kural: $a_n = \dfrac{a.n+b}{c.n+d}$

* Payda kökü 1'den küçük ise dizi monotondur

$a.d - b.c > 0$ monoton artan

$a.d - b.c < 0$ monoton azalan

$a.d - b.c = 0$ sabit dizidir.

* Payda kökü 1'den büyük ise monoton değildir

Soru: $n \geq 1$ olmak üzere, $a_1 = 1$ ve $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ olarak özyineli dizisi veriliyor. Buna göre a_n dizisinin limitini bulunuz.

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} \Rightarrow \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}}_{k} = \sqrt{6 + \underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{k}}$$

$$k = \sqrt{6+k} \Rightarrow k^2 = 6+k \qquad (k-3)(k+2) = 0$$

$k = 3$ ✓ $\quad \cancel{k = -2}$ dizi artan olduğundan olmaz

3

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \boxed{1}$

☆ **Sınırlı Dizi:** $m \leq a_n \leq M$

m: alt sınır EBAS; M: üst sınır EKÜS

Monoton Dizi Teoremi:

1. Bir a_n dizisi üstten sınırlı ve artan (veya azalmayan) ise yakınsaktır.

   Limit: EKÜS $\qquad$ EBAS $= a_1$

2. Bir a_n dizisi alttan sınırlı ve azalan (artmayan) ise yakınsaktır.

   Limit: EBAS $\qquad$ EKÜS $= a_1$

SERİLER

Serinin Toplamı: Kısmi Toplamlar Dizisi kullanılır.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin K.T.D si şöyle tanımlanır.

$= a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_n &= a_1 + a_2 \ldots + a_n \end{aligned}\right\}$$

$\{S_n\} \to$ K.T Dizisi denir

$S_n = a_1 + a_2 \ldots a_n$'e bu dizinin genel terimi veya serinin n. kısmi toplamı denir

☆ Eğer $\{S_n\}$ K.T.D yakınsak ise ($\lim_{n\to\infty} S_n = L$ ise) o zaman seri de yakınsaktır ve toplamı L'dir.

☆ Eğer $\{S_n\}$ ıraksak ise ($+\infty, -\infty$, limit yok) o zaman seri de aynı şekilde ıraksaktır.

Yani:

! Serinin yakınsaklığı dizilerin aksine serinin toplamıyla belirlenir.

Serinin Toplamını Bulmak için:

1. $S_n = a_1 + a_2 \ldots a_n$ hesaplarız. (Sonuç n'ye bağlı)
2. $\lim_{n\to\infty} S_n \to$
   - Sayı $(L) \Rightarrow$ Seri yakınsak ve toplam $= L$
   - $\infty \Rightarrow$ Seri ıraksak, toplam $= \infty$
   - $-\infty \Rightarrow$ Seri ıraksak, toplam $= -\infty$
   - Limit yok $\Rightarrow$ Seri ıraksak, toplam $= ?$

Serinin Toplamı

- Geometrik Seri
- Teleskopik Seri
- Bazı Özel Seriler
- Kuvvet Serisi

Geometrik Seriler:

Kural: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \Rightarrow$ $|r| \geq 1 \Rightarrow$ seri ıraksaktır
$|r| < 1 \Rightarrow$ seri yakınsaktır

üs n yapıldıktan sonra

n. Terim Testi (Iraksaklık Testi) (Limit Testi)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ için

∝ $\lim_{n\to\infty}(a_n) \neq 0 \Rightarrow$ Bu seri ıraksaktır.

∝ $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 \Rightarrow$ Bu test ise yaramaz. Seri halen ıraksak veya yakınsak olabilir.

Geometrik Serilerin Toplamını Bulma:

r = ortak çarpan

$|r| \geq 1 \longrightarrow$ Serinin toplamı $+\infty$ veya $-\infty$'dur.

$|r| < 1 \longrightarrow$ Serinin toplamı $= \frac{a_1}{1-r}$ ile bulunur.

$r \leq -1$ ise ıraksaktır ancak nereye gittiği belli değil.

Örnek: $0{,}323232\ldots = 0{,}\overline{32}$ sayısını iki tam sayının oranı olarak serileri kullanarak hesaplayın

$0{,}32 + 0{,}0032\ldots$

$\frac{32}{10^2} + \frac{32}{10^4} \ldots$

$a_1 = \frac{32}{100}$

$r = \frac{1}{100}$

$|r| < 1$

$\frac{32}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{99} = \frac{32}{99}$

Teleskopik Seriler:

Bir serinin kısmi toplamını bulmak için basit kesirlere ayırma yöntemini kullanıyorsak teleskopik seri denir.

Bazı Özel Seriler:

S_n'yi hesaplamak için genel terimdeki fonksiyonların bazı özelliklerini kullanıyorsak böyle serilere bazı özel seriler denir.

∝ ln içeren genel terimli seriler böyledir.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = ?$

$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}\right)$

$S_n = \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) + \ldots$

$S_n = \ln\left[\frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{3}{2}} \cdot \cancel{\frac{2}{3}} \cdot \cancel{\frac{4}{3}} \cdot \cancel{\frac{3}{4}} \cdots \cancel{\frac{n-1}{n}} \cdot \frac{n+1}{n}\right]$

$= \ln\left[\frac{n+1}{2n}\right] \to \lim_{n\to\infty} \ln\frac{n+1}{2n} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Serilerle İlgili Önemli Özellikler

1. $\sum a_n + \sum b_n = \sum a_n + b_n$

Yak. + Yak $\to$ Yak

Yak + Ir. $\to$ Ir.

Ir.$(+\infty)$ + Ir.$(+\infty) \to$ Ir.

Ir.$(-\infty)$ + Ir.$(-\infty) \to$ Ir.

Ir.$(+\infty)$ + Ir.$(-\infty) \to$ Direkt bilinemez!

2. Bir seriye sonlu sayıda terim eklemek veya silmek serinin karakterini değiştirmez.

★★

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır. (Tersi doğru değil)

Çünkü: $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ ise $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = L$'dir ve $\lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = a_n = 0$ olur.

NOT: $\{a_n\}$ bir dizi, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir seri olsun.

★★ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \to$ Dizi: Yakınsaktır. Seri: İncelenmeli

★★ $\lim_{n\to\infty} a_n = L \ (L \neq 0) \to$ Dizi: Yakınsak Seri: Iraksak

KONU ÖZETİ

$$\boxed{! \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

Pozitif Terimli Seriler İçin Yakınsaklık Testi

∝ İntegral Testi $\to$ İmproper İntegral

∝ Mukayese Testi
∝ Limit Testi
$\to$ Başka seriden yardım isteriz.

∝ Oran Testi
∝ Kök Testi
∝ n. Terim Testi
$\to$ Serinin genel terimi bize yeter!

İntegral Testi:

$\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini $\int_N^{\infty} f(x)\,dx$ belirler.

$$\int_N^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_N^R f(x)\,dx$$ → sayı çıkarsa → yakınsak; → $\pm\infty$ çıkarsa → ıraksak

Not: Bulunan sayı değeri bize serinin toplamını vermez.

İpucu Testi:

Not2: $f(x)$; pozitif, sürekli ve azalan olmak zorundadır.

① Diğer testlerden sonuç alınmıyorsa ve serinin genel teriminin int.'i kolay alınabilecek gibiyse bu test düşünülür.

② Genel teriminde ln fonksiyonu olan serilerde kullanılabilir.

Not: $\frac{1}{n} \Rightarrow$ ıraksak

$\frac{1}{n^2} \Rightarrow$ yakınsak

Mukayese Testi:

* $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli olsun.

a) $\forall n$ için $a_n \le b_n$ ise ve $\sum b_n$ serisi yakınsak ise o zaman $\sum a_n$ serisi de yakınsaktır.

Sorulan	Seçilen
$\sum a_n$	$\sum b_n$ → Geometrik seri, → Harmonik seri, → P-serisi

★★ Yakınsaktan küçük olan yakınsaktır.

b) $b_n \le a_n$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ de ıraksaktır.

Sorulan	Seçilen
$\sum a_n$	$\sum b_n$

★★ Iraksaktan büyük olan ıraksaktır.

İpucu: ① sin, cos, ln içeren genel terimli serilerde kullanılabilir.

$\boxed{\sin, \cos \le 1}$ $\boxed{\ln n < n}$

② Sorulan serinin içine saklanmış p-serisi, harmonik seri veya geometrik seri varsa bu test akla gelebilir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^3+4n+5}$ karakteri nedir?

Limit testi uygularız

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+3n+1}{n^3+4n+5}}{\frac{1}{n}} = 2$$

$\frac{2n^2+3n+1}{n^3+4n+5} \Rightarrow$ ıraksak

$\frac{1}{n} \Rightarrow$ ıraksak

⇒ 0'dan farklı olduğundan iki seri de aynı karakterlidir. IRAKSAKTIR

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^n\sqrt{n}}$ karakteri nedir?

geometrik: $\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$, $r = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ Yakınsak

p: $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, $p = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ Iraksak

Mukayese: $\sum \frac{1}{e^n\sqrt{n}} < \sum \frac{1}{e^n}$ Yakınsak; $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\Downarrow$ Yakınsak

! Oran testi ve limit testi ile de çözülebilir.

Harmonik Seri:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdots$ serisi harmonik seridir. $+\infty$'a ıraksar.

İspat: $f(x) = \frac{1}{x}$ $[1,\infty)$ azalan, poz., sür.

↓ integral testi

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \ln\infty - 0 = \infty \Rightarrow \text{Iraksaktır!}$$

p-Serisi:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \cdots$ serisine p-serisi denir.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ → $p \le 1 \Rightarrow$ Seri ıraksaktır; → $p > 1 \Rightarrow$ Seri yakınsaktır.

Örnek: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ karakteri?

İntegral testi kullanılamaz.

$\ln n < n$ $\quad \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \sum \frac{1}{\ln n} > \underbrace{\sum \frac{1}{n}}_{\text{ıraksak}}$

Bu da ıraksak olur.

Limit Testi:

$\sum a_n$ ve $\sum b_n$, pozitif terimli iki seri olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ olsun.

a) $L \ne 0, \infty$ ise her iki seri de aynı karakterlidir.

b) $L = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.

c) $L = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

İpucu:

① Sadece n nin kuvvetlerini içeren kesirli bir fonk. içeren genel terimde kullanılabilir.

② Sorulan serinin içine saklanmış p-serisi, harmonik seri veya geometrik seri varsa bu test akla gelebilir.

Oran Testi:

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seri olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \text{olsun}$$

a) $L<1$ ise seri yakınsak

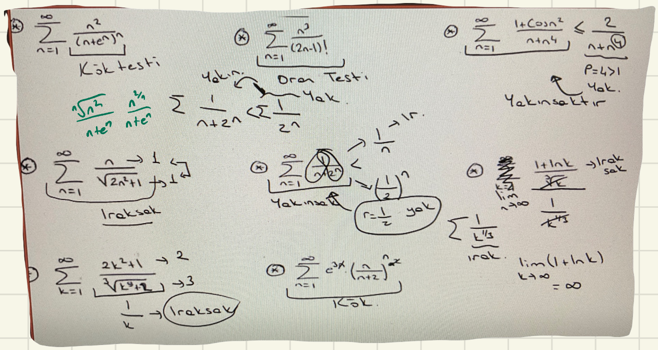
b) $L>1$ ise seri ıraksak

c) $L=1$ ise seri sonuç vermez.

İpucu:

Genel terimin içinde faktoriyel varsa veya üstel fonk. varsa kullanılabilir.

ALIŞTIRMALAR



Kök Testi:

$\sum a_n$ pozitif terimli bir seridir.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \begin{cases} L<1 \Rightarrow \text{Yakınsak} \\ L>1 \Rightarrow \text{Iraksak} \\ L=1 \Rightarrow \text{Sonuç vermez} \end{cases}$$

İpucu:

∝ n. dereceden kuvvet içeren genel terimli serilerde kullanılabilir.

Alterne Seriler:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ $(a_n>0)$ şeklindeki işareti sürekli değişen serilere alterne seri denir.

Pozitif Terimli Seri → Yakınsak, Iraksak

Alterne Seri → Yakınsak (Mutlak Yakınsak, Şartlı Yakınsak), Iraksak

Alterne Seri Testi:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ serisi için

① $\forall n$ için $a_n>0$

② $\forall n$ için $a_n \ge a_{n+1}$ (Azalan ise)

③ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

sağlanıyorsa $\sum (-1)^{n+1} \cdot a_n$ serisi yakınsaktır.

Mutlak Yakınsaklık: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ alterne serisi için $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli serisi yakınsak ise $\sum (-1)^n \cdot a_n$ "Mutlak yakınsaktır" denir.

Şartlı Yakınsaklık: Yakınsak olduğu biliniyorsa ancak mutlak yakınsak değilse o zaman bu seriye şartlı yakınsaktır denir.

Alterne Harmonik Seri:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ serisini inceleyelim

① $a_n>0$ ✓ ② $a_n > a_{n+1}$ ✓ ③ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓

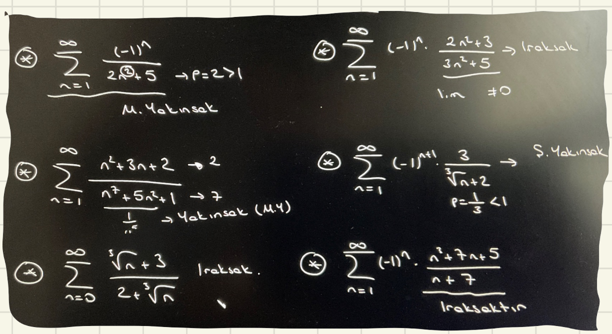
Alterne harmonik serisinin yakınsak olduğunu bulduk.

M. Yakınsak mı? $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ → Yakınsak mı → Hayır

Mutlak yakınsak değilse şartlı yakınsaktır.

Alterne P- Serisi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^p} \begin{cases} p>1 \Rightarrow \text{Mutlak Yakınsak} \\ p\le 1 \Rightarrow \text{Şartlı Yakınsak} \end{cases}$$



Kuvvet Serileri:

Seri içine $(x-a)^n$ biçiminde x'e bağlı üslü bir ifadenin gelmesiyle kuvvet serileri oluşur.

✲ c noktası, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık merkezidir. Seri $x=c$'de a_0'a yakınsar.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$$

1. $\forall x \in R$ için yakınsak
2. Sadece $x=c$ de yakınsak
3. $c-R < x < c+R$ aralığında yakınsak (uç noktaların incelenmesi gerek)

Not: Bir kuvvet serisinin tüm R sayılar için ıraksak olması mümkün değildir. Bir tane de olsa yakınsak nokta olur.

Not2: Bir kuvvet serisi yakınsadığı aralıkta bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlar.

Bazı Önemli Maclaurin Serileri

✲ $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \dots$$

Yakınsaklık Aralığı: $-1 < x < 1$

✲ $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \dots$$

Yakınsaklık Aralığı: $-\infty < x < \infty \Rightarrow R$

✲ $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = +x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

Yakınsaklık Aralığı: $-\infty < x < \infty \Rightarrow R$

✲ $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots$$

Yakınsaklık Aralığı: $-\infty < x < \infty \Rightarrow R$

✲ $$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$$

Yakınsaklık Aralığı: $-1 < x \leq 1$

✲ $$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots$$

Yakınsaklık Aralığı: $-1 \leq x \leq 1$

Kuvvet Serilerinin Yakınsaklık Aralığının Araştırılması

1. Oran testi yardımıyla serinin mutlak yakınsadığı açık aralık bulunur. Yani $c-R < x < c+R$ bulunur.
2. $x=c-R$ ve $x=c+R$ için serinin karakteri belirlenir.
3. Sonuçlar özetlenir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ Serisinin hangi α değeri için M.Y, Ş.Y, yakınsak ve ıraksak olduğunu belirle.

1. Oran testi:

Mutlak değere alıp kullanmak zorundayız çünkü hepsi pozitif terimli değil.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x| < 1$$

$$\Downarrow$$

Yakınsaklık yarıçapı $= 1$ $\Leftarrow$ $\underbrace{-1 < x < 1}_{\text{Mutlak Yakınsak}}$

Yakınsaklık merkezi $= 0$

2. Sınırları incele: $x=1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{Harmonik Seri} \downarrow \text{Iraksak}$$

$x=-1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \text{Alterne Harmonik Seri} \downarrow \text{Şartlı Yakınsak}$$

3. Özet:

Mutlak Yakınsak: $x \in (-1,1)$

Yakınsak: $x \in [-1,1)$

Şartlı Yakınsak: $x=-1$

Iraksak: $x \in R \sim [-1,1)$

TAYLOR ve MACLUARIN SERİ AÇILIMLARI

$f(x) = e^{2x} \rightarrow$ sonsuz defa türevlenebilirse $\rightarrow$ seri haline getirilebilir

✲ $f(x)$'in $x=x_0$ seri açılımına TAYLOR

✲ $f(x)$'in $x=0$ seri açılımına MACLUARIN denir.

Taylor Açılımı: $x=x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0) + \frac{f''(x_0).(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0).(x-x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}$$

Maclaurin Açılımı:

$$f(x) = f(0) + f'(0).(x) + \frac{f''(0).(x)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0).(x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}$$

Not: Bir (kuvvet) seriyi α sabiti ile çarptığımızda serinin yakınsadığı aralık değişmez.

Not: Bir serinin türevini almak veya integralini almak yakınsaklık aralığını değiştirmez.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = ?$ toplamı nedir?

→ G.S ✗
→ T.S ✗
→ Ö.S ✗
→ Kuvvet Serisi! ✓✓

$\sum n \cdot x^n \rightarrow x = \frac{1}{2}$ ise sağlanır

$\frac{1}{1-x} = \sum x^n$

↓ türev

$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum n \cdot x^{n-1} \xrightarrow{x \text{ ile çarp}} \frac{x}{(1-x)^2} = \sum n \cdot x^n$