Optimizasyon Problemleri

Bir şeyin alabileceği en büyük veya en küçük değerin 1. Türev yardımıyla hesaplanmasına optimizasyon problemleri denir.

Soru: $x+3y=18$ ise $x\cdot y$ en fazla kaçtır?

1. adım

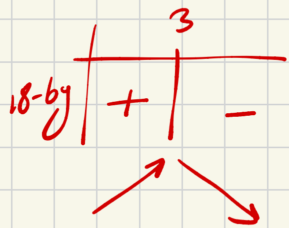
$x\cdot y$ tek bilinmeyene çevrilmelidir.

$$x=18-3y \longrightarrow x\cdot y=(18y-3y^2) \text{ maks değer}$$

2. adım

$18-6y=0$

$y=3$

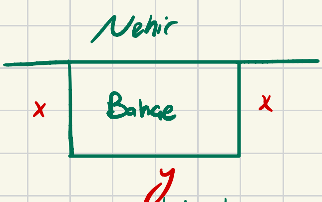


x y

(9,3)

27

Soru:



200 metre tel ile en büyük alanlı dikdörtgen şeklinde tel ile çevirmek istiyor.

$2x+y=200$

$y=200-2x$

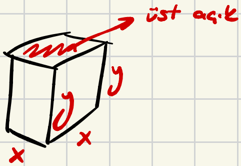
$x\cdot y=200x-2x^2$

$200-4x=0$

$x=50$

(50, 100)

400 cm² lik karton ile dik prizma yapılmak isteniyor. Hacmin en çok olması için dik prizmanın boyutları ne olmalıdır.



$$x^2 + 4xy = 400$$

$$y = \frac{100}{x} - \frac{x}{4}$$

$$x^2 \cdot y = \max$$

$$\left(100x - \frac{x^3}{4}\right) = \max$$

$$100 - \frac{3x^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$y = 5\sqrt{3} - \frac{5}{\sqrt{3}}$$

$-\frac{20}{\sqrt{3}}$		$20/\sqrt{3}$	
−	+	−	

max değer

Soru: $f(x) = x^2 - 5x + 4$ fonk üzeri noktalardan koordinat top. en küçük olan noktayı bulun.

$4 - 10 + 4$

$(x, x^2 - 5x + 4)$

$x^2 - 4x + 4 \longrightarrow$ min değer

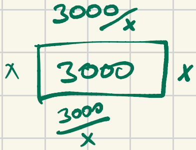
$2x - 4 = 0$

$\underline{x = 2}$

	2	
−		+

$(2, -2) = 0$

Soru: $3000\ m^2$lik bir arazi telle kaplanacak. 3 kenarı metresi 3 lira bir kenarı metresi 1 lira olan tel kullanılacaktır. En ucuz maliyet?



$2x + \frac{3000}{x}$

$3 \cdot \left(\frac{2x^2 + 3000}{x} \right) + \frac{3000}{x}$

$\frac{6x^2 + 12000}{x} = f(x)$

$6x + \frac{12000}{x} = f(x)$

$\downarrow$

$6 - \frac{12000}{x^2} = 0$

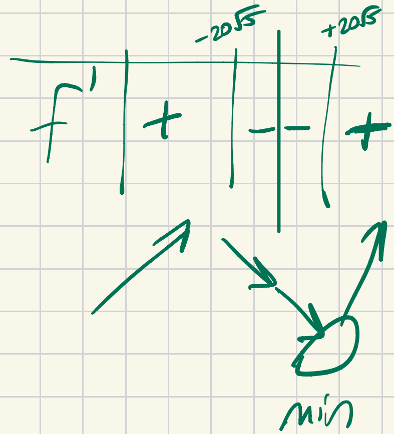
$6 = \frac{\cancel{12}000}{x^2}$

$\cancel{6}x^2 =$

$x^2 = 2000$

$x = \mp\sqrt{2000} \longrightarrow 20\sqrt{5}$

$y = 30\sqrt{5}$



$$\left[f\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right)\right]'$$

$$= f\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right) \cdot \left(1 \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right) + x \cdot g\left(x^2 \cos x\right) \cdot \left(2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x)\right)\right)$$

$$\left[f(x)\right]' = f(x) \cdot f'(x)$$

$$f'\left(x \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right)\right) \cdot \left[1 \cdot g\left(x^2 \cdot \cos x\right) + \left(x \cdot g'\left(x^2 \cdot \cos x\right) \cdot \left(2x \cos x - x^2 \cdot \sin x\right)\right)\right]$$

Çözüm Limiti alınan ifadenin bütün terimlerini x ile bölerek

$\frac{x+\sin x}{\sin x} = 2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+\sin x}{\arctan x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+(\sin x)/x}{(\arctan x)/x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

elde ederiz. ◄

[redacted] $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$ limitini hesaplayınız.

~~Çözüm Uygun~~ düzenlemeler yapar ve ilgili formülleri kullanırsak

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+\ln(1+x^2)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{x^2}{1-\cos x} \left[1 + \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \right] \right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{1}{\frac{1-\cos x}{x^2}} \left[1 + \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \right] \right\} = 2(1+1) = 4$$

olacaktır. ◄

[redacted] $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x^2-\sin x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm Not olarak

Çözüm Ö

$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1+}}{\sqrt{}}$

çıkar. ◄

Çözüm

oldukl

bulun

$$\frac{2x+\frac{2x}{x^2+1}}{+\sin x}$$

$$\cancel{2x^2}+2-\cancel{4x^2}$$

$$\frac{2+\frac{\cancel{-2x^2}+2}{(x^2+1)^2}}{+\cos x} \rightarrow \frac{4}{+1} = \boxed{4}$$

2

$(x-\sqrt{x^2-4x}$ $\Rightarrow$

$x-\sqrt{x^2-4x}$

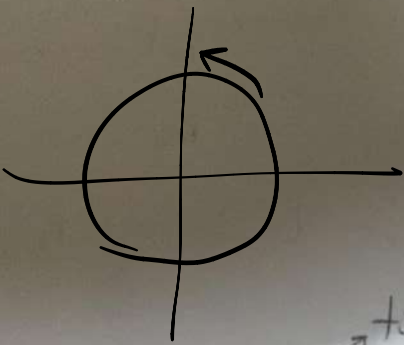
$2x$

$x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}$

$x-|x|\cdot 1$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\cot x)^{\cos x} = ?$ A) ~~e^2~~ B) ~~e~~ C) ~~e^{-1}~~ D) 1 E) ~~-1~~

0^0 belirsizliği



türevi = 1

$\cos(\sin x)\cdot\cos x =$

$$(\cot x)^{\cos x} = y$$

$$\cos x \cdot \ln(\cot x) = \ln y$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cot x)}{\sec} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln y$$

$$\log_e \ldots = 0$$

$$\frac{\frac{-\csc^2 x}{\cot x}}{\sec x \tan x}$$

c.s

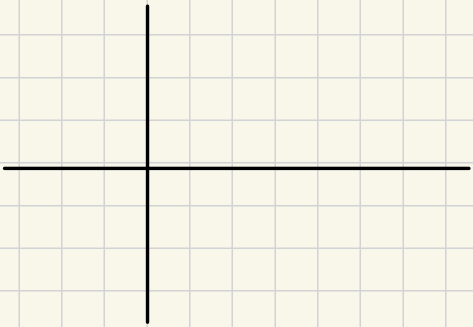
$$\frac{-1}{\sin}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\cos}\cdot s}$$

$$\left(\frac{-\cos 0}{\sin^2 1}\right)^0$$

Asimptot

Bir doğru çiziminde çizimi kolaylaştıran denklemlerdir.

doğru denklemi



* fonksiyon grafiğinin yaklaşması gereken doğrulardır.

1. Düşey Asimptot (Vertical Asymptot)
2. Yatay Asimptot (Horizontal Asymptot)
3. Eğik ve eğri Asimptot (Oblique Asymptot)

Düşey Asimptot

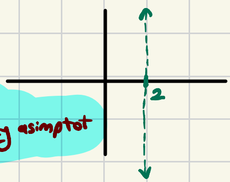
Tanımsızlıktan oluşan asimptottur.

$f(x) = 2x-1$ ✗

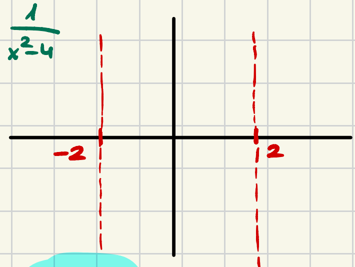
$f(x) = \dfrac{3x-2}{3}$ ✗

$f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

$x=2$ fonk düşey asimptot



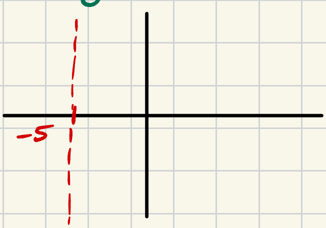
$f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$



$x=-2$

$x=2$

$f(x) = \log_2(x+5)$ $\quad x=-5$



Yatay Asimptot

y = fonksiyonun +∞ veya −∞'a giderkenki limit değeri

★ limit değeri +∞, −∞ olursa yatay asimptotu yoktur.

★ sadece sayı çıkması gerekir.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}(2x-3)=+\infty\\ \lim_{x\to-\infty}(2x-3)=-\infty\end{array}\right\}\text{ yatay asimptot yok.}$$

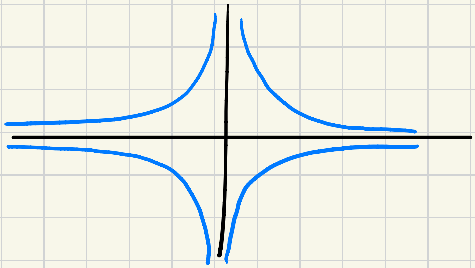
Ör/ $f(x)=\dfrac{3x-2}{4x+5}$ yatay asimptot nedir?

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{4x+5}=\dfrac{3}{4}\\ \lim_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{4x+5}=\dfrac{3}{4}\end{array}\right\}\ y=3/4$$

★ sadece bir sonsuza giderken sayı varsa yatay asimptot var kabul edilir. Fakat diğer sonsuza giderken yoktur.

Ör/ $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$ yatay asimptotu nedir.

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}=\dfrac{2}{2x}=0\\ \lim_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+1}=\dfrac{2}{2x}=0\end{array}\right\}\ y=0$$



Eğik ve Eğri Asimptot

* Yatay asimptot olmayan durumlarda karşımıza çıkar.

Eğik Asimptot

1. Çeşit

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

"payın derecesi paydanın derecesinden bir fazla ise"

2. Çeşit

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

"Kök ve içinde 2. derece fonksiyon varsa"

Eğri Asimptot

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$$

"payın derecesi paydadan iki ve daha fazlası ise"

Eğik Asimptot 1. Çeşit

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-2}$$

$$\boxed{y = \text{bölüm}}$$

$$\begin{array}{l|l} \text{pay} & \text{payda} \\ \hline & \text{bölüm} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2-x+1 & x-2 \\ \cline{2-2} -\;x^2-2x & x+1 \\ \hline 0+x+1 & \\ -\;x-2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

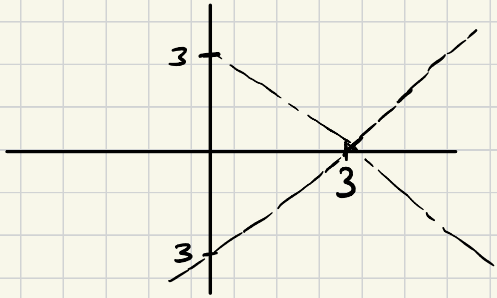
$y = x+1$

Eğik Asimptot 2. Çeşit

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} \implies y = \pm\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

$f(x) = \sqrt{x^2-6x+1}$ eğik asimptot?

$\pm 1(x-3)$ → $y = x-3$, $y = 3-x$

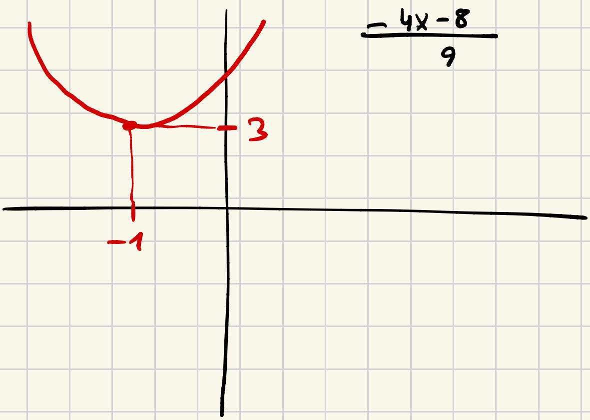


Eğri Asimptot

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x-2 \\ \hline -\;x^3-2x^2 & x^2+2x+4 \\ \hline 2x^2+1 & \\ -\;2x^2-4x & \\ \hline 4x+1 & \\ -\;4x-8 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$y = x^2+2x+4$$

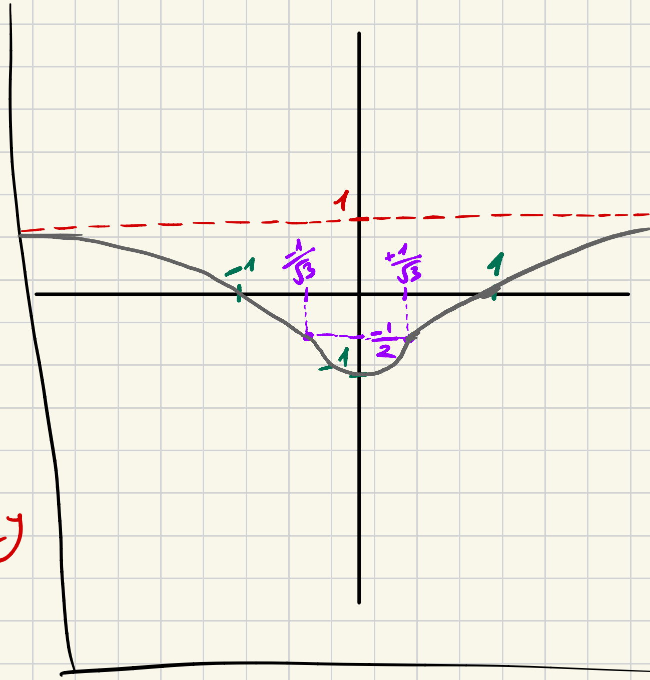


Türev Kullanarak Fonksiyon Çizme

1. Tanım Kümesi
2. Eksenleri kestiği noktayı bul.
3. Asimptotlar bulunmalıdır. (varsa)
4. Düşey Asimptot değerine sağdan ve soldan limitleri hesaplanır.
5. 1. Türevi alıp = 0
   * artan – azalan aralık
   * varsalar max ve min noktaları bul.
6. 2. Türevi alıp = 0
   * Konveks (dış-bükey), konkav (iç-bükey)
   * büküm noktası
7. Grafik Çizilir.
   1. Asimptotlar çizilir.
   2. Maksi/Min nokta, büküm noktası
   3. x ve y eksenlerini kestiği nokta
   4. çizim

Soru /

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$



Tanım Kümesi = $\mathbb{R}$

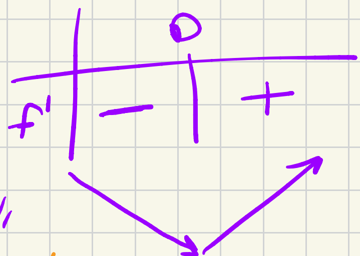
$x=0$ için $y=-1$ $(0,-1)$

$y=0$ için $x=-1,1$ $(-1,0),(1,0)$

düşey asimptot yok

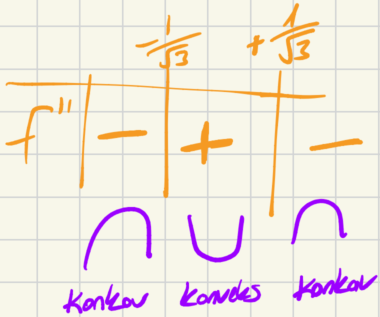
yatay asimptot $\lim\limits_{x\to \substack{+\infty\\-\infty}} \frac{x^2-1}{x^2+1}=1=y$

$$\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1).\,2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}=0$$



$x=0$ * paydayı sıfır yapanlar da işaret tablosunda bulunmalı

$$\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}=0$$



$$x^2=\frac{1}{3} \rightarrow x=\mp\sqrt{\frac{1}{3}}$$

1) Tanım küme
2) x,y
3) asimptotlar
4) düşey asimptot için sağdan soldan limit
5) 1. Türev
6) 2. Türev
7) Çizim

$\mathbb{R} - \{1\}$

(0,0)
(0,0) (0,0)

$x=1$ düşey asimptot $\rightarrow \lim_{x \to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \;/\; \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x-1} = 2 = y$ yatay asimptot

$f'(x) = \frac{2(x-1) - 2x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = 0$ için

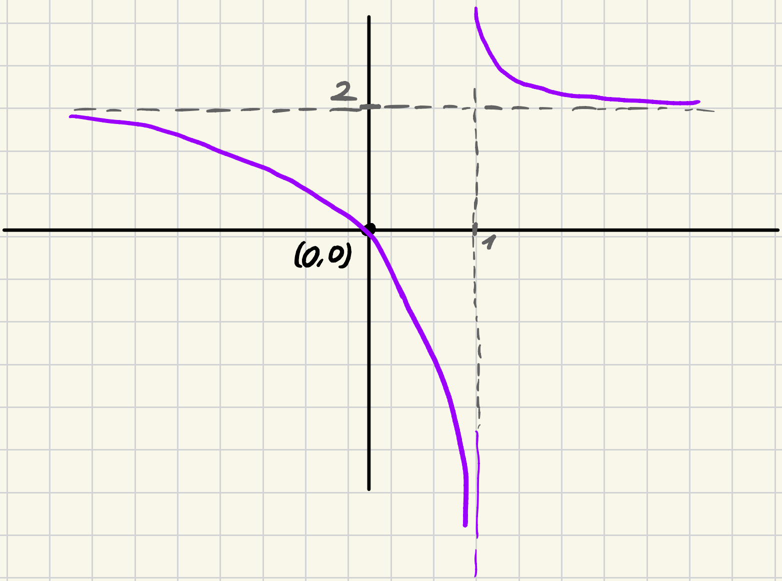
		1	
f'	$-$	‖	$-$

$\frac{+2 \cdot (2x-2)}{(x-1)^4} = 0$ için

$x-1=0$

$\boxed{x=1}$

		1	
f''	$-$	‖	$+$
	$\cap$		$\cup$



$f(x) = x^3 - 27x + 1$

1) Tanım Kümesi:
2) x, y
3) düşey asimp
4) yatay asimp
5) 1. Türev
6) 2. Türev
7) Çiz

$\mathbb{R}$

$(0,1)$

~~(?,0)~~

$x^3 - 27x + 1 = 0$

?

Kesirli olmadığı için asimptot yok.

$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0$ için

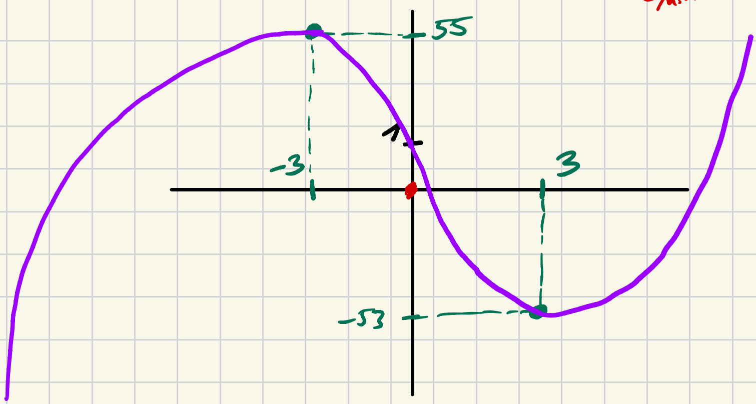
$x^2 = 9$

$x = -3, 3$

		-3		3	
f'	+		−		+
		max		min	

$f''(x) = 6x = 0$ için

	x=0	
−		+
∩		∪



$f(x) = x \cdot \sqrt{4-x^2}$

1) Tanım

$4 - x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 4$

$-2 \leq x \leq 2$

$[-2, 2]$

2) (x,y)

$(0,0)$

$(-2,0)$

$(2,0)$

asimptot yok

$\sqrt{4x^2 - x^4} = f(x)$

$\frac{8x - 4x^{3}}{2\cancel{x}\sqrt{4-x^2}} = f'(x)$

$\frac{8-4x^2}{2\sqrt{4-x^2}} = f'(x)$

$8x - 4x^3 = 0$

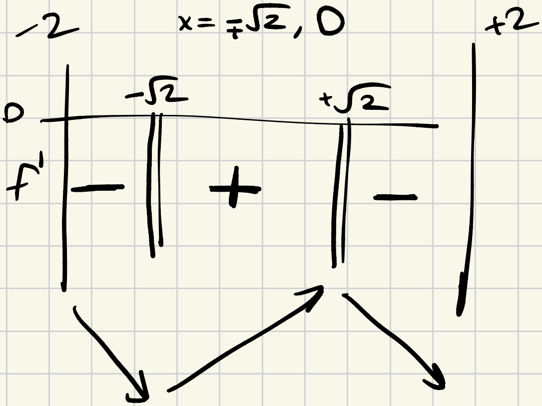
$4x^{\cancel{3}} = 8\cancel{x}$

$x^2 = 2$

$x = \mp\sqrt{2}, 0$

$f''(x) =$

$-8x\left(2\sqrt{4-x^2}\right) - (8-4x^2) \cdot \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} = 0$

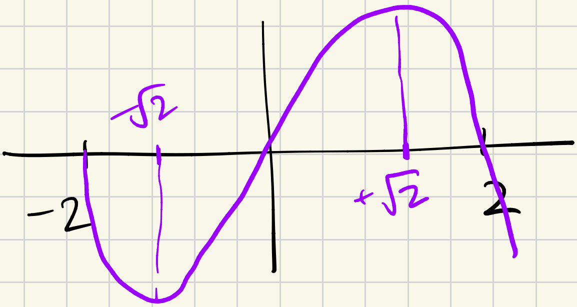


$8 \cdot (4-x^2) = (8-4x^2)$

$2 \cdot (4-x^2) = (2-x^2)$

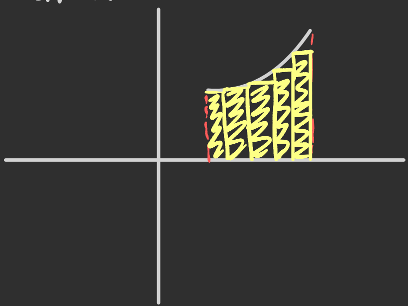
$8 - 2x^2 = 2 - x^2$

$x = 0$

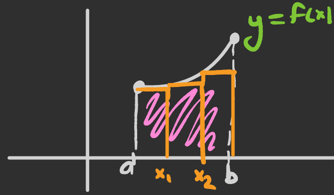


Riemann Toplamı

* Bir eğrinin altında kalan alanı



Sol Riemann Toplamı



* n eşit alt aralığa böl
* sol uçları ile dikdörtgen oluştur.
* Alanları topla

$$\Delta x = \frac{b-a}{3}$$

$$f(a).\Delta x + f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x$$

Soru

$f(x) = x^2+1$

$[2,10]$ 4 parça

sol riemann

2,4
4,6
6,8
8,10

$\Delta x = \frac{10-2}{4} = 2$

$5.2+17.2+37.2+65.2=$

$248 =$

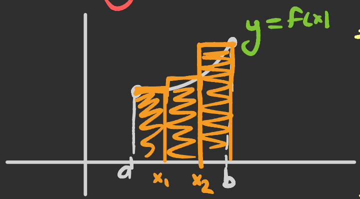
Soru:

$\int_1^3 x^3 dx$ integralini $n=3$ alarak sol riemann ile yaklaşık hesaplayınız.

$\Delta x = \frac{2}{3}$ $\left[1, \frac{5}{3}\right]$ $\left[\frac{7}{3}, 3\right]$ $\left[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$

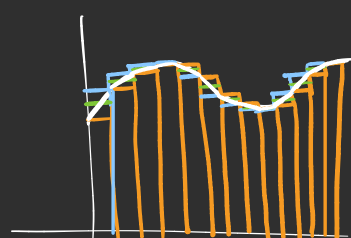
$\frac{990}{81}$ //

Sağ Riemann Toplamı



* n eşit alt aralığa böl
* sağ uçları ile dikdörtgen oluştur.
* Alanları topla

$$f(x_1).\Delta x + f(x_2).\Delta x + f(b).\Delta x$$



Soru:

$(1-x^2)=f(x)$

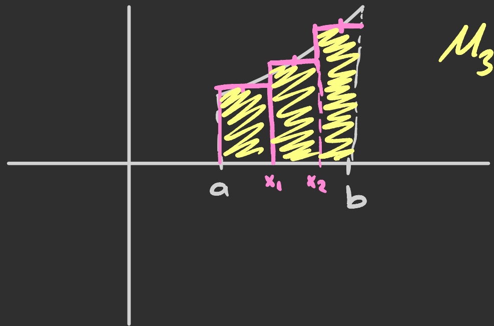
$[1,5]$, 4 parça

$$\left.\begin{array}{l} [1,2] \longrightarrow 3 \\ [2,3] \longrightarrow 8 \\ [3,4] \longrightarrow 15 \\ [4,5] \longrightarrow 24 \end{array}\right\} -50$$

$\int_0^2 x^2\,dx \qquad n=4$

$$\left.\begin{array}{l} [0,\frac{1}{2}] \\ [\frac{1}{2},1] \\ [1,\frac{3}{2}] \\ [\frac{3}{2},2] \end{array}\right\} \frac{15}{4}$$

Orta Nokta Riemann Toplamı



$$M_3 = \Delta x \left(f\left(\frac{a+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+b}{2}\right) \right)$$

Soru

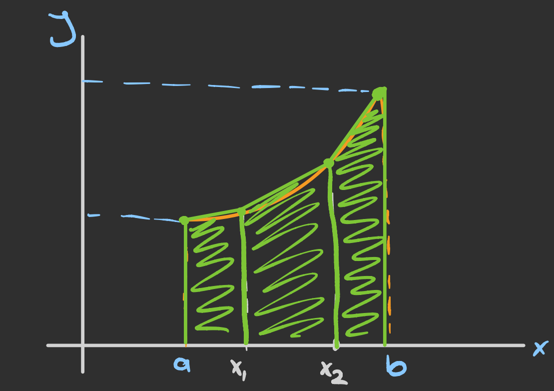
$f(x)=x^2+1$

$[1,4]$, 3 parça

$$\left.\begin{array}{l} [1,2] \longrightarrow 13/4 \\ [2,3] \longrightarrow 29/4 \\ [3,4] \longrightarrow 53/4 \end{array}\right\} 95/4$$

Yamuk Alanı ile Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ arasında sürekli olsun.



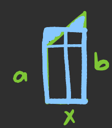
$n=3$

$a \leq x \leq x_1$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$x_2 \leq x \leq b$

* n eşit alt aralıkta yamuk alanı ile riemann toplamı, bu sınırların oluşturduğu yamukla elde edilir.



$\frac{a+b}{2} \cdot h$

$$T_3 = \frac{f(a)+f(x_1)}{2} \cdot \Delta x + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot \Delta x + \frac{f(x_2)+f(b)}{2} \cdot \Delta x$$

* Yamuk alanı ile R.T, sol ve sağ toplamın ortalamasına eşittir. (aritmetik)

Soru:

$f(x) = x^3+1$ fonk

$[1,5]$, $n=4$

Yamuk alanı = ?

$1,2 \longrightarrow 11/2$

$2,3 \longrightarrow$

$3,4 \longrightarrow$

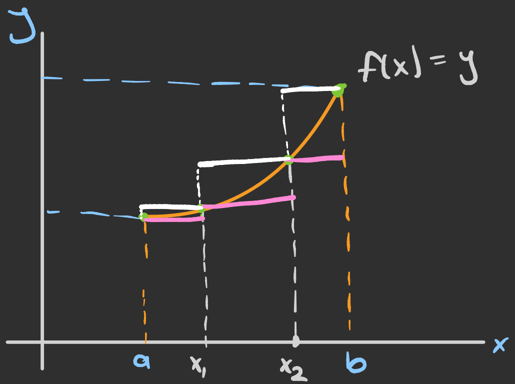
$4,5$

$+$

$332/2 = 166$

Alt Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ sürekli



* fonksiyon artarsa

alt riemann toplamı = sol riemann toplamı

* fonksiyon azalırsa

alt riemann toplamı = sağ riemann toplamı

$a \leq x \leq x_1$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$x_2 \leq x \leq b$

aralıkta hangisi küçükse o alınır.

Soru

$f(x) = (x-1)^2$

$[0,3]$ aralığında

$n = 4$

alt riemann toplamı bul.

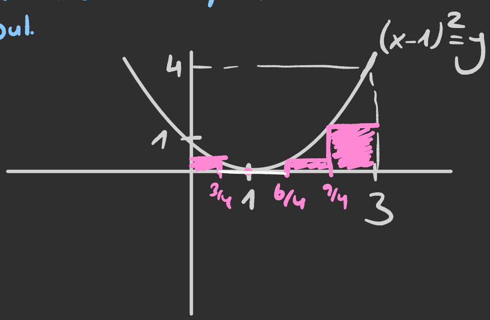
$0, \frac{3}{4} \rightarrow f(3/4)$

$\frac{3}{4}, \frac{6}{4} \rightarrow f(1)$

$\frac{6}{4}, \frac{9}{4} \rightarrow f(3/2)$

$\frac{9}{4}, 3 \rightarrow f(9/4)$

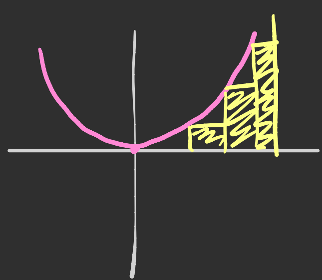
$45/32$



Soru:

$y = x^2$, $[1,3]$

$n = 3$, alt riemann toplamı



$1, 5/3 \rightarrow$

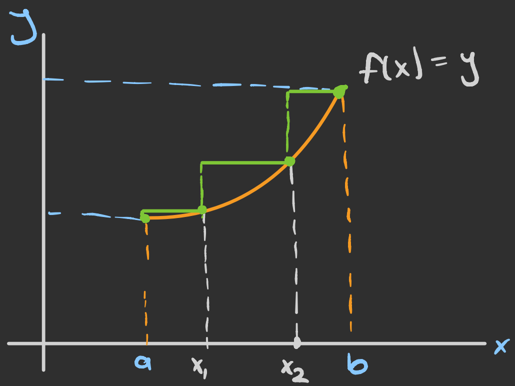
$5/3, 7/3 \rightarrow$

$7/3, 3 \rightarrow$

$166/27$

Üst Riemann Toplamı

$f(x)$, $[a,b]$ sürekli



$a \leq x \leq x_1$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$x_2 \leq x \leq b$

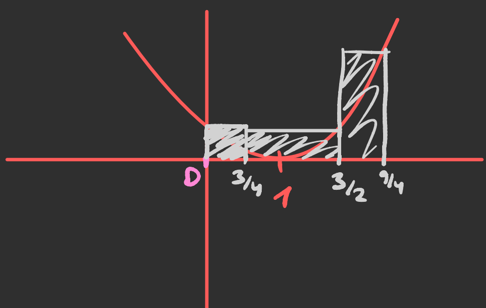
aralıkta hangisi büyükse onu seç

Soru:

$y = (x-1)^2$

$[0,3]$, $n = 4$

üst riemann toplamı = ?



$0, \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}, \frac{6}{4}$

$\frac{6}{4}, \frac{9}{4}$

$\frac{9}{4}, 3$

$325/64$

Toplam Sembolü ve Özellikleri (Sigma Notation)

$\sum$ = toplam sembolü

$$\sum_{k=1}^{5} f(k) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)$$

5 → bitiş değeri

k=1 → başlangıç değeri

$\{1,2,3,4,5\}$

$$\sum_{n=0}^{3}(n^3+1) = 1+2+9+28 = 40$$

Özellik 1:

$$\sum_{i=1}^{n} 3i = 3\sum_{i=1}^{n} i$$

Özellik 2:

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+5k+6) = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 5k + \underbrace{\sum_{k=1}^{10} 6}_{\underline{\underline{60}}}$$

Toplam Sembolünü Kısa Yoldan Hesaplama

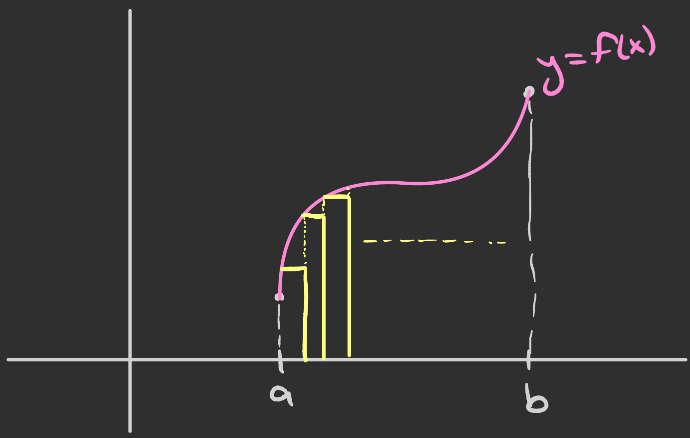
1. $$\sum_{k=m}^{n} a = a.(n-m+1)$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n.(n+1)}{2}$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$$

4. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n.(n+1)}{2}\right]^2$$

Riemann Toplamının Limiti



$n = 3$
$n = 4$
5
6
$\vdots$
$n = n \to \infty$

$$\int_a^b f(x).dx = \text{gerçek alan}$$

Sağ Riemann Toplamının Limiti

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x . i$$

Ör/ $x_1 = a + \Delta x$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Sol Riemann Toplamının Limiti

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x (i-1)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \int_a^b f(x).dx$$

Soru:

$y=x^2$

$[1,3]$

Riemann toplam limiti ile bul.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x$$

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x i$$

$$x_i=a+\frac{2i}{n}$$

$$f(x_i)=\left(a+\frac{2i}{n}\right)^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2.\frac{2}{n}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{n}+\frac{8i}{n^2}+\frac{8i^2}{n^3}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{8}{n^3}.\sum_{i=1}^{n} i^2=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{4n+4}{n}+\frac{8n^2+12n+4}{3n^2}\right)=26/3$$

$\int_0^3 x\,dx$ sonucunu riemann toplamının limitini kullanarak bulunuz.

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x i=\frac{3i}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right).\frac{3}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{9i}{n^2}=\frac{9n+9}{2n}=\frac{9}{2}$$

Riemann Toplamının Limitini: Belirli İntegral ile Çözme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x i$$

$b-a=3$

$5-2$

$\int_2^5$

Soru

$f(x_i) = 2+\frac{3i}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \overset{\Delta x}{\frac{3}{n}} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(2+\frac{3k}{n}\right)}_{f(xi)}$ Δx ifadesini belirli integral

a

$\Delta x = \frac{3}{n} \to b-a=3$

5 2

$\Rightarrow \int_2^5 x\,dx = 21/2$

$x_k = a + \Delta x.k = 2+\frac{3k}{n}$

$b-a=3$

$x_i = a+\Delta xi$

$2+\frac{3k}{n}$

Soru:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^5+2^5+3^5+\dots}{n^6}\right)=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x=\int_a^b f(x)\cdot dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^5}{n^5}+\frac{2^5}{n^5}\dots\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\cdot\underbrace{\left(\frac{i^5}{n^5}\right)}_{\boxed{x^5}}$$

$$\boxed{\int_0^1 x^5\,dx=\frac{1}{6}}=$$

$$\Delta x=\frac{1}{n}$$

$$x_i=a+\Delta x i$$

$$\downarrow$$

0 ise $b=1$

Soru:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{2}{n}\right)+\sin\left(\frac{3}{n}\right)\dots}{n}\right)=?$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{i}{n}\right)}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\underbrace{\left(\sin\left(\frac{i}{n}\right)\right)}_{f(x_i)}$$

$$b-a=1 \quad (b=1)$$

$$\cancel{a}^{\,0}+\frac{i}{n}=x_i$$

$$\sin\left(\frac{i}{n}\right)=f(x_i)$$

$$\sin(x)=f(x)$$

$$\int_0^1 \sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^1=$$

Riemann Toplamı Örnek Soru-1

$f(x) = x^2$ fonksiyonu $[1,5]$ aralığında 4 eşit alt aralığa bölünüyor.

a) Buna göre, Riemann alt toplamını bulunuz.

b) Buna göre, Riemann üst toplamını bulunuz.

c) Her aralığın orta noktasına göre hesaplanan Riemann toplamını bulunuz.

$1,2 \to 1$	4	2,25
$2,3 \to 4$	9	6,25
$3,4 \to 9$	16	12,25
$4,5 \to 16$	25	20,25
30	54	41

Toplam Sembolü Örnek Soru-3

Toplam Sembolü Örnek Soru-3

Aşağıda verilen ifadelerin sonuçlarını bulunuz.

a) $\sum_{k=1}^{10} k^3 \rightarrow \left[\frac{n.n+1}{2}\right]^2 = \left[\frac{10.11}{2}\right]^2 = 55^2$

b) $\sum_{k=\cancel{1}\,1}^{\cancel{20}\,27} \cancel{(2k-3)}$ $2k+3 = 2\sum_{k=1}^{27} k + \sum_{1}^{27} 3 = 27.28 + 27.3$

$31.27 =$

c) $\sum_{i=\cancel{-1}\,1}^{\cancel{12}\,15} (k^2+k)$ $15(k^2+k)$

İntegrale Giriş

* Türevin tersi

$f'(x) \longrightarrow f(x)$

* $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

* $\Sigma \longrightarrow$ ayrık değerlerde toplama
* $\int \longrightarrow$ sürekli değerlerde toplama

İntegral Çeşitleri

Belirsiz integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Sınırları olmayan integral

Belirli integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \ldots\ldots$$

Integral Alma Kuralları

1) Sabit Sayının İntegrali

$$\int 3\,dx = 3x + c$$

$$\int \frac{1}{5}\,dx = \frac{x}{5} + c$$

Belirsiz integralde zorunlu

$$\int -2\,dx = -2x + c$$

2) Üslü Sayının İntegrali

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c$$

$$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + c$$

$x^{\frac{1}{3}}$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

Yardımcı Kurallar

a)

$$\int a\,f(x)\,dx = a.\int f(x).dx$$

$$\int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + c$$

b)

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int (x^2 - 7x + 4)\,dx = \int x^2\,dx + \int -7x\,dx + \int 4\,dx$$

c) $$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1).(a)}$$

** parantez içi sadece 1. derece iken uygulanabilir.

$$\int \sqrt[3]{5x-2}\,dx = \frac{(5x-2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}.5} + c$$

---

4) Üstel Fonksiyonların İntegrali

a) $$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + c$$

e aynen yazılır.
üssünün türevine bölünür.

e'nin üssü 1. derece ise uygulanabilir.

$$\int e^{x}dx = e^{x}+c$$

$$\int e^{-x}dx = \frac{e^{-x}}{-1}+c$$

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{e^{3x+1}}{3}+c$$

$$\int 2e^{5x} = \frac{2.e^{5x}}{5}+c$$

$\int e^{x^2}dx$ = kurala uymaz.

$\int x.e^{x}\,dx$ = kurala uymaz.

b) $$\int a^{mx+n}\,dx = \frac{a^{mx+n}}{m.\ln a}+c$$

üs 1. derece olmalıdır.

$$\int 5^{x}dx = \frac{5^{x}}{1.\ln 5}+c$$

5 Sonucu "ln" çıkanlar

$$\frac{\text{Sayı}}{\text{1. derece fonk.}} = \ln$$

$$* \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$* \int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c =$$

$$* \int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + c$$

$$\int \frac{2}{x}\,dx = 2\ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \ln|x+1| + c$$

$$\int \frac{3}{2x}\,dx = 3.\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{3.\ln|2x|}{2} + c$$

$$\int \frac{2}{x+5}\,dx = 2\int \frac{1}{x+5}\,dx = 2\ln|x+5| + c$$

6 Trigonometrik integral Kuralları

ⓐ $\int \sin(ax+b)\,dx = \dfrac{-\cos(ax+b)}{a} + c$

1. derece

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \sin 5x\,dx = \frac{-\cos 5x}{5} + c$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{5}\right)dx = \frac{-\cos(x/5)}{\frac{1}{5}} + c$$

Hatırlatma: Fonk.lar için Ortalama Değer Teorisi

f, $[a,b]$ sürekli

f, (a,b) türevli

$$\underbrace{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{en az bir } c\in(a,b)}$$

integraller için ODT

f, $[a,b]$ sürekli

$$ort(f) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c) \text{ olmak üzere}$$

en az bir c vardır.

Soru: $|x-1|$, $[-1,2]$ aralığında ortalama değeri?

$$ort(f) = \frac{\int_{-1}^{2}|x-1|\,dx}{2-(-1)} = \frac{5}{6}$$

$$\int_{-1}^{1}(-x+1)dx + \int_{1}^{2}(x-1)\,dx =$$

$$\frac{-x^2}{2}+x \qquad \frac{x^2}{2}-x$$

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{-3}{2}\right) = 2 + \underbrace{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$5/2$

Leibniz Yöntemi

$$\left[F(x)\right]' = \left[\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right]'$$

$$F'(x) = f(g(x)).g'(x) - f(h(x)).h'(x)$$

$$y = \int_a^{x^3} (t^3+1)\,dt\,,\quad \frac{dy}{dx} = ?$$

$$f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}\,dt \qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt}{x^3 - 2x^2 + x} \qquad \begin{matrix} \to 0 \\ \to 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{L'H} \frac{\left[\int_1^{x^3} \tan(t-1)\,dt\right]'}{3x^2 - 4x + 1}$$

$\tan(t-1) = f(x)$

$\to \tan(x^3-1) \cdot 3x^2$

$f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x}$ çiziniz.

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

~~x≠0~~
~~x,0~~ } kök yok.

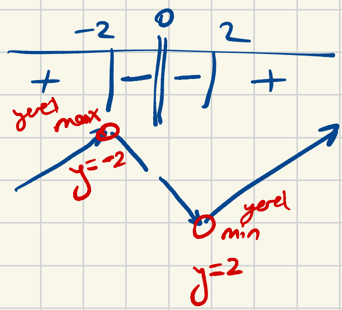
tek fonk

$f'(x) = \dfrac{x^2-4}{2x^2} = 0$ iken

$x = -2, 2$

$x \neq 0$

$x = 0$ kritik nokta değildir. Çünkü tanım kümesinde yok.



Kalkülüsün Temel Teoremi

① $F(x) = \int_{x+3x^2}^{5x} (y+\sqrt{y^2+1}\,,\quad F'(x) = ?$

② $\int_{\pi/2}^{\pi} \sec^2 x \,.\, dx = \tan x \Big|_{\pi/2}^{\pi}$

Ör/ $\int_{\pi/2}^{\pi} \sec^2(xy).\,dx = \dfrac{\tan(xy)}{y} \Big|_{\pi/2}^{\pi}$

Ör/ $\int \sec^2 x + \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Integraller için ODT

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Integral için Min-Max Değer

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x).\,dx \leq M(b-a)$$

Fundamental Theorem of Calculus (Part-1)

* $F(x) = \int_a^x f(t).\,dt$

then,

$F'(x) = f(x)$ over $[a,b]$.

Fundamental Theorem of Calculus (part 2)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

* $\sin(x)]' = \cos x$
* $[\sec(x)]' = \sec x \cdot \tan x$

$[\cos(x)]' = -\sin x$

$[\tan(x)]' = \sec^2 x$

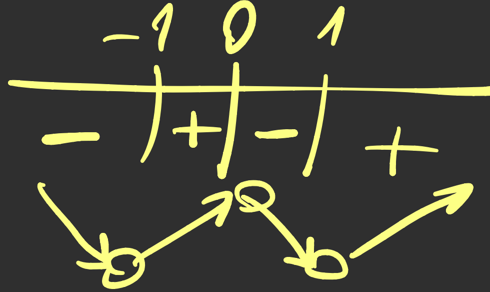
$[\cot(x)]' = -\mathrm{cosec}^2 x$

$[\mathrm{cosec}(x)]' = -\mathrm{cosec}\, x \cdot \cot x$

$f(x) = x^2 - 2\ln(1+x^2)$

extremum değerleri bul.

$$2x - 2 \cdot \frac{2x}{1+x^2} = 0$$



$$\cancel{2}x = \frac{2 \cdot \cancel{2}x}{1+x^2}$$

$$\cancel{1} + x^2 = \cancel{2}\,1$$

$x = -1, 1, 0$

$f(-1) = 1 - 2\ln 2$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1 - 2\ln 2$

$f' = 0$ veya tanımsız noktaları

---

2. Yol

$x=0$ $x=-1$	$x=1$

$f'(x) = 0$ ~~$f'(x) =$ tanımsız~~

$\Downarrow$

$f''(x) =$

$$2 - 4\left[\frac{1.(1+x^2) - x.2x}{(1+x^2)^2}\right] =$$

$f''(0) = -2 < 0$ yerel maks

$f''(1) = 2 > 0$

$f''(-1) = 2 > 0$

yerel min

$$\int_0^{\pi/4} e^{-2\ln\cos x}\,dx =$$

$$\left(e^{-2}\right)^{\ln\cos x}$$

$$\left(e^{\ln\cos x}\right)^{-2} = \left(\cos^{-2}x\right)dx$$

$$\int_0^{\pi/4} \cos^{-2}x\,dx = \int_0^{\pi/4} \sec^2 x \cdot dx$$

$$\Downarrow$$

$$\tan x \Big|_0^{\pi/4} = \boxed{1}$$

$$\int_1^2 e^{-\ln(4+x^2)}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\underbrace{f(x) = \frac{5x+7}{x-3}}$$

$x=3$ düşey asimptot

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5x+7}{x-3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{5x+7}{x-3} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{5x^2+7}{x-3}$$

$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ için,

$F(x)$, artan, azalan, yukarı kon. aşağı konkav, yerel extremum ?

$F'(x) = 2x \cdot e^{-x^4}$

Belirli integral (Definite integral)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

* c yazılmaz.

$$\int_1^3 2\,dx = 2x\Big|_1^3 = 4$$

$$\int_0^2 (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_0^2 = 6$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

Belirli integral Özellikleri

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = m \Rightarrow \int_b^a f(x)\,dx = -m$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

④ f(x) çift fonk ise;

$f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

⑤ f(x) tek fonk. ise;

$f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$

Mutlak Değerli İntegralleri Çözme

* Mutlak değer içini sıfır yapan değer sınırlarından ayrılır.

Reminder:

$$[\arctan f(x)]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$[\arcsin f(x)]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$[\arccos f(x)]' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$[\text{arccot} f(x)]' = \frac{-f'(x)}{1+f^2(x)}$$

Fundamental Theorem of Calculus

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g(x)}^{f(x)} h(t)\,dt\right) = \underbrace{h(f(x)).f'(x) - h(g(x)).g'(x)}_{\text{Liebniz Theorem}}$$

$$f(x)=\int_{x}^{x^2+1}\cos(t^2)\,dt \Rightarrow f'(x)=\cos((x^2+1)^2).\,2x-\cos(x^2).\,1$$

$$\cos((x^2+1)^2).\,2x-\cos(x^2).1$$

$$f(x)=\int_{2}^{7}\frac{1}{1+t^6}\,dt \Rightarrow f'(x)=0$$

$$0$$

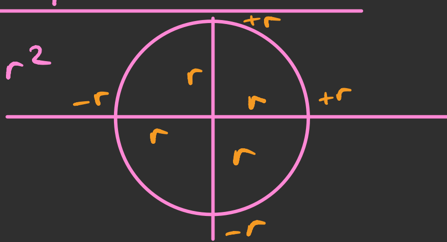
$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^3}^{\ln x}\tan(t^2)\,dt\right)=\frac{\tan(\ln^2 x)}{x}-\tan(x^6).\,3x^2$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\int_{2}^{x}\frac{1}{1+t^3}\,dt}{x^2-4}\ \xrightarrow{L'H}\ =\frac{\frac{1}{1+x^3}}{2x}=\frac{1}{2x.(1+x^3)}=\frac{1}{36}$$

Çember Yardımıyla integral Çözme

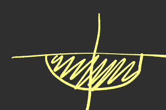
Merkezil Çember Denklemi

$$x^2+y^2=r^2$$



$$x^2+y^2=r^2$$

$$y=\sqrt{r^2-x^2} \quad // \quad y=-\sqrt{r^2-x^2}$$



$$x^2+y^2=4$$