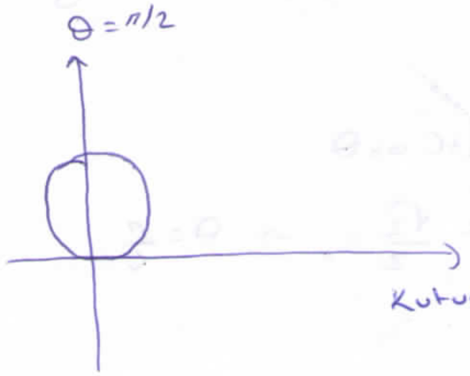
(*) $r = \sqrt{2}\sin\theta$ ile sınırlı bölgenin alanı?

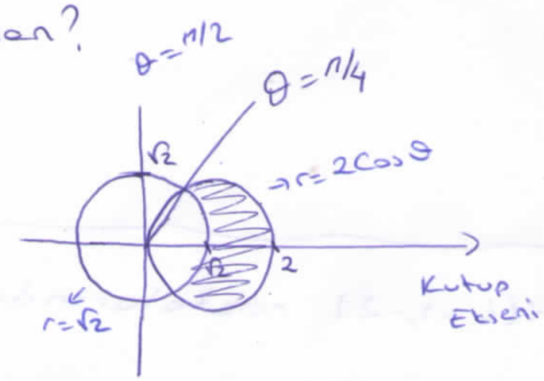


$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (\sqrt{2}\sin\theta)^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\pi}{4} \qquad \boxed{A = \frac{\pi}{2}}$$

(*) a) $r = 2\cos\theta$ eğrisinin içinde $r = \sqrt{2}$ nin dışında kalan alan?



$$2\cos\theta = \sqrt{2} \rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

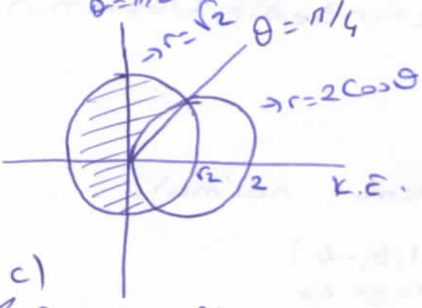
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (2\cos\theta)^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sqrt{2})^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/4} (4\cos^2\theta - 2)\, d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\, d\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

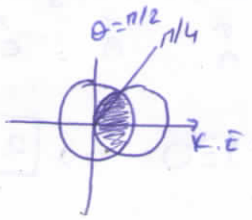
$$\boxed{A = 1}$$

b) ☆ $r = 2\cos\theta$ nın dışında, $r = \sqrt{2}$ nin içinde kalan alanı veren integral:



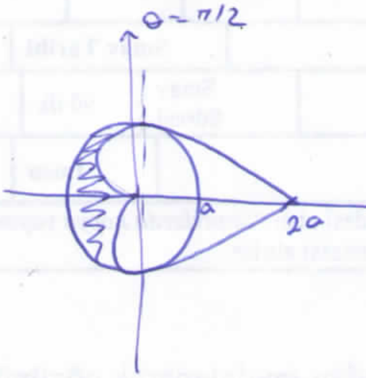
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi} (\sqrt{2})^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\cos\theta)^2\, d\theta$$

c) ☆ Ortak Alanı veren integral:



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (\sqrt{2})^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (2\cos\theta)^2 d\theta$$

2) $a>0$ olmak üzere $r=a(1+\cos\theta)$ kardiyoidinin dışında, $r=a$ çemberinin içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız. (Şekil çiziniz)



$$\frac{A}{2} = \int_{\pi/2}^{\pi} a^2 - (a + a\cos\theta)^2 \, d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(-2a^2\cos\theta - a^2 \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\right) d\theta$$

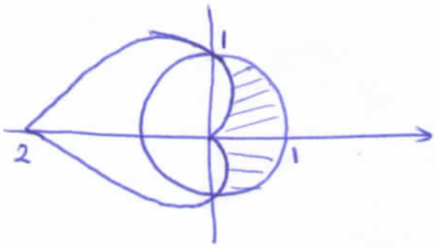
$$= -2a^2\sin\theta - a^2\frac{\theta}{2} - \frac{a^2}{4}\sin 2\theta \Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -a^2\frac{\pi}{2} - \left(-2a^2 - a^2\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{a^2\pi}{2} + 2a^2 + \frac{a^2\pi}{4}$$

$$= 2a^2 - \frac{\pi}{4}a^2$$

6

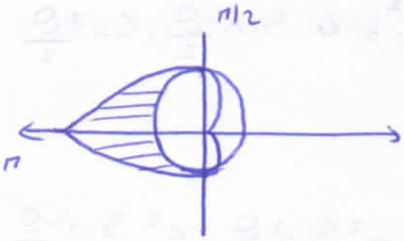
(*) r=1 çemberinin içinde, r= 1-Cosθ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını veren integral?



$$\frac{A}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1-\cos\theta)^2\, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \left(1 - (1-\cos\theta)^2\right) d\theta$$

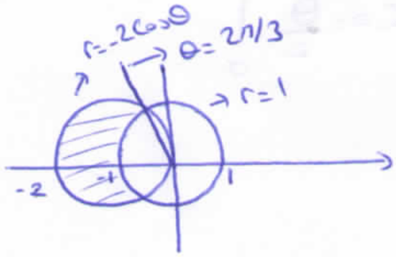
b) çemberin dışı, kardiyoidin içi:



$$\frac{A}{2} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\,(1-\cos\theta)^2\, d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}\, d\theta$$

$$A = \int_{\pi/2}^{\pi} \left((1-\cos\theta)^2 - 1\right) d\theta$$

(*) r=-2Cosθ çemberinin içinde, r=1 çemberinin dışında kalan alan?



$$-2\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} (-2\cos\theta)^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi} 1^2\, d\theta$$

$$A = \int_{2\pi/3}^{\pi} (4\overbrace{\cos^2\theta}^{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} - 1)\, d\theta = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} (1 + 2\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= \theta + \sin 2\theta \Big|_{2\pi/3}^{\pi} = \pi - \frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

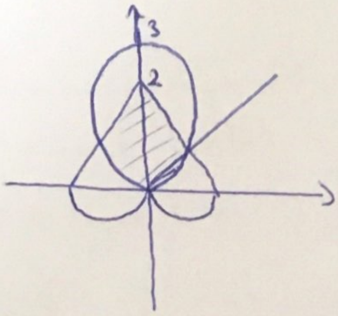
(*) a) $r = 3\sin\theta$, $r = 1+\sin\theta$ ortak alan?

b) $r = 3\sin\theta$ içi, $r = 1+\sin\theta$ dışı alan?

c) $r = 3\sin\theta$ dışı, $r = 1+\sin\theta$ içi alan?

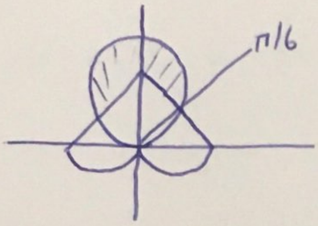
$3\sin\theta = 1+\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$

a)



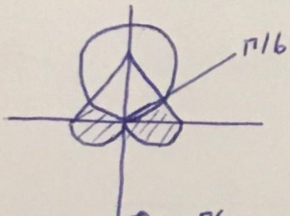
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (3\sin\theta)^2 d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1+\sin\theta)^2 d\theta$$

b)



$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (3\sin\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2 \, d\theta$$

c)



$\theta = -\pi/2$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (1+\sin\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (3\sin\theta)^2 d\theta$$

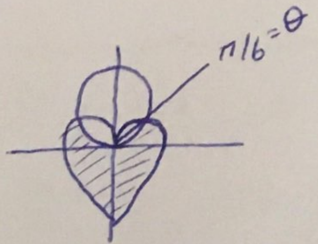
(*) a) $r = 1-\sin\theta$ içi $r = \sin\theta$ dışı alan?

b) $r = 1-\sin\theta$ dışı $r = \sin\theta$ içi alan?

$1-\sin\theta = \sin\theta$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{6}$

a)

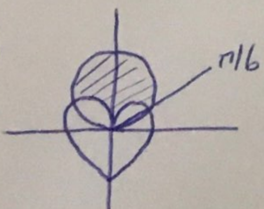


$\theta = -\pi/2$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/6} (1-\sin\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (\sin\theta)^2 d\theta$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left((\sin\theta)^2 - (1-\sin\theta)^2\right) d\theta$$

b)



(*) $r = a\sin^2\frac{\theta}{2}$ eğrisinin $0 \le \theta \le \pi$ aralığındaki uzunluğu? $(a>0)$

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\theta$$

$$r^2 = a^2 \sin^4\frac{\theta}{2}$$

$$r' = a.2.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2} = a.\sin\frac{\theta}{2}.\cos\frac{\theta}{2}$$

$$(r')^2 = a^2.\sin^2\frac{\theta}{2}.\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$r^2+(r')^2 = a^2.\sin^4\frac{\theta}{2} + a^2\sin^2\frac{\theta}{2}.\overbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}}^{1-\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cancel{a^2\sin^4\frac{\theta}{2}} + a^2\sin^2\frac{\theta}{2} - \cancel{a^2\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

$$= a^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

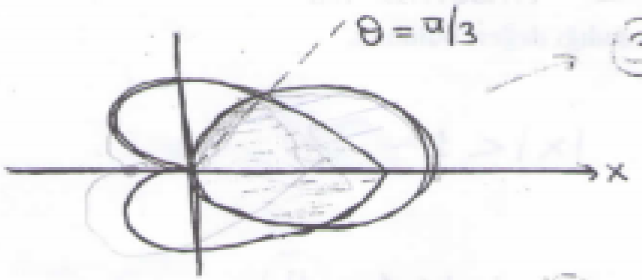
$$\sqrt{r^2+(r')^2} = \sqrt{a^2.\sin^2\frac{\theta}{2}} = a.\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$S = \int_0^{\pi} a.\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| d\theta = \int_0^{\pi} a.\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta = -2a\cos\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \boxed{2a}$$

15

4. a) $r = 3\cos\theta$ ve $r = 1+\cos\theta$ eğrilerinin içinde kalan ortak bölgenin alanını veren integrali yazınız. (İntegral hesaplanmayacak.)



(3)

a)

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1+\cos\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (3.\cos\theta)^2\, d\theta$$

(2) (2) (2) (2) (2) (2)

b) Kardiyoid içi, çember dışı

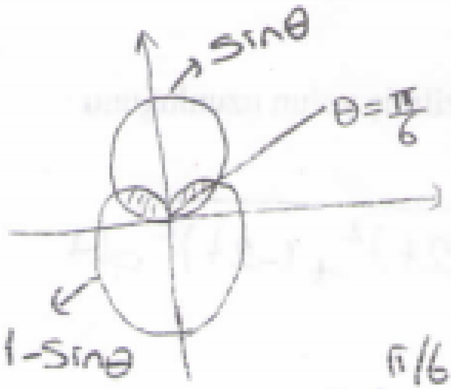
$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} (3\cos\theta)^2\, d\theta$$

c) Çember içi kar. dışı

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2\, d\theta$$

10.

b) $\rho = 1 - sin\theta$ kardiyoidi ve $\rho = sin\theta$ çemberinin her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanını bulunuz .(12p)



$$1-\sin\theta = \sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (\sin\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1-\sin\theta)^2\, d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}(3 - 4\sin\theta - \cos 2\theta)\, d\theta$$

$$A = \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{7\pi}{12} - \sqrt{3}\ br^2$$

⊛ $P(1,2,1)$ ve $Q(2,0,1)$ den geçen ve $3x-y+z=6$ düzlemine dik olan düzlem?

$3x-y+z=6 \Rightarrow \vec{n_1}=\langle 3,-1,1\rangle \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{n_1}$

$\vec{PQ}=\langle 1,-2,0\rangle \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{PQ}$ — $\vec{n}=\vec{PQ}\times\vec{n_1}$

$$\vec{PQ}\times\vec{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=\langle \overset{A}{-2},\overset{B}{-1},\overset{C}{5}\rangle \qquad P(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{2},\overset{z_0}{1})$$

$$\underline{-2(x-1)-(y-2)+5(z-1)=0}$$

⊛ $(2,0,1)$ den geçen ve $x(1,1,0)$, $y(4,-1,-2)$ noktalarından geçen doğruya dik olan düzlem?

$\vec{n}=\vec{xy}=\langle \overset{A}{3},\overset{B}{-2},\overset{C}{-2}\rangle \qquad (\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{0},\overset{z_0}{1}) \Rightarrow 3.(x-2)-2(y-0)-2(z-1)=0$

$$\boxed{3x-2y-2z=4}$$

⊛ $A(1,6,-4)$ noktasından geçen ve $x=1+2t$, $y=2-3t$, $z=3-t$ doğrusunu içeren düzlemin denklemi? (2016-bütünleme sorusu)

$\left.\begin{array}{l}x=1+2t\\ y=2-3t\\ z=3-t\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle$

doğru üzerinde bir nokta: $B(1,2,3)$

$\vec{AB}=\langle 0,-4,7\rangle$ ve $\vec{v}=\langle 2,-3,-1\rangle$ düzlem üzerindedir. Düzlemin normali $\vec{AB}\times\vec{v}$ ye paraleldir.

$$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -4 & 7\\ 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=\underset{A}{25\vec{i}}+\underset{B}{14\vec{j}}+\underset{C}{8\vec{k}} \rightarrow \text{düzlemin normali}$$

$A(\overset{}{1},6,-4)$ — $x_0\ y_0\ z_0$

$$25.(x-1)+14(y-6)+8(z+4)=0 \Rightarrow \boxed{25x+14y+8z=77}$$

(*) $x-y+2z=3$ ile $2x+y+z=0$ ın arakesit açısı?

$\vec{n_1}=<1,-1,2>$ $\quad \vec{n_2}=<2,1,1>$ $\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \dfrac{2-1+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{3}{6}$

$\Downarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$

(*) $x_1=(1,1,2)$, $x_2=(0,2,3)$, $x_3=(2,1,1)$ den geçen düzlem?

$\vec{v_1} = \overrightarrow{x_1x_2} = <-1,1,1>$ $\quad \vec{v_2} = \overrightarrow{x_1x_3} = <1,0,-1>$

$$\vec{n} = \vec{v_1}\times\vec{v_2} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{i}} & \overset{-}{\vec{j}} & \overset{+}{\vec{k}} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = -\vec{i} - \vec{k}$$

$x_1=(1,1,2)$ $\quad \vec{n} = -\vec{i}-\vec{k}$ $\Rightarrow -1.(x-1)+0.(y-1)-1(z-2)=0$

$\Downarrow$

$-x-z=-3 \rightarrow \boxed{x+z=3}$

---

b) $(2,-1,-1)$ noktasından geçen, $x+y=0$ ve $x-y+2z=0$ düzlemlerinin arakesit doğrusuna paralel olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

$n_1=<1,1,0>$ (1)

$n_2=<1,-1,2>$ (1)

$$; \quad n = n_1\times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = <2,-2,-2> \quad (1)$$

$n=<2,-2,-2>=v$ (istenen doğrunun yönlü vektörü) ; (2)

istenilen doğrunun parametrik denklemleri

$$\left.\begin{aligned} x &= 2+2t \\ y &= -1-2t \\ z &= -1-2t \end{aligned}\right\}$$ (2) şeklindedir

(8)

Soru 4. $x+y=1$ ve $2x+y-2z=2$ düzlemleri veriliyor.

a) Bu düzlemlerin kesişim doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz. ***(13puan)***

b) Bu düzlemlerin kesişim doğrusuna dik olan ve $P(3,1,-1)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz. ***(12puan)***

a) $x+y=1 \qquad 2x+y-2z=2$

$\vec{n}_1=\vec{i}+\vec{j} \qquad \vec{n}_2=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$$

$$z=0 \Rightarrow \begin{aligned}-x-y&=-1\\ 2x+y&=2\end{aligned}$$

$x=1 \Rightarrow y=0$

$A(1,0,0)$

$$\begin{cases}x=1-2t\\ y=2t\\ z=-t\end{cases}$$

b)

$-2(x-3)+2(y-1)-(z+1)=0$

$\boxed{-2x+2y-z=-3}$

(*) $x_1=(1,2,1)$ ve $x_2=(2,1,0)$ noktalarından geçen doğru ile $y_1=(3,-1,0)$ ve $y_2=(4,-3,0)$ noktalarından geçen doğru $(2,1,0)$ noktasında kesişmektedir. Öyle bir l doğrusu bulunuz ki hem bu noktadan geçsin, hem de her iki doğruya da dik olsun.

$\vec{v_1}=\overrightarrow{x_1x_2}=\langle 1,-1,-1\rangle \qquad \vec{v_2}=\overrightarrow{y_1y_2}=\langle 1,-2,0\rangle$

$$\vec{v}=\vec{v_1}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=-2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$$

$\vec{v}=\langle \overset{a}{-2},\overset{b}{-1},\overset{c}{-1}\rangle \rightarrow$ doğrunun yön vektörü

$(\overset{x_0}{2},\overset{y_0}{1},\overset{z_0}{0}) \rightarrow$ doğru üzerinde bir nokta

$$\boxed{\begin{aligned}x&=2-2t\\ y&=1-t\\ z&=-t\end{aligned}}$$

(*) $\begin{cases}x=2t^2+3\\ y=t^4\end{cases}$ parametrik denklemi ile verilen eğrinin $t=-1$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemini bulunuz.

$t=-1 \Rightarrow \begin{matrix}x=5\\ y=1\end{matrix} \Rightarrow (5,1)$ den geçen teğetin denklemi:

$$\boxed{y-1=f'(5).(x-5)}$$

$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4t^3}{4t}=t^2 \Rightarrow f'(5)=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=-1}=1$

$y-1=x-5$

$\boxed{y=x-4}$

Teğet denklemi

(*) $x = 4\sin t \quad y = 2\cos t$ eğrisinin $t = \frac{\pi}{4}$ deki

teğeti ?

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin t}{4\cos t}\Bigg|_{t=\pi/4} = -\frac{1}{2}$$

$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_0 = 2\sqrt{2} \quad y_0 = \sqrt{2}$

Teğet Denklemi $\Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - \sqrt{2} = -\frac{1}{2}(x - 2\sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{2}}$$

(*) $x + 2y + z = 1$ ile $2x + 2y - z = 1$ düzlemlerinin arakesitine paralel ve $(1,0,2)$ den geçen doğru?

$x + 2y + z = 1$ in normali $\Rightarrow n_1 = \langle 1, 2, 1 \rangle$

$2x + 2y - z = 1$ " " $\Rightarrow n_2 = \langle 2, 2, -1 \rangle$

$$\vec{v} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \langle \underset{a}{-4}, \underset{b}{3}, \underset{c}{-2} \rangle$$

$\overset{x_0 \; y_0 \; z_0}{(1, 0, 2)} \Rightarrow x = x_0 + at = 1 - 4t$

$y = y_0 + bt = 3t$

$z = 2 - 2t$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 - 4t \\ y &= 3t \\ z &= 2 - 2t \end{aligned}}$$

S.4 **a)** $x + 2y + 3z = 5$ düzleminin $x - 2y + z = 3$ düzlemine dik olup olmadığını araştırınız.(7p)

Düzlemlerin normolleri sırasıyla

$\vec{n_1} = <1,2,3>$

$\vec{n_2} = <1,-2,1>$ olup $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 1-4+3=0$

olduğundan verilen düzlemler diktir.

b) $x - 2y + 5z = 1$ düzleminin $x = 2 - t,\ y = 1 + 2t,\ z = t - 1$ doğrusuna paralel olup olmadığını araştırınız.(7p)

Doğrunun yönlü vektörü $\vec{V} = <-1,2,1>$ olup

Düzlemin normal vektörü $\vec{n} = <1,-2,5>$

$\vec{V}\cdot\vec{n} = -1-4+5=0$ olduğundan doğru düzleme paraleldir.

c) $t, [-1,0]$ aralığında değişken, $x(t) = t^2, y(t) = 1 - t^2$ ile çizilmiş yolun uzunluğunu bulunuz.(10p)

$$L = \int_{-1}^{0} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = \int_{-1}^{0} \sqrt{(2t)^2 + (-2t)^2}\,dt$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-1}^{0} |t|\,dt = -2\sqrt{2}\int_{-1}^{0} t\,dt = \sqrt{2}\text{ br}$$

16

Başarılar dilerim.