MAT.I
1. Uygulama

$$\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)=?$$

$$\frac{1-\cos\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2}} \qquad x^{-2}$$

$$2x^{-1}=\frac{-2}{x^2} \qquad \frac{+\sin\frac{2}{x}\cdot\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{x^2}}\right)}{\frac{+\cancel{2}}{x^3}}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \qquad \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left(\frac{+2}{\cancel{x^2}}\right)}{\frac{\pm 1}{\cancel{x^2}}} \qquad 2\cos\left(\frac{2}{x}\right) \qquad 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)\cdot\left(1+\cos\frac{2}{x}\right)}{1+\cos\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(1-\cos^2\frac{2}{x}\right)}{1+\cos\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{1-\cos^2\frac{2}{x}}^{\sin^2\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{1}{1+\cos\frac{2}{x}}$$

2//

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right)^2}_{1}\cdot 4\cdot\frac{1}{\underbrace{1+\cos\frac{2}{x}}_{2}}=\underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}\ \frac{0}{0}\ ?$$

$$\frac{-\sin x}{2} \qquad -\frac{1}{2}$$

$2x-\pi=u$ olsun. $x\to\frac{\pi}{2}$ iken $u\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right)}{u}=\lim_{u\to 0}-\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}\cdot 2}\quad\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\to 1\right)=\underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=?$$

$$\frac{\sin x-\sin x.\cos x}{\cos x.x^3}=\frac{\sin x}{\cos x.\cancel{x}.x^2}-\frac{\cancel{\sin x}.\cancel{\cos x}}{\cancel{x}.x^2.\cancel{\cos x}}$$

$$\frac{1}{x^2.\cos x}-\frac{1}{x^2} \qquad \frac{1-\cos x}{x^2.\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{2x.\cos x+x^2.-\sin x} \qquad \frac{\cos x}{2\cos x-2x.\sin x-2x.\sin x-x^2.\cos x} \qquad \frac{1}{2-0} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x.\cos x}{x^3.\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.(1-\cos x)}{x^3.\cos x}\quad(1+\cos x)$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{x^2}}_{1}\cdot\frac{1}{\underbrace{\cos x.(1+\cos x)}_{2}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\sqrt{2}$

$2+\sin x-1-\cos x$

$\sin x-\cos x+1$

$\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\left(\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\right)$

$\frac{\cos x+\sin x}{\sec^2 x(\quad)+\tan x\ldots}$

0

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\sin x}-\sqrt{1+\cos x}}{\tan x}=?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+\sin x}-\sqrt{1+\cos x}\right)\left(\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\right)}{\tan x.\left(\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\left(\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}}+\overbrace{\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}}}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0}\cdot\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}}}_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\frac{1-\cos x}{\sin x.\tan x}$ $\quad\frac{\sin^2 x}{\cancel{\sin x.\tan x}.(1+\cos x)}$ $\quad\frac{\cos x}{1+\cos x}$ $\quad 1^+\to\frac{1}{2}$

$\frac{1-\cos x}{-\sin x.\tan x}$ $\quad-\frac{\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin x.\tan x}.(1+\cos x)}$ $\quad 1^-\to-\frac{1}{2}$

Limit yok

(*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin|x|.\tan x}=?$

0^+

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x.\underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\cancel{\cos x}).\cos x}{\underbrace{\sin^2 x}_{\underbrace{1-\cos^2 x}_{(1-\cancel{\cos x})(1+\cos x)}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{-\sin x.\tan x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{(1-\cancel{\cos x}).\cos x}{\underbrace{\sin^2 x}_{\underbrace{1-\cos^2 x}_{(1-\cancel{\cos x})(1+\cos x)}}}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{\cos x}{1+\cos x}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin|x|.\tan x}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{\sin|x|.\tan x}\Rightarrow$$ limit mevcut değil

2015 - 1. vize sorusu :

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+2} & , -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$

-2

$\frac{1}{0}$

$\frac{1}{3}$

$\cos(1-\sqrt{x}) \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}}$ $\quad 1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)$

şeklinde tanımlanıyor.

a) $\lim_{x \to -2} f(x) = ?$ $\quad \lim_{x \to 1} f(x) = ?$

b) $x=-2$ ve $x=1$ deki süreksizlik tipleri?

$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty$

$\lim_{x \to -2^-} x = -2$ $\rightarrow$ $\nexists$ limit mevcut değil. $\rightarrow$ $x=-2$ de sonsuzlesas süreksizlik var

$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$ $\longrightarrow$ $\nexists$ limit yok $\rightarrow$ $x=1$'de sıçramalı süreksiz

---

2016 - 1. vize sorusu

(*) $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{x^2 - \pi x} = ?$ $\quad \frac{2\cos 2x}{2x-\pi}$ $\quad \frac{2}{\pi}$

$x - \pi = t$ olsun. $x \to \pi$ ise $t \to 0$ olur.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{x(x-\pi)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(2\pi + 2t)}{(\pi+t) \cdot t} = \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{\sin 2t}{2t}}_{1} \cdot \frac{2}{\pi + t} = \frac{2}{\pi}$$

2016 - 1. vize sorusu

$\frac{3(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}$ $\frac{3}{x^2(2+x)}$

$f(x)=\frac{3.|x-2|}{x^2.(4-x^2)}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları ve süreksizlik tiplerini inceleyiniz.

$x=0$ $x=2$ $x=-2$

$x^2.(4-x^2)=0 \to x=0, x=2, x=-2$ de süreksiz.

$\frac{3(\cancel{2-x})}{x^2(\cancel{2-x})(2+x)}$ $\frac{3}{x^2(2+x)}$ $-2^- \to -\infty$ $-2^+ \to +\infty$

x = 0 için

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\infty \Rightarrow x=0 \text{ da}$$

sonsuz (esas) süreksiz

$\frac{-3}{x^2(x+2)}$ $\frac{-3}{16}$ $\frac{3}{16}$

x = -2 için

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\infty \qquad \lim_{x\to -2^-}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=-\infty$$

$\Downarrow$

$x=-2$ de sonsuz(esas) süreksiz

x = 2 için

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3.(\cancel{x-2})^{-1}}{x^2(\cancel{2-x})(2+x)}=-\frac{3}{16} \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)}=+\frac{3}{16}$$

$\neq$ $x=2$ de sıçramalı süreksiz

⊛ 2016 - Bütünleme sorusu:

$\sin x$ $\sin\frac{1}{x}$ $x^0 . \sin x^{-1}, x\neq 0$

$f_{\alpha,\beta}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(\alpha\geq 0, \beta\in\mathbb{R})$ fonksiyonu

0^+ $+\infty$ 0^- $-\infty$ 0 $, x=0$

$$f_{\alpha,\beta}=\begin{cases} x^{\alpha}.\sin x^{\beta} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

olsun. Buna göre $f_{0,-1}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sürekli mi?

$f_{0,-1} \Rightarrow \alpha=0 \quad \beta=-1$

$$f_{0,-1}=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ limiti mevcut olmadığından $f_{0,-1}$ $\mathbb{R}$'de sürekli değildir.

2016 - yaz okulu 1. vize soruları;

(*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{x}} = ?$

$$\frac{x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{\cancel{x}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(1-\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0}\right)} = \boxed{0}$$

0 //

$\frac{2x}{\sin x}$ $\quad \frac{2}{\cos x} = 2$

(*) $f(x) = \dfrac{x^2}{1-\cos x}$ ile $\frac{0}{1-\cos x}$ verilen $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ daki süreksizlik tipini belirleyiniz ve sürekli olması için gerekeni yapınız.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2.(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$(1+\cos x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2.(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1}\Big)^2 . \underbrace{(1+\cos x)}_{2}$$

$$= \boxed{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\cos x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlarsak fonk. $x=0$ da sürekli olur.

2016 - Mazeret sınavı sorusu:

$0^+ = \infty$
$0^- = \infty$ → Sonsuzluk
$0 =$

$1^+ = 2$
$1^- = -2$
$1 =$

$\frac{2|x-1|}{x^2(1-x)}$ $\quad \frac{2\cancel{(1-x)}}{x^2\cancel{(1-x)}} = \frac{2}{x^2}$

$f(x) = \frac{2.|x-1|}{x^2 - x^3}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

$x=0$
$x=1$

Eğer varsa süreksizlik noktalarını sınıflandırın.

$2(x-1)$

$\frac{2}{x^2}$ $\quad \frac{-2}{x^2}$

$x^2.(1-x)=0 \Rightarrow x=0 \quad x=1$ de süreksiz.

x=0 için

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2.\cancel{(1-x)}}{x^2.\cancel{(1-x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2.\cancel{(1-x)}}{x^2.\cancel{(1-x)}} = +\infty \rightarrow x=0 \text{ da}$$

sonsuz (esas) süreksiz

x=1 için

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2.\cancel{(1-x)}}{x^2\cancel{(1-x)}} = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2.\overset{-1}{\cancel{(x-1)}}}{x^2.\cancel{(1-x)}} = -2$$

$\neq \Rightarrow x=1$ de sıçramalı süreksiz

(*) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x - 1}{2x-\pi} = ?$ $\qquad \dfrac{\cos x}{2} \qquad \dfrac{\cos 90}{2} = \dfrac{0}{2} = 0$

$2x - \pi = u$ olsun. $x \to \frac{\pi}{2}$ ise $u \to 0$ olur.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{2x-\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right)}^{\cos\frac{u}{2}} - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos\frac{u}{2} - 1}{\underbrace{\frac{u}{2}\cdot 2}_{0}} \cdot \cancel{2} = \underline{\underline{0}}$$

(*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-\sin 2x}}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\sqrt{1-\sin 2x})(1+\sqrt{1-\sin 2x})}{\tan x \cdot (1+\sqrt{1-\sin 2x})}$

$\dfrac{\sin 2x \cdot \cos x}{\sin x \cdot (1+\sqrt{1-\sin 2x})}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\sin 2x}{\tan x \cdot (1+\sqrt{1-\sin 2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \cancel{\sin x}\cdot \overline{\cos x}^{\,1}}{\dfrac{\cancel{\sin x}}{\underbrace{\cos x}_{1}} \cdot (1+\underbrace{\sqrt{1-\sin 2x}}_{1})}$$

$\dfrac{2\cos x}{1+\sqrt{1-\sin 2x}}$

$\dfrac{2}{2} = 1$ $\qquad\qquad = \dfrac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$

(*) $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ limitini sıkıştırma teoremini kullanarak bulunuz.

$-1 \le \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \le 1 \qquad -x^2 \le x^2\cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \le x^2$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos x \le 1$ dir. O halde, $\qquad -2x = 0$

$x \neq 0$ için $-1 \le \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \le 1$ dir. $\qquad 2x = 0$

$$\Downarrow$$

$$-x^2 \le x^2 \cdot \cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \le x^2 \quad (1) \text{ dir.}$$

$$\lim_{x\to 0} (-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) den Sıkıştırma Teo. göre $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ dir.

(*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|2x+5|-3}}{x^2+1}$ Tanım Kümesi?

$\sqrt{|2x+5|-3} \geq 0$

$|2x+5| \geq 3$ $2x+5 \leq -3$

$2x \geq -2$ $2x \leq -8$

$x \geq -1$ $x \leq -4$ //

$|2x+5|-3 \geq 0$ olmalı.

$|2x+5| \geq 3 \rightarrow 2x+5 \geq 3 \rightarrow x \geq -1$

$\rightarrow 2x+5 \leq -3 \rightarrow x \leq -4$

$\rightarrow D(f) = (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$

(*) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ Tanım kümesi?

$|x|-x > 0$

$|x| > x$

$\cancel{x > x}$

$x < -x$

$2x < 0$

$|x|-x > 0$ olmalı $\Rightarrow |x| > x \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D(f) = (-\infty, 0)$

(*) $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{5x-x^2}{4}}$ Tanım Kümesi?

$\ln \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 0 \rightarrow \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 1 \rightarrow 5x - x^2 \geq 4$

$\downarrow$

$4 - 5x + x^2 \leq 0$ olmalı.

$(x-1)(x-4) \leq 0$

	1		4	
+				+

$D(f) = [1, 4]$

$\dfrac{5x-x^2}{4} > 0$ $(0, 5)$

$5x - x^2 > 0$

$x(5-x) > 0$

0 5

$- \; + \; -$

$\ln \dfrac{5x-x^2}{4} \geq 0$

$\dfrac{5x-x^2}{4} \geq 1$

1 4

$- \; + \; -$

$x = 1$

$x = 4$

$[1, 4]$ $-x^2+5x-4 \geq 0$

$-x$ $\quad$ 1

x $\quad$ -4

(*) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) = ?$

$\cancel{x^2}+x - \cancel{x^2}+x$ $\quad \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$ $\quad \dfrac{2}{2} = 1$ //

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{|x|}\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}} + \sqrt{1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}\right)} = \frac{2}{2} = 1$$

(*) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}=?$ $\quad(\sqrt{1+x^2}+1)$

$\frac{\sin x^2\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2}$ $\quad 2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{1+x^2-1}\cdot(\sqrt{1+x^2}+1)=\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot\underbrace{(\sqrt{x^2+1}+1)}_{2}=2$$

(*) $\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{1-x}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\right)=?$ $\quad 0{,}99$ $\qquad t=1-x$

$\infty.$ $\quad\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-x}$ $\quad\frac{0}{0}$ $\qquad x\to1^-\Rightarrow t\to0^+$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\cos\frac{\pi}{2}(1-t)=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)\qquad\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}t\right)=\sin\frac{\pi}{2}t$$

$\frac{+\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{+1}$ $\quad\frac{\pi}{2}$ //

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t}\cdot\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$=\lim_{t\to0^+}\underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}}_{1}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

(*) $\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}=?$ $\quad\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}}$ $\quad\cos\frac{1}{x}$ $\quad(x)$ $\quad\infty$ //

I. Yol

$$\lim_{x\to\infty}\underbrace{x}_{\infty}\cdot\underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1}=\infty$$

II. Yol (Dönüşüm)

$\frac{1}{x}=t\qquad x\to\infty\Rightarrow t\to0^+$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^2}\cdot\sin t=\lim_{t\to0^+}\underbrace{\frac{1}{t}}_{\infty}\cdot\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1}=\infty$$

(*) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{x}=?$ $\quad\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad\frac{1}{\sqrt{x}}=0,$

I. Yol

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0}=0$$

II. Yol (Dönüşüm)

$\frac{1}{x}=t\qquad x\to\infty\Rightarrow t\to0^+$

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\sin t=\lim_{t\to0^+}\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1}\cdot\underbrace{\sqrt{t}}_{0}=0$$

Zor Soru

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = ?$$

$(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})$

$\frac{1-\cos^2 x \cdot \cos 2x}{x^2 \cdot (1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}$ $\quad$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ $\quad$ $1-2\sin^2 x$ $\quad$ $1-\cos^2 x \cdot (1-2\sin^2 x)$ $\quad$ $1-(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)$

$\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2 x + \sin^2 x - 2\sin^4 x$ $\quad$ $3\sin^2 x - 2\sin^4 x$ $\quad$ $\frac{\sin^2 x\,(3-2\sin^2 x)}{x^2\,(1+\underbrace{\cos x}_{1}\underbrace{\sqrt{\cos 2x}}_{1})}$ $\quad$ $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x\cdot\cos 2x}{x^2\cdot(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\overbrace{(1-\sin^2 x)}^{\cos^2 x}\cdot\overbrace{(1-2\sin^2 x)}^{\cos 2x}}{x^2\cdot(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-3\sin^2 x+2\sin^4 x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{3\sin^2 x - 2\sin^4 x}{x^2}\right]\cdot\frac{1}{1+\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1}\cdot\underbrace{\left(3-2\sin^2 x\right)}_{3}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

Güzel

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x} = ?$$

$\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x\,(\sqrt{1-\cos 2x})}$ $\quad$ $1-(1-2\sin^2 x)$ $\quad$ $\frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{2}\cancel{\sin x}\cos x\,(\sqrt{1-\cos 2x})}$ $\quad$ $\frac{\tan x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ $\quad$ $\frac{\tan x}{-\sqrt{2}\cdot\sin x}$ $\quad$ $\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\cos x}$ $= \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\frac{\overbrace{|\sin 2x|}^{-\sin 2x}}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-}\underbrace{\frac{-\sin 2x}{\sin 2x}}_{-1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3}\cdot x^{-2/3}}$ $\quad$ $\frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}$ $\quad$ $\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot 12$ $\quad$ $\frac{3}{\sqrt{2}}$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ *

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ **

$(\sqrt{x}+2\sqrt{2})\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\overbrace{(\sqrt{x}-2\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{2}+\sqrt{x})}^{**\text{'dan } x-8}\cdot(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\underbrace{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}_{*\text{'dan } x-8}\cdot(\sqrt{x}+2\sqrt{2})} = \lim_{x\to 8}\frac{\cancel{x-8}}{\cancel{x-8}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = ? \qquad \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}}{\frac{1}{4}x^{-3/4}} = \frac{4}{3}$$

$x = t^{12}$ olsun. $x \to 1 \Rightarrow t \to 1$

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^4-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(\cancel{t-1})(t+1)(t^2+1)}{(\cancel{t-1})(t^2+t+1)} = \frac{2\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} = ? \qquad \frac{\cancel{2}\sin^2\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{x^4}{2}\cdot \cancel{2}\sin x^2} \qquad \frac{\cancel{2}\sin\frac{x^2}{2}}{2\cdot\sin\frac{x^2}{2}\cdot\cos\frac{x^2}{2}} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^2}{x^2 \sin x^2} \cdot \frac{1+\cos x^2}{1+\cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos^2 x^2}^{\sin^2 x^2}}{x^2\cdot \sin x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin^2 x^2}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x^2}}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Çok zor

(*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{1-\sin x}} = ?$

$\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$

$\dfrac{\sqrt{\sin^2 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$

$\dfrac{|\sin 2x|}{|\cos x|}$

$2|\sin x|\cdot\dfrac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\cos 2x}}$

$2\cdot\dfrac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = 2$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}\cdot(\sqrt{1+\sin x})}{\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^2 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|\cdot\sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|\cdot\sqrt{1-\cos 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\overset{1}{\overline{|\sin x|}}\cdot|\cancel{\cos x}|\cdot\overset{\sqrt{2}}{\overline{\sqrt{1+\sin x}}}}{|\cancel{\cos x}|\cdot\underset{\sqrt{2}}{\underline{\sqrt{1-\cos 2x}}}} = 2$$

(*) $\lim\limits_{\theta\to 1} \dfrac{\theta-1}{\theta-\cos(\theta-1)} = ?$ $\quad \dfrac{x}{(x+1)-\cos(x)} \quad \dfrac{1}{1+\sin x}$ $\quad 1$

$\theta-1=x$ olsun. $\theta\to 1$ ise $x\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{1+x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\underbrace{\dfrac{1-\cos x}{x}}_{0}} = \underline{1}$$

(*) $\lim_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}-1}$ limitinin varlığını araştırınız.

$1^+ \to 2$ $\quad -2$

$1^+ \quad \dfrac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} \qquad \dfrac{(\cancel{1-\sqrt{x}})(1+\sqrt{x})}{(\cancel{\sqrt{x}-1})}$

Limit yok

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2$$

$\neq \Rightarrow$ $x=1$ de limit mevcut değil

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = -2$$

(*) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2x^2-1}}{2-\sqrt{5-x^2}} = ?$

$\dfrac{1-\dfrac{\cancel{2}\,2x}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-1}}}{+\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{5-x^2}}} \qquad \dfrac{1-\dfrac{2}{1}}{\dfrac{1}{2}} \qquad \dfrac{-1}{\dfrac{1}{2}} = -2$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{2x^2-1}).(x+\sqrt{2x^2-1}).(2+\sqrt{5-x^2})}{(2-\sqrt{5-x^2})(2+\sqrt{5-x^2}).(x+\sqrt{2x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-2x^2+1)(2+\sqrt{5-x^2})}{(4-5+x^2)(x+\sqrt{2x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\overset{-1}{(\cancel{1-x^2})}.(2+\sqrt{5-x^2})}{(\cancel{x^2-1}).(x+\sqrt{2x^2-1})} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

(*) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{\sin(x^2-x)} = ?$

$\dfrac{2x+1}{\cos(x^2-x).2x-1} \qquad \dfrac{3}{1.1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+2x-2}{\sin(x^2-x)} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x^2-x}{\sin(x^2-x)}}_{1} + \overbrace{\frac{2.(x-1)}{\sin(x^2-x)}.\frac{x}{x}}^{1} = \boxed{3}$$

YTÜ

0251321 MATEMATİK I - 1.VİZE SINAVI

12 Nisan 2008

Adı-Soyadı :

Numara :

Grup :

İmza :

1	2	3	4	5	Toplam

Sınav Süresi : 70 dakika

UYARI: YALNIZCA 4 SORU YANITLANACAKTIR.

Güzel soru

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)\right]$ limitini hesaplayınız. (İşlemlerde L'Hopital kuralı kullanılmayacak.)

$\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)$ $\left(\dfrac{\pi(-\sin^2 x+\cos^2 x)}{2}\right)$ $\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{+\pi.\cos x.\sin x}{2x}$

Cevap:

$$\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(1)^2\right)=\mathbf{1}.$$

89

(*) $f(x)=\begin{cases} x.\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ fonksiyonu $\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli midir?

^{0} $^{-1,1}$ $^{0^-}$

*(1) $x\neq 0$ için $x.\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonu süreklidir. Gerçekten;

$c\in\mathbb{R}-\{0\}$ için $\lim\limits_{x\to c} x.\sin\frac{1}{x} = c.\sin\frac{1}{c} = f(c)$ dir. Yani

fonk. $x\neq 0$ için süreklidir.

(2)
* $x=0$ için

$\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0$ dır. $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ olduğundan

$f(x)$ $x=0$ da süreklidir.

(1) ve (2) den $f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ için süreklidir.

(*) $f(x)=\begin{cases} 2\sin x & , x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & , -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & , x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ fonksiyonu $x=\frac{\pi}{2}$ ve $x=-\frac{\pi}{2}$ de sürekli ise $a,b=?$

-2 $\quad -2\sin\frac{\pi}{2}$ $\quad -a+b=-2$ $\quad 2b=-2$ $\quad b=-1$

$a+b=0$ $\quad a=-b$ $\quad a=1$

$x=\frac{\pi}{2}$ 'de sürekli ise:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \underbrace{\underset{a\sin x+b}{f(x)}}_{a+b} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \underbrace{\underset{\cos x}{f(x)}}_{0} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0 \Rightarrow \boxed{a+b=0}$ (1)

$-1.1=-1$

$x=-\frac{\pi}{2}$ de sürekli ise:

$\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \underbrace{\underset{a\sin x+b}{f(x)}}_{-a+b} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} \underbrace{\underset{2\sin x}{f(x)}}_{-2} = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-2 \Rightarrow \boxed{-a+b=-2}$ (2)

(1) ve (2) den

$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ -a+b=-2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a=+1 \\ b=-1 \end{array}$

(*) Zor

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1-\sqrt{2+\cos x}}{1-\sqrt{1+\sin x}} = ?$$

$$\frac{+\cancel{(1+\cos x)}^{\sin x}.(1+\sqrt{1+\sin x})}{+\cancel{\sin x}.(1+\sqrt{2+\cos x}).(1-\cos x)}$$

$(1+\sqrt{2+\cos x})$ $(1+\sqrt{1+\sin x})$

$$0.\frac{2}{2.2}=0$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(1-\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{1+\sin x})}{(1-\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{2+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to\pi} \frac{-(1+\cos x).(1+\sqrt{1+\sin x})}{-\sin x.(1+\sqrt{2+\cos x})} = \lim_{x\to\pi} \frac{\overset{\sin x}{\overset{\cancel{\sin^2 x}}{(1-\cos^2 x)}}}{\cancel{\sin x}} . \frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}$$

$(1-\cos x)$

$$=\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{0} . \frac{\frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}}{1} = \underline{\underline{0}}$$

(*) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ fonksiyonunun $x=1$ deki davranışını inceleyiniz.

$\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$ 1^+ $+\infty$ Limit yok

1^- $-\infty$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2-1} = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$\Downarrow$

$f(x)$, $x=1$ de limite sahip değil

(*) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2} & , x\neq 2 \\ 0 & , x=2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ deki sürekliliğini inceleyin. Süreksiz ise çeşidini belirtin.

$f(2)=0$ ✓ fonk. $x=2$ de tanımlı

$\lim_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$ olduğundan $f(x)$ in $x=2$ de limiti yok. Fonksiyon $x=2$ de süreksiz. $\lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$ olduğundan $x=2$ 'deki süreksizlik "sonsuz süreksizlik"tir.

Muhteşem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a-\sqrt{2-x}}, & x\le 1\\[2ex] \dfrac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}, & 1<x<3\\[2ex] \dfrac{\sin\frac{x-3}{b}}{1-\sqrt{x-2}}, & x\ge 3\end{cases}$$

fonksiyonu $x=1$ ve $x=3$ de sürekli ise $a,b=?$

$\frac{1}{a-1}=$ $a=-1$ -2 $\frac{1}{1-3}=\frac{-1}{2}$ $3-5$ $\frac{2}{-2}=-1$ $b=2$ $\frac{x+5}{2}$ $\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$ $\frac{\cos\frac{x-3}{b}\cdot\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{-1}{2\sqrt{x-2}}}$ $\frac{\cos\frac{0}{b}\cdot\frac{1}{b}}{\frac{+1}{2}}=+1$ $\cos\frac{0}{b}\cdot\frac{2}{b}=1$ $\cos\frac{0}{b}=\frac{b}{2}$

* $f(x)$, $x=1$ de sürekli ise: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}=\lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(x-1)}\,(x+\sqrt{3x^2-2})}{-2\,\underbrace{\cancel{(x^2-1)}}_{x+1}}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{a-\sqrt{2-x}}=\frac{1}{a-1}=f(1)\longrightarrow\frac{1}{a-1}=-\frac{1}{2}\to a-1=-2$$

$$\boxed{a=-1}$$

* $f(x)$, $x=3$ de sürekli ise: $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to3^-}\frac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}=\frac{2}{3-5}=-1$$

$$\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}\cdot(1+\sqrt{x-2})}{(1-\sqrt{x-2})\,(1+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}}{3-x}\cdot(1+\sqrt{x-2})$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}}{\frac{\frac{x-3}{b}}{1}}\cdot\frac{1}{-b}\cdot\underbrace{(1+\sqrt{x-2})}_{2}=-\frac{2}{b}$$

$$-\frac{2}{b}=-1\Rightarrow\boxed{b=2}$$

(*) Sıkıştırma Teoremini kullanarak $\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{1-\cos \pi x}^{a}}{1+x^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$\frac{4x}{}$

$\frac{2}{1+x^2} \le a \le 0$

$-1 \le \cos x \le 1$
$1 \ge -\cos x \ge -1$
$2 \ge 1-\cos x \ge 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos x \le 1$ dir. O halde

$$-1 \le \cos \pi x \le 1 \rightarrow -1 \le -\cos \pi x \le 1 \rightarrow 0 \le 1-\cos \pi x \le 2$$

$$0 \le \frac{1-\cos \pi x}{1+x^2} \le \frac{2}{1+x^2} \quad (1)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) den $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos \pi x}{1+x^2} = 0$

(*)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{1-\cos x} \ \left(=\frac{0}{0}\right), & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir? Süreksiz ise süreksizliği kaldırılabilir mi? Nasıl?

$\frac{\cancel{x \sin x} \cdot (1+\cos x)}{\cancel{\sin x \cdot \sin x}}$ $\quad 1+\cos x \quad 2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \cancel{\sin x}}{\frac{1-\cos^2 x}{\sin x}} \cdot (1+\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{(1+\cos x)}{2}$$
$(1+\cos x)$

$= 2$

$f(0) = 1 \ne \lim_{x\to 0} f(x) = 2$ olduğundan $f(x)$ $x=0$'da süreksiz. Bu süreksizlik kaldırılabilir süreksizliktir. $f(0)=2$ olarak tanımlanırsa, yani:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x}{1-\cos x}, & x \ne 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa fonk. $x=0$ da sürekli olur.

(*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{|x-2|} & , \quad x \neq 2 \\ 4 & , \quad x = 2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ deki sürekliliğini araştırınız. Süreksiz ise çeşidini belirtiniz.

$\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}}$

$2^+ \quad 4 \quad x+2$

$2^- \quad -4$

$f(2)=4$ ✓ fonk. $x=2$ de tanımlı

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\overset{x+2}{\cancel{x^2-4}}}{\cancel{x-2}} = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\overset{x+2}{\cancel{x^2-4}}}{-\cancel{(x-2)}} = -4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan fonk. $x=2$ de limiti mevcut değil. Dolayısıyla süreksiz.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan $x=2$ de sıçramalı süreksizlik var.

NOT: Sağ ve sol süreklilik sorulsaydı:

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 4$ olduğundan fonk. x=2 de sağdan sürekli; ancak $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2) = 4$ olduğundan x=2 de soldan süreksizdir cevabı verilirdi.

(*) $f(x) = \dfrac{x-1}{2-\sqrt{5-x}}$ fonksiyonunun $x=1$ de sürekli olması için $f(1)$ nasıl tanımlanmalıdır?

$\dfrac{1}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}}$ $\quad$ $2\sqrt{5-x}$ $\quad$ 4

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{2-\sqrt{5-x}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cancel{x-1}}{\cancel{4-5+x}} \cdot (2+\sqrt{5-x}) = 4$

$(2+\sqrt{5-x})$

$f(1)=4$ olarak tanımlanırsa $f(x)$, $x=1$ de sürekli olur.

(*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \cancel{3}x}{\cancel{x}}\ 3 & , x<0 \\ 1+a \quad (a=2) & , x=0 \\ \dfrac{x-b}{2x+1} & , x>0 \quad (b=-3) \end{cases}$

fonksiyonunun $\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

$x<0$ için; $\dfrac{\sin 3x}{x}$ ve $x>0$, için $\dfrac{x-b}{2x+1}$ fonksiyonları süreklidir. Dolayısıyla $f(x)$ in $\forall x \in \mathbb{R}$ de sürekli olması için $x=0$'da sürekli olmalıdır.

$x=0$ da sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \underbrace{f(x)}_{\frac{x-b}{2x+1}} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{f(x)}_{\frac{\sin 3x}{x}}}_{①} = \underbrace{\underbrace{f(0)}_{1+a}}_{②}$$ olmalı.

① den:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{x-b}{2x+1} = -b \\ &\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1} \cdot 3 = 3 \end{aligned}\right] \to -b = 3 \to \boxed{b=-3}$$

② den:

$$3 = 1+a \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$|2x-3|-x \geq 0$ $\quad |2x-3| \geq x \to 2x-3 \leq -x$ $\quad 3x \leq 3$ $\quad x \leq 1$

(*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|2x-3|-x}}{x^3-1}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

① $|2x-3|-x \geq 0$ olmalı $\rightarrow$ $2x-3 \geq x \rightarrow \boxed{x \geq 3}$

veya

$2x-3 \leq -x \rightarrow \boxed{x \leq 1}$

$2x-3 \geq x$ $\quad x \geq 3$ $\quad x \neq 1$

$\boxed{(-\infty,1) \cup [3,\infty)}$

② $x^3-1 \neq 0$ olmalı $\Rightarrow$ $\boxed{x \neq 1 \text{ olmalı}}$

① ve ② den $D(f)=(-\infty,1) \cup [3,\infty)$

(*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}\,x^2-3\sqrt{3}}{x^3-3\sqrt{3}}$ fonksiyonunun $x=\sqrt{3}$ de sürekli olması için $f(\sqrt{3})$ nasıl tanımlanmalıdır?

$\dfrac{2\sqrt{3}x}{3x^2}$ $\quad \dfrac{6}{9}=\boxed{\dfrac{2}{3}}$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}}{x^3-3\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}(x^2-3)}{x^3-(\sqrt{3})^3}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{(x-\sqrt{3})}\overbrace{(x+\sqrt{3})}^{2\sqrt{3}}}{\cancel{(x-\sqrt{3})}\underbrace{(x^2+x\sqrt{3}+3)}_{9}} = \frac{2}{3}$$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{2}{3}$ olarak tanımlanırsa $f(x)$, $x=\sqrt{3}$ de sürekli olur.

(*) $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}} = ?$ $\quad \dfrac{0}{0}$

$\dfrac{\overset{1}{\sin\cancel{\sqrt{x-3}}}}{\cancel{\sqrt{x-3}}} \cdot \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}$

$\sqrt{\dfrac{\cancel{x-3}}{\sin(\cancel{x-3})}} = 1$

$$\lim_{x\to 3^+} \underbrace{\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}}_{\underbrace{\sqrt{\frac{x-3}{\sin(x-3)}}}_{1}} = \boxed{1}$$

1

⊛ $x^2-x+1=3$ denkleminin $[1,3]$ aralığında bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

$x^2-x-2=0$

$f(1)$

$f(x)=x^2-x+1$ olsun.

$f(1)=1$ $f(3)=7$ dir.

Fonksiyon sürekli olduğundan ve $3=3$ $f(1)=1$ ve $f(3)=7$ arasında olduğundan Aradeğer Teoremine göre $[1,3]$ aralığında $f(c)=3$ olacak şekilde bir sayı vardır. $(c=2)$

⊛ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}-1} = ?$

$1^+ \to 2$ $\dfrac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}}$

$1^- \to -2$

Limit yok $\mho$ 0

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = -2$$

$\neq$ limit mevcut değildir

⊛ $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x} = 0$ olduğunu Sıkıştırma Teo. ile gösterin.

Her $x\neq 0$ için $-1\leq \sin\dfrac{1}{x} \leq 1$ dir. $\sqrt{x}$ ile çarp

$-1\leq \sin x \leq 1$

$-1\leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$

$-\sqrt{x} \leq \sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$

0 0

limit 0

$$-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} -\sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Sıkıştırma Teo. göre

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cdot\sin\frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$$

(*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1} - 2}{\sqrt{x^2+3} - 2}$ fonksiyonu hangi x değeri/değerleri için süreksizdir? Bu süreksizlik nasıl kaldırılabilir?

$\dfrac{\frac{3\cancel{6}x}{\cancel{2}\sqrt{3x^2+1}}}{\frac{\cancel{x}}{\sqrt{x^2+3}}}$ $\quad \dfrac{3\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{3x^2+1}}$ $\quad x=1$, $x=-1$ $\quad \frac{6}{2}=3$

$\sqrt{x^2+3} - 2 = 0 \rightarrow x^2+3=4 \rightarrow \boxed{x=\mp 1}$ için fonk. süreksiz.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{3x^2+1}-2)}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\overset{3}{(3x^2\cancel{+1-4})}\;\overbrace{(\sqrt{x^2+3}+2)}^{4}}{(x^2\cancel{+3-4}).\underbrace{(\sqrt{3x^2+1}+2)}_{4}} = 3$$

$(\sqrt{3x^2+1}+2)\,(\sqrt{x^2+3}+2)$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to -1} \frac{\overset{3}{(3x^2\cancel{+1-4})}\;\overbrace{(\sqrt{x^2+3}+2)}^{4}}{(x^2\cancel{+3-4})\underbrace{(\sqrt{3x^2+1}+2)}_{4}} = 3$$

$(\sqrt{3x^2+1}+2)\,(\sqrt{x^2+3}+2)$

$f(1)=f(-1)=3$ olarak tanımlanırsa $f(x)$ $x=1$ ve $x=-1$ de sürekli olur.

(*) $f(x) = \sin(\ln x) + \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-|x|}}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

$x>0$ $\quad 1-|x|>0$ $\quad |x|<1$ $\quad -1<x<1$ $\quad \boxed{(0,1)}$

$\ln x$ için: $\boxed{x>0}$ olmalı.

$\sin x$: $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır

$1-|x|>0$ olmalı.

$\downarrow$

$|x|<1 \rightarrow \boxed{-1<x<1}$ olmalı.

$\boxed{T.K: (0,1) \text{ aralığı}}$

(*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cancel{\sin 3x}}{\cancel{\sin\sqrt{x}}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{3x}{3}, & x > 0 \\ 1-a, & x = 0 \\ \dfrac{x-b}{2x+1}, & x < 0 \end{cases}$ $\dfrac{3x}{\sqrt{x}}$ $3\sqrt{x} = 0$

$a=1$ $b=0$

fonksiyonunun $x=0$ da sürekli olması için $a, b = ?$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ olmalı.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 3x}{\sin\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}}_{1} \cdot \underbrace{3\sqrt{x}}_{0} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-b}{2x-1} = b \longrightarrow \boxed{b=0}$$

$$f(0) = 1-a \longrightarrow 1-a=0 \rightarrow \boxed{a=1}$$

(*) $\lim_{x\to\infty} \left(x - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+x}}\right) = ?$ $\rightarrow \infty - \infty$ belirsizliği

$\dfrac{\sqrt{x^4+x^3} - x^2}{\sqrt{x^2+x}}$ $\cancel{x^4} + x^3 - \cancel{x^4}$

$\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+x}\cdot(\sqrt{x^4+x^3}+x^2)}$

$\dfrac{\cancel{x^3}}{(\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}})(\cancel{x^2}(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1))}$

$\dfrac{1}{1\cdot(1+1)} = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\sqrt{x^2+x} - x^2}{\sqrt{x^2+x}} \quad (x\sqrt{x^2+x}+x^2) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(x^2+x) - x^4}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot(x\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}^{\,1}}{\cancel{x^3}\cdot\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}\cdot\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$