MAT.I
1. Uygulama

(*) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2.\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)=?$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2.\left(1-\cos\frac{2}{x}\right).\left(1+\cos\frac{2}{x}\right)}{1+\cos\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2.\left(1-\cos^2\frac{2}{x}\right)}{1+\cos\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{1-\cos^2\frac{2}{x}}^{\sin^2\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x^2}}.\frac{1}{1+\cos\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\right)^2}_{1}.4.\frac{1}{\underbrace{1+\cos\frac{2}{x}}_{2}}=\underline{\underline{2}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=?$

$2x-\pi=u$ olsun. $x\to\frac{\pi}{2}$ iken $u\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right)}{u}=\lim_{u\to 0}-\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}.2}=-\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\to 1$

(*) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=?$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x.\cos x}{x^3.\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x.(1-\cos x)}{x^3.\cos x}$$

$(1+\cos x)$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}.\underbrace{\frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\sin^2 x}}{x^2}}_{1}.\frac{1}{\underbrace{\cos x.(1+\cos x)}_{2}}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+\sin x}-\sqrt{1+\cos x}}{\tan x} = ?$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{2+\sin x}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x})}{\tan x \cdot (\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot(\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}} + \overbrace{\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}}}^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}}}_{\frac{1}{2\sqrt{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin|x| \cdot \tan x} = ?$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x \cdot \underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cancel{\cos x})\cdot \cos x}{\underbrace{\sin^2 x}_{\underbrace{1-\cos^2 x}_{(1-\cancel{\cos x})(1+\cos x)}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{-\sin x \cdot \tan x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{(1-\cancel{\cos x})\cdot \cos x}{\underbrace{\sin^2 x}_{\underbrace{1-\cos^2 x}_{(1-\cancel{\cos x})(1+\cos x)}}} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{\cos x}{1+\cos x} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin|x| \cdot \tan x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos x}{\sin|x| \cdot \tan x} \Rightarrow \text{limit mevcut değil}$$

2015-1. vize sorusu:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+2} & , -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$

şeklinde tanımlanıyor.

a) $\lim_{x \to -2} f(x) = ?$ $\lim_{x \to 1} f(x) = ?$

b) $x=-2$ ve $x=1$ deki süreksizlik tipleri?

$\lim_{x \to -2^+} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$

$\lim_{x \to -2^-} x = -2$ → ∄ limit mevcut değil. → $x=-2$ de sonsuzlesas süreksizlik var

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \underbrace{\frac{\sin(1-\sqrt{x})}{-(1-\sqrt{x})}}_{1}(1+\sqrt{x})} = -\frac{1}{2}$$

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{3}$ → ∄ limit yok → $x=1$'de sıçramalı süreksiz

---

2016-1. vize sorusu

* $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\sin 2x}{x^2 - \pi x} = ?$

$x - \pi = t$ olsun. $x \to \pi$ ise $t \to 0$ olur.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{x(x-\pi)} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(2\pi + 2t)}{(\pi + t) \cdot t} = \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{\sin 2t}{2t}}_{1} \cdot \frac{2}{\pi + t} = \frac{2}{\pi}$$

2016-1. vize sorusu

$f(x) = \dfrac{3.|x-2|}{x^2.(4-x^2)}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları ve süreksizlik tiplerini inceleyiniz.

$x^2.(4-x^2)=0 \to x=0$, $x=2$, $x=-2$ de süreksiz.

x=0 için

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3.(2-\cancel{x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3.(2-\cancel{x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ da sonsuz (esas) süreksiz

x=-2 için

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)} = +\infty \qquad \lim_{x\to -2^-} \frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)} = -\infty$$

$\Downarrow$

$x=-2$ de sonsuz(esas) süreksiz

x=2 için

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{3.(\cancel{x-2})^{-1}}{x^2(\cancel{2-x})(2+x)} = -\frac{3}{16} \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{3.(\cancel{2-x})}{x^2.(\cancel{2-x})(2+x)} = +\frac{3}{16}$$

$\neq$ $x=2$ de sıçramalı süreksiz

⊛ 2016 - Bütünleme sorusu:

$f_{\alpha,\beta}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(\alpha \geq 0, \beta \in \mathbb{R})$ fonksiyonu

$$f_{\alpha,\beta} = \begin{cases} x^{\alpha}.\sin x^{\beta} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

olsun. Buna göre $f_{0,-1}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sürekli mi?

$f_{0,-1} \Rightarrow \alpha = 0 \quad \beta = -1$

$$f_{0,-1} = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ limiti mevcut olmadığından $f_{0,-1}$ $\mathbb{R}$'de sürekli değildir.

2016 - yaz okulu 1. vize soruları;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{x}} = ?$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \boxed{0}$$

$f(x) = \dfrac{x^2}{1-\cos x}$ ile verilen $f(x)$ fonksiyonunun $x=0$ daki süreksizlik tipini belirleyiniz ve sürekli olması için gerekeni yapınız.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2.(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$(1+\cos x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2.(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 . (1+\cos x)$$

$$= \boxed{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\cos x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlarsak fonk. $x=0$ da sürekli olur.

2016 - Mazeret sınavı sorusu:

$f(x) = \frac{2.|x-1|}{x^2 - x^3}$ fonksiyonunun sürekliliğini inceleyiniz.

Eğer varsa süreksizlik noktalarını sınıflandırın.

$x^2.(1-x) = 0 \Rightarrow x=0 \quad x=1$ de süreksiz.

x=0 için

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2.(\cancel{1-x})}{x^2.(\cancel{1-x})} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2.(\cancel{1-x})}{x^2.(\cancel{1-x})} = +\infty \rightarrow x=0 \text{ da}$$

sonsuz (esas) süreksiz

x=1 için

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2.(\cancel{1-x})}{x^2\,(\cancel{1-x})} = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2.\overset{-1}{(\cancel{x-1})}}{x^2.(\cancel{1-x})} = -2$$

$\neq \Rightarrow x=1$ de sıçramalı süreksiz

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{2x-\pi} = ?$$

$2x-\pi = u$ olsun. $x \to \frac{\pi}{2}$ ise $u \to 0$ olur.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{2x-\pi} = \lim_{u\to 0} \frac{\overbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{u}{2}\right)}^{\cos\frac{u}{2}}-1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos\frac{u}{2}-1}{\underbrace{\frac{u}{2}}_{0}\cdot 2} \cdot \cancel{0} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-\sin 2x}}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{1-\sin 2x})(1+\sqrt{1-\sin 2x})}{\tan x\cdot(1+\sqrt{1-\sin 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\sin 2x}{\tan x\cdot(1+\sqrt{1-\sin 2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\cancel{\sin x}\cdot\overline{\cos x}^{\,1}}{\frac{\cancel{\sin x}}{\underbrace{\cos x}_{1}}\cdot(1+\underbrace{\sqrt{1-\sin 2x}}_{1})}$$

$$= \frac{2}{2} = \underline{\underline{1}}$$

$\lim_{x\to 0} x^2\cdot\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ limitini sıkıştırma teoremini kullanarak bulunuz.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos x \le 1$ dir. O halde,

$x \ne 0$ için $-1 \le \cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \le 1$ dir.

$$\Downarrow$$

$$-x^2 \le x^2\cdot\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \le x^2 \quad (1) \quad \text{dir.}$$

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \quad (2)$$

(1) ve (2) den Sıkıştırma Teo. göre $\lim_{x\to 0} x^2\cdot\cos\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$ dir.

$$f(x)=\frac{\sqrt{|2x+5|-3}}{x^2+1}$$ Tanım Kümesi?

$|2x+5|-3 \geq 0$ olmalı.

$$|2x+5| \geq 3 \rightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 3 \rightarrow x \geq -1 \\ 2x+5 \leq -3 \rightarrow x \leq -4 \end{cases} \rightarrow D(f)=(-\infty,-4] \cup [-1,\infty)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$$ Tanım Kümesi?

$|x|-x > 0$ olmalı $\Rightarrow |x| > x \Rightarrow x < 0 \Rightarrow D(f)=(-\infty,0)$

$$f(x)=\sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}$$ Tanım Kümesi?

$$\ln\frac{5x-x^2}{4} \geq 0 \rightarrow \frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \rightarrow 5x-x^2 \geq 4$$

$$\downarrow$$

$4-5x+x^2 \leq 0$ olmalı.

$$(x-1)(x-4) \leq 0$$

	1		4	
+				+

$$D(f)=[1,4]$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2+x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{|x|}\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}+\sqrt{1-\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}\right)}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = ?$$

$$(\sqrt{1+x^2}+1)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{1+x^2-1} \cdot (\sqrt{1+x^2}+1) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{(\sqrt{x^2+1}+1)}_{2} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{1-x} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}\right) = ?$$

$t = 1-x$

$x \to 1^- \Rightarrow t \to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \cdot \cos\frac{\pi}{2}(1-t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right)$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}t\right) = \sin\frac{\pi}{2}t$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} \cdot \sin\frac{\pi}{2}t$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t}}_{1} \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\lim_{x\to \infty} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} = ?$$

I. Yol

$$\lim_{x\to \infty} \underbrace{x}_{\infty} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} = \infty$$

II. Yol (Dönüşüm)

$\frac{1}{x} = t \qquad x \to \infty \Rightarrow t \to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2} \cdot \sin t = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\infty} \cdot \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x} \cdot \sin\frac{1}{x} = ?$$

I. Yol

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to \infty} \underbrace{\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{0} = 0$$

II. Yol (Dönüşüm)

$\frac{1}{x} = t \qquad x \to \infty \Rightarrow t \to 0^+$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sin t = \lim_{t\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1} \cdot \underbrace{\sqrt{t}}_{0} = 0$$

$(*)$ $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = ?$$

$(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x.\cos 2x}{x^2.(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\overbrace{(1-\sin^2 x)}^{\cos^2 x}.\overbrace{(1-2\sin^2 x)}^{\cos 2x}}{x^2.(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-(1-3\sin^2 x+2\sin^4 x)}{x^2.} \cdot \frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{3\sin^2 x - 2\sin^4 x}{x^2}\right] \cdot \frac{1}{1+\cos x.\sqrt{\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{1} \cdot \underbrace{\left(3-2\sin^2 x\right)}_{3} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x\sqrt{\cos 2x}}}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$(*)$ $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x} = ?$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{|\sin 2x|}^{-\sin 2x}}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{-\sin 2x}{\sin 2x}}_{-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\cos 2x}}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$(*)$ $$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-2}$$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $*$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ $**$

$(\sqrt{x}+2\sqrt{2}).(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)$

$$\lim_{x\to 8} \frac{\overbrace{(\sqrt{x}-2\sqrt{2}).(2\sqrt{2}+\sqrt{x})}^{**\text{'dan } x-8}.(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\underbrace{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}_{*\text{'dan } x-8}.(\sqrt{x}+2\sqrt{2})} = \lim_{x\to 8} \frac{\cancel{x-8}}{\cancel{x-8}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x}+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=?$$ $x=t^{12}$ olsun. $x\to 1 \Rightarrow t\to 1$

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\overset{t+1}{\cancel{(t^2-1)}}(t^2+1)}{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)}=\frac{2.2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}\cdot\frac{1+\cos x^2}{1+\cos x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{1-\cos^2 x^2}^{\sin^2 x^2}}{x^2.\sin x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x^2}{x^2}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+\cos x^2}}_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

(*) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{1-\sin x}} = ?$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\cos^2 2x}\cdot(\sqrt{1+\sin x})}{\sqrt{1-\sin^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin^2 2x}\cdot\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{\cos^2 x}\cdot\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin 2x|\cdot\sqrt{1+\sin x}}{|\cos x|\cdot\sqrt{1-\cos 2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\overbrace{|\sin x|}^{1}\cdot\cancel{|\cos x|}\cdot\overbrace{\sqrt{1+\sin x}}^{\sqrt{2}}}{\cancel{|\cos x|}\cdot\underbrace{\sqrt{1-\cos 2x}}_{\sqrt{2}}} = \underline{\underline{2}}$$

(*) $$\lim_{\theta\to 1} \frac{\theta-1}{\theta-\cos(\theta-1)} = ?$$

$\theta-1=x$ olsun. $\theta\to 1$ ise $x\to 0$ olur.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\underbrace{\frac{1-\cos x}{x}}_{0}} = \underline{\underline{1}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}-1}$ limitinin varlığını araştırınız.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} - \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = -2$$

$\neq \Rightarrow x=1$ de limit mevcut değil

(*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-\sqrt{2x^2-1}}{2-\sqrt{5-x^2}} = ?$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-\sqrt{2x^2-1}).(x+\sqrt{2x^2-1}).(2+\sqrt{5-x^2})}{(2-\sqrt{5-x^2})(2+\sqrt{5-x^2}).(x+\sqrt{2x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-2x^2+1)(2+\sqrt{5-x^2})}{(4-5+x^2)(x+\sqrt{2x^2-1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\overset{-1}{\cancel{(1-x^2)}}.(2+\sqrt{5-x^2})}{\cancel{(x^2-1)}.(x+\sqrt{2x^2-1})} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

(*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{\sin(x^2-x)} = ?$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x+2x-2}{\sin(x^2-x)} = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{x^2-x}{\sin(x^2-x)}}_{1} + \frac{2.\overbrace{(x-1)}^{1}}{\sin(x^2-x)} \cdot \frac{x}{x} = \boxed{3}$$

YTÜ

0251321 MATEMATİK I - 1.VİZE SINAVI

12 Nisan 2008

Adı-Soyadı :
Numara :
Grup :
İmza :

1	2	3	4	5	Toplam

Sınav Süresi : 70 dakika

UYARI: YALNIZCA 4 SORU YANITLANACAKTIR.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin\left(\dfrac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)\right]$ limitini hesaplayınız. (İşlemlerde L'Hopital kuralı kullanılmayacak.)

Cevap:

$$\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos^2 x}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)\right]$$

$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}(1)^2\right)=\mathbf{1.}$$

89

(*) $f(x)=\begin{cases} x.\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$ fonksiyonu $\forall x\in\mathbb{R}$ için sürekli midir?

*(1) $x\neq 0$ için $x.\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonu süreklidir. Gerçekten;

$c\in\mathbb{R}-\{0\}$ için $\lim\limits_{x\to c} x.\sin\frac{1}{x} = c.\sin\frac{1}{c} = f(c)$ dir. Yani

fonk. $x\neq 0$ için süreklidir.

(2) * $x=0$ için

$\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0$ dır. $\lim\limits_{x\to 0} x.\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ olduğundan

$f(x)$ $x=0$ da süreklidir.

(1) ve (2) den $f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ için süreklidir.

(*) $f(x)=\begin{cases} 2\sin x & , x\leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & , -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2} \\ \cos x & , x\geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ fonksiyonu $x=\frac{\pi}{2}$ ve $x=-\frac{\pi}{2}$ de sürekli ise $a,b=?$

$x=\frac{\pi}{2}$ 'de sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \underbrace{f(x)}_{a\sin x+b}}_{a+b} = \underbrace{\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \underbrace{f(x)}_{\cos x}}_{0} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{a+b=0} \quad (1)$$

$x=-\frac{\pi}{2}$ de sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \underbrace{f(x)}_{a\sin x+b}}_{-a+b} = \underbrace{\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} \underbrace{f(x)}_{2\sin x}}_{-2} = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2.\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Rightarrow \boxed{-a+b=-2} \quad (2)$$

(1) ve (2) den

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ -a+b=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=+1 \\ b=-1 \end{array}$$

(*) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{1-\sqrt{2+\cos x}}{1-\sqrt{1+\sin x}} = ?$

$(1+\sqrt{2+\cos x})\quad(1+\sqrt{1+\sin x})$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(1-\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{2+\cos x})(1+\sqrt{1+\sin x})}{(1-\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{1+\sin x})(1+\sqrt{2+\cos x})}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\overbrace{-(1+\cos x)}^{}\,.\,(1+\sqrt{1+\sin x})}{-\sin x\,.\,(1+\sqrt{2+\cos x})} \quad (1-\cos x)$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\overset{\sin x}{\overset{\cancel{\sin^2 x}}{(1-\cos^2 x)}}}{\cancel{\sin x}} . \frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \underbrace{\sin x}_{0} . \underbrace{\frac{1+\sqrt{1+\sin x}}{1+\sqrt{2+\cos x}}}_{1} = \underline{\underline{0}}$$

(*) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ fonksiyonunun $x=1$ deki davranışını inceleyiniz.

$\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$

$\Downarrow$

$f(x)$, $x=1$ de limite sahip değil

(*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2}, & x\neq 2 \\ 0, & x=2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ deki sürekliliğini inceleyin. Süreksiz ise çeşidini belirtin.

$f(2)=0$ ✓ fonk. $x=2$ de tanımlı

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$ olduğundan $f(x)$ in $x=2$ de limiti yok. Fonksiyon $x=2$ de süreksiz. $\lim\limits_{x\to2} f(x) = +\infty$ olduğundan $x=2$ 'deki süreksizlik "<u>sonsuz süreksizlik</u>"tir.

⊛ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a-\sqrt{2-x}} & , x\leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}} & , 1<x<3 \\ \dfrac{\sin\frac{x-3}{b}}{1-\sqrt{x-2}} & , x\geq 3 \end{cases}$ fonksiyonu $x=1$ ve $x=3$ de sürekli ise $a,b=?$

*
$f(x)$, $x=1$ de sürekli ise: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+\sqrt{3x^2-2})}{-2\underbrace{\cancel{(x^2-1)}}_{x+1}}=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{a-\sqrt{2-x}}=\frac{1}{a-1}=f(1) \longrightarrow \frac{1}{a-1}=-\frac{1}{2}\to a-1=-2$$

$$\boxed{a=-1}$$

*
$f(x)$, $x=3$ de sürekli ise: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x-1}{x-\sqrt{3x^2-2}}=\frac{2}{3-5}=-1$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}\cdot(1+\sqrt{x-2})}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}}{3-x}\cdot(1+\sqrt{x-2})$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\sin\frac{x-3}{b}}{\underbrace{\frac{x-3}{b}}_{1}}\cdot\frac{1}{-b}\cdot\underbrace{(1+\sqrt{x-2})}_{2}=-\frac{2}{b}$$

$$-\frac{2}{b}=-1 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

(*) Sıkıştırma Teoremini kullanarak $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\pi x}{1+x^2} = 0$ olduğunu gösteriniz.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $-1 \le \cos x \le 1$ dir. O halde

$$-1 \le \cos\pi x \le 1 \rightarrow -1 \le -\cos\pi x \le 1 \rightarrow 0 \le 1-\cos\pi x \le 2$$

$$\downarrow$$

$$0 \le \frac{1-\cos\pi x}{1+x^2} \le \frac{2}{1+x^2} \quad ①$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0 \quad ②$$

① ve ② den $\lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos\pi x}{1+x^2} = \underline{\underline{0}}$

(*) $f(x) = \begin{cases} \frac{x\sin x}{1-\cos x}, & x \ne 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $x=0$ da sürekli midir? Süreksiz ise süreksizliği kaldırılabilir mi? Nasıl?

$$\lim_{x\to 0} \frac{x.\sin x}{\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{x.\cancel{\sin x}}{\frac{1-\cos^2 x}{\sin x}}.(1+\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x}}{1} . \frac{(1+\cos x)}{2}$$

$$= 2$$

$f(0) = 1 \ne \lim_{x\to 0} f(x) = 2$ olduğundan $f(x)$ $x=0$'da süreksiz. Bu süreksizlik kaldırılabilir süreksizliktir.

$f(0)=2$ olarak tanımlanırsa, yani;

$f(x) = \begin{cases} \frac{x\sin x}{1-\cos x}, & x \ne 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ olarak tanımlanırsa fonk. $x=0$ da sürekli olur.

⊛ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}, & x\neq 2 \\ 4, & x=2 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=2$ deki sürekliliğini araştırınız. Süreksiz ise çeşidini belirtiniz.

$f(2)=4$ ✓ fonk. $x=2$ de tanımlı

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{\overset{x+2}{\cancel{x^2-4}}}{\cancel{x-2}}=4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{\overset{x+2}{\cancel{x^2-4}}}{-(\cancel{x-2})}=-4$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan fonk. $x=2$ de limiti mevcut değil. Dolayısıyla süreksiz.

$\lim_{x\to 2^+} f(x)\neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$ olduğundan $x=2$ de sıçramalı süreksizlik var.

<u>NOT:</u> Sağ ve sol süreklilik sorulsaydı:

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=4$ olduğundan fonk. <u>$x=2$ de sağdan sürekli</u>; ancak $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq f(2)=4$ olduğundan <u>$x=2$ de soldan süreksizdir</u> cevabı verilirdi.

⊛ $f(x)=\dfrac{x-1}{2-\sqrt{5-x}}$ fonksiyonunun $x=1$ de sürekli olması için $f(1)$ nasıl tanımlanmalıdır?

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\underset{(2+\sqrt{5-x})}{2-\sqrt{5-x}}}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{4-5+x}}\cdot(2+\sqrt{5-x})=4$$

$f(1)=4$ olarak tanımlanırsa $f(x)$, $x=1$ de sürekli olur.

(*) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & , x<0 \\ 1+a & , x=0 \\ \dfrac{x-b}{2x+1} & , x>0 \end{cases}$ fonksiyonunun $\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

$x<0$ için; $\dfrac{\sin 3x}{x}$ ve $x>0$, için $\dfrac{x-b}{2x+1}$ fonksiyonları süreklidir. Dolayısıyla $f(x)$ in $\forall x \in \mathbb{R}$ de sürekli olması için $x=0$'da sürekli olmalıdır.

$x=0$ da sürekli ise:

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+} \underbrace{f(x)}_{\frac{x-b}{2x+1}} = \lim_{x\to 0^-}}_{1} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\frac{\sin 3x}{x}} = \underbrace{f(0)}_{1+a}}_{2} \quad \text{olmalı.}$$

1 den:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} \frac{x-b}{2x+1} = -b \\ &\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1} \cdot 3 = 3 \end{aligned}\right] \to -b = 3 \to \boxed{b=-3}$$

2 den:

$$3 = 1+a \Rightarrow \boxed{a=2}$$

(*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|2x-3|-x}}{x^3-1}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

① $|2x-3|-x \geq 0$ olmalı $\rightarrow$ $2x-3 \geq x \rightarrow \boxed{x \geq 3}$
veya
$2x-3 \leq -x \rightarrow \boxed{x \leq 1}$

② $x^3-1 \neq 0$ olmalı $\Rightarrow$ $\boxed{x \neq 1 \text{ olmalı}}$

① ve ② den $D(f)=(-\infty,1) \cup [3,\infty)$

(*) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}}{x^3-3\sqrt{3}}$ fonksiyonunun $x=\sqrt{3}$ de sürekli olması için $f(\sqrt{3})$ nasıl tanımlanmalıdır?

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}x^2-3\sqrt{3}}{x^3-3\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}(x^2-3)}{x^3-(\sqrt{3})^3}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\cdot\cancel{(x-\sqrt{3})}\overbrace{(x+\sqrt{3})}^{2\sqrt{3}}}{\cancel{(x-\sqrt{3})}\underbrace{(x^2+x\sqrt{3}+3)}_{9}} = \frac{2}{3}$$

$f(\sqrt{3})=\dfrac{2}{3}$ olarak tanımlanırsa $f(x)$, $x=\sqrt{3}$ de sürekli olur.

(*) $\displaystyle\lim_{x\to3^+} \frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}} = ?$

$$\lim_{x\to3^+} \underbrace{\frac{\sin\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{\sin(x-3)}}}_{\underbrace{\sqrt{\frac{x-3}{\sin(x-3)}}}_{1}} = \boxed{1}$$

* $x^2-x+1=3$ denkleminin $[1,3]$ aralığında bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

$f(x)=x^2-x+1$ olsun.

$f(1)=1$ $f(3)=7$ dir.

fonksiyon sürekli olduğundan ve $s=3$ $f(1)=1$ ve $f(3)=7$ arasında olduğundan Aradeğer Teoremine göre $[1,3]$ aralığında $f(c)=3$ olacak şekilde bir sayı vardır. $(c=2)$

---

* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}-1} = ?$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = -2$$

$\neq$ limit mevcut değildir

---

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{x} = 0$ olduğunu Sıkıştırma Teo. ile gösterin.

Her $x\neq 0$ için $-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1$ dir. $\sqrt{x}$ ile çarp

$$-\sqrt{x}\leq \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\leq \sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} -\sqrt{x} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$$

Sıkıştırma Teo. göre $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\frac{1}{x} = \underline{\underline{0}}$

* $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2}$ fonksiyonu hangi x değeri/değerleri için süreksizdir? Bu süreksizlik nasıl kaldırılabilir?

$\sqrt{x^2+3}-2=0 \rightarrow x^2+3=4 \rightarrow \boxed{x=\mp 1}$ için fonk. süreksiz.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{3x^2+1}-2)}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\overset{3}{(3x^2+\cancel{1-4})}\,\overbrace{(\sqrt{x^2+3}+2)}^{4}}{(x^2+\cancel{3-4}).\,\underbrace{(\sqrt{3x^2+1}+2)}_{4}} = 3$$

$(\sqrt{3x^2+1}+2)\,(\sqrt{x^2+3}+2)$

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to -1} \frac{\overset{3}{(3x^2+\cancel{1-4})}\,\overbrace{(\sqrt{x^2+3}+2)}^{4}}{(x^2+\cancel{3-4})\,\underbrace{(\sqrt{3x^2+1}+2)}_{4}} = 3$$

$(\sqrt{3x^2+1}+2)\,(\sqrt{x^2+3}+2)$

$f(1)=f(-1)=3$ olarak tanımlanırsa $f(x)$ $x=1$ ve $x=-1$ de sürekli olur.

---

* $f(x) = \sin(\ln x) + \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-|x|}}$ fonksiyonunun tanım kümesi?

$\ln x$ için: $\boxed{x>0}$ olmalı.

$\sin x$: $\forall x \in \mathbb{R}$ için tanımlır

$1-|x|>0$ olmalı.

$\downarrow$

$|x|<1 \rightarrow \boxed{-1<x<1}$ olmalı

$\boxed{\text{T.K : } (0,1) \text{ aralığı}}$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sin\sqrt{x}} & , x>0 \\ 1-a & , x=0 \\ \dfrac{x-b}{2x+1} & , x<0 \end{cases}$$

fonksiyonunun $x=0$ da sürekli olması için $a,b=?$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ olmalı.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 3x}{\sin\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}}_{1}\cdot\underbrace{3\sqrt{x}}_{0}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-b}{2x-1}=b \longrightarrow \boxed{b=0}$$

$$f(0)=1-a \longrightarrow 1-a=0 \to \boxed{a=1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x}}\right)=? \to \infty-\infty \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{x^2+x}-x^2}{\sqrt{x^2+x}}\quad (x\sqrt{x^2+x}+x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^2+x)-x^4}{\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\underbrace{|x|}_{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\cdot(x\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\underbrace{|x|}_{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\ 1}{\cancel{x^3}\cdot\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}\cdot\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{0}}+1\right)}=\frac{1}{2}$$