(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ seçelim. $p=\frac{1}{3}<1$ ıraksak seri

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty}(1+\ln n) = \infty \Rightarrow$ Limit Testine göre, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ıraksak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ de ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2}$ karakteri?

$\frac{1+\cos n}{1+n^2} \le \frac{2}{1+n^2} < \frac{2}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{1+n^2} < \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}}_{p=2>1 \text{ yak.}} \Rightarrow$ Mukayese Testine göre $\sum \frac{1+\cos n}{1+n^2}$ de yak.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(e^n+n)^n}$ karakteri?

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(e^n+n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}}{\underbrace{e^n+n}_{\infty}} = 0<1 \Rightarrow$ Kök Testine göre seri yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{3n}\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$ karakteri?

Kök testi uygulayalım.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{3n}\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^3\cdot\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^3\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} e^3\cdot\frac{1}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}_{e^2}} = e>1$$

Kök Testine göre seri ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2 2^n}$ karakteri?

I. Yol Oran Testi ile:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+1)^2 2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{n^2 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(2n+3).n^2}{(n+1)^2.(2n+1)}}_{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

II. Yol Limit Testi ile:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ seçelim. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $|r| = \frac{1}{2} < 1$ Geo. Seri yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2 2^n}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0 \Rightarrow$$

Limit Testine göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2.2^n}$ de yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ serisinin karakteri?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ seçelim. $p = \frac{1}{3} < 1$ ıraksak seri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} = \lim_{n\to\infty} (1+\ln n) = \infty \Rightarrow$$

Limit Testine göre, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ ıraksak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ de ıraksaktır.

(14) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 < 1 \Rightarrow$$ oran testinden seri yakınsak

(15) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$ ile verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin karakterini belirleyin.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin n}{n} = 0 < 1 \Rightarrow$$ oran testinden seri yakınsak

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ olsun. $f(x)$ $[1,\infty)$ da
- → pozitiftir $(f(x)>0)$
- → Azalandır $(f'(x)<0)$
- → Süreklidir ($[1,\infty)$ da süreksizlik noktası yoktur)

integral Testi kullanılabilir

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \lim_{R\to\infty} \int_0^{\ln R} \frac{du}{1+u^2} = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Arctan} u \Big|_0^{\ln R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow u=0 \\ x=R \Rightarrow u=\ln R \end{array} \Bigg\}$$

$$= \lim_{R\to\infty} (\underbrace{\operatorname{Arctan}(\underbrace{\ln R}_{\infty})}_{\pi/2} - \underbrace{\operatorname{Arctan} 0}_{0})$$

$= \pi/2 \Rightarrow$ improper integral yakınsak

integral Testine göre; $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$ yakınsak olduğundan

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ serisi yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ karakteri?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Oran Testine göre Seri yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$ karakteri?

$n>3$ için $n>\ln n$ dir.

$n>\ln n \Rightarrow \ln n > \ln(\ln n) \Rightarrow n > \ln n > \ln(\ln n)$ sağlanır.

$n>\ln(\ln n) \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik serisi ıraksak ve $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(\ln n)}$ olduğundan Mukayese testine göre $\sum \frac{1}{\ln(\ln n)}$ ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n\, n!\, n!}{2.(2n)!}$ serisinin karakteri?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{5^{n+1}(n+1)!.(n+1)!}{2.(2n+2)!}}{\frac{5^n.\, n!\, n!}{2.(2n)!}} = \frac{5.(n+1).(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{5(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{5}{4} > 1$ Oran Testine göre Seri Iraksak

---

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$ karakteri?

I. Yol Kök Testi:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^3} = \frac{2}{1^3} = 2 > 1$ Seri kök testine göre ıraksaktır.

$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\right)$

II. Yol Oran Testi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{2^n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n^3}{(n+1)^3}}_{1} . 2 = 2 > 1$$

$\Rightarrow$ Seri oran testine göre ıraksaktır

b) Aşağıdaki serilerin yakınsak veya ıraksak olup olmadıklarını belirleyiniz. ***(9+9 puan)***

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

i) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$

$= e^{-1}\cdot 1 = \frac{1}{e} < 1$ old. YAK.
(Kök Testine göre)

ii) $b_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksak

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$

Limit karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.
(her iki seri aynı karakterde)

Başarılar dilerim.

15

(*) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ karakteri?

$[2,\infty)$ da $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ sürekli, pozitif, azalan ✓ int. Testi uygulanabilir.

$\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_2^{R}\frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{R\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln R}\frac{du}{u^2} = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\ln R}\right]$

$\ln x = u$

$\frac{dx}{x} = du$

$= \lim_{R\to\infty}\left[\underbrace{-\frac{1}{\ln R}}_{0} + \frac{1}{\ln 2}\right] = \frac{1}{\ln 2}$ yakınsak

dolayısıyla $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ yakınsak.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ karakteri?

*

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ Kök testine göre seri yakınsak

---

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$ karakteri?

*

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{\ln n} = 0 < 1$ Kök testine göre yakınsak. $\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1\right)$

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$ serisinin karakteri?

*

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ serisi için $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $(p=2>1)$ yakınsak serisini seçelim.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^3+1}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0, \infty$ olduğundan Limit testine göre iki seri aynı karakterli

$\sum \frac{n}{n^3+1}$ yakınsak dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^3+1}$

mutlak yakınsaktır.

(*) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\ln n}$ karakteri? $\sum_{n=2}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ $[2,\infty)$ da sürekli ✓ pozitif ✓ azalan ✓

integral testi uygulanabilir.

*

$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{R\to\infty} \int_2^{R} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{R\to\infty} \left[\ln(\ln x)\Big|_2^R\right] = \lim_{R\to\infty} \left[\ln(\ln R) - \ln(\ln 2)\right] = \infty$ ıraksak olduğundan seri de ıraksak

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ ıraksak $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\ln n}$ mutlak yakınsak <u>değil.</u>

Ancak Alterne seri testinin 3 koşulu da sağlandığından

$\left(\frac{1}{n\ln n}\right.$ pozitif, azalan, $\left.\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n} = 0\right)$ $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\ln n}$ <u>şartlı yakınsak</u> seridir.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ serisi hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksaktır. Yakınsaklık aralığı?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{(x-1)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}}}_{1} \cdot |x-1| = |x-1| < 1 \Rightarrow \boxed{0<x<2}$$

Mutlak Yak.

$\underline{x=2 \text{ için}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ serisi $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ seçelim. $p=\frac{3}{4}<1$ ıraksaktır

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}} = 1 \neq 0, \infty$$

iki seri aynı karakterli.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ de ıraksak

$\underline{x=0 \text{ için}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^3+1}}$ $\Rightarrow$ Seri mutlak yakınsak değildir.

① $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} = 0$ ✓ ② $\frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} > \frac{1}{\sqrt[4]{(n+1)^3+1}}$ $(a_{n+1} < a_n)$ ✓

③ $a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+1}} > 0$ ①, ② ve ③'den seri şartlı yakınsak

Seri:

$0<x<2$ için mutlak yakınsak
$x=0$ " şartlı yakınsak
} $[0,2) \to$ yakınsaklık aralığı

$x \in \mathbb{R} - [0,2)$ için ıraksaktır.

(*) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \cdot (2x-3)^k$ serisi hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak, ıraksaktır? Yakınsaklık Aralığı?

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(2x-3)^{k+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}} \cdot \frac{k.\sqrt{k^2+1}}{(2x-3)^k} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \underbrace{\frac{k.\sqrt{k^2+1}}{(k+1)\sqrt{(k+1)^2+1}}}_{1} \cdot |2x-3| = |2x-3| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-3 < 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{1 < x < 2}$$

Mutlak Yak.

$x=1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$ seçelim. $p=2>1$ yakınsak $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}}{\frac{1}{k^2}} = 1 \neq 0, \infty$

Limit Testine göre iki seri aynı karakterli.

$\sum \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$ de yakınsak.

$\Downarrow$

$\boxed{x=1}$ ✓ (Mutlak Yak.

$x=2$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$$ yakınsak olduğundan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k^2+1}}$$ mutlak yakınsaktır.

$\boxed{x=2}$ ✓ (Mutlak Yak.)

Seri;

$1 \leq x \leq 2$ için mutlak yakınsaktır.

Şartlı yakınsak olduğu bir x değeri yoktur.

$\Big\}$ $[1,2]$ yakınsaklık aralığı

$x \in \mathbb{R} - [1,2]$ için ıraksaktır.

(*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{3^n \cdot n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. Seri hangi x değerleri için mutlak yakınsak, şartlı yakınsak ve ıraksaktır?

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2x-3)^{n+1}}{3^{n+1} \cdot (n+1)} \cdot \frac{3^n \cdot n}{(2x-3)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot |2x-3| = \frac{|2x-3|}{3} < 1$$

$$\frac{|2x-3|}{3} < 1 \Rightarrow -3 < 2x-3 < 3 \Rightarrow \boxed{0 < x < 3} \text{ Mutlak Yakınsak.}$$

$x=3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{Harmonik Seri}$$

Iraksak

$x=0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \text{Alterne Harmonik Seri}$$

Şartlı Yakınsak

Seri;

$0<x<3$ için Mutlak Yakınsak
$x=0$ " Şartlı Yakınsak

$\Big\}$ $x \in [0,3)$ de yakınsak

$\Downarrow$

Yakınsaklık Aralığı $= [0,3)$

$x \in \mathbb{R} - [0,3)$ için ıraksaktır