Random experiment

→ Sonucunu tahmin edilmeyen bir fenomen çünkü outcome'ını bilmiyoruz çünkü kesin değil

→ örneğin yazı tura atmak rastgele bir deney örneğidir veya bir zar atmak çünkü sonucun ne olduğunu bilmiyoruz

→ çıktının ne olucağını bilmiyorsanız bu random experiment olur

Outcome

→ rastgele bir deneyin sonucudur

→ example
roll a die - H T

events (Bu bir kümedir)

→ is a collection of outcomes

→ events'e örnek şunlar mesela bir zar atarsınız bunun sonucunda tek sayı olmak ya da 2 veya 4 almak

Sample space

→ universal set gibidir

→ set of all possible outcomes

→ Bir zar üzerindeki so-

3 axioms of probability

1- $P(A) \geq 0$
(herhangi bir a olayı için olasılık 0'dan büyüktür)

2- $P(S) = P(\Omega) = 1$
(sample space'in olasılığı 1'e eşittir)

3- $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ are disjoint events

$S = A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ are disjoint events

(yukarıdakiler disjoint eventsse aşağıdaki

$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n)$

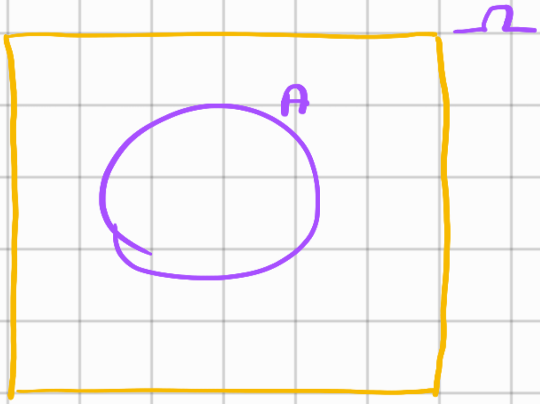
(işlem doğrudur)

özellikleri şu yüzlerin tümü $\{1, 2 \dots 6\}$ sample space olur

Bunlar hem ayrık hem continuous space'lere uygulanabilir

Six rules about probability

1) $P(A) = 1 - P(A^c)$



$A \cup A^c = \Omega$

$\underbrace{P(A \cup A^c)}_{3\ ax} = \underbrace{P(\Omega)}_{Ax2 = 1} \rightarrow 1$

proof

$P(A) + P(A^c) = 1$

$P(A) = 1 - P(A^c)$

2-) $P(\varnothing) = 0$

$P(\varnothing) = P(\Omega^c) = 1 - \underbrace{P(\Omega)}_{2ax = 1}$ (rule 1)

$\varnothing \rightarrow \Omega^c$

$1 - 1 = 0$

$P(\varnothing) = 0$

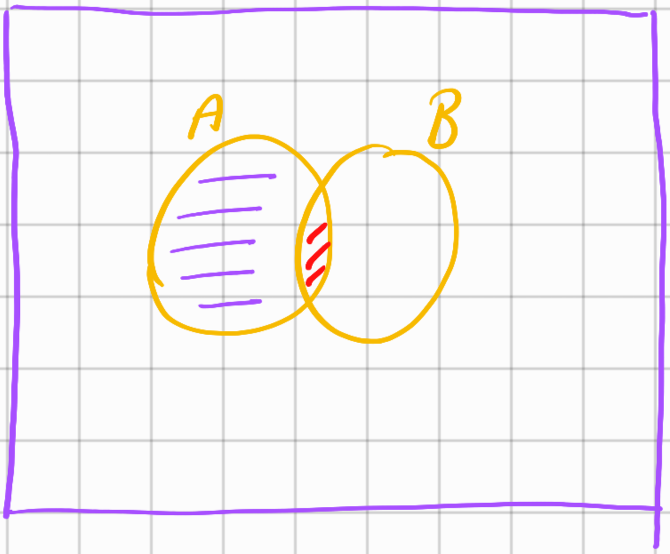
3) $P(A) \leq 1$

$$\underbrace{P(A)}_{\leq 1} = 1 - \underbrace{P(A^c)}_{\geq 0}$$

$P(A) \leq 1$

4-) $P(A-B) = P(A) - P(A\cap B)$

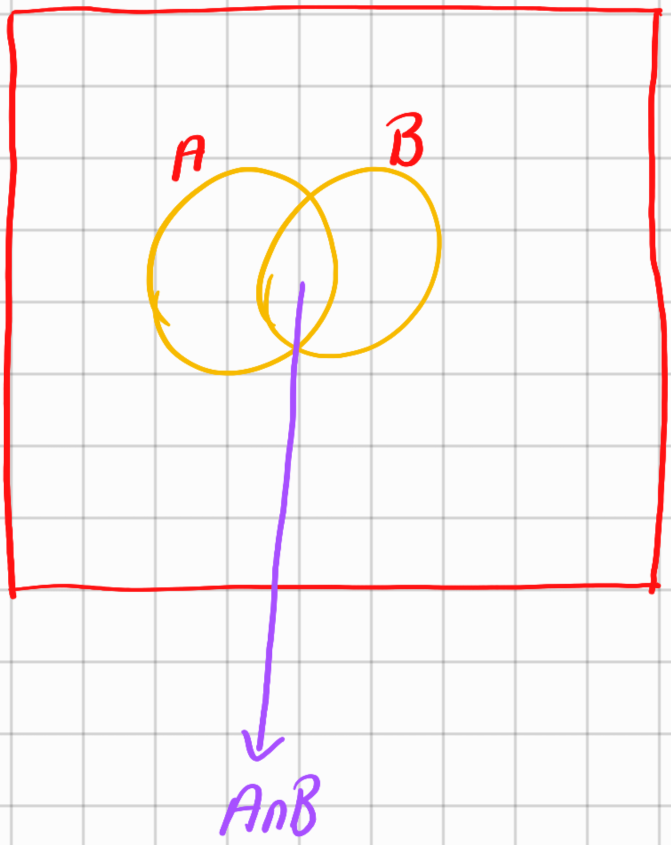
$$A = (A\cap B) \cup (A-B)$$



$$P(A) = P((A\cap B) \cup (A-B))$$

$$= P((A\cap B) + P(A-B)$$

5-) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$



6- $A \subset B \xRightarrow{\text{ise}} P(A) \leq P(B)$

$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B-A)}_{\geq 0}$

$P(B-A) \geq 0$ (ax 1)

$P(B) \geq P(A)$

(Bu aksiyomlar neden önemli)

Axioms are important → (çünkü bu axiomları kullanarak başka kurallar yazabiliriz)

↳ Rules of probability are obtained using these axioms

↳ Any function that obeys these axioms define a probability measure

↳ Gördüğümüz aksiyomların hepsi hem discrete hem continuous space'lere uygulanıyor

Calculating Probabilities

- Equally likely outcomes (eşit olası sonuçlar) → Bu ne demek bir deney yapıyoruz ve tüm sonuçların olasılığının aynı olduğu anlamına geliyor

- Rolling a fair die

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6)$ → Bunların hepsi disjoint

$P(\Omega) = 1$ probability of any outcome

$P(1) = P(2) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$

(fair die
↳ hilesiz zar)

roll a die → Discrete distribution

Examle

Rolling a fair die and get an odd number?

$\{1, 3, 5\}$

$P(odd) = \{1\} + \{2\} + \{3\}$ → 1, 3, 5 yerine 1, 2, 3 yazdık çünkü hepsinin gelme

$\frac{1}{6}$ 1/6   1/6 → 3/6   olasılığı aynı farketmez

bazı distributionlar continuous olabilir bu ne anlama geliyor n sonsuz sayıda ve uncountable anlamına gelir

↓

Örneğin yarış zamanının 1,2,3 saat arasında olan bir problem olsun fonksiyonun çıktısı gerçek bir sayı olduğundan zaman herhangi bir ölçüde olabilir mesela bu continuous probability olur

Conditional probability
(Koşullu olasılık)
(there must be a condition)

P(rain) = ?
(mesela yarınki yağmur yağma ihtimali)
P(rain) = 0,4

→ clouds

What is the probability raining if there are clouds?
(gökyüzünde bulutlar varsa yağmur yağma ihtimali nedir)

Condition → clouds

P(rain | clouds) → 0,75

Bu kısmın olasılığı soruluyor   given   Bu kısım biliniyor

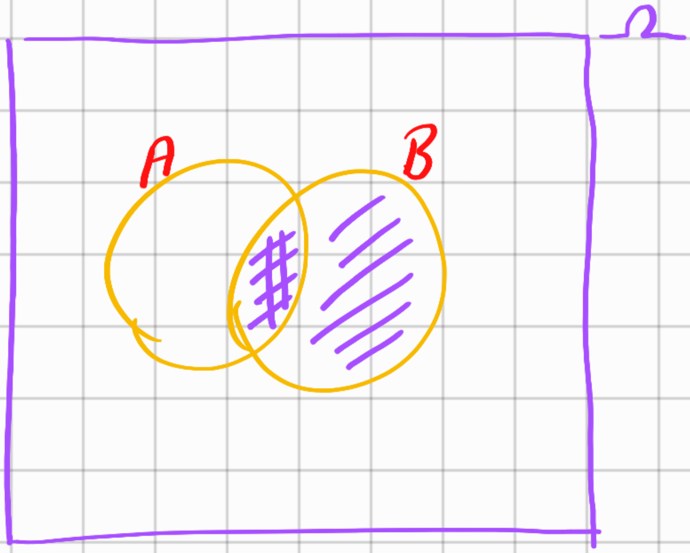
yağmur yağma ihtimali 0,4 ile gökyüzünde bulutlar varsa yağmur yağma ihtimali nedir arasındaki fark nedir

Definition: The conditional probability P(A|B) prob. that A occured given B has occured is:

P(A ∩ B)   ikincideki olası-

$$P(A|B) \longrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

lık daha fazla buna yağmurun şartlı olasılığı denir



$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

B olasılığının gerçekleştiğini biliyoruz

example: Roll a fair die probability of getting an even number given the outcome is less than or equal to 3?

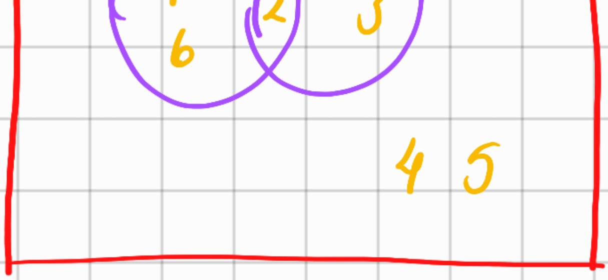
$$P(\underbrace{\text{even}}_{P(A)} \mid \underbrace{\underbrace{\text{outcome} \leq 3}_{B}})$$

Bunun olasılığını soruyor

Bunun olduğunu biliyoruz

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 2, 3\} \leftarrow$



$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1 \to |A\cap B|}{3 \to |B|}$$

$$\frac{\dfrac{P(A\cap B)}{\cancel{P(\Omega)}}}{\dfrac{P(B)}{\cancel{P(\Omega)}}}$$

Probability of B can not be zero *

$\cancel{P(B) \to 0}$

---

example

flight

we know that 90 % of the flights departs on time

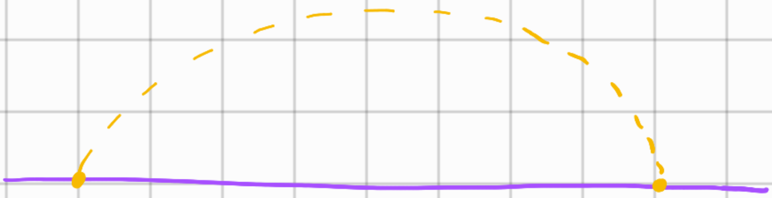
80 % of the flights arrive on time

80 % of the flights arrive on time

70 % of the flights both arrive and depart on time

a-) The flight departed on time. Prob that it will arrive on time?

b-) We know the flight arrived on time. Prob. that it had departed on time?



90 % depart

80 % arrive on time

70 / depart and arrive on time

$P(A \cap B) = 70\%$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{70}{90}$$ → A şıkkının cevabı

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow \frac{0{,}7}{0.8}$ → B şıkkının cevabı

---

if there are more than 2 events?

$P(rain \mid clouds)$

$P(rain \mid clouds, windy, \text{high humidity})$ → ikiden fazla olay olursa ne olucağını nasıl formule edebilirim

Chain Rule: (Biz böyle bir durumda chain rule kullanıyoruz)

$P(A \cap B) = P(A|B) . P(B)$ } conditional prob.

$$P(A \cap B \cap C) = P(C) . P(B|C) . P(A|BC)$$
$$= P(B) . P(A|B) \; P(C|BA)$$
$$= P(A) . P(B|A) . P(C|BA)$$

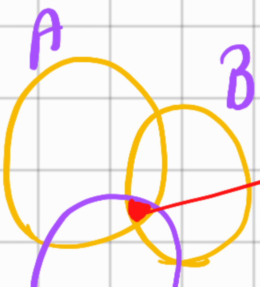
$B \cap A$, B , A → ikisi de aynı şey demek

↳ virgül

$P(A,B|C)$

$P(A \cap B|C)$

$P(AB|C)$



Bana sadece bu kısmı

$P(AB|C)$

Bu üçü de aynı şey

C

soruyor

C'nin olduğunu biliyoruz A ve B'nin olasılığı nedir?

---

3 axioms and 6 rules → Conditional probability
(Bu kuralların tümü aynı zamanda koşullu olasılık içinde geçerli)

$P(A) = 1 - P(A^c)$ → rule 1

$P(A|B) = 1 - P(A^c)$

$P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$

Independence of events

Definition: two events A and B are independent

iff : $\Longleftrightarrow$

$P(A|B) = P(A)$ (Bu örnekten dolayı bunu çıkartabilirsin)

A is independent of B

A and B are independent

$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

A rain = {Yes, No}

B = flip a coin
↳ {H,T}

(Yes or no)

$P(\text{rain} \mid T) = P(Y)$

A: Bunun olma olasılığını soruyor

B: Bunun olduğunu biliyoruz

A ve B independent olaylardır

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = \underbrace{P(A|B)}_{= P(A)} \cdot P(B)$

$= P(A) \cdot P(B)$

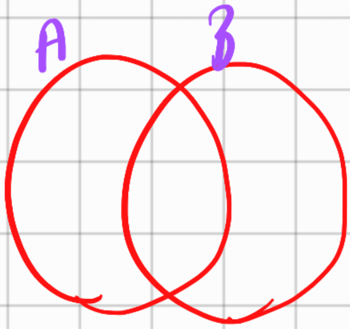
okun ucundaki formülün kanıtını yaptık

independent events

$P(A \cap B) = \underbrace{P(A)}_{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \cdot P(B)$

$P(A \cap B) \rightarrow 0$

independent ile disjoint farklı şeylerdir



independent doesn't mean the sets are disjoint

iki küme disjoint ise $A \cap B = \emptyset$ olur

the sets are disjoint

If A and B are disjoint

$A \cap B = \emptyset$

independent setsin disjoint setsle aynı olsaydı buranın $\emptyset$ olması gerekirdi

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ } independent

independents events are not disjoint

Do not confuse disjoint with independent !

Disjoint sets and independence are completely different

two independent sets can not be disjoint why because of this definition

---

Example: I roll a die and observe number x let A be an event that x is an even number and let B an even that $x > 4$

Are A and B are independent?

$A = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = 3/6 = 1/2$

$B = \{5, 6\} \rightarrow P(B) = 2/6$

whole sample space

$P(A \cap B) = 1/6$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ iki olayın bağımsız olabilmesi için bu denklemi sağlaması gerekiyor

$$\frac{1}{6} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}}_{1/6}$$

$1/6 = 1/6$ ✓

events A and B are independent

(independent)

A ve B olayları bağımsız çünkü bu denklemi sağlıyor

---

example:

flight example

$P(A) = 80\%$

$P(D) = 90\%$

$P(A \cap D) = 70\%$

A and B are not independent

Are A and D independent ?

$P(A | D) = P(A) \rightarrow 7/8 \overset{?}{=} P(A) = 8/10 \quad 7/8 \neq \frac{8}{10}$

$P(D | A) = P(D) \rightarrow \frac{7}{8} \neq \frac{8}{10}$

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ → independent olması için bu denklemi sağlaması gerekir

$0.7 \overset{?}{=} 0.8 . 0.9$ they are not equal

P(A) and P(D) are not independent

---

independence of 3 events

$P(A \cap B) = P(A).P(B)$ → Mesela bu denklem sağlanırsa biz A ve B independent dicez

$P(A \cap C) = P(A).P(C)$

$P(B \cap C) = P(B).P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B).P(C)$ → A, B and C

$P(A\cap B\cap C) = P(A).P(B).P(C) \longrightarrow$ A, B and C are independent

---

Conditional independence

$P(A\cap B) = P(A).P(B)$

two events A and B are conditionally independent given C iff

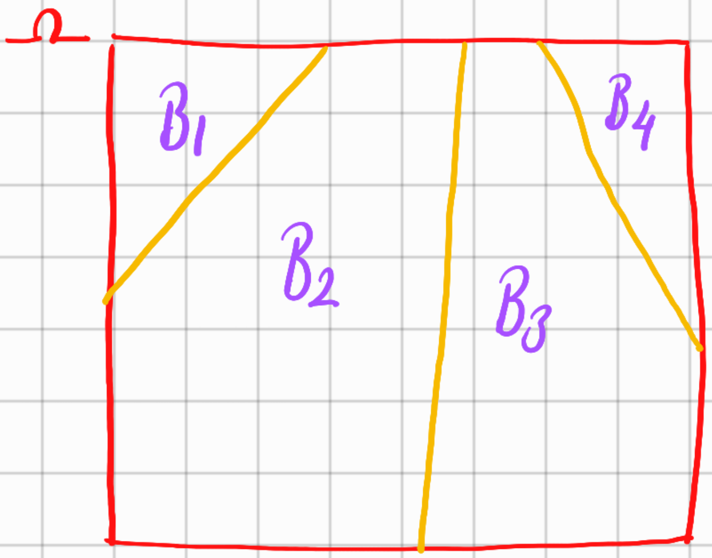
$$P(A\cap B \mid C) = P(A\mid C).P(B\mid C)$$

Bu durumda a and b are not independent they we say conditionally independent given C diyoruz

---

Law of total probability (toplam olasılık kanunu)

Let $B_1, B_2, \ldots, B_n$ be a partition of Ω and $P(B_i) > 0$



for any event A we have

$$P(A) = \sum_i \phi(A\cap B_i)$$

$$= \underbrace{\sum P(A\mid B_i)\, P(B_i)}_{\text{Law of total probability}}$$

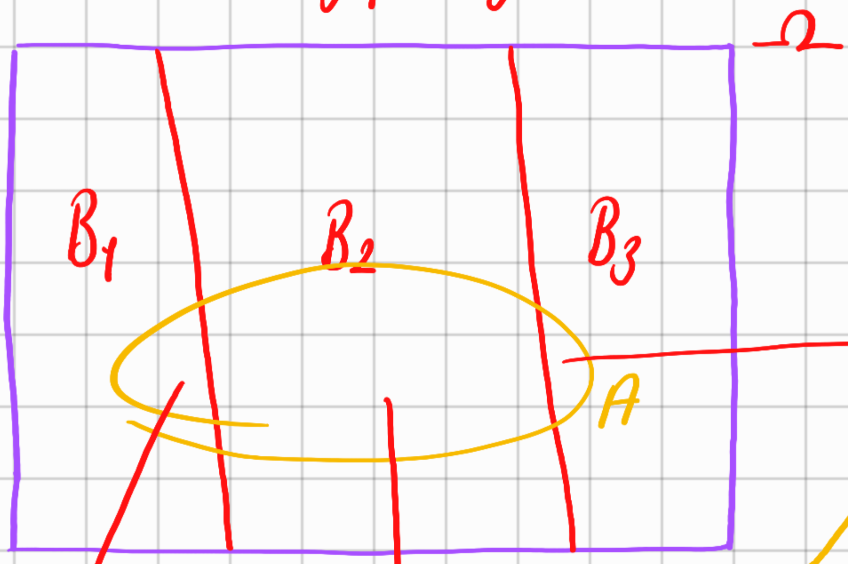
$(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) = \Omega$

partition

Bu kümelerin hepsi disjoint ise

Biz bunu bayes rule için kullanıcaz

Biz bu formulü $b_1, b_2 \ldots$ partition olursa yapabiliyoz



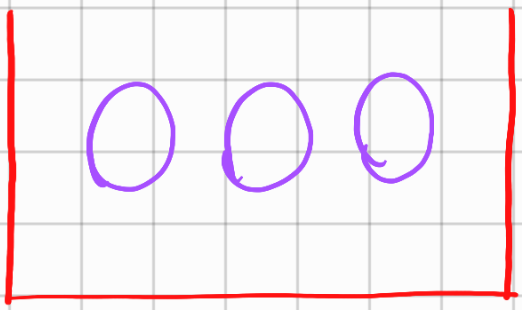
$(A \cap B_3)$

$(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup$

it gives me probability of a so $P(A)$

Bayes Rule

example



3 unfair coins

we know that $P(H|C_1) = 0.8$

for coin1 $P(H) = 0.8 - P(T) = 0.1$

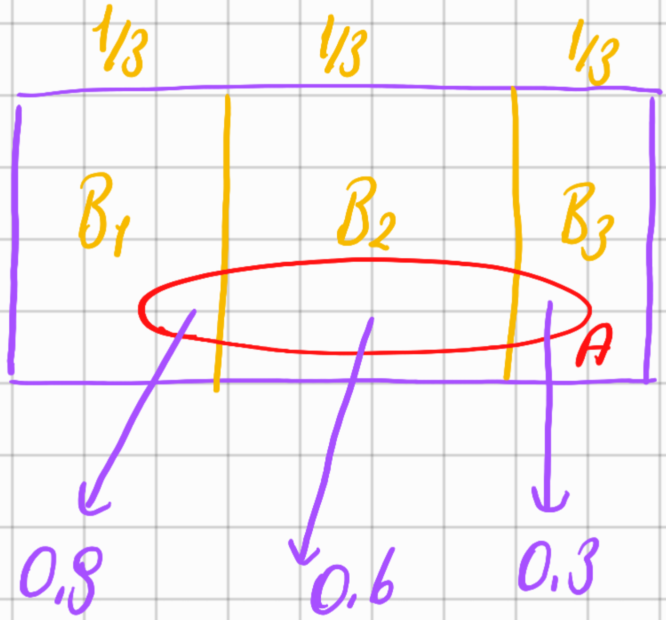
for coin2 $P(H) = 0.6 \rightarrow P(H|C_2) = 0.6$

for coin3 $P(H) = 0.3 - P(T) = 0.7 \rightarrow P(H|C_3) = 0.3$

a-) We draw a coin randomly and we flip

$P(H) = ?$

Law a total prob.



$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

$$\rightarrow \underbrace{0.8 \cdot 1/3}_{0.3} + \underbrace{0.6 \cdot 1/3}_{0.2} + \underbrace{0.3 \cdot 1/3}_{0.1}$$

$\frac{0,6}{5}$

Bayes Rule

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$ → Bayes Rule

b-) if we get H what is the probability we draw the first coin?

$P(C_1|H) = ?$

Example: In previous example

if a draw heads, probability drawing coin1?

$$P(C_1|H) = ?$$

$$P(H|C_1) = 0.8$$

$$P(H|C_2) = 0.6$$

$$P(H|C_3) = 0.3$$

$$P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = 1/3$$

$$\left. P(C_1|H) = \frac{P(H|C_1) \cdot P(C_1)}{P(H)} \right\} \text{Bayes Rule}$$

$$= \frac{0.8 \cdot 1/3}{\underbrace{0.6}_{0.9 \cdot 1/3 + 0.6 \cdot 1/3 + 0.3 \cdot 1/3}} = 1/2$$