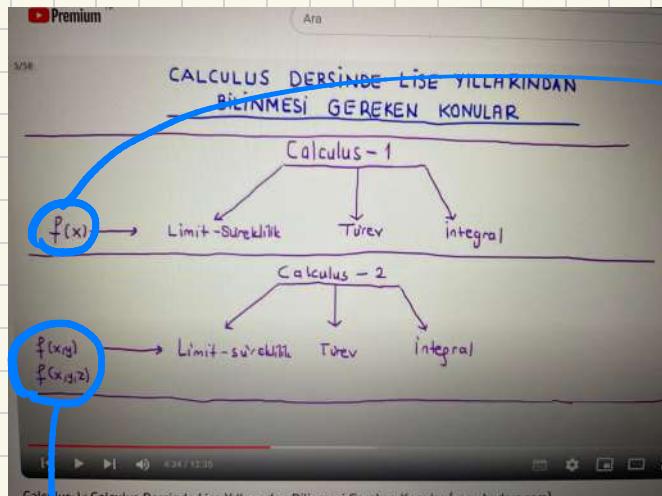


Mart 1



tek değişkenli

çok değişkenli

Bilinmesi Gerekenler

Fonksiyonlar

- Tanım ve görüntü kumesi bulma
- Ters fonksiyon
- Bileşle fonksiyon
- Parçalı Fonksiyonlar ve grafikleri çizme

Analytik Geometri

- Eğim Bulma
- Doğru denklemi yazma
- Doğru grafiklerini çizme
- Doğruların birbirlerine göre durumları

Trigonometri

- * $30^\circ - 45^\circ - 60^\circ$ ve $0^\circ - 90^\circ - 180^\circ - 270^\circ - 360^\circ$ değerlerini bulma.
- * Trigo bağıntılar
- * Yarım açı formüller
- * Ters trigo fonksiyonlar

Parçalı Fonksiyon Grafği:

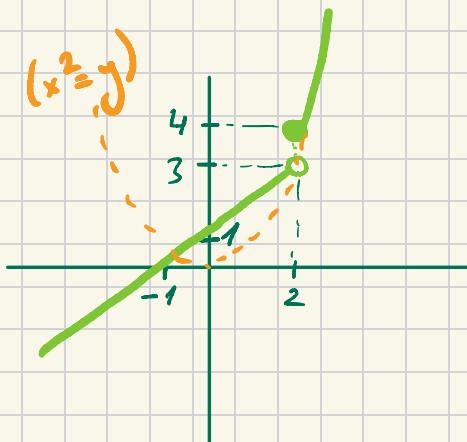
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 3 \\ x^2+1, & x \leq 3 \end{cases} \quad x=3 \text{ parçalama noktasıdır.}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ 2x-1, & 2 \leq x < 5 \\ x^2+3, & 5 \leq x \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array} \right\} \text{parçalama noktaları}$$

Soru:

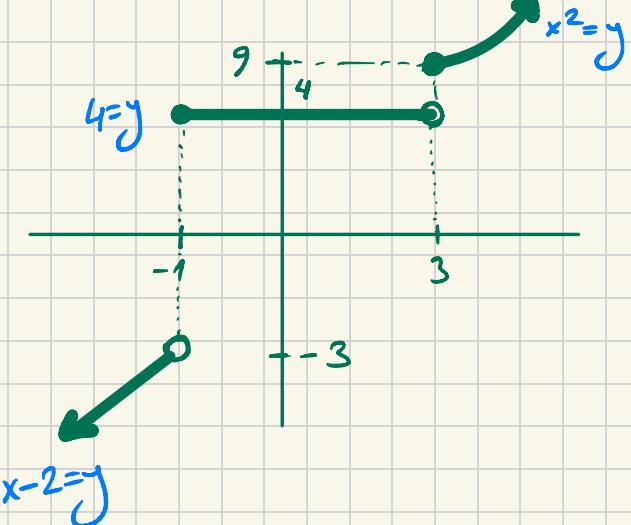
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 2 \\ x^2, & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{grafikinizi çiz.}$$

$x=2$ parçalama noktası

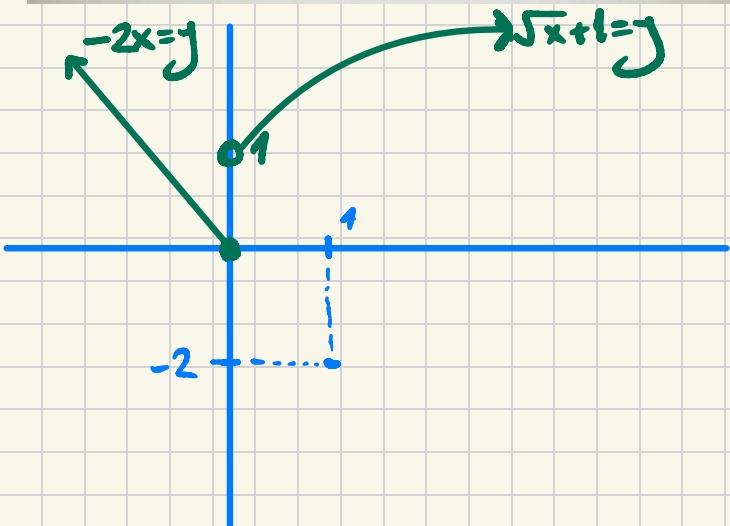


Soru:

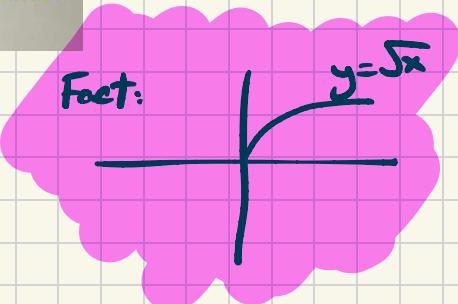
$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x < -1 \\ 4, & -1 \leq x < 3 \\ x^2, & 3 \leq x \end{cases}$$



Soru: $f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x+1}, & x > 0 \end{cases}$ grafigini çiziniz.



Fact:



Calculus'te Trigo Kuralları

① $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
 $\rightarrow 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$

② $\tan x \cdot \cot x = 1 \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1$

③ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

④ $\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$

Yarım Açı Kuralları

⑤ $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

⑥ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \longrightarrow \frac{x-1}{x+3} \geq 0$$

$(-\infty, -3) \cup [1, \infty)$

farklı tanım kümeleri bulma örneği

$$f(x) = \log_{(x-2)}(x+5) \longrightarrow$$

$x-2 > 0$	$x+5 > 0$	$x-2 \neq 1$
$x > 2$	$x > -5$	$x \neq 3$

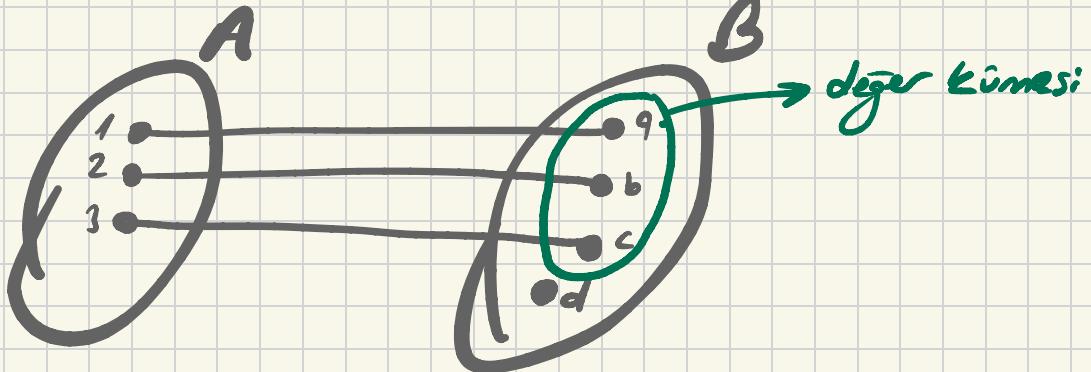
log fonksiyon tanım kümeleri bulma

$$f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) \longrightarrow$$

$$\begin{array}{c} x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x \quad -2 \\ \times \quad -1 \end{array}$$

$$(x-2)(x-1) > 0$$

Görüntü Kümesi: Bulma



$$f(x) = 3$$

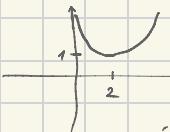
domain = tanım Kümesi =

range = görüntü Kümesi = $\{3\}$

paraboller

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{ görüntü Kümesi}$$

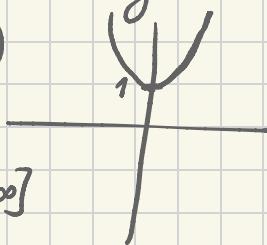
$$T(r, k) \Rightarrow r = \frac{-b}{2a} \quad k = f(r)$$



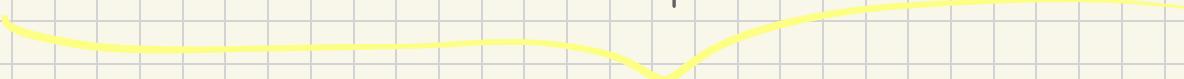
$$\text{görüntü Küme} = [1, \infty]$$

$$f(x) = 2x^2 + 1 \text{ görüntü Kümesi}$$

$$(0, 1)$$

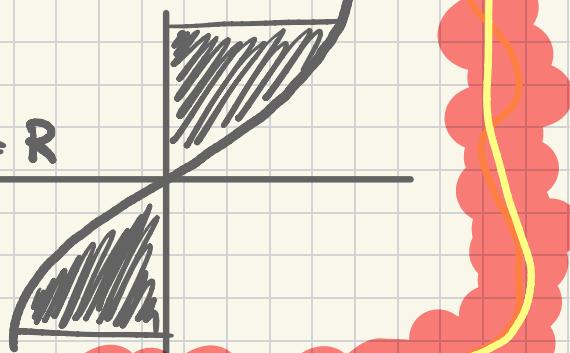


$$[1, \infty]$$

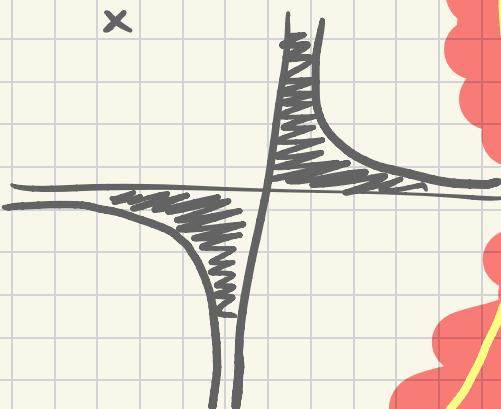


$$f(x) = x^3$$

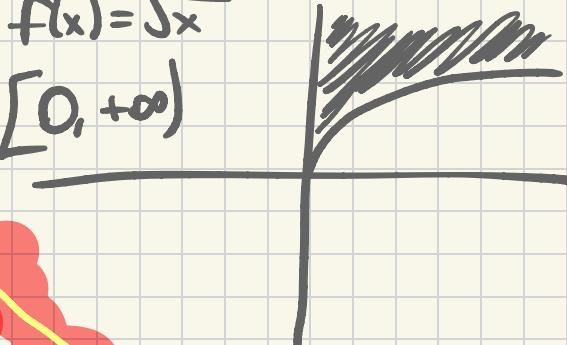
görsüntü kümə = R



$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$[0, +\infty)$$



**
* $f(x) = \frac{3x-4}{x-5}$

$$T.K = R - \{5\}$$

$$\tilde{f}'(x) = \frac{5x-4}{x-3}$$

$$G.K = R - \{3\}$$

$$f(x) = \sin x \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad GL = [-1, 1]$$

$$f(x) = \cos x \quad -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$f(x) = 1 + \sin x \quad 0 \leq 1 + \sin x \leq 2$$

$$f(x) = 2 \cos x + 1 \quad -1 \leq 2 \cos x + 1 \leq 3$$

Limit Nedir?



Limit

Sayıya giden

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (3x-2)$$

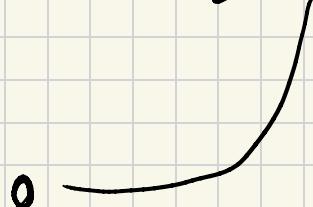
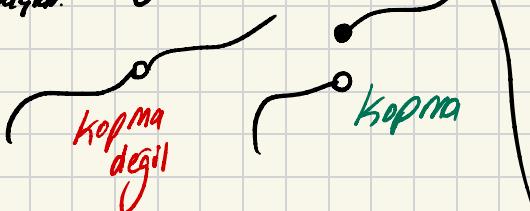
Sonsuza giden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Amaç: Fonk. limitin aradığı noktada kopup kopardığını belirtmesi.
amaçlar.

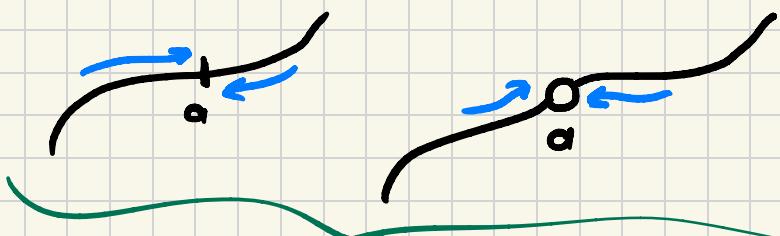
Amaç: Sonsuza giderken dövranışının, incelenmesi.



Bir Noktada Limit Olma Şartı

$f(x)$ 'in $x=a$ nok. limit olmas. için

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$



Kesinlikle
geçerlidir.

Ör/
 $\lim_{x \rightarrow 3} (2x-1) = ?$

$$\frac{5+1}{3}$$

$$y = 2x - 1$$

Ör/
$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{x-5} = \frac{10}{0}$$

Sağdan ve soldan bakılmalı.

* Önemli olan 3 ihtiialı vardır.

- 1) Parçalı fonksiyonlarda
- 2) Muttak Değerli
- 3) $\frac{\text{Sayı}}{0}$ durumu

Parçalı Fonk. Limit

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x > 3 \\ x^2+1, & x \leq 3 \end{cases}$$

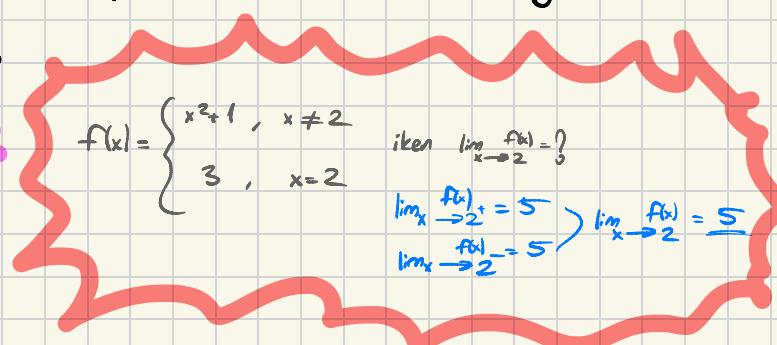
parçalanma noktasında kırma adayıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$$

yoktur.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 10$$



$$\text{iken } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

Mutlak Degerli Limit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = ?$$

* önce mutlak d. kurallı uygulanır:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

\lim yok

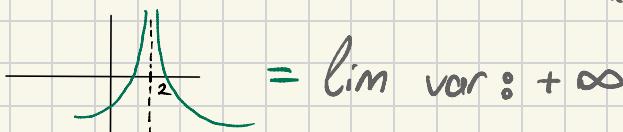
Belirsizlikte mutlaka limit vardır.

$$\frac{0}{0}, \infty - \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}$$

Tanımsızda Limit

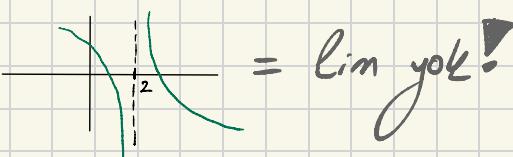
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0} \text{ tanımsız} \implies$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

\lim yok.



Belirsizlikte Limit (L'Hopital Kullanmadan)

$$1) \frac{0}{0}$$

$$3) " \infty - \infty "$$

$$5) 1^0, \infty^0$$

$$2) \frac{\infty}{\infty}$$

$$4) 0 \cdot \infty$$

$$0^0$$

L'Hospital ile neyi
çözüür.

L'Hospital Kuralı olmadan
gözülebilir.

1) Garipslara Ayrma

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{0}{0}$$

2) Eşlenik Garipmi

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+11} - 4}{2x - 10} = \frac{0}{0}$$

3) Trigonometrik Kurallar

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow 1$$

Eşlenik Belirsizlikler:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[2]{x+7} - 3}{x-2} = ?$$

$$\frac{(\sqrt{x+7} - 3) \cdot (\sqrt{x+7} + 3)}{\sqrt{x+7} \cdot (\sqrt{x+7} + 3)}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 25 \\ x=25}} \frac{\sqrt{x+1} - 4}{x^2 - 25} = ?$$

$(x^2 - 25) \cdot (\sqrt{x+1} + 4)$ = $10 \cdot 8 = 80$

$2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Trigonometrik Belirsizlikler

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

böyle kabul edilir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$+\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{bx} = \frac{1}{b}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

$$\star \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x} = ? \rightarrow \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{x}{\tan 5x} \underbrace{=}_{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(a)}{a} = 1$$

$a = x-3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x-3) \cdot \sin x}{\cos x \cdot x} = ?$$



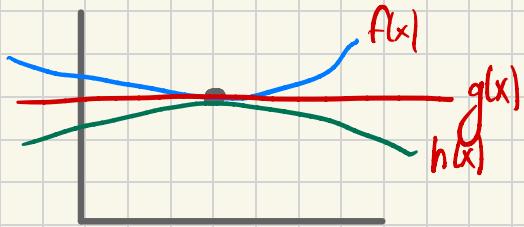
$$\cancel{\frac{2x-3}{\cos x}} \cdot \cancel{\frac{\sin x}{x}}^{-3} \cdot 1 = -3$$

Sıkıştırma Teoremi

Sıkıştırma Teoremi: $f(x), g(x), h(x)$ üç fonk olsun.

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$



Soru:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = ?$$

$-x \leq x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{array} \right\} 0$

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$$

$$-x \leq x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (x) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Soru:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = ?$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$-\infty$ $+\infty$

Sıkıştırma ile çözülemez

Soru:

$$\sqrt{4-x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{4+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4-x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4+x^2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

Sonsuza Giden Limitler

Sonsuza Gitme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

x değerleri $+\infty$ doğru artarken
 $f(x)$ değerlerinin ne yaptığına cevaplar

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

x değerleri $-\infty$ doğru azalarken
 $f(x)$ değerlerinin ne yaptığına cevaplar

Soru: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty //$

$$x = 1 \rightarrow 1$$

$$x = 10 \rightarrow 100$$

$$x = 20 \rightarrow 400$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty //$

$$x = -1 \rightarrow 1$$

$$x = -10 \rightarrow 100$$

$$x = -20 \rightarrow 400$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 5x - 7) = +\infty$ } en büyük derece öncemsiz

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 5x - 7) = -\infty$ } öncemsiz

Sonsuza Giden Limit Kuralları

Kural:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{Pay polinom}}{\text{Payda polinom}}$$

$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty}$ $\xrightarrow{x \rightarrow -\infty}$

① Payda derece > Pay derece

Sonuç = 0 //

② Payda derece = Pay derece

Derece belirleyen teriminin KATISI ORANI cevaptr.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{4x+5} = \frac{3}{4}$$

③ Pay derece > Payda derece

Sonuç $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ $\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-5x+4}{-5x+7} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-6x-7}{-6x+3} = +\infty$$

yerine yar.

Alternatif Yol:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

$$\underline{\underline{D = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2}}}$$

Pay ve Paydada Polinom
Dizi ifadeler

$$x^x > x! > 5^x > 3^x > 2^x > x^{10} > x^5 > \log > \text{trigo}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\cos x) \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{c} \text{lim yoktur.} \\ \text{lim yoktur.} \end{array} \right\}$

Soru:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x + 3^x - 1}{5^{x+1} + 2^x - x^7} = ?$$

$$\cancel{\frac{5^x \left(1 + \left(\frac{3}{5}\right)^x\right)^{10} - \frac{1}{5^x}}{5^x \left(5 + \left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^{10} - \frac{x^7}{5^x}}} = 0$$

$$\cancel{\frac{5^x \left(5 + \left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^{10} - \frac{x^7}{5^x}}{5^x \left(5 + \left(\frac{2}{5}\right)^x\right)^{10} - \frac{x^7}{5^x}}} = 0 = \frac{1}{5}$$

Soru:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-5}{x^2+7x-3} =$$

$$\frac{x(2-\cancel{\frac{5}{x}})^0}{x^2(1+\cancel{\frac{7}{x}}-\cancel{\frac{3}{x^2}})^0} =$$

$$\frac{4x^2-5x+1}{2x^2+7x-3} = \frac{8=4}{2=2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+7x-3}{x^2(4-\cancel{\frac{5}{x}}-\cancel{\frac{1}{x^2}})^0} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-6x+7}{2x-3} = \frac{3x^2-6}{2} = +\infty$$

$$\frac{x^3(1-\cancel{\frac{6}{x^2}}-\cancel{\frac{7}{x^3}})^0}{x(2-\cancel{\frac{3}{x}})^0} =$$

$$\frac{x^3}{2x} = \frac{x^2}{2}$$

+∞

Soru:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x! + \ln x}{\sin x + x} = ?$$

en büyükler

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x! \left(1 + \frac{\ln x}{x!}\right)^{\overrightarrow{0}}}{x \left(\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{0} 1\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)! = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin x = \text{lim yok}$$

$$-1 < \sin x < 1$$

$$-x < x \cdot \sin x < x$$

Kök ve Mutlak Değer ikeren Sonsuz Limittler

Mutlak Değer ikeren Sonsuz Giden Limittler

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{|2x-3|+x}^{+\text{(Sonsuza gidiyor)}}}{5x+1} = \frac{3x-3}{5x+1} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x-3|+x}{5x+1} = \frac{-2x+3+x}{5x+1} = \frac{-x+3}{5x+1} = \frac{-1}{5}$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty - \infty = \text{belirsizlik}$$

Kök ikeren Sonsuz Giden Limittler

1-Kesirli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1} + x-2}{3\sqrt{x^3+x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1} + 4x-3}{3\sqrt{x^3+x^2+x+1}} = ?$$

$\sqrt{x^2 \cdot (1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2})} + x(4 - \frac{3}{x}) \xrightarrow[0]{}$
 $\frac{|x| + 4x}{x} = 5$
 $3\sqrt{x^3(1 + \dots)} \xrightarrow[0]{}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-5x+1} + 4x-3}{3\sqrt{x^3+x^2+x+1}} = ?$$

$$\frac{|x| + 4x}{x} = 3$$

2-Kesirsız

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x} - 3x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3x+4} - \sqrt{x^2+x+1})$$

$$\frac{(\sqrt{x^2-3x+4} - \sqrt{x^2+x+1})(\sqrt{x^2-3x+4} + \sqrt{x^2+x+1})}{(\sqrt{x^2-3x+4} + \sqrt{x^2+x+1})}$$

$$\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-3x+4} + \sqrt{x^2+x+1}} \Rightarrow \frac{x(-4 + \frac{3}{x})}{|x| + |x|} \xrightarrow[0]{}$$

$$\frac{-4x}{2x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-5x}{1-x}$$

$\frac{(1-\cancel{5x})(1+\cancel{5x})}{(1-\cancel{x})(1+\cancel{5x})}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{-\cancel{x}^{\frac{1}{2}} + \cancel{x}^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{x^2-9} + \quad \quad \quad \begin{array}{l} \text{1) parabolik fonk} \\ \text{2) } \frac{\text{sayı}}{0} \quad \checkmark \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}$$

$\overline{-\infty}$

3) mutlak değer için
0'layan \times

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{|x-5|}{x-5} \quad \text{bu var ise bulunuz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} = 1 \quad \text{lin. yz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 5^+} 1 \quad \text{lin. yz.}$

$\lim_{x \rightarrow 5^-} -1$

Payda en degeri ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = ?$$

Payda'da en degeri ∞

$\frac{1}{\infty} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{5x^2} = \frac{\sin 3x}{5x} \cdot \frac{\sin 3x}{x}$$

$\frac{\sin 3x}{5x} \cdot \frac{\sin 3x}{x}$

$\frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 5} = \frac{x^2(1 + \frac{2}{x^2})^0}{x(1 - \frac{5}{x})^0} = \infty$$

$\frac{2x}{1} \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 8}{3x^3} = \frac{x^2(1 + \frac{-4}{x} + \frac{8}{x^2})^0}{3x^2 x} = \frac{1}{3x} = 0$$

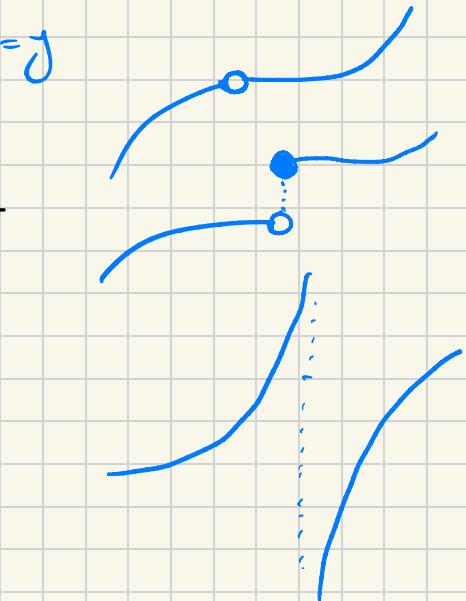
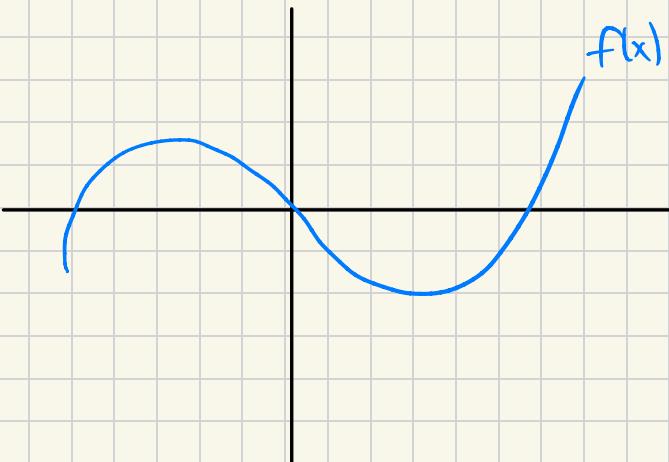
$\frac{2x-4}{9x^2} \rightarrow \frac{2}{18x} \rightarrow \frac{1}{-\infty} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} (\sec x) = \frac{1}{\cos} = \frac{1}{0} \rightarrow^{+\infty}_{-\infty}$$

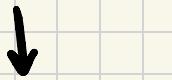
$\frac{1}{\cos(90^\circ)} = -\infty$

$\frac{1}{0^-} = -\infty$

Süreklik Nedir?



Süreksizlik



Tanımsızlık kılarda
tartımasız süreksiz
noktalardır.



Parçalı fonksiyonların
parçalanma noktası
süreksiz olabilir
(kesin değil)

Süreklik Şartı

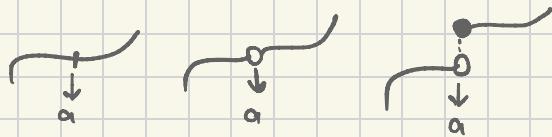
her yerde
sürekli

Süreksiz

Süreksiz

Süreksiz

Grafik Yolken Süreklik Tespiti



$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{var.}$ var
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{yok.}$ yok
Süreklik var yok

Limit gereklisi şart yeterli değil !



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \\ f(a) =$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Süreklikte şartdır.

Süreksizlik

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

$x=3$ tanımsız
süreksiz

Tanımsızlık

$f(3)$ yoktur.

Fasal. Fonk



$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , x > 5 \\ x+1 & , x \leq 5 \end{cases}$$

Süreksiz olabilir.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

-1 muhakkak sürekli yayar.

$$R - \{-1\}$$

$$f(x) = \underbrace{\sqrt[3]{x-1}}_{\text{sonun yek}} + \underbrace{\sqrt{x}}_{x \geq 0}$$

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$$

$$\frac{x}{x+1} \geq 0$$

$$\frac{-1}{x+1} - \frac{0}{x+1}$$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

$$\begin{matrix} -3 \\ -1 \end{matrix}$$

$$(x-3) \cdot (x-1) \geq 0$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

$$(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [3, \infty)$$

$$(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup [3, \infty)$$

$$\boxed{-} - \boxed{-}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-2}, & x < 3 \\ \frac{2x+1}{x^2-16}, & 3 \leq x \end{cases}$$

$$\frac{\text{Muhakkak}}{2, -4, 4}$$

sürekli noktaları bulunuz.

$$\begin{array}{l} \text{tanımlı} \\ x=2 \\ x=-4, 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{parabolik} \\ x=3 \end{array}$$

sürekli

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 3, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ bx - 1, & x > 2 \end{cases}$$

her noktasında sürekli ise $a+b=7$

$$2a+7=5$$

$$a=-1$$

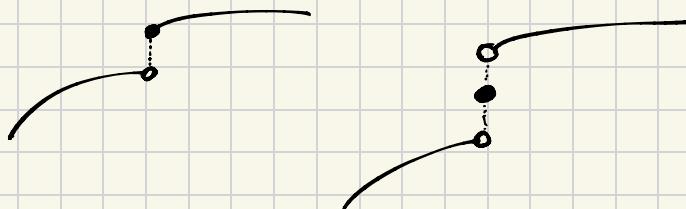
$$2b-1=5$$

$$b=3$$

$$\boxed{2}$$

Süreksizlik Geçitleri

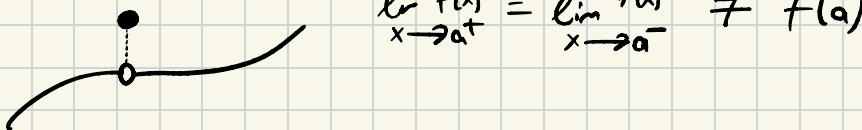
1. Atlama Süreksizliği (Jump discontinuity)



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

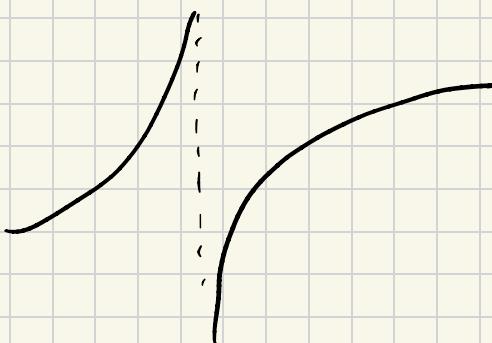
$f(a)$

2. Kaldırılabilir Süreksizlik (Removable discontinuity)



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$$

3. Sonsuzluk Süreksizliği (Infinity discontinuity)



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \rightarrow +\infty, -\infty$$

↑ ↓

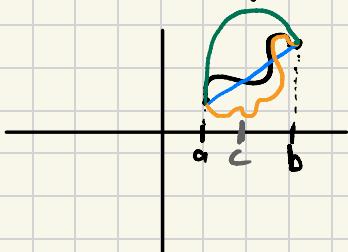
$$\lim_{x \rightarrow a^-} \rightarrow -\infty, +\infty$$

Ara Değer Teoremi (Intermediate Value Theorem)

$f(x)$ fonk $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.

$$f(a) \neq f(b) \text{ ise}$$

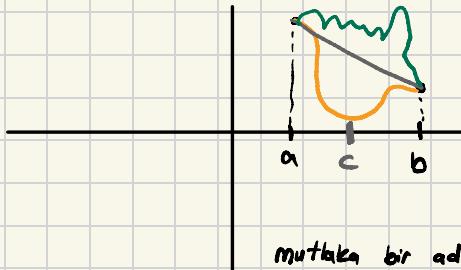
$$f(a) < f(b)$$



mutlaka bir adet

$f(a) < f(c) < f(b)$ olan
c değeri vardır.

$$f(a) > f(b)$$



mutlaka bir adet

$f(a) > f(c) > f(b)$ olan
c değeri vardır.

Ara Değer ile Kök ispatlama

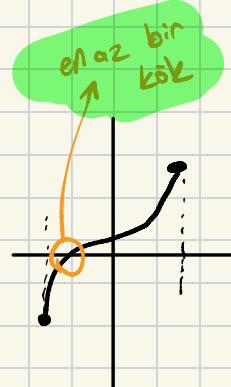
$f(x) = 0$ ekmeksi sağda en x değerine kök denir

$f(x)$ fonk $[a, b]$ aralığında sürekli olsun.

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \text{ ise}$$

en az bir kök vardır.

$\frac{f(a)}{-}$	$\frac{f(b)}{+}$
$+$	$-$



$$\frac{e^{tanx}}{2} - \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2} = f(0)$$

$$\frac{e}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1. \frac{|x-a|}{x-a} \cdot g(a) + |x-a| \cdot g'(a) = f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$$

$$\frac{x-a}{x-a} \cdot g(a) + 0 = \frac{-x+a}{x-a} \cdot g(a) + 0$$

$$2g(a) = 0 \\ g(a) = 0$$

$x^3 - 5x + 1 = 0$ $[1, 3]$ aralığında en az bir kökü olduğunu ispatlayınız.

→ sürekli dir

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -3 \\ f(3) = 13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{mutlaka bir} \\ \underline{\text{kök}} \text{ var.} \end{array}$$

Ara Değer ile ikinci Fonk Kesitlerini ispatlama

$$f(x) = x^4 - 5x^2 \text{ ve } g(x) = 2x^3 - 4x + 6$$

→ sürekli dir.

$x=3$ ve $x=4$ arasında kesitlerini ispatlayınız.

$$x^4 - 5x^2 = 2x^3 - 4x + 6$$

$$h(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x - 6$$

$$\left. \begin{array}{l} h(3) = -12 < 0 \\ h(4) = 58 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{en az} \\ \text{bir kök} \end{array}$$

Bir Aralıkta Bir Kök Olduğunu ispatlama

$$f(x) = x^4 + 3x + 1 \quad [-2, -1] \quad \text{tek kök olduğunu ispatlayınız.}$$

↓
sürekli

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = 11 > 0 \\ f(-1) = -1 < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{en az} \\ \text{bir kök vardır.} \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} f'(x) = 4x^3 + 3 \\ -2 \leq x \leq -1 \\ -8 \leq x^3 \leq -1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{daima} \\ \text{azaboldır.} \end{array}$$

$-27 \leq 4x^3 + 3 \leq -1$

Türev Var Olma Şartı

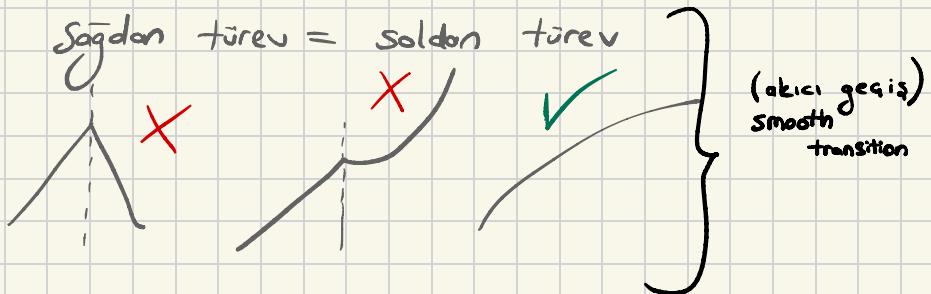
1. Şart: Fonksiyon o noktada sürekli olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

1) Sürekli

2) Smooth transition

2. Şart: $f'(a^+) = f'(a^-)$



$f(x) = |x|$ 0'da türev yoktur.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ +x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 2ax+a &= 6a+b=5 \\ 5-\frac{12}{5} &= 5a=2 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+ax+b, & x \geq 2 \\ 3x-1, & x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

her noktada türevli ise
 $a+b=?$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 4+2a+b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 5 \\ 2a+b &= 1 \end{aligned}$$

$$a=-1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \geq 2 \\ 3, & x < 2 \end{cases}$$

$$a+b=2$$

Türev Tanım Kuralları

$$f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

1. türev tanım kuralı : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

2. türev tanım kuralı : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$
x yerine (h+a) yazılır.

$$f(x) = x^3 \quad \lim_{h \rightarrow 0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \underline{\underline{3a^2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \quad \frac{h \cdot ((a+h)^2 + (a+h)a + a^2)}{h} = \underline{\underline{3a^2}}$$

Türev Kuralları

$$f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow f''(x) \rightarrow f'''(x) \rightarrow f^{(4)}(x)$$

$$f(x) \rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} (f(x)) = f''(x)$$

1- Sabit sayının türevi 0'dır.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \neq \frac{dy^2}{dx^2}$$

$$2 - f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$$

$$3 - f(x) = x^n \rightarrow n \cdot x^{n-1}$$

Yardımcı Kural: Toplama - Çıkarma da türev ayrı ayrı alınır.

4- Parantezli Türev

$$f(x) = (g(x))^n \rightarrow f'(x) = n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$$

5- Üstel Fonksiyon Türevi

$$f(x) = a^x \quad a = \text{sbt}$$

$$\left[a^x \right]' = 1 \cdot a^x \cdot \ln a$$

a) $f(x) = e^{g(x)}$

b) $\downarrow^{g(x)}$ $k > 0$ ve $k \neq 1$

e ayrı yazılır. üssünün türevi yanına çarpım olarak yazılır.

$$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \cancel{1}$$

$$f'(x) = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$$

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = e^{-x} \cdot -1$$

$$f(x) = 2^x \rightarrow f'(x) = 2^x \cdot 1 \ln 2$$

$$f(x) = 5^{x^3} \rightarrow 5^{x^3} \cdot 3x^2 \ln 5$$

$$f(x) = 3e^{5x+4} \rightarrow f'(x) = 3e^{5x+4} \cdot 5$$

Logaritmalarda Türevi

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$\ln = \log_e$$

$$f(x) = \ln(g(x))$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \cancel{y^e}^1$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln(x^2+1) \rightarrow f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$f(x) = \log_a g(x)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \cdot \log_a e$$

$$f(x) = \log_3(2x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x-1}$$

$$f(x) = \log_5(x^2+x-1) \Rightarrow f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \cdot \log_5 e$$

Trigonometrik Türev Kuralları

$$f(x) = \sin(g(x)) \rightarrow f'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \sin x \rightarrow \cos x$$

$$f(x) = \sin 4x \rightarrow \cos 4x \cdot 4$$

$$f(x) = \sin(x^2+1) \rightarrow \cos(x^2+1) \cdot 2x$$

$$f(x) = \cos(g(x)) \rightarrow f'(x) = -\sin(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = (1 + \tan^2 g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \sec^2 g(x) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 g(x)} \cdot g'(x) = \sec^2(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = \tan(g(x)) \rightarrow$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \cot g(x) \longrightarrow f'(x) = - (1 + \cot^2 g(x)) \cdot g'(x)$$

↓

$$f'(x) = -\csc^2(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sin^2 g(x)} \cdot g''(x)$$

- cosec² +

$$\textcircled{5} \quad f(x) = \sec(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \sec g(x) \cdot \tan g(x) \cdot g'(x)$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \operatorname{cosec}(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\csc g(x) \cdot \cot g(x) \cdot g'(x)$$

Ters Trigonometrik Fonk. Türevi

$$\begin{aligned} \cos' &= \frac{\cos x}{\sin x} \\ \tan' &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \arcsin(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \arccos(g(x)) \longrightarrow f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \arctan(g(x)) \longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \operatorname{arccot} g(x) \longrightarrow f'(x) = -\frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$$

$$f(x) = \sin x^2 \rightarrow f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$$

$$f(x) = \sin^2 x \rightarrow f'(x) = 2 \cdot (\sin x)' \cos x \cdot 1$$

$$f(x) = \cos x^2 \rightarrow f'(x) = -\sin x^2 \cdot 2x$$

$$f(x) = \cos^2 x \rightarrow 2 \cdot (\cos x)' \cdot -\sin x \cdot 1$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow 2(\ln x)' \cdot \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \ln x^2 \rightarrow \frac{2x}{x^2}$$



Görümlü ve Bölüm Türevi

$$f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f(x) = x e^x \rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x \cdot 1 = e^x + x e^x$$

$$f(x) = x \ln x \rightarrow \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f(x) = e^{2x} \cos 3x \rightarrow e^{2x} \cdot 2 \cdot \cos 3x + e^{2x} \cdot (-\sin 3x) \cdot 3$$

$$f(x) = (x^3 + 1) \cdot \tan 2x \rightarrow 3x^2 \cdot \tan 2x + (x^3 + 1) \cdot \sec^2 2x \cdot 2$$

$$f(x) = (2x-1)^5 \cdot (x+2)^6 \rightarrow 5 \cdot (2x-1) \cdot 2 \cdot (x+2)^6 + (2x-1)^5 \cdot 6(x+2)^5 \cdot 1$$

Bölümün Türevi

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

Mutlak Değerin Türevi

$$f(x) = |g(x)| \longrightarrow$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot \frac{|g(x)|}{g(x)}$$

$$\frac{|g(x)|}{g(x)} = \begin{cases} 1, & g(x) \geq 0 \\ -1, & g(x) < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = |x^3 + 1| = 3x^2 \cdot \frac{|x^3 + 1|}{x^3 + 1}$$

$$f(x) = |x^3 + x^2 + 3x - 1|$$

$$f'(x) = (3x^2 + 2x + 3) \cdot \frac{|x^3 + x^2 + 3x - 1|}{x^3 + x^2 + 3x - 1} = 11 \cdot \frac{11}{-11} = \underline{\underline{-11}}$$

* Mutlak değerin içini "0" yapın x değerinde türev yoktur.

$$f(x) = |x-3| \longrightarrow f'(3) \text{ yoktur.}$$

Parametrik Fonksiyonların Türevi

$$y = 2x - 3$$

$$x = t^2 + 1$$

$$y = 2(t^2 + 1) - 3 = 2t^2 - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ x = t^2 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2t^2 - 1 \end{array} \right\}$$

$$x = f(t)$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

$$y = g(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Soru:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3t^2 - 5t + 1 \\ x = t + 6 \end{array} \right.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t - 5}{1}$$

$$y = e^\alpha + 2\alpha - 1$$

$$x = \alpha^2 - 3\alpha + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = ? \quad \frac{e^\alpha + 2}{2\alpha - 3}$$

Soru:

$$y = \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$$

$$x = 3\alpha - 2$$

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha + 1}{3}$$

$$b) \frac{dy}{dx} \Big|_{\alpha=2} = \frac{17}{3}$$

$$c) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=7} \quad \alpha=3 \quad \frac{34}{3}$$

Parametrik Fonksiyonun 2. Türevi

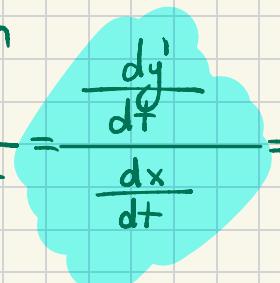
$$y = t^2 - 3t + 1 \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = ?$$

$$x = t^2 + 1$$

1. adim

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \rightarrow \frac{2t-3}{2t} = y'$$

2. adim

$$\frac{\frac{d^2 y}{dt^2}}{\frac{d^2 x}{dt^2}} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^2-4t+6}{4t}$$


Soru:

$$y = a^2 + 3a$$

$$x = 4a-1$$

ise

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2a+3}{4}$$

$$\frac{2a+3}{4} = y'$$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{dy'}{da} \\ \frac{dx}{da} \end{array} \right| = \frac{\frac{2x}{4 \cdot 4}}{\frac{4}{4}} = \frac{1}{8}$$

Zincir Kuralı (Chain Rule)

$$y = 3x^2 - 5x + 1$$

$$x = 2a^3 + 1$$

$$a = 4t^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$\left\{ \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{da} \cdot \frac{da}{dt} = \frac{dy}{dt} \right.$

Soru: $y = 2x^2 - 5x + 1$

$$x = 2t^2 + 1$$

$$t = 3a - 1$$

$$\frac{dy}{da} \Big|_{a=2}$$

nedir

$$(4x-5) \cdot (4t) \cdot 3$$

$$199 \cdot 20 \cdot 3 = 11940$$

Bileşke Fonksiyonunun Türevi

$$f(x) = 2x - 1$$

$$f \circ g(x) = 2(3x+2) - 1 = 6x+3$$

$$g(x) = 3x+2$$

$$g \circ f(x) = 6x-1$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$\star \star$ $f(2x-3) \longrightarrow$ bileşke fonksiyon

Soru:

$$f(x^2) = 4x^2 - 7x + 3 \Rightarrow f'(4) = ?$$

$$f'(x^2) \cdot 2x = 8x - 7$$

$$f'(x^2) = \frac{8x-7}{2x}$$

$$f'(4) = \frac{9}{4}, \frac{23}{4}$$

Ters Fonksiyonun Türevi

$$f(x) = 3x - 1$$

$$f^{-1}(y) = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$$

$$(f^{-1})'(x)$$

↓
fonk tersini alır,
ardından türev

Soru: $f(x) = 5x - 4$ ise

$$(f^{-1})'(3) = ?$$

$$f^{-1}(5x-4) = x$$

$$\frac{y+4}{5} = x \text{ ve } g \quad \left[f^{-1}(5x-4) \right] = [x]$$

$$(f^{-1})'(5x-4) \cdot 5 = 1$$

$$(f^{-1})' = \frac{1}{5}$$

$$(f^{-1})'(5x-4) = \frac{1}{5}$$

↓
 $f(x) = y$ yaparız
 $f^{-1}(y) = x$ ardından bileske
fonk türevi yardımıyla
alırız.