

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет»

Лабораторная работа №3

Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера и методы её решения.

Выполнил:

Студент 2 курса 1 группы ФИТ

Самсоник Анастасия Ивановна

ЦЕЛЬ РАБОТЫ: освоить общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решить задачу о коммивояжере данным методом, сравнить полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.

Задание 1. Сформулировать условие задачи коммивояжера с параметром. Для этого:

- принять элементы матрицы расстояний равными:

где n – номер варианта (Вариант 8)

Город	1	2	3	4	5
1	INF	16	29	INF	8
2	8	INF	23	60	76
3	10	24	INF	86	57
4	25	50	32	INF	24
5	85	74	52	21	INF

Задание 2. Решить сформулированную задачу методом ветвей и границ.

Возьмем в качестве произвольного маршрута:

$X_0 = (1,5);(4,5);(4,1);(2,1);(2,3)$

Тогда $F(X_0) = 8 + 19 + 86 + 12 + 89 = 244$

Для определения нижней границы множества воспользуемся **операцией редукции** или приведения матрицы по строкам, для чего необходимо в каждой строке матрицы D найти минимальный элемент.

$d_i = \min(j) d_{ij}$

Город	1	2	3	4	5	d_i
1	INF	16	29	INF	8	8
2	8	INF	23	60	76	8
3	10	24	INF	86	57	10
4	25	50	32	INF	24	24
5	85	74	52	21	INF	21

Затем вычитаем d_i из элементов рассматриваемой строки. В связи с этим во вновь полученной матрице в каждой строке будет как минимум один ноль.

Город	1	2	3	4	5
1	INF	8	21	INF	0
2	0	INF	15	52	68
3	0	14	INF	76	47
4	1	26	8	INF	0
5	64	53	31	0	INF

Такую же операцию редукции проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент:

$$d_j = \min(i) d_{ij}$$

Город	1	2	3	4	5
1	INF	8	21	INF	0
2	0	INF	15	52	68
3	0	14	INF	76	47
4	1	26	8	INF	0
5	64	53	31	0	INF
d_j	0	8	8	0	0

После вычитания минимальных элементов получаем полностью редуцированную матрицу, где величины d_i и d_j называются **константами приведения**.

Сумма констант приведения определяет нижнюю границу H :

$$H = \sum d_i + \sum d_j$$

Город	1	2	3	4	5
1	INF	0	13	INF	0
2	0	INF	7	52	68
3	0	6	INF	76	47
4	1	18	0	INF	0
5	64	45	23	0	INF

$$H = 87$$

Элементы матрицы d_{ij} соответствуют расстоянию от пункта i до пункта j . Поскольку в матрице n городов, то D является матрицей $n \times n$ с неотрицательными элементами $d_{ij} \geq 0$

Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, по которому коммивояжер посещает город только один раз и возвращается в исходный город.

Длина маршрута определяется выражением:

$$F(M_k) = \sum d_{ij}$$

Причем каждая строка и столбец входят в маршрут только один раз с элементом d_{ij} .

Шаг №1.

Определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i^*,j^*) .

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на M (бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

Город	1	2	3	4	5
1	INF	0(6)	13	INF	0(0)
2	0(7)	INF	7	52	68
3	0(6)	6	INF	76	47
4	1	18	0(7)	INF	0(0)
5	64	45	23	0(75)	INF

Наибольшая сумма констант приведения равна $(52+23) = 75$ для ребра $(5,4)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(5,4)$ и $(5^*,4^*)$.

Исключение ребра $(5,4)$ проводим путем замены элемента $d_{54} = 0$ на INF , после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества $(5^*,4^*)$, в результате получим редуцированную матрицу.

Город	1	2	3	4	5	d_i	
1	INF	0	13	INF	0	0	
2	0	INF	7	52	68	0	
3	0	6	INF	76	47	0	
4	1	18	0	INF	0	0	
5	64	45	23	INF	INF	23	$H(5^*,4^*) = 75$
	0	0	0	52	0	75	

Включение ребра $(5,4)$ проводится путем исключения всех элементов 5-ой строки и 4-го столбца, в которой элемент d_{45} заменяем на M , для исключения образования негамильтонова цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (4×4) , которая подлежит операции приведения.

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

Город	1	2	3	5
1	INF	0	13	0
2	0	INF	7	68
3	0	6	INF	47
4	1	18	0	INF

Шаг №2.

Определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i^*,j^*) .

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на *INF* (бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

Город	1	2	3	5	<i>d_i</i>
1	INF	0(6)	13	0(47)	0
2	0(7)	INF	7	68	0
3	0(6)	6	INF	47	0
4	1	18	0(8)	INF	0
<i>d_j</i>	0	0	0	0	0

Наибольшая сумма констант приведения равна $(0 + 47) = 47$ для ребра $(1,5)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(1,5)$ и $(1^*,5^*)$.

Исключение ребра $(1,5)$ проводим путем замены элемента $d_{15} = 0$ на *INF*, после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества $(1^*,5^*)$, в результате получим редуцированную матрицу.

Город	1	2	3	5	<i>d_i</i>
1	INF	0	13	INF	0
2	0	INF	7	68	0
3	0	6	INF	47	0
4	1	18	0	INF	0
<i>d_j</i>	0	0	0	47	47

$$H(1^*,5^*) = 47$$

Включение ребра (1,5) проводится путем исключения всех элементов 1-ой строки и 5-го столбца, в которой элемент d_{51} заменяем на INF , для исключения образования негамильтонова цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (3 x 3), которая подлежит операции приведения.

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

Город	1	2	3	d_i
2	0	INF	7	0
3	0	6	INF	0
4	1	18	0	0
d_j	0	6	0	6

Сумма констант приведения сокращенной матрицы: $\sum d_i + \sum d_j = 6$

Так как во втором столбце отсутствует ноль, то находим минимальное число в столбце и отнимаем его от каждого значения в столбце и добавляем к минимальному маршруту.

Тогда основной минимальный маршрут теперь равен:

$$H = 87 + 6 = 93$$

Шаг №3.

Определяем ребро ветвления и разобьем все множество маршрутов относительно этого ребра на два подмножества (i,j) и (i^*,j^*) .

С этой целью для всех клеток матрицы с нулевыми элементами заменяем поочередно нули на INF (бесконечность) и определяем для них сумму образовавшихся констант приведения, они приведены в скобках.

Город	1	2	3	d_i
2	0(7)	INF	7	0
3	0(6)	6	INF	0
4	1	18	0(8)	0
d_j	0	6	0	6

Город	1	2	3	d_i
2	0	INF	7	0
3	0	0	INF	0
4	1	12	0	1
d_j	0	0	7	8

$$H(4^*, 3^*) = 8$$

Наибольшая сумма констант приведения равна $(1 + 7) = 8$ для ребра $(4,3)$, следовательно, множество разбивается на два подмножества $(4,3)$ и $(4^*, 3^*)$.

Исключение ребра $(4,3)$ проводим путем замены элемента $d_{43} = 0$ на INF , после чего осуществляем очередное приведение матрицы расстояний для образовавшегося подмножества $(4^*, 3^*)$, в результате получим редуцированную матрицу.

Город	1	2	3	d_i
2	0	INF	7	0
3	0	0	INF	0
4	1	12	INF	1
d_j	0	0	7	8

Включение ребра $(2,1)$ проводится путем исключения всех элементов 2-ой строки и 1-го столбца, в которой элемент d_{12} заменяем на INF , для исключения образования негамильтонова цикла.

В результате получим другую сокращенную матрицу (2×2) , которая подлежит операции приведения.

После операции приведения сокращенная матрица будет иметь вид:

Город	2	3	d_i
3	0	INF	0
4	0	0	0
d_j	0	0	0

Сумма констант приведения сокращенной матрицы:

$$\sum d_i + \sum d_j = 0$$

Длина маршрута равна $N = 93$

Задание 3. Проверка полученного решения при помощи генератора перестановок:

```
C:\Users\Acer\Desktop\МП\MathPr_Lab3\Debug\MathPr_Lab3.exe

-- Задача коммивояжера --
-- количество городов: 5
-- матрица расстояний:
INF 16 29 INF 8
8 INF 23 60 76
10 24 INF 86 57
25 50 32 INF 24
85 74 52 21 INF
-- оптимальный маршрут: 0-->4-->3-->2-->1-->0
-- длина маршрута      : 93
Для продолжения нажмите любую клавишу . . . █
```