



Práctica de laboratorio III

# Criterio de Routh y análisis del lugar de las raíces

Integrantes:

---

---

---

---

Fecha

Día

Mes

Año

# CRITERIO DE ROUTH Y ANÁLISIS DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

## 1. OBJETIVO GENERAL

Lograr que el estudiante diseñe sistemas de control aplicando los conceptos asociados a la estabilidad de un sistema, utilizando específicamente el criterio de Routh y el método del lugar de las raíces.

## 2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Desarrollar en el estudiante:

- La habilidad de determinar la región de estabilidad de un sistema de control.
- La habilidad de diseñar sistemas de control utilizando el criterio de estabilidad de Routh y el método del lugar de las raíces.
- La habilidad de crear, implementar y utilizar una aplicación computacional que aplique el criterio de estabilidad de Routh a cualquier polinomio característico de entrada.
- La habilidad de diseñar y validar un controlador de acción proporcional, proporcional-integral y proporcional-derivativa para el proceso de estudio en el Proyecto Integrador utilizando el análisis de estabilidad de los sistemas.

## 3. RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- El estudiante debe saber reconocer cuándo un sistema es estable y cuándo no.
- Debe demostrar habilidad en la utilización de los conceptos y criterios asociados a la estabilidad de un sistema, como lo son el criterio de Routh y el método del lugar de las raíces.
- Debe estar en capacidad de modificar adecuadamente los parámetros de un sistema de control para garantizar su estabilidad.

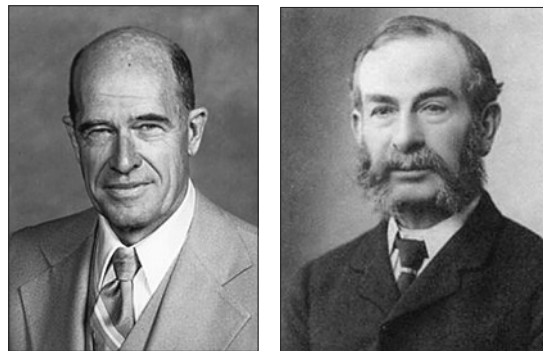
## 4. INTRODUCCIÓN

Asegurar la *estabilidad* de un sistema realimentado en lazo cerrado es de gran importancia en el diseño de sistemas de control. Debido a que un sistema en lazo cerrado inestable no tiene valor práctico, se buscan métodos que ayuden a analizar y diseñar sistemas estables, garantizando ¿en qué condiciones se vuelve inestable un sistema?, y si es inestable, ¿cómo se estabiliza? Un *sistema estable* es aquel que tiene una respuesta limitada estando sujeto a una entrada o perturbación limitada [3].

La estabilidad de un sistema realimentado está directamente relacionada con la localización de las raíces de la ecuación característica de la función de transferencia del sistema. Un sistema de control es *estable* si y sólo si todos los polos en lazo cerrado se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo  $s$ . El *criterio de estabilidad de Routh* permite hallar la cantidad de polos en lazo cerrado que se encuentran en el semiplano derecho del plano complejo  $s$  sin tener que factorizar el polinomio. De esta forma, se puede determinar la estabilidad sin la carga computacional añadida de determinar los puntos sobre el plano imaginario donde se encuentran las raíces características, proporcionando así un método de diseño para determinar valores de algunos parámetros del sistema que llevarán a la estabilidad en lazo cerrado.

Es importante, además, que el diseñador conozca cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano  $s$  conforme varía algún parámetro del sistema. Los polos en lazo cerrado son las raíces de la ecuación característica. Si ésta tiene un grado superior a tres, es muy laborioso encontrar sus raíces y se requiere una solución computacional. Sin embargo, simplemente encontrar las raíces de la ecuación característica puede tener un valor limitado, debido a que a medida que cambia algún parámetro de la función de transferencia en lazo abierto, la ecuación característica cambia y deben repetirse los cálculos.

*W R. Evans* (ver figura 3.1) diseñó un método sencillo y gráfico para encontrar las raíces de la ecuación característica, que se utiliza ampliamente en la ingeniería de control. Este método se denomina *método del lugar de las raíces*, y en él se presentan las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro del sistema [3].



**Figura 3.1.** Walter Richard Evans y Edward Routh

Debido a que el criterio de estabilidad de Routh y el método del lugar de las raíces permiten al diseñador predecir los efectos que tiene en la localización de los polos en lazo cerrado, variar cualquier parámetro o añadir polos y ceros en lazo abierto, el desarrollo de esta práctica de laboratorio va dirigido a la aplicación de estos métodos en el diseño de sistemas de control tanto de forma manual o mediante el uso de herramientas computacionales como MATLAB.

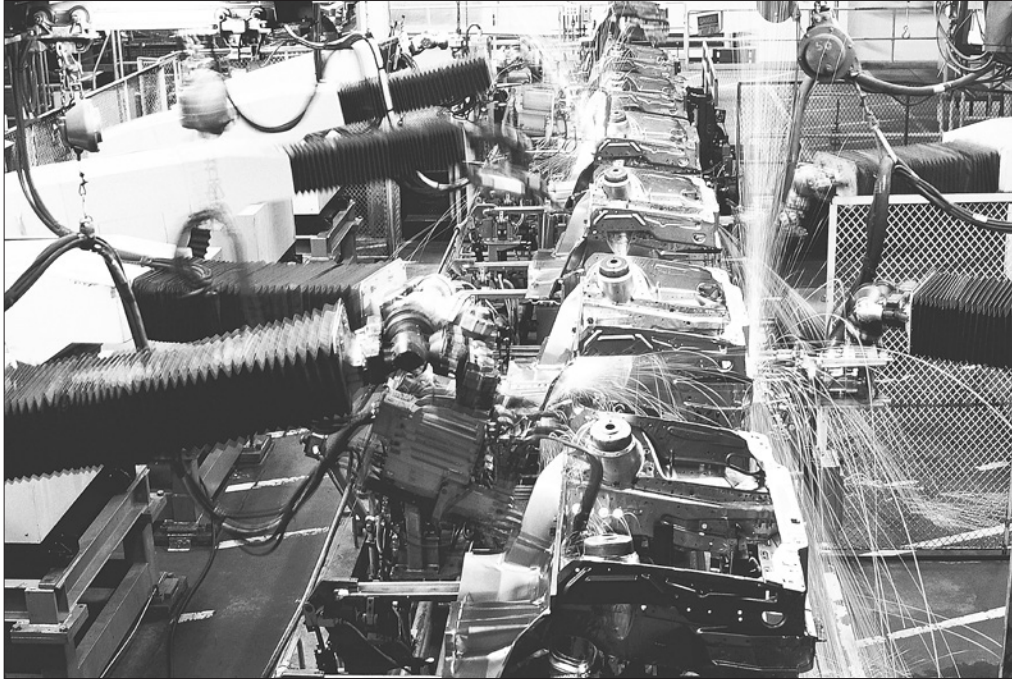
Para el desarrollo de esta práctica de laboratorio se sugiere al estudiante, como gestor de su propio conocimiento, la revisión de los temas teóricos que se van a tratar a través de las siguientes lecturas:

- SMITH, Carlos A. and CORRIPIO, Armando B. *Principles and Practice of Automatic Process Control*, 3ª ed., United States of America, Wiley, 2006.
  - ▶ *Capítulo 6*: Diseño de Sistemas Simples de Control de Procesos
  - ▶ *Capítulo 8*: Técnicas de Respuesta en Frecuencia y Lugar Geométrico de las Raíces
- DORF, Richard C. y BISHOP, Robert H. *Sistemas de Control Moderno*, 10ª ed., Madrid, Pearson Educación, 2005.
  - ▶ *Capítulo 6*: Estabilidad de los Sistemas Lineales con Realimentación
  - ▶ *Capítulo 7*: Método del Lugar de las Raíces
- OGATA, Katsuhiko. *Ingeniería de Control Moderna*, 4ª ed., Madrid, Pearson Educación, 2003.
  - ▶ *Capítulo 6*: Análisis del Lugar de las Raíces

**Nota:** En la bibliografía adjunta se podrán encontrar otras referencias con información adicional de los temas tratados en este material.



## 5. PROCEDIMIENTO



CMIA (Construcción de Máquinas Industriales Automáticas)

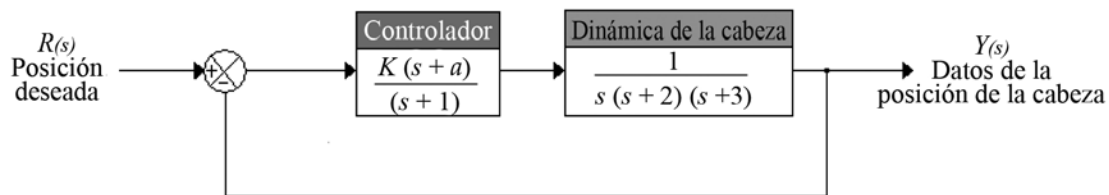
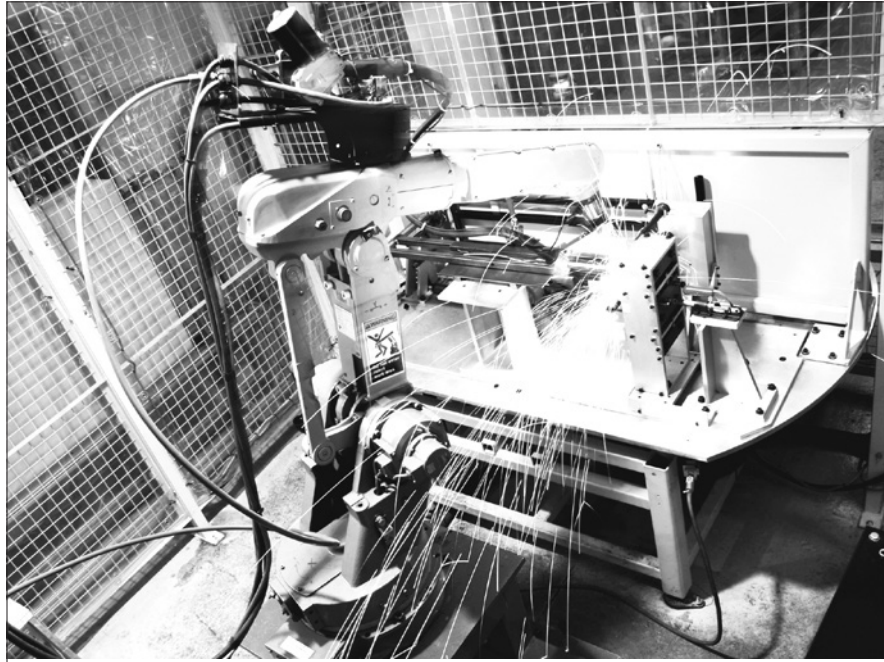
CMIA es una empresa dedicada a la construcción de máquinas y plantas automáticas para la industria. Su principal campo de acción es la construcción de robots, brazos mecánicos y máquinas de operación de alta precisión. Actualmente es considerada la empresa más avanzada en automatización industrial.

La empresa CMIA presenta a continuación el desarrollo de tres plantas de automatización, para las cuales los estudiantes deben realizar el diseño de aquellos parámetros presentes en las plantas que se van a controlar, en los actuadores o en los controladores, que garanticen la estabilidad del sistema. Para ello, cada grupo de laboratorio diseñará sólo el proyecto asignado y presentará una serie de lineamientos requeridos por la empresa para garantizar el buen desarrollo del trabajo.

### 5.1. Aplicación del criterio de estabilidad de Routh

#### 5.1.1. Control de posición de un robot de soldadura

Los grandes robots de soldadura se utilizan hoy en día en plantas de automoción. La cabeza de soldadura se mueve a diferentes posiciones sobre el cuerpo que gira, y se requiere una respuesta rápida y precisa. En la figura 3.2 se muestra un diagrama de bloques de un sistema posicionador de una cabeza de soldadura [4].



**Figura 3.2.** Diagrama de bloques para el control de posición de la cabeza de soldadura

Como se puede observar, el objetivo es determinar los intervalos de  $K$  y  $a$  para los cuales el sistema sea estable. Para ello, se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Utilizando el criterio de estabilidad de Routh, obtener las relaciones de orden entre  $K$  y  $a$  que garanticen que el sistema sea estable.
- Debido a que se requiere un sistema no tan rápido pero preciso, obtener una relación de orden entre  $K$  y  $a$  que garantice que el error en estado estacionario del sistema para una función rampa de prueba sea menor del 30%.
- Obteniendo las relaciones anteriores, graficar, utilizando MATLAB, la región estable del sistema en una gráfica de  $K$  vs.  $a$ . Seguidamente, para una pareja  $(K, a)$  de la región estable del sistema y para otra de la región no estable, obtener, utilizando MATLAB, las raíces del sistema y comprobar, mostrando gráficamente la respuesta al escalón del sistema, que el sistema es estable o no.

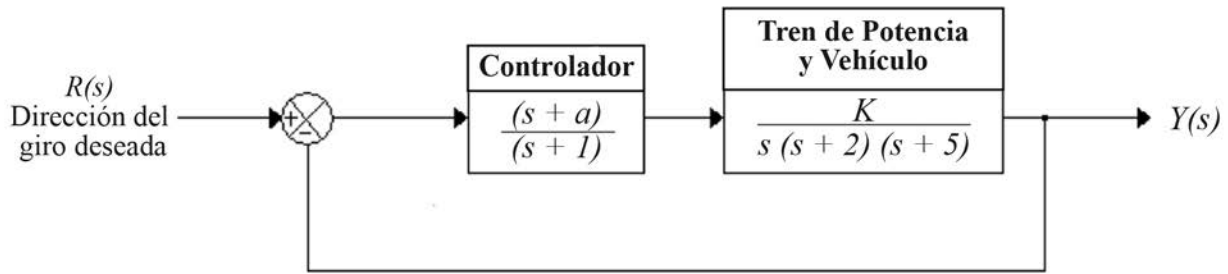
- Teniendo ya la región estable del sistema, desarrollar y presentar pruebas en MATLAB para determinar la pareja ( $K$ ,  $a$ ) que proporcione una de las respuestas más rápidas y precisas, ante una entrada escalón, para el sistema de control de posición de la cabeza de soldadura. *Hay que recordar que un sistema rápido no necesariamente debe ser muy subamortiguado, sino debe poseer un tiempo de establecimiento pequeño.*

### 5.1.2 Control de giro de un vehículo con bandas de rodamiento

Un *vehículo de seguimiento* es un vehículo que se mueve en bandas de rodamiento en lugar de ruedas. Normalmente se usa como un vehículo de carga en ingeniería. Las principales ventajas del diseño con bandas de rodamiento en los vehículos consisten en que les permite un mayor contacto con la superficie y, como resultado, ejercen una fuerza mucho menor por unidad de área sobre el terreno que pueda recorrer un vehículo de ruedas convencionales del mismo peso. Esto los hace aptos para su uso en terrenos suaves, de baja fricción y desigual como la tierra, barro, hielo y nieve. La principal desventaja estriba en que las bandas de rodamiento son un mecanismo más complejo que una rueda, y relativamente propensas a fallos, por lo que es necesario desarrollar un sistema de control que realice una perfecta sincronización entre las bandas.

Por ejemplo, en la figura 3.3 se observa que para el diseño de control de giro de un vehículo con bandas de rodamiento es necesaria la selección de dos parámetros. Los dos rieles operan a diferentes velocidades, con el fin de que el vehículo gire [4].





**Figura 3.3.** Diagrama de bloques para el control de giro de un vehículo con dos bandas de rodamiento

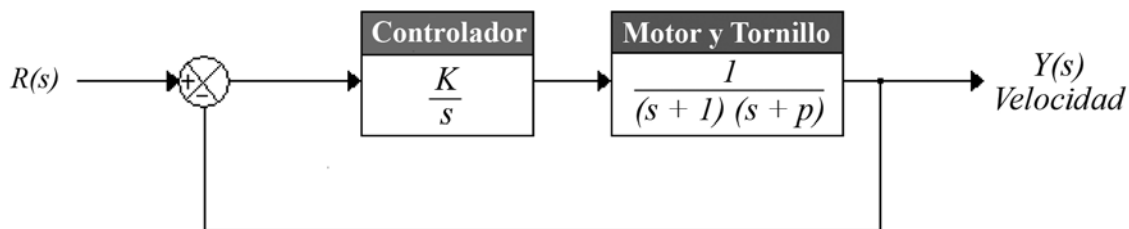
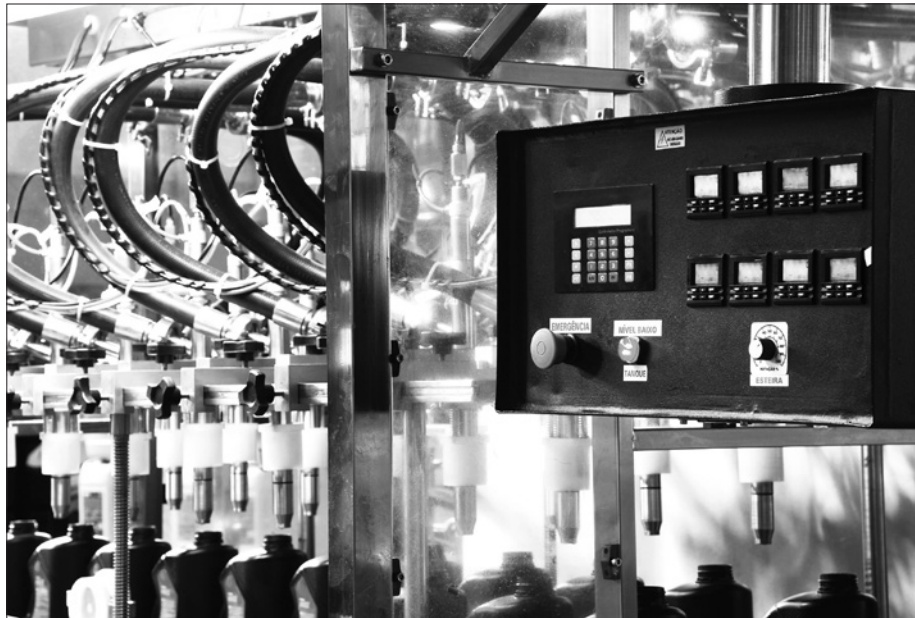
Como se puede observar, el objetivo es determinar los intervalos de  $K$  y  $a$  para los cuales el sistema sea estable. Para ello, se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Utilizando el criterio de estabilidad de Routh, obtener relaciones de orden entre  $K$  y  $a$  que garanticen que el sistema sea estable.
- Debido a que se requiere un sistema no tan rápido, obtener una relación de orden entre  $K$  y  $a$  que garantice que el error en estado estacionario del sistema para una función rampa de prueba sea menor de 24% o igual a éste.
- Obteniendo las relaciones anteriores, graficar, utilizando MATLAB, la región estable del sistema en una gráfica de  $K$  vs.  $a$ . Seguidamente, para una pareja  $(K, a)$  de la región estable del sistema y para otra de la región no estable, obtener, utilizando MATLAB, las raíces del sistema y comprobar, mostrando gráficamente la respuesta al escalón del sistema, que el sistema es estable o no.
- Teniendo ya la región estable del sistema, desarrollar y presentar pruebas en MATLAB para determinar la pareja  $(K, a)$  que proporcione una de las respuestas más rápidas y precisas, ante una entrada escalón, para el sistema de control de giro de un vehículo con bandas de rodamiento. *Hay que recordar que un sistema rápido no necesariamente debe ser muy subamortiguado, sino poseer un tiempo de establecimiento pequeño.*

### 5.1.3 Control de velocidad de una línea de llenado de botellas

Una *línea de llenado de botellas* utiliza un mecanismo de tornillo de alimentación para el control de velocidad y la dirección del transporte de las botellas que estén sobre la banda transportadora. Este sistema, liderado por un controlador, comanda un motor para el movimiento del tornillo y una válvula para el relleno de las botellas. Además, posee una realimentación con un tacómetro para mantener un control de velocidad preciso [4]. El diagrama de bloques del sistema se puede observar en la figura 3.4.





**Figura 3.4.** Diagrama de bloques para el control de velocidad de una línea de llenado de botellas

Como se puede observar, el objetivo es determinar los intervalos de  $K$  y  $p$  para los cuales el sistema sea estable. Para ello, se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Utilizando el criterio de estabilidad de Routh, obtener relaciones de orden entre  $K$  y  $p$  que garanticen que el sistema sea estable.
- Debido a que se requiere un sistema rápido, obtener una relación de orden entre  $K$  y  $p$  que garantice que el error en estado estacionario del sistema para una función rampa de prueba sea menor del 5%.
- Obteniendo las dos relaciones anteriores, graficar, utilizando MATLAB, la región estable del sistema en una gráfica de  $K$  vs.  $p$ . Seguidamente, para una pareja  $(K, p)$  de la región estable del sistema y para otra de la región no estable, obtener, utilizando MATLAB, las raíces del sistema y comprobar, mostrando gráficamente la respuesta al escalón del sistema, que el sistema es estable o no.
- Teniendo ya la región estable del sistema, desarrollar y presentar pruebas en MATLAB para determinar una de las parejas  $(K, p)$  que proporcione una de las respuestas más rápidas y

precisas, ante una entrada escalón, para el sistema de control de velocidad de una línea de llenado de botellas. *Hay que recordar que un sistema rápido no necesariamente debe ser muy subamortiguado, sino poseer un tiempo de establecimiento pequeño.*

## 5.2. Aplicación del análisis del lugar de las raíces

### 5.2.1 Vehículo robot explorador

El vehículo explorador se ha diseñado para maniobrar a 0.25mph sobre el terreno de Marte. Debido a que Marte se encuentra a 189 millones de millas de la Tierra, se necesitan 40 minutos cada vez que se quiera establecer una comunicación con esta última, por lo que el vehículo explorador debe actuar de manera independiente y con fiabilidad. Su estructura se asemeja a un híbrido entre un pequeño camión plano y un todoterreno. El vehículo explorador se construyó con tres secciones articuladas, cada una con sus propios dos soportes de ejes independientes, con ruedas cónicas de un metro. Un par de brazos para la recogida de muestras, uno para taladrar y cortar y el otro para manipular objetos pequeños, que salen de su parte frontal como mordazas [4]. El control de los brazos se puede representar por el sistema que se muestra en la figura 3.5.

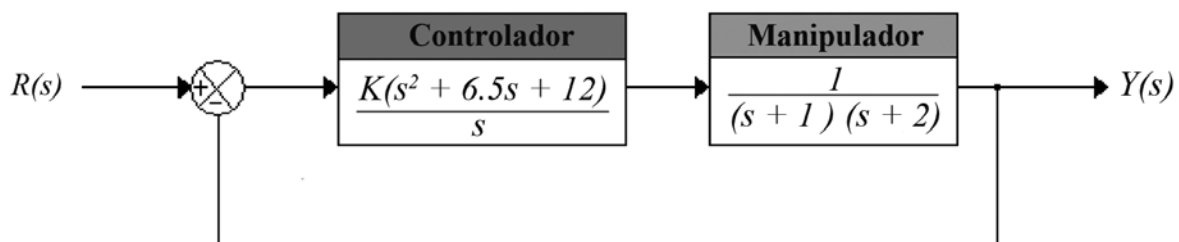


Figura 3.5. Sistema de control para un vehículo robot explorador

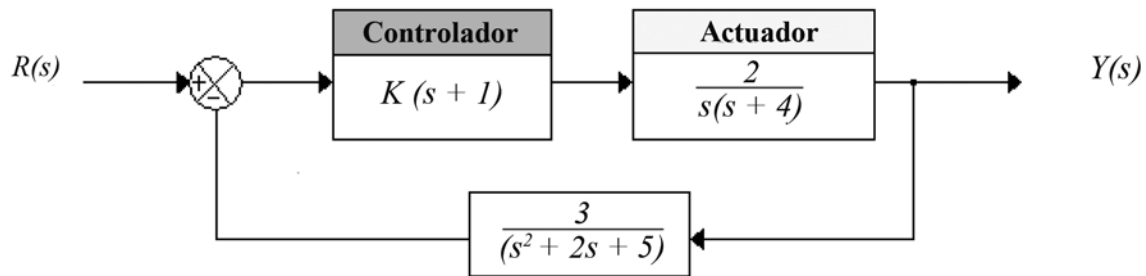
Para el diseño del sistema de control de los brazos del robot explorador se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Realizar un bosquejo del lugar de las raíces del sistema al variar la ganancia  $K$ , mediante el desarrollo de las reglas generales para la construcción de los lugares de las raíces. Adicionalmente, identificar el rango de valores de la ganancia  $K$  para la estabilidad.
- Utilizando MATLAB, dibujar el lugar de las raíces y comprobar los resultados del bosquejo anteriormente realizado.
- Determinar ahora la ganancia  $K$  que da como resultado una sobreelongación de aproximadamente un 1% para una entrada escalón. Posteriormente, obtener la ganancia que minimiza el tiempo de asentamiento (con un criterio del 2%) mientras se mantiene una sobreelongación menor del 1%.

### 5.2.2 Brazo robótico

El brazo robótico europeo de la Estación Espacial Internacional se utiliza para instalar y sustituir placas solares, revisar y ensamblar módulos y para trasladar a los astronautas que realizan los paseos espaciales. Mide unos 11.3 m de largo y pesa 630 Kg y es capaz de mover hasta 8000 Kg. En apariencia es casi como un brazo humano, con articulaciones y con la capacidad de coger, sujetar y girar como si de una verdadera mano se tratase. Es simétrico en su construcción. El brazo se puede dirigir desde el exterior, a través de un panel, o desde una sala de control en el interior de la estación espacial denominada *Cúpula* por su forma y que a través de sus siete ventanas permitirá a los astronautas ver todos los movimientos del brazo robótico. En la figura 3.6 se muestra el sistema de control para el actuador encargado del movimiento del brazo [4].





**Figura 3.6.** Sistema de control para un brazo robótico

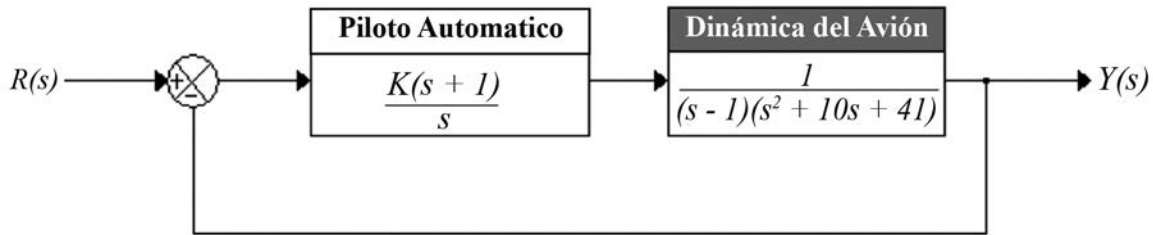
Para el diseño del sistema de control para el brazo robótico se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Realizar un bosquejo del lugar de las raíces del sistema al variar la ganancia  $K$ , mediante el desarrollo de las reglas generales para la construcción de los lugares de las raíces. Adicionalmente, identificar el rango de valores de la ganancia  $K$  para la estabilidad.
- Utilizando MATLAB, dibujar el lugar de las raíces y comprobar los resultados del bosquejo anteriormente realizado.
- Determinar ahora la ganancia  $K$  que limita la sobreelongación para que sea menor al 24 % mientras se alcanza el menor tiempo de subida posible.

### 5.2.3 Piloto automático para un avión







**Figura 3.7.** Sistema de control para el piloto automático de un avión

Un *piloto automático* es un sistema mecánico, eléctrico o hidráulico usado para guiar un vehículo sin la ayuda de un ser humano. Los pilotos automáticos modernos usan sistemas informáticos para controlar la aeronave. El sistema lee la posición actual de la aeronave y controla un sistema de vuelo para guiarla. En un sistema de este tipo, además de los controles de vuelo clásicos, muchos pilotos automáticos incorporan la capacidad de gestionar el empuje, para controlar la aceleración de los motores y optimizar la velocidad, y de mover el combustible entre los diferentes depósitos para equilibrar la aeronave en una posición óptima en el aire [4]. Un avión de reacción de alto rendimiento con un sistema de control de piloto automático tiene una realimentación unitaria y un sistema de control tal como lo muestra la figura 3.7.

Para el diseño del sistema de control del piloto automático para un avión de reacción se debe realizar el siguiente procedimiento:

- Realizar un bosquejo del lugar de las raíces del sistema al variar la ganancia  $K$ , mediante el desarrollo de las reglas generales para la construcción de los lugares de las raíces. Adicionalmente, identificar el rango de valores de la ganancia  $K$  para la estabilidad.
- Utilizando MATLAB, dibujar el lugar de las raíces y comprobar los resultados del bosquejo anteriormente realizado.
- Determinar ahora la ganancia  $K$  que proporciona la menor sobreelongación posible y un tiempo de establecimiento mínimo.

**Nota:** Para el desarrollo de los anteriores ejercicios de diseño se debe mostrar la gráfica del lugar de las raíces con las líneas constantes de  $\zeta$  y los círculos de constante  $\omega_n$  obtenidos en los diseños, indicando en ellas el valor de  $K$  obtenido. Además, presentar las gráficas de la respuesta al escalón del sistema diseñado para comprobar los requerimientos solicitados.

### 5.3. Aplicación en MATLAB: Criterio de estabilidad de Routh

Cada grupo laboratorio debe presentar una aplicación computacional, realizada en MATLAB e implementada en ambiente gráfico, que aplique el criterio de estabilidad de Routh a cualquier polinomio característico de entrada. Esta aplicación debe solucionar cualquier tipo de polinomio y debe estar preparada si se introducen al sistema algunos ejemplos de los casos especiales. Las características de la aplicación computacional deben ser:

- Implementada en ambiente gráfico.
- La entrada del sistema es un polinomio de cualquier orden que puede tener una constante  $K$ , de tal forma que la aplicación pueda determinar los rangos de estabilidad del sistema.
- Debe presentar la solución por el criterio de estabilidad de Routh de la siguiente forma:  
Por ejemplo, para el polinomio de entrada  $G(s) = s^4 + 5s^3 + 3s^2 + s + 2$  se tiene que

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 3 & 2 \\
 s^3 & 5 & 1 & 0 \\
 s^2 & 2,8 & 2 & 0 \\
 s^1 & -2,57 & 0 & 0 \\
 s^0 & 2 & & 
 \end{array}$$

- Debe mostrar las raíces del sistema y la gráfica en el plano complejo  $s$ .
- Debe indicar si existen o no raíces inestables y cuántas.
- Debe identificar y evaluar el caso especial que aplique.

En el informe entregado, cada grupo debe presentar los resultados obtenidos con la aplicación realizada. En la sustentación realizada por cada grupo se verificará el correcto funcionamiento de la misma.

## 6. PROYECTO INTEGRADOR

### Sistema de Control Simulado utilizando Técnicas de Control Convencional

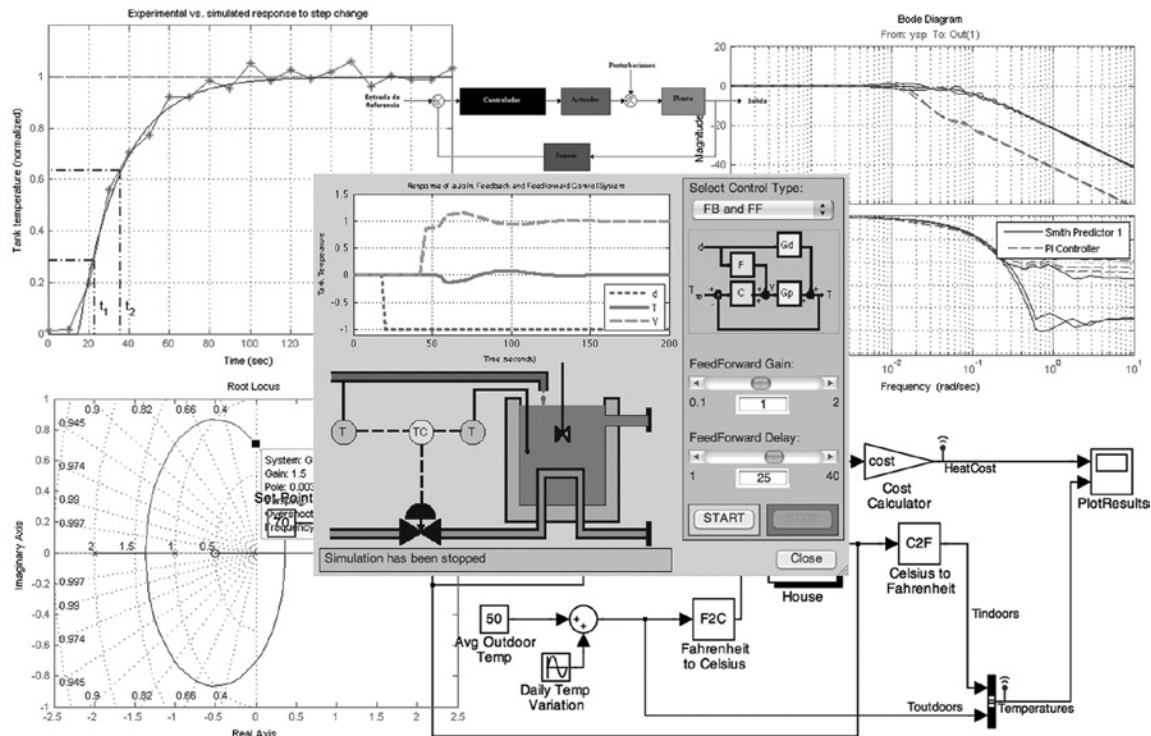


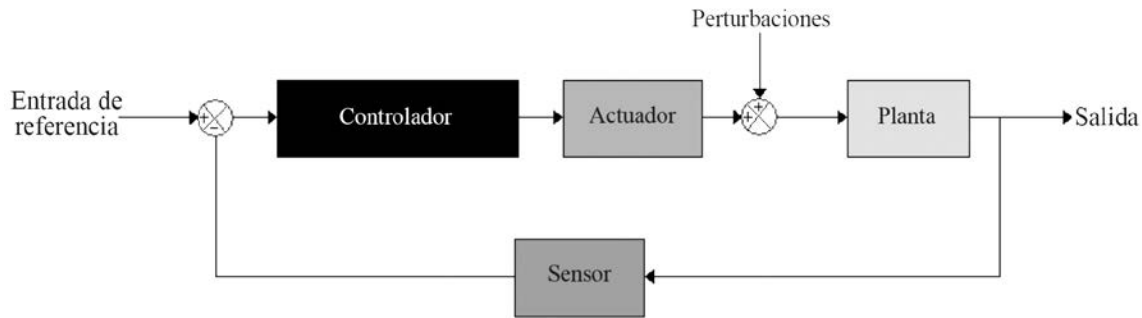
Figura 3.8. Prototipo del producto final para el Proyecto Integrador

Con el objetivo de modelar, diseñar y simular el sistema de control de un proceso utilizando MATLAB/SIMULINK, el siguiente avance del Proyecto Integrador pretende presentar las características de estabilidad de la planta seleccionada utilizando el criterio de estabilidad de Routh y el análisis del lugar de las raíces. Además, se obtendrán los resultados de implementar un controlador proporcional, proporcional-integral y proporcional-derivativo introduciendo diferentes tipos de perturbaciones al sistema. Para lograr esto, cada grupo de trabajo debe atender los siguientes requerimientos del Proyecto Integrador:

#### 6.1. Requerimientos tercera etapa

- Cada grupo debe implementar los siguientes controladores para el sistema asignado, tal como se visualiza en la figura 3.9. En la interfaz desarrollada, el usuario debe tener la opción de seleccionar uno de estos controladores y visualizar la respuesta deseada del sistema de control ante cualquier perturbación:

- ▶ Controlador Proporcional:  $C(s) = K_p$
- ▶ Controlador Proporcional Integral:  $C(s) = K_p (1 + 1/T_i s)$
- ▶ Controlador Proporcional Derivativo:  $C(s) = K_p (1 + T_d s)$



**Figura 3.9.** Diagrama de bloques de los procesos del Proyecto Integrador

- A la interfaz desarrollada debe anexarse la sección de análisis de estabilidad, la cual debe cumplir los siguientes requerimientos:

- ▶ Para cada una de las anteriores configuraciones de controladores, la interfaz debe permitir al usuario modificar las constantes que los determinan.
- ▶ Debe presentarse la región de estabilidad del sistema, para el caso de los controladores que dependen de dos parámetros, o el rango de valores de la constante proporcional que hacen estable al sistema.
- ▶ Al modificar cierta constante debe visualizarse el cambio de la respuesta en el tiempo que el usuario tenga seleccionada. Además, se debe estar visualizando constantemente la gráfica del lugar de las raíces del sistema (para el caso del controlador proporcional será siempre la misma, mientras que para los otros dos debe cambiar al modificar los tiempos integral o derivativo).
- ▶ Como resultado final del análisis de estabilidad sustentar cuál de los controladores trabajados es el más apropiado para el control de la planta seleccionada teniendo en cuenta la respuesta en el tiempo, su región de estabilidad y su capacidad para eliminar perturbaciones. Para este controlador seleccionado, determinar el valor de la(s) constante(s) del mismo que ofrezcan la respuesta más rápida posible con una sobreelongación máxima del 5%.