Optimisation convexe – Méthodes itératives

Descentes de gradient

Bashar Dudin

May 6, 2019

EPITA

Optimisation sous contraintes d'égalités

Contraintes d'égalités | Cadre

On s'intéresse aux problèmes d'optimisation (P) de la forme

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & f(x) \\ \text{sujet à} & \\ & Ax = b \end{array}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe $\mathscr{C}^2$ et $A \in \mathscr{M}_{p,n}(R)$.

Contraintes d'égalités | Cadre

On s'intéresse aux problèmes d'optimisation (P) de la forme

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & f(x) \\ \text{sujet à} & \\ & Ax = b \end{array}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe $\mathscr{C}^2$ et $A \in \mathscr{M}_{p,n}(R)$.

Hyp

- On suppose dans la suite que $\mathrm{rg}(A) < n$[a] ; chose qu'on peut en particulier garantir quand $p < n$. .
- On suppose que notre point de départ est admissible[b].

[a] Quel est le sens de cette hypothèse?
[b] Qu'est-ce que cela implique?

Contraintes d'égalités | Cadre

On s'intéresse aux problèmes d'optimisation (P) de la forme

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & f(x) \\ \text{sujet à} & \\ & Ax = b \end{array}$$

où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est convexe $\mathscr{C}^2$ et $A \in \mathscr{M}_{p,n}(R)$.

Hyp

- On suppose dans la suite que $\mathrm{rg}(A) < n$[a] ; chose qu'on peut en particulier garantir quand $p < n$. Dans ce cas la condition de Slater est satisfaite.
- On suppose que notre point de départ est admissible[b].

[a] Quel est le sens de cette hypothèse?
[b] Qu'est-ce que cela implique?

Contraintes d’égalités | Attaque élémentaire

Une méthode de second ordre

Soit f une fonction objectif convexe et x un point du domaine de f. Le DL de f au second ordre en x s'écrit

$$f(x+v) = f(x) + \nabla f(x)^T v + \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(x) v + \|v\|^2 \varepsilon(v)$$

Une méthode de second ordre

Soit f une fonction objectif convexe et x un point du domaine de f. Le DL de f au second ordre en x s'écrit

$$f(x+v) = f(x) + \nabla f(x)^T v + \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(x) v + \|v\|^2 \varepsilon(v)$$

On choisit d'approcher $f(x+v)$ par l'expression de second ordre

$$f(x) + \nabla f(x)^T v + \frac{1}{2} v^T \nabla^2 f(x) v$$

C'est une fonction convexe en v qu'on sait minimiser. On obtient ici un minimisant donné par

$$\Delta x_N = -\left(\nabla f(x)\right)^{-1} \nabla f(x).$$

Algorithme de Newton

Algorithm 1 Méthode de Newton

Input: f : a function, x_0 : an initial point in the domain of f, ε : tolerance.

Output: x^* : an optimal solution of (P) if bounded from below

function $\textsc{Newton\_Method}(f, x_0, \varepsilon)$
    $x \leftarrow x_0$
    $\Delta x_N \leftarrow -\left(\nabla^2 f(x)\right)^{-1} \nabla f(x)$
    $\lambda^2(x) = -\nabla f(x)^T \Delta x_N$
    while $\frac{\lambda^2(x)}{2} > \varepsilon$ **do**
        $\Delta x_N \leftarrow -\left(\nabla^2 f(x)\right)^{-1} \nabla f(x)$
        $\lambda^2(x) = -\nabla f(x)^T \Delta x_N$
        compute step $t > 0$ of descent
        $x \leftarrow x + t\Delta x_N$
    end while
    return x
end function