Formalisme Probabiliste

Résumé

Cette première période vise à introduire au plus tôt la terminologie et les concepts qui sous-tendent la modélisation probabiliste. Ce travail est nécessaire pour permettre une assimilation fluide des concepts plus avancés de l'analyse probabiliste.

Table des matières

1 Questions de modélisation

On retrouve dans [Pol] la définition suivante d'une expérience aléatoire.

Définition 1.1. On appelle ***expérience aléatoire*** une expérience qui, reproduite dans des conditions identiques, peut conduire à plusieurs résultats possibles, et dont on ne peut prévoir le résultat par avance.

Question 1-1. Essayez de nuancer cette définition.

Définition 1.2. L'espace de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire, souvent noté Ω, est appelé ***espace d'états*** de l'expérience. La lettre ω désigne souvent une ***issue*** de l'expérience ; on dit a $\omega \in \Omega$.

Question 1-2. Décrire les espaces d'états des expériences aléatoires

1. le jet d'une pièce de monnaie ;
2. le lancer d'un dé à 6 faces ;
3. le lancer de deux dès à 6 faces de couleurs différentes ;
4. que se passe-t-il si l'on reproduit l'expérience précédente avec deux dès indiscernables ;
5. durée de vie d'une batterie d'ordinateur portable ;
6. tir sur une cible circulaire de 1 mètre de diamètre ;
7. nombre de pings sur un serveur dans un laps de temps ;
8. sortie d'une voiture autonome d'un circuit circulaire de $1m$ de rayon.

Lors de l'étude d'une expérience aléatoire on s'intéresse souvent à des sous-ensembles d'issues possibles. On aimerait savoir quelle chance on a d'avoir plus de 10^3 pings sur un serveur dans une seconde, ou la proportion de batterie d'ordinateurs qui tombent en panne en moins de 2 ans. La notion d'*évènement aléatoire* permet de résumer et généraliser ce concept.

Définition 1.3. On appelle ***évènement aléatoire*** associée à une expérience aléatoire donnée, un sous-ensemble de l'espace des états Ω dont on peut dire s'il est réalisé ou non.

Il n'y a pas de manière générale de spécifié indépendamment de l'expérience si un sous-ensemble de Ω peut-être réalisé ou non, cela va dépendre de la modélisation. La partie des sous-ensembles sur lesquels on peut jeter un tel jugement doivent cependant satisfaire un nombre d'axiomes communément acceptés. Voici quelques propriétés qu'on voudrait voir l'ensemble $\mathscr{A}$ des évènements qu'on peut juger réalisable ou non satisfaire.

— Si $A \in \mathscr{A}$ alors $A^c \in \mathscr{A}$: si l'on peut décider qu'un évènement est réalisable alors on peut décider que le fait qu'il ait non lieu soit réalisable également.
— Si A, $B \in \mathscr{A}$ alors $A \cap B \in \mathscr{A}$: si l'on peut décider de la réalisabilité de deux évènements alors on peut décider de leur réalisation simultanée.
— Si A, $B \in \mathscr{A}$ alors $A \cup B \in \mathscr{A}$: si l'on peut décider de la réalisabilité de deux évènements alors on peut décider de la réalisabilité d'au moins un des deux.
— $\Omega \in \mathscr{A}$: l'ensemble de toutes le issues possibles est réalisable.
— $\emptyset \in \mathscr{A}$: l'ensemble vide ne contenant aucune issue n'est jamais réalisable.

Ces propriétés ne sont pas exhaustives, on y revient à la prochain section, elles sont de plus redondantes. Par exemples si $\Omega \in \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ contient le complémentaire de toute partie de $\mathscr{A}$ le fait que $\emptyset \in \mathscr{A}$ est automatique. De même, les deux premières propriétés permettent d'en déduire la troisième. Cela découle en effet de la relation

$$A \cup B = \left(A^c \cap B^c\right)^c$$

où les composants du membre de droite sont toujours dans $\mathscr{A}$.

La formalisation qu'on vient d'introduire permet de d'exprimer quelques énoncés de l'expérience aléatoire par le biais de la linguistique ensembliste. Par exemple, dire que deux évènements A et B ne peuvent se réaliser en même temps (ils sont ***incompatibles***) se traduit par le fait que $A \cap B = \emptyset$. De même, dire que si A se réalise alors il en va de même de B se traduit par $A \subset B$.

1.1 Espaces probabilisés

La discussion précédente à propos de l'ensemble des évènements réalisables ignore la configuration suivante. On s'intéresse à l'expérience aléatoire qui consiste à jeter une pièce autant de fois qu'on le souhaite.

Question 1-3. Décrire l'espace des états de l'expérience aléatoire précédente.

On désigne par A_n l'évènement A_n : on trouve pile au n-ème jet.

Question 1-4. Traduire à l'aide des A_n le fait qu'on tombe sur un pile au moins une fois. Les axiomes précédents sont-ils suffisants pour garantir le fait que l'ensemble obtenu est un évènement si les A_n le sont ?

Le fait d'être un ensemble d'évènements dont on peut juger de la réalisablilité [1] va désormais être encoder par la notion de ***tribu***. Ce dernier n'est pas propre à la théorie des probabilités et a plutôt sa place en théorie de la mesure ; c'est celle-ci qui permet d'unifier les théories de l'intégration, des probabilités modernes (à la fois discrètes et continues).

Définition 1.4. Soit Ω un espace d'états d'une expérience aléatoire. Un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des partie de Ω est une ***tribu*** sur Ω si

— $\Omega \in \mathscr{A}$;
— si $A \in \mathscr{A}$ alors $A^c \in \mathscr{A}$;
— si $\left(A_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties dans $\mathscr{A}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est encore dans $\mathscr{A}$.

1. Cette dénomination nous permet de sortir du sous-entendu délicat et problématique de l'existence et de la cohérence d'une définition du type *l'ensemble de tous les évènements sur lesquels on peut émettre un tel jugement.*

Définition 1.5. Un espace probabilisable est la donnée d'un couple $\big(\Omega, \mathscr{A}\big)$ composé d'un espace d'états et d'une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω.

> **Question 1-5.** On se donne un espace d'états Ω. Construire deux tribus ; la plus petite et la plus grande de votre point de vue.

Nous n'avons pas encore croisés de notion de probabilité. Il est certainement commun à tous que la probabilité d'un évènement est une proportion qui permet d'en apprécier la potentielle réalisabilité. Cette phrase qui semble claire cache en réalité de réelles difficultés à définir une pensée unique de la probabilité. Pour un peu de lecture je vous renvoie à `wikipedia - interprétations des probabilités`. Depuis Kolmogorov on a un format abstrait qui permet, non d'unifier les différentes approches mais de résumer ce qui leur est commun.

Définition 1.6. Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une fonction $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_+$ telle que

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- Pour toute famille $\big(A_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements disjoints 2 à 2,

$$\mathbb{P}\Big(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(A_n\right)$$

Sous ces conditions, le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est appelé un ***espace probabilisé***.

Comme c'est traditionnel en axiomatique mathématique ou lorsqu'on manipule les types abstraits en informatiques, les axiomes d'une définition ne sont pas les seules formules *simplificatrices* qu'on utilise. En général elle découle de celles-ci.

> **Question 1-6.** On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Justifiez les relations suivantes :
> 1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
> 2. $\forall A \in \mathscr{A}$, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$;
> 3. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
> 4. si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$;
> 5. pour tout A, $B \in \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Voici quelques un peu d'exercice qui vise à manipuler des espaces probabilisés simples.

> **Question 1-7.** Brendan a 6 briquets dans ses poches. Il n'y a qu'un qui marche. Il les essaye à tour de rôle en jetant (enfin) ceux qui ne marchent pas au fur et à mesure. Quelle est la probabilité qu'il réussisse à allumer sa cigarette au k-ème essai ?

> **Question 1-8.** Au temps où la question de définir une théorie des probabilités semblait nécessaire H. Poincaré a mis en évidence la difficulté que sous-entendais cette problématique par l'exemple suivant : lors du jet de deux dès indiscernables on peut ou bien obtenir une probabilité de $\frac{11}{36}$ ou de $\frac{6}{21}$! Comment fait Poincaré dans chacun de ses calculs ?

> **Question 1-9.** Quelle est la probabilité que deux personnes d'une population de $N > 1$ individus

aient leurs anniversaires le même jour de l'année ? [a] ?

a. Rings a bell ? Pourriez-vous revenir sur une analyse du problème qui vous a été posé en quizz d'entrée SCIA ?

Une dernière relation qu'on met à part mais qui présente une utilité dans certains problèmes [2] est celui de la formule dite de Poincaré.

Proposition 1.1. *Soient* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $n \geq 2$. *Pour toute famille* $\left(A_i\right)_{i=1}^n$ *d'évènements dans* $\mathscr{A}$ *on a*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Question 1-10. *Dessiner* cette la formule de Poincaré dans le cas $m = 3$. En déduire une justification de la formule dans ce cas.

Question 1-11. Essayer de résoudre l'exercice *Distribuer aléatoirement du courrier* disponible sur `Coursera` et visionner la solution à l'exercice correspondant.

1.2 Variables aléatoires

Lors de la modélisation de la majeure partie des expériences aléatoires on est le plus souvent intéressé par des grandeurs numériques associées à celles-ci. Vous souhaitez connaître votre gain potentiel suivant le jeu que vous avez au poker ou encore le premier échec d'une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles, répétées indéfiniment. Mathématiquement une telle grandeur numérique attachée à un espace probabilisé est simplement une fonction de la tribu de celle-ci vers $\mathbb{R}$. En général, et on reviendra plus en détail sur ce point pendant le cours, une variable aléatoire a pour cible un espace probabilisable.

Définition 1.7. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\Pi, \mathscr{B})$ un espace probabilisable. Une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\Pi, \mathscr{B})$ [3] (VA pour faire court) est une fonction $X : \Omega \to \Pi$ telle que l'image réciproque d'un évènement de Π est un évènement de Ω. Plus formellement

$$\forall B \in \mathscr{B}, \qquad X^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

Notation. Les notations consacrées à l'écriture des évènements définis par une VA sont variées, souvent, et c'est la notation qu'on utilisera par la suite. Avec les notations de la définition on désigne par $(X \in B)$ l'évènement $X^{-1}(B)$.

La donnée d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sous-entend d'être en mesure de décrire les valeurs que prend la probabilité $\mathbb{P}$ sur les évènements de $\mathbb{P}$. La donnée d'une VA sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\Pi, \mathscr{B})$ réduit les évènements de $\mathscr{A}$ à ceux qui nous intéressent. Si l'on s'intéresse au jet de 2 dés dont la somme est plus grande que 8, on ne voit pas apparaître les évènements contenant l'issue $(1, 2)$ dans les images réciproque de 8 par la VA «sommme des valeurs des deux dés jetés». L'étude d'une VA passe par la détermination des probabilités des évènements décrits par les images réciproques de celle-ci.

> *Décrire la loi de probabilité* $\mathbb{P}_X$ *d'une VA* X *sur* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ *et à valeurs dans* $(\Pi, \mathscr{B})$ *signifie déterminer les probabilités* $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$ *pour chaque* $B \in \mathscr{B}$.

Théoriquement la loi d'une VA définit une probabilité sur Ω.

2. Par exemple le problème des m anniversaires communs dans une population donnée.
3. Par abus et quand cela ne porte pas à confusion on se contente de spécifier Ω. La majeure partie des VA auront pour but $\mathbb{R}$

Question 1-12. Soit X une VA sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\Pi, \mathscr{B})$.

1. Justifier le fait que l'ensemble des parties de Ω donné par $\mathscr{A}_X = \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathscr{B}\}$ forme une tribu sur Ω.
2. Montrer le fait que $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A}_X)$.

Voici une façon plus propre de parler de loi d'une VA, on fixe en particulier le fait qu'elle définit une probabilité sur un espace probablisable bien défini.

Définition 1.8. Soit X une VA sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace probabilisable $(\Pi, \mathscr{B})$. La loi $\mathbb{P}_X$ de la VA X est la probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A}_X)$ définie par

$$\forall B \in \mathscr{B}, \qquad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Décrire la loi de X correspond donc à décrire la probabilité $\mathbb{P}_X$.

Question 1-13. On considère l'expérience aléatoire du jet d'une pièce et du lancer de deux dès.

1. Décrire la loi de la VA correspondant uniquement au jet de pièce.
2. Décrire la loi de la VA qui correspond à la somme des valeurs obtenues aux lancers des dès.
3. On considère le jeu qui consiste à gagner l'équivalent de la somme des deux dès quand on tombe sur pile et d'en perdre autant quand on tombe sur face. Décrire une VA qui qui quantifie ce gain.

Question 1-14. On se donne un graphe *simple* G et deux sommets s et d. On souhaite avoir un chemin entre s et d. Un étudiant Epita pas très au fait des parcours de graphes [a] va voir un devin pour l'aider. Un devin qui ne connaît pas très bien le métier choisit un chemin au hasard parmi ceux possibles entre s et d. On s'intéresse à la longueur du chemin obtenu. Modéliser cette situation et décrire la loi de la VA *longueur de chemin* dans les cas suivants :

1. le graphe G est un cycle de longueur n, s et d deux sommets quelconques ;
2. le graphe G est K_5, s et d deux sommets quelconques ;
3. le graphe G est $K_{3,3}$, s et d appartiennent à deux biparties distinctes ;
4. le graphe G est $K_{3,3}$, s et d appartiennent à la même bipartie.

a. Bien sûr que vous savez tous en faire ...

2 Probabilités conditionnelles

Une partie substantielle de l'étude des expériences aléatoires se résume à mesurer le risque, ou l'impact, d'un évènement sur un autre. Quel risque a un adulte de contracter un cancer du poumon s'il est fumeur ? Quel chance a un étudiant Epita d'intégrer SCIA s'il a raté GLP1 ? Cette démarche est particulièrement criante lors l'analyse de données. L'expression de ces questions dans le formalisme de Kolmogorov passe par la notion de probabilités conditionnelles.

Définition 2.1. Soient A et B deux évènements de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. ***En supposant*** $\boldsymbol{\mathbb{P}(B) > 0}$ la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Question 2-15. Soient A et B deux évènements de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ avec $\mathbb{P}(B) > 0$. Justifier le fait que la fonction $\mathbb{P}(- \mid B) : A \mapsto \mathbb{P}(A \mid B)$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

La définition d'une probabilité conditionnelle ne prend réellement sens que dans la mesure où l'on saisit la notion d'indépendance de deux évènements ; cela sera abordé au cours de la prochaine section. La notion de probabilité conditionnelle permet une formulation usuelle de la probabilité d'un évènement en fonction d'un système complet d'évènements.

Définition 2.2. Un ***système complet*** d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ est une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements incompatibles et dont l'union est égale à Ω.

Proposition 2.1. *Étant donné un système complet d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ on a la formule dite des **probabilités totales** : pour tout $A \in \mathscr{A}$*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \mid A_i)\, \mathbb{P}(A_i).$$

Question 2-16. D'où vient la relation précédente ?

Question 2-17. On souhaite répartir les étudiants d'*IMAGE* et de *SCIA* sur deux groupes de TD. On a respectivement n_1 et n_2 étudiants dans chacune des majeures. En *IMAGE* on a d_1 étudiants qui préfèrent les horaires du premier groupe de TD et p_1 qui préfèrent le second. Les nombres correspondant pour les *SCIA* sont d_2 et p_2. Le prof ayant marre de gérer les envies des uns et des autres décide de faire les choses au hasard. Il procède ainsi : on choisit une des deux majeure en tirant à pile ou face puis on tire au hasard un étudiant dans ce groupe. Quelle est la probabilité de choisir ainsi un étudiant mécontent ?

2.1 Indépendance de deux évènements

Question 2-18. On s'intéresse à l'expérience aléatoire correspondante au jet de deux dés de couleurs différentes (rouge et bleu) mais identiques par ailleurs. Si Ω_1 et Ω_2 sont les espaces des états des expériences correspondants respectivement au jet du premier et du second dé, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ correspond au jet des deux dès.

1. Décrire les évènements de Ω qui correspondent au fait de s'intéresser uniquement aux résultats du premier jet (resp. du second). Quelles sont les VA qui permettent d'isoler ces évènements ?
2. L'espace Ω permet désormais de comparer des évènements au jet de chacun des deux dès. Calculer à l'aide de la description précédente la probabilité de l'intersection de deux évènements associés respectivement à chacun des dès.
3. On suppose désormais que si le résultat du dès rouge est pair on ramène le résultat du second dès à 1. Effectuer à nouveaux l'étude précédente dans ce cas.
4. Quelle est la différence entre ces deux expériences ?

Définition 2.3. Deux évènements A et B de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sont ***indépendants*** si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B).$$

Remarque 1. La notion de probabilité conditionnelle d'un évènement A sachant B permet, quand comparée à la probabilité de A, de mesurer l'écart à l'indépendance des évènements A et B.

Remarque 2. Dans la pratique on teste rarement l'indépendance d'évènements ou de VA (2.3). Le contexte de la modélisation l'explicite [4].

4. Ou le sous-entend ...

Question 2-19. Que dire de l'indépendance des évènements complémentaires d'évènements indépendants.

L'indépendance est une notion qui s'étend au cas d'une famille d'évènements.

Définition 2.4. Une famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ est dite ***indépendantes*** si pour tout partie $J \subset I$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}\left(A_j\right).$$

Question 2-20. Cet exercice est une variante de [Ouv98, Exemple 3.1]]. On considère un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ou tous les évènements sont équiprobables et $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. On note $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$, $C = \{\omega_1, \omega_4\}$. Montrer que les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas indépendants.

Question 2-21. Avec les notations de l'exercice précédent définir trois évènements dont le produit des probabilités est pas égal à la probabilité de leurs intersections mais qui ne sont pas indépendants.

2.2 Formule de Bayes

Historiquement, deux approches de la théorie des probabilités ont eu un apport conséquent sur la définition et l'évolution de celle-ci. D'un côté l'approche fréquentiste qui cherche à définir la probabilité d'un évènement par la fréquence de réalisation de celui-ci par rapport au nombre de fois où l'on observe le déroulement de l'expérience aléatoire de départ. La seconde, dite *bayesienne*, entrevoie la théorie des probabilités par sa capacité à décider de la potentielle réalisation conditionnelle d'un évènement à partir d'une estimation à priori de celle-ci.

Proposition 2.2. *Soient A et B deux évènements de $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ de probabilités non nulles, alors :*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbb{P}(A).$$

La formule précédente [5] peut se comprendre dans le contexte suivant : supposons A l'évènement qui correspond au fait d'avoir un cancer du poumon, l'évènement B celui d'avoir une image rayon-X bien d'un type particulier ; la probabilité de gauche est celle d'avoir un cancer une fois connue l'image rayon-X, la probabilité $\mathbb{P}(A)$ celle pour un individu d'avoir le cancer. On cherche à estimer la propriété à posteriori (connaissant une information supplémentaire) à partir de l'information à priori. Cette démarche est générale en ML ; on s'intéresse à la question de savoir à quelle classe appartient une observation à partir de données sur la fréquence d'occurrence de cette classe. Pour une observation donnée le modèle décidera d'affecter à une observation la classe pour laquelle la probabilité sachant cette observation est la plus élevées.

Proposition 2.3 (Formule de Bayes)**.** *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ tel que pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Alors pour tout $A \in \mathscr{A}$*

$$\mathbb{P}(A_i \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j\in I} \mathbb{P}(A \mid A_j)\,\mathbb{P}(A_j)}.$$

5. Facile à justifier, essayez.

Question 2-22. Justifiez la formule de Bayes.

Question 2-23. On considère trois fournisseurs de solutions logicielles numérotées 1, 2 et 3. Elles proposent toutes deux gammes du même produit. Les produits de la première sont toujours bien suivis et il y a peu de retours négatifs client. La seconde a un mauvais retour client sur l'une de ses deux gammes. La dernière a des mauvais retour sur l'ensemble de ces gammes. On souhaite choisir un de ces produit. À la suite d'un manque de processus clair de décision on finit par laisser le hasard choisir. On choisit un fournisseur au hasard (avec équiprobabilité) puis au sein de celui-ci on choisit au hasard (toujours avec équiprobabilité) l'une des deux gammes de produit. En supposant être tombé sur un mauvais choix, quelles sont nos chances de pouvoir changer pour une gamme ayant même produit chez le même fournisseur ?

Question 2-24. Vous retrouverez cet exercice ici [Ouv98, Exercice 4.3]. Dans une population donnée, on suppose que la probabilité p_k pour qu'une famille ait k enfants est définie par

$$p_0 = p_1 = a, \quad \text{et, pour } k \geq 2, p_k = \frac{(1-2a)}{2^{k-1}},$$

où a est un réel strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. On suppose de plus que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille lors d'une naissance est la même.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ayant deux garçons ait deux enfant seulement ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'une famille ait deux filles sachant qu'elle a deux garçons ?

2.3 Extension au cas des VA

L'extension de la notion de probabilité conditionnelle à celle de lois conditionnelles n'est pas aisée ; il nous manque un cadre qui permet d'unifier à la fois les cas de probabilités discrètes et continues, la théorie de la mesure de Lebesgue. On se contentera d'en séparer l'étude lors des prochaines périodes. La notion d'indépendance des VA reste accessible tel quelle à notre stade.

Définition 2.5. Deux VA X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et respectivement à valeurs dans $(\Pi_1, \mathscr{B}_1)$ et $(\Pi_2, \mathscr{B}_2)$ sont indépendantes si pour tout couples d'évènements $(B_1, B_2) \in \mathscr{B}_1 \times \mathscr{B}_2$ les deux évènements $(X \in B_1)$ et $(X \in B_2)$ sont indépendants.
L'extension au cas de l'indépendance d'une famille quelconque de VA est immédiate : les éléments d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de VA sont indépendants si pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements respectivement dans les cibles des X_is les évènements $(X_i \in A_i)$ le sont.

Comme cela a déjà été formulé précédemment, dans la pratique on part souvent d'une hypothèse faite sur l'indépendance de VA. Il arrive cependant qu'on compose des VA avec d'autres VA dans le but d'en tirer une information plus à notre goût. Par exemple, on peut considérer les VA (`poids`, `taille`) sur la population française puis composer avec la VA qui en prend le ratio. La proposition suivante permet de s'affranchir de la stabilité de l'indépendance sous ce type d'opérations.

Proposition 2.4. *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de VA indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et respectivement à valeurs dans $(\Pi_i, \mathscr{B}_i)$. Si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de VA telle que f_i est définie sur $(\Pi_i, \mathscr{B}_i)$ alors $\big(f_i(X_i)\big)$ définit encore une famille de VA indépendantes sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.*

Question 2-25. Discuter du fait qu'on n'a pas défini f_i sur un espace probabilisé mais uniquement probabilisable.

Références

[Ouv98] Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités : Tome 1, Capes-Agrégation*. Enseignement des mathématiques. Cassini, 1998.

[Pol] Ecole Polytechnique. Aléatoire : introduction aux probabilités parties I. `https://www.coursera.org/learn/probabilites-1`.