Examen de Probabilités

Durée de l'épreuve 3h.
Les documents du cours ne sont pas autorisées, les calculettes non programmables le sont.
Le barême est indicatif et peut évoluer de manière marginale. Vous avez 40 points sur l'ensemble du sujet, un coefficient adapté sera appliqué à vos résultats. Faites le maximum que vous pouvez.

---

1 Cas discret

Cette première partie se focalise sur l'étude de phénomènes discret. La première section s'intéresse à la somme de deux lois binômiales. On se propose dans la seconde d'étudier la loi de probabilité qui régit la réussite au QCMs de prépa intégrée Epita par une stratégie aléatoire [1]. Il s'agit de mettre à l'épreuve quelques raisonnements [2] de certains de nos chers étudiants. On décrit en un premier temnps le contexte dans lequel on se place.

1.1 Somme de binômiales

On se donne deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de paramètres respectifs (n, p) et (m, p) où $p \in]0, 1[$ et n, $m \in \mathbb{N}^*$.

> **Question 1-1.** Identifier la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$. 3 P.

1.2 Du hasard aux QCMs

Un QCM est composé de n questions numérotées de 1 à n. Pour chaque question i on a R_i suggestions numérotées de 1 à r_i. Répondre à une question signifie cocher les suggestions qui semblent justes. La réponse à la question i est une partie de R_i, éventuellement vide (le cas où l'on choisit de ne pas répondre). ***Il n'y a qu'une seule combinaison de suggestions considérée comme la bonne réponse à une question donnée.*** Toutes les autres réponses sont fausses et sinon ***NA*** [3], dans le cas où l'étudiant choisi de ne pas répondre. Le fait de ne pas répondre n'est jamais considéré comme une bonne réponse.

Pour simplifier l'étude nous allons supposer que toutes les questions ont un même nombre de suggestions r. ***On suppose de plus que les réponses aux questions du QCMs sont indépendantes.***

> **Question 1-2.** Décrire l'espace d'états Ω_i de l'expérience aléatoire *répondre à la question i*. En déduire l'espace d'états Ω qui correspond au fait de répondre à toutes les questions. ***Indiquer le cardinal de chacun de ces espaces d'états***. 2 P.

1. Et hasardeuse !
2. Foireux !
3. Non Assignée.

On désigne par ρ le nombre de réponses (ou non-réponses) possibles une question[4]. Autrement dit, $\rho = \text{Card}(\Omega_i)$. Soit $p \in [0,1]$. On définit sur chaque Ω la probabilité suivante :

- $\mathbb{P}(\emptyset) = p$
- $\forall \omega \in \Omega_i \setminus \{\emptyset\}$, $\mathbb{P}(\omega) = \dfrac{1-p}{\rho - 1}$.

La probabilité p est, donc, celle de ne pas répondre.

Question 1-3. Vérifier que $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur Ω_i. 2 P.

Pour chaque i on désigne par X_i la variable aléatoire sur Ω_i telle que

$$X_i(\omega) = \begin{cases} F & \text{si } \omega \text{ est une réponse fausse ;} \\ V & \text{si } \omega \text{ est la bonne réponse ;} \\ NA & \text{s'il n'y a pas de réponse.} \end{cases}$$

Question 1-4. Décrire la loi de X_i. Par hypothèse, les variables aléatoires X_i sont indépendantes. On note X la variable aléatoire produit des X_i. Quelle est la probabilité qu'un étudiant donne la bonne réponse pour 4 P.

1. une seulle question ;
2. toutes les questions ;
3. au moins deux questions ?

On s'intéresse désormais à la note de l'étudiant hasardeux. On désigne par N_i la variable aléatoire sur Ω_i et à valeurs dans $\{-1, 0, 2\}$ qui représente la note à la question i. Par définition

$$N_i(\omega) = \begin{cases} -1 & \text{si } \omega \text{ est une réponse fausse ;} \\ 2 & \text{si } \omega \text{ est la bonne réponse ;} \\ 0 & \text{s'il n'y a pas de réponse.} \end{cases}$$

Question 1-5. Quel est le lien entre N_i et X_i ? En déduire que les N_i sont des variables aléatoires indépendantes. 1 P.

La note totale de notre étudiant est $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$. Notre but est d'étudier l'espérence et la variance de N en passant par l'étude des séries génératrices des N_i. Le point technique réside dans le fait qu'on a définit une série génératrice dans le cas d'une variable aléatoire qui prenait ses valeurs dans $\mathbb{N}$, ce qui n'est pas le cas de N_i (elle peut prendre la valeur -1). Pour contourner ce problème on s'intéresse à la variable aléatoire $K_i = N_i + 1$. Les K_i prennent leurs valeurs dans $\{0, 1, 3\} \subset \mathbb{N}$. On désigne par K la variable aléatoire $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$.

Question 1-6. 3 P.

1. Quel est le lien entre K et N ?
2. Exprimer l'espérence de K en fonction de celle de N.
3. Faire de même avec la variance.

On s'intéresse désormais à la série génératrice de K.

4. Toutes les questions ont le même nombres de suggestions r.

Question 1-7. 7 P.

1. Donner l'expression de la série génératrice de K_i en fonction de p et ρ.
2. En déduire la série génératrice de K.
3. En déduire l'espérence et la variance de N en fonction de p et ρ.
4. Décrire la variance et l'espérence pour les cas $\rho \in \{2, 3, 4\}$. Que pouvons-nous dire pour des $\rho > 4$?

2 Lois continues

Le travail qui suit porte sur les variables aléatoires à densités.

2.1 Un calcul de densité

On considère la variable aléatoire de densité $f(x) = 3x^3 \mathbb{1}_{]0,1]}(x)$.

Question 2-8. On désigne par Y la variable aléatoire $Y = 1/X$. 3 P.

1. Calculer l'espérence de Y.
2. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y et en déduire sa densité f_Y.

2.2 Lois exponontielles

On se donne deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois exponentielles respectivement de paramètres λ et μ. Pour rappel, la loi exponentielle de paramètre λ est donnée par la densité

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}.$$

On s'intéresse aux variables aléatoire $Z = \min\{X, Y\}$ et $S = X + Y$.

Question 2-9. 3 P.

1. Exprimer $\{Z \geq t\}$ en fonction de $\{X \geq t\}$ et $\{Y \geq t\}$.
2. Montrer que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.

On s'intéresse désormais à la variable aléatoire S.

Question 2-10. 4 P.

1. Calculer $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{E}(X)$. Vérifier, en particulier, que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X)^2$.
2. Calculer la variance et l'espérence de S.
3. En déduire que S ne peut pas suivre une loi exponentielle.

2.3 Loi uniforme sur un triangle

On note T l'intérieur du triangle dans $\mathbb{R}^2$ délimité par les points de coordonnées $(0, 0)$, $(1, 0)$ $(0, 1)$. On note $Z = (X, Y)$ le couple de variables aléatoires de loi uniforme sur T. Autrement dit dont la denisté est $2\mathbb{1}_T$.

Question 2-11. 4 P.

1. Calculer les lois marginales de X et de Y.
2. Calculer la covariance des variables aléatoires X et Y. Sont-elles indépendantes ?

2.4 Loi uniforme sur un carré

On considère la loi $Z = (X, Y)$ définie comme la loi uniforme sur $[0, 1]^2$; sa fonction de répartion sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{[0,1]^2}$.

Question 2-12. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$. 4 P.