Dénombrement - Fiche Théorique

Résumé

Cette annexe constitue un rappel succint et un peu sec des contenus de cours en dénombrement. C'est un rappel utile des démarches théoriques qui sous-tendent les différentes stratégies de comptage que l'on aborde dans le cours `PRSTIA`.

En mathématiques le dénombrement est l'acte de ***compter*** ou d'***énumérer*** les éléments d'un ensemble. On compte le nombre de produits restant dans un rayon de supermarché, le nombre d'étudiants ayant réussi un examen, le nombre d'espèces animales disparues [1] ... etc.

Ces exemples, intuitifs, ne sont pas la limite de ce qu'on souhaiterait pouvoir ***énumérer***. Dénombrer des ensembles finis et une manière de quantifier leurs « grosseurs ». De ce point de vue, il est naturel de se poser la question de savoir si l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est plus « gros » que celui des entiers relatifs $\mathbb{N}$. Ou encore si l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ et plus grand que celui des rationnels $\mathbb{Q}$. C'est un aspect qu'on ne verra qu'en surface pour commencer. Son importance pour la suite de vos études va, cela dit, nous forcer à le prendre en compte dans les définitions qu'on donnera.

Pour répondre aux questions laissées en suspens dans ce propos introductif, on verra dans la suite que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont aussi « gros » les uns que les autres mais que $\mathbb{R}$ est plus « gros ».

1 Ensembles finis

Dans le cas des ensembles finis la notion de cardinal correspond à celle de nombre d'éléments appartenant à l'ensemble. Il suffira de garder cette idée en tête en un premier temps, on reviendra sur la subtilité de cette définition par la suite. Le but de cette section est d'aborder la question de ***comment formaliser le fait de compter ?***.

Définition 1.1. Un ensemble $E \neq \emptyset$ est fini s'il existe une bijection de E dans $\{1, 2, \dots, n\}$ pour un entier $n > 0$. Par convention l'ensemble vide $\emptyset$ est également fini.

L'entier n de la définition précédente n'est pas encore garanti d'être unique ; du moins la définition ne le dit pas.

Lemme 1.1. *Soient (n, m) un couple d'entiers naturels non nuls. S'il existe une injection de $\{1, \dots n\}$ dans $\{1, \dots, m\}$ alors $n \leq m$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur m. Dans le cas où $m = 1$, toute application de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1\}$ est constante. Une telle application est injective si et seulement si $n = 1$.

Dans le cas général, soit f une application injective de $\{1, \dots, n\}$ vers $\{1, \dots, m\}$. Quitte à renuméroter les éléments de $\{1, \dots, m\}$ on peut supposer que $f(n) = m$. Comme n est dans ce cas l'unique antécédant de m par f, la restriction de f à $\{1, \dots, n-1\}$ a une image dans $\{1, \dots, m-1\}$. Par hypothèse de récurrence il en vient que $n - 1 \leq m - 1$, d'où $n \leq m$. □

1. Exemple qui n'est en rien lié au précédent :).

Corollaire 1.2. *Étant donné un ensemble fini $E \neq \emptyset$, l'entier naturel n tel que E est en bijection avec $\{1, \ldots, n\}$ est unique ; c'est le cardinal de E. Par convention le cardinal de $\emptyset$ est 0.*

Démonstration. Il n'y a rien à montrer pour le cas de l'ensemble vide car la question est réglée par convention. On cherche à montrer que s'il existe des bijections f et g respectivement de E dans $\{1, \ldots, n\}$ et $\{1, \ldots, m\}$, pour deux entiers naturels n et m, alors $n = m$. Sous de telles hypothèses on obtient les deux bijections (et donc injections) $f^{-1} \circ g$ et $g^{-1} \circ f$ respectivement de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$ et inversement. D'après le lemme 1.1 $n \geq m$ et $m \geq n$, donc $m = n$. □

Notation. Le cardinal d'un ensemble E sera noté $\operatorname{Card}(E)$ ou encore $\sharp E$.

La pratique du dénombrement consiste à calculer les cardinaux d'ensembles d'intérêt. Cette pratique se base sur un nombre de principes élémentaires qu'on déclinent suivant la stratégie de travail qu'on adopte. On reviendra sur ces principes, souvent intuitifs, à la section 2. On se limite pour l'instant à des exemples qu'on peut écrire explicitement.

Question 1-1. Déterminer les cardinaux des ensembles décrits par la suite :
- Le nombre d'entiers pairs plus petits que 12. Ceux plus petits que 13 ? Comment procéder dans le cas général ?
- Le nombre de points dont les deux coordonées sont entières comprises entre 1 et 7 et qui se trouvent sur la droite $2y = 1 - x$.
- Le nombre de mots (sans qu'ils aient nécessairement du sens) qu'on peut écrire en réordonnant les lettres de « abba ».

Hypothèse 1.3. À moins de faire explicitement mention de contraire les ensembles qu'on manipulent sont ***finis***.

2 Principes ensemblistes

Certains principes de compatibilités des opérations ensemblistes à la notion de cardinal sous-tendent l'essentiel des raisonnements qu'on aborde dans ce cours. Ces principes sont intuitifs, même si les preuves de ceux-ci restent assez formelles. [2]

Proposition 2.1. *Soit E un ensemble de cardinal fini et $\{A_i\}_{i \in I}$ une partition finie (I de cardinal fini) de E. Alors*
$$\operatorname{Card}(E) = \sum_{i \in I} \operatorname{Card}(A_i). \tag{1}$$

Démonstration. On se contente d'une esquisse de la preuve. Une preuve par récurrence serait plus adaptée si l'on souhaite en donner une particulièrement rigoureuse, mais il ne semble pas que celle-ci apporte une visibilité plus accrue quant à la justification de cette proposition.

Si I est vide E est de même et la relation 1 est satisfaite. Supposons que I n'est donc pas vide. Par hypothèse sur I on peut identifier I à $\{1, \ldots, p\}$ pour $p \geq 1$. De même chaque A_i est en bijection avec $\{1, \ldots, n_i\}$ pour $n_i > 0$. On suppose ici les A_i non-vide, ce qui ne change rien au résultat. On construit pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$ une bijection obtenue par ***shift*** de $\{1, \ldots, n_i\}$ vers $\{s_i + 1, \ldots, s_i + n_i\}$ où $s_i = \sum_{k=1}^{i-1} n_k$ (par convention ici $s_1 = 0$). En regroupant ces bijections, on obtient une bijection de E sur $\{1, \ldots, s_p\}$. Or s_p est précisément le membre de droite de 1. Pour une description plus imagée de cette proposition voir figure 1. □

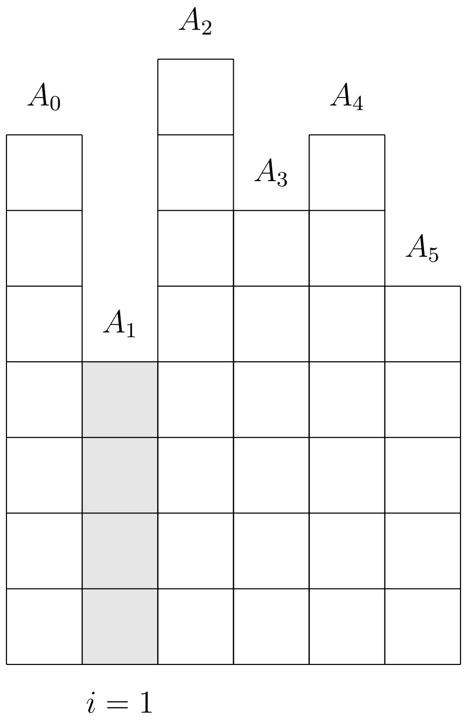


FIGURE 1 – Cardinal d'un ensemble fini via une partition.

Corollaire 2.2. *Soit F un sous-ensemble d'un ensemble fini E. Alors*

$$\mathrm{Card}\,(F) \leq \mathrm{Card}\,(E)\,.$$

Démonstration. La décomposition

$$E = F \sqcup \big(E \setminus F\big),$$

qu'on retrouve représentée figure 2, donne

$$\mathrm{Card}\,(E) = \mathrm{Card}\,(F) + \underbrace{\mathrm{Card}\,(E \setminus F)}_{\geq 0}\,.$$

D'où la relation recherchée. □

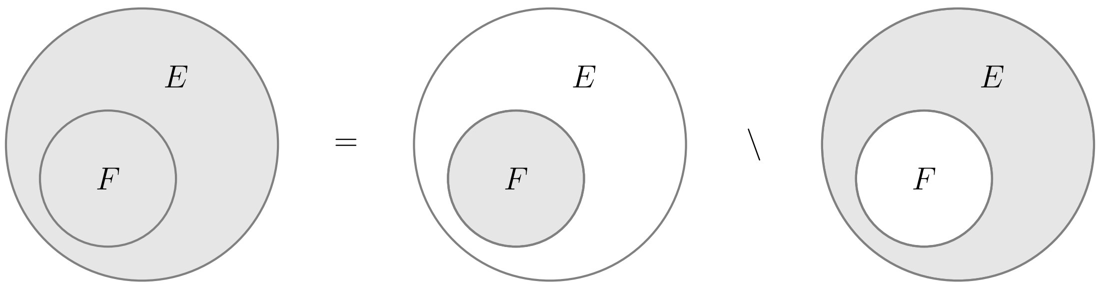


FIGURE 2 – Cardinal d'ensembles finis et inclusion.

Corollaire 2.3. *Soient F et G deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors*

$$\mathrm{Card}\,(F \cup G) = \mathrm{Card}\,(F) + \mathrm{Card}\,(G) - \mathrm{Card}\,(F \cap G)\,.$$

2. Il est possible de se contenter de dessin pour justifier chacun des principes en question. Garder en extension les preuves formelles de celles-ci.

Démonstration. On peut partitionner l'union $F \cup G$ de la manière suivante (voir figure 3) :

$$F \cup G = F \sqcup \Big(G \setminus (F \cap G)\Big).$$

D'après le premier principe on obtient

$$\mathrm{Card}\,(F \cup G) = \mathrm{Card}\,(F) + \mathrm{Card}\,(G \setminus (F \cap G))\,. \tag{2}$$

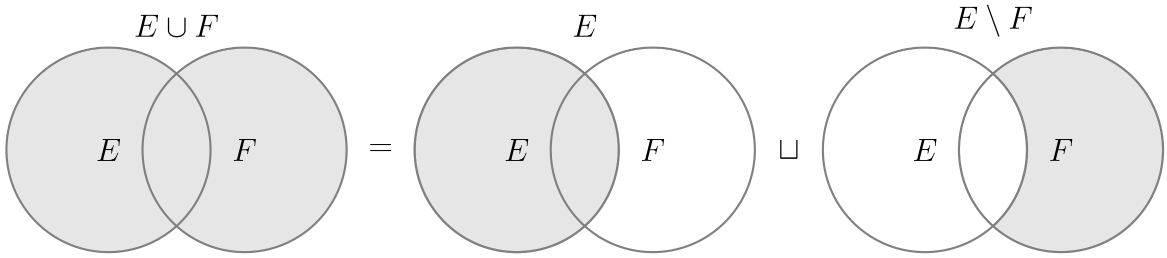
Or

$$G = \Big(G \setminus (F \cap G)\Big) \sqcup (F \cap G).$$

Donc

$$\mathrm{Card}\,(G) = \mathrm{Card}\,(G \setminus (F \cap G)) + \mathrm{Card}\,((F \cap G))\,.$$

On retrouve la relation rechercée en reinjectant cette relation dans l'équation 2. □



Le dernier terme de cette décomposition s'écrit également

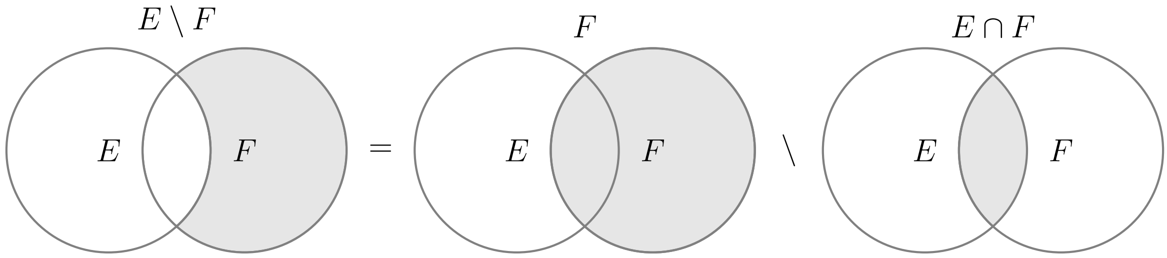


FIGURE 3 – Cardinal de l'union de deux ensembles finis.

Proposition 2.4. *Soient $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille finie (I est de cardinale fini) d'ensembles finis. On note P le produit cartésien des A_i pour $i \in I$. Alors*

$$\mathrm{Card}\,(P) = \prod_{i \in I} \mathrm{Card}\,(A_i)\,.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le cardinalt de I. Par convention, le produit d'une famille indexée par $\emptyset$ est 0. La relation est donc vérifiée dans ce cas. Ce cas étant une situation marginale, et un peu délicate à entendre, on se contente de débuter notre raisonnement au cas où I est de cardinal 1. Il n'y a dans ce cas rien à montrer ; les deux ensembles impliqués dans les membres de gauche et droite de l'égalité sont les mêmes. On se donne désormais un ensemble I de cardinal $n+1$ et $i_0 \in I$. On a

$$P = \bigsqcup_{k \in A_{i_0}} k \times \left(\prod_{i \in I \setminus i_0} A_i \right).$$

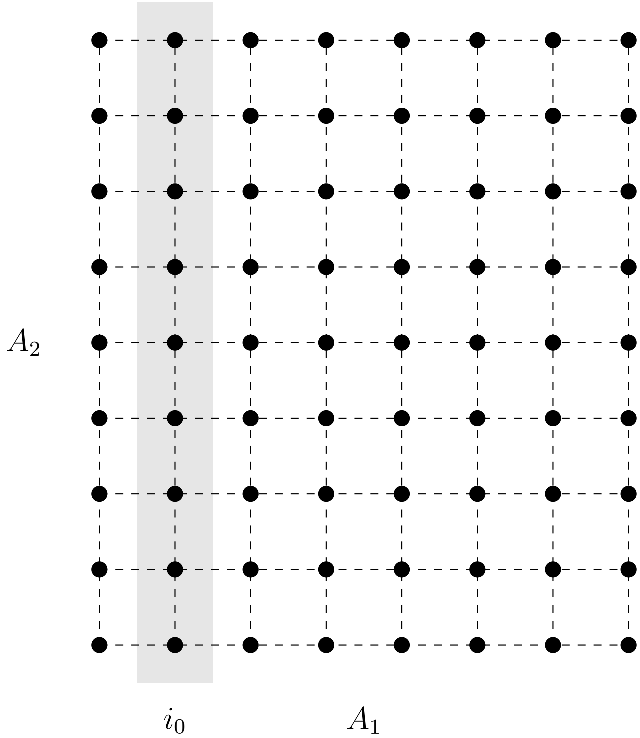


FIGURE 4 – Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis.

D'après notre premier principe cela implique

$$\mathrm{Card}\,(P) = \mathrm{Card}\,(A_{i_0}) \times \mathrm{Card}\left(\prod_{i \in I \setminus i_0} A_i\right).$$

On conclut par hypothèse de récurrence au rang n. La démarche qu'on vient de mettre en évidence est représentée figure 4. $\square$

3 Les dénombrements de référence

Au côtés des principes étudiés précédemment il existe quelques dénombrements de référence qu'il est avisé de connaître. Ils sont d'utilisation constante dans la pratique.

3.1 Nombres de bijections

Comme le titre le dit : on souhaite calculer le nombre de bijections entre deux ensembles finis donnés. D'après 1.2 l'ensemble des bijections entre deux ensembles finis est non vide si et seulement si ils ont même cardinaux.

Question 3-2. Dénombrer l'ensemble des bijections de l'ensemble des 3 points cardinaux $\mathcal{E} = \{E, S, W\}$ vers celui des couleurs $\mathcal{F} = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ d'un jeux de cartes.

Remarque 1. Le comptage précédent revient à compter les bijections de $\{1, 2, 3\}$ dans lui même. En effet, il existe des bijections f et g respectivement de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ vers $\{1, 2, 3\}$. À toute bijection $\beta : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ correspond la bijection $g \circ \beta \circ f^{-1}$ de $\{1, 2, 3\}$ sur lui-même. Inversement une bijection γ de $\{1,2,3\}$ dans lui même donne la bijection $g^{-1}\circ\gamma\circ f$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

$$\begin{tikzcd} \{1,2,3\} \arrow[rrr, bend right, "g\circ\beta\circ f^{-1}"'] & \mathcal{E} \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "\beta"] & \mathcal{F} \arrow[r, "g"] & \{1,2,3\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] \arrow[rrr, bend right, "g^{-1}\circ\gamma\circ f"'] & \{1,2,3\} \arrow[r, "\gamma"] & \{1,2,3\} & \mathcal{F} \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

Le raisonnement précédent est général. Étudier les bijections entre deux ensembles finis (nécessairement de même cardinal, si l'on espère au moins une bijection) revient à étudier les bijections de $\{1,\dots n\}$ dans lui même.

Notation. Soit $n \in N^*$. On appelle ***permutation*** de $\{1,\dots,n\}$ toute bijection de $\{1,\dots,n\}$. L'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ est noté S_n ou encore $\mathfrak{S}_n$.

Cherchons à se donner une permutation σ de $\{1,\dots,n\}$ pour un entier $n>1$. En supposant qu'on connaisse l'image de 1 par σ, il nous reste plus qu'à trouver une bijection de $\{2,\dots,n\}$ dans $\{1,\dots,n\}\setminus\sigma(1)$. Au réordonnement prêt des éléments de ces deux ensembles on vient de se ramener à trouver une permutation de $\{1,\dots,n-1\}$. On peut donc écrire

$$\mathfrak{S}_n = \bigsqcup_{i=1}^{n}\{i\}\times\mathfrak{S}_{n-1}.$$

où la première coordonnées correspond à l'image de 1. On en déduit donc, pour tout entier $n>1$

$$\mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_n\right) = n\times\mathrm{Card}\left(\mathfrak{S}_{n-1}\right).$$

Un calcul du cardinal de $\mathfrak{S}_1$ permet de calculer le nombre de permutations de $\{1,\dots,n\}$ par récurrence.

Définition 3.1. Soit $n\in\mathbb{N}$. On appelle ***factoriel*** n, noté $n!$ l'entier naturel défini récursivement par

- $0! = 1$;
- $n! = n\times(n-1)!$.

Proposition 3.1. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$. L'ensemble des permutations $\mathfrak{S}_n$ est de cardinal $n!$.*

Question 3-3. Calculer le nombre
- de manières d'ordonner les listes [1; 2; 3; 3; 5; 6], [1; 2; 3; 3; 5; 6] ;
- de mots qu'on crée à partir du mot « saperlipopette ».

3.2 Arrangements

Le nombre d'arrangements est le nombre d'***injections*** de $\{1,\dots,k\}$ dans $\{1,\dots,n\}$. Comme dans le cas des permutations ; cela sert de modèle pour le nombre d'injections entre deux ensembles finis quelconques. Toujours d'après 1.2 pour que l'ensemble des arrangements soit non vide il faut $k\le n$.

Soient k, n deux entiers tels que $n>1$ et $k<n$. On note $A_{k,n}$ l'ensemble des arrangements de $\{1,\dots,k\}$ dans $\{1,\dots,n\}$. Par un raisonnement identique au cas des permutations on a la décomposition

$$A_{k,n} = \bigsqcup_{i=1}^{n}\{i\}\times A_{k-1,n-1}.$$

On en déduit donc

$$\mathrm{Card}\left(A_{k,n}\right) = n\times\mathrm{Card}\left(A_{k-1,n-1}\right).$$

L'ensemble $A_{1,n-k+1}$ correspond aux injections de $\{1\}$ dans $\{1,\dots,n-k+1\}$.

Proposition 3.2. *Étant donné deux entiers positifs k, n tels que $k \leq n$ alors*

$$\mathrm{Card}\,(A_{k,n}) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

> **Question 3-4.** Exprimer le nombre de sous-chaînes de longueur 8 et sans répétitions qu'on peut extraire de l'alphabet.

3.3 Combinaisons

Quand on étudie le problème de dénombrer les sous-chaînes de longueur 8 de l'alphabet, on est préoccupé par l'ordre des lettres qui apparaissent dans celles-ci. Il n'en serait pas de même si l'on s'intéresse au nombres de manière de composer un sac de courses contenant 8 produits à partir d'un ensemble fixé de produits. Qu'on prenne les tomates en premier ou en second ne change rien à la composition du sac. Dans le premier cas on s'intéresse au 8-uplets de lettres de l'alphabet, dans le second on s'intéresse aux sous-ensembles ayant 8 éléments composés de produits à disposition.

Pour tout k, n des entiers naturels tels que $k \leq n$ on note $C_{k,n}$ l'ensemble des parties ayant k éléments de $\{1, \ldots, n\}$. On a une application $\phi : A_{k,n} \to C_{n,k}$ qui envoie un k-uplet de $A_{k,n}$ sur la partie de cardinal k correspondante dans $\{1, \ldots, n\}$. L'image réciproque d'un quelconque élément de $C_{k.n}$ correspond à l'ensemble des manière d'ordonner les k éléments de la partie concernée. Elle est de cardinal $k!$, on a donc

$$A_{k,n} = k! \times C_{k,n}.$$

Notation. Soient k, n deux entiers naturels avec $k \leq n$. On note $\binom{n}{k}$ la quantité $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Cette quantité est qualifiée de ***coefficient binômial***[3].

Proposition 3.3. *Étant donné des entiers naturels k, n tels que $k \leq n$ on a*

$$\mathrm{Card}\,(C_{k,n}) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

> **Question 3-5.** Calculer le nombre
> — d'arêtes qu'on peut avoir dans un graphe ayant 3 sommets ;
> — de façon d'avoir deux entiers naturels plus petits que 10 qui somment à 12.

Les coefficients binômiaux satisfonts des propriétés algébriques qui en facilitent parfois la manipulation et l'usage.

Proposition 3.4. *Pour tout entière naturel $n \in \mathbb{N}$ on a :*

- $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leq \mathbb{N}$,
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
- *Si* $n > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leq \mathbb{N}$,
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

3. La raison pour cette dénomination apparaîtra de manière plus claire par la suite.

La première propriété est évidente, la seconde se constate en effectuant explicitement la somme des termes à droite de l'égalité. Elle est souvent appelée relation de Pascal [4].

Remarque 2. Les propriétés proposition 3.4 permettent de réduire les temps de calculs ayant pour objectif de générer les coefficients binômiaux :

— la première propriété montre qu'il est suffisant de calculer ses coefficients pour $k \in \{0, \dots, \lceil n/2 \rceil\}$;

— la seconde permet d'accélerer les calculs des coefficients binômiaux en stockant les valeurs calculées aux étapes précédantes. Il faut pour cela remarquer que $\binom{n}{k}$ apparaît dans les calculs de $\binom{n+1}{k+1}$ et $\binom{n+1}{k}$. C'est un processus similaire à l'implémentation en complexité linéaire des termes de la suite de Fibonacci.

3.4 Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton est l'une des premières manifestations des coefficients binômiaux dans un contexte algébrique. Cette apparation permet dans des contextes plus généraux (comme les séries génératrices en probabilités) de manipuler des quantités combinatoires, issues de problèmes de dénombrement, algébriquement.

Proposition 3.5. *Soit n un entier naturel non nul. Pour tout x, $y \in \mathbb{R}$ on a*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

On peut montrer cette formule par récurrence en s'aidant de la relation de Pascal pour l'hérédité. Voici une heuristique plus à même de la justifier : tous les termes de la somme contiennent n monômes, chacun venant d'un facteur différent de la puissance. Le terme $x^k y^{n-k}$ apparaît autant de fois qu'on a de manière de choisir k-fois x dans les n facteurs de la puissance. C'est donc en bijection avec le nombre de sous-ensembles à k élément d'un ensemble à n éléments.

Exemple 3.1. Le nombre des parties d'un ensemble de cardinal n est 2^n. En effet, on cherche à calculer la somme des coefficients binômiaux $\binom{n}{k}$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Exemple 3.2. Le nombre des parties de cardinal pair d'un ensemble de cardinal $n > 0$ est 2^{n-1}. On remarque en un premier temps que

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k.$$

D'où

$$\sum_{0 \le 2p \le n} \binom{n}{2p} = \sum_{0 \le 2p+1 \le n} \binom{n}{2p+1}.$$

On trouve le résultat recherché en réinjectant dans la relation obtenue à l'exemple 3.1.

4. Vous êtes invités à vous aider de Wikipedia pour rechercher ce qu'est le triangle de Pascal.

4 Extension au cas infini

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ n'est pas fini. En effet si tel était le cas, il existerait une bijection f de $\{1, \ldots, n\}$ sur $\mathbb{N}$ pour un entier $n > 0$. L'image de f étant finie on peut écrire un programme qui nous en calcul le maximum. Le successeur du maximum n'est pas dans l'image, f n'est donc pas surjective.

On aimerait cela dit être en mesure de comparer l'ensemble des entiers naturels à celui des entier relatifs, rationnels ou réels. On va devoir, dans ce but, remodeler la définition de cardinal.

4.1 La notion de cardinal en général

Définition 4.1. Deux ensembles F et E sont dits être de même cardinal s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. On désinge par $\mathcal{R}$ cette relation.

On désignge par $\mathcal{U}$ une classe (propre) [5] contenant les ensembles mathématiques d'usage courant $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ leurs unions, intersections, sous-ensembles et produits.

Proposition 4.1. *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{U}$.*

Définition 4.2. Le cardinal d'un ensemble dans $\mathcal{U}$ est sa classe d'équivalence suivant la relation $\mathcal{R}$.

Remarque 3. Dans le cas fini, un ensemble E a un unique représentant de la forme $\{1, \ldots, n\}$ dans sa classe d'equivalence suivant $\mathcal{R}$. On identifie dans ce cas le cardinal de E à ce n. C'est de la sorte qu'on retrouve la définition donnée au cours de la section précédente.

4.2 Les ensembles dénombrables

Définition 4.3. Un ensemble est dit dénombrable s'il peut être mis en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$. Il est non dénombrable sinon.

Exemple 4.1. L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable par définition.

Exemple 4.2. Les ensembles des entiers pairs, impairs ou des multiples d'un entier positifs fixés sont dénombrables.

Exemple 4.3. Tout ensemble de la forme $\{n \in \mathbb{N} \mid n > M\}$ pour un réel M est dénombrable.

Exemple 4.4. L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ est dénombrable. Il suffit pour le voir de construire la bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$ qui envoie bijectivement les entiers pairs sur $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et le entiers impairs sur la partie strictement négative. Plus précisément on définit la bijection $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ par

$$\psi(n) = \begin{cases} p & \text{si } n = 2p \\ -(p+1) & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}.$$

Exemple 4.5. Le produit cartésien $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. On va se contenter de décrire le procédé d'énumération des éléments de $\mathbb{N}^2$. Étant donné un entier $k \in \mathbb{N}$, la droite $x + y = k$ contient exactement $k + 1$ entiers ; $(0, k), (1, k - 1), \ldots, (k, 0)$. On compte les couples d'entiers

5. Pour nous, cela n'est qu'une collection d'ensembles. Cette notion est cependant nécessaire pour éviter le paradoxe de Russel. Wikipedia est votre ami pour un peu plus de culture.

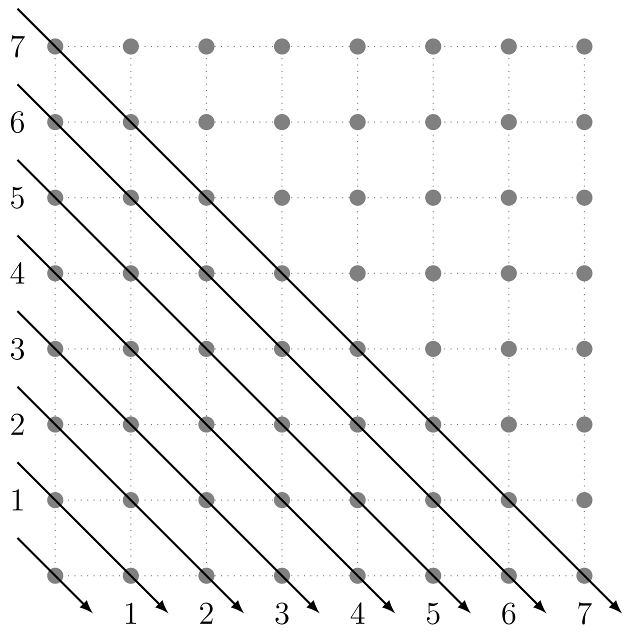


FIGURE 5 – Procédé d'énimération de $\mathbb{N}^2$.

sur chacune de ses droites par ordre croissant en commençant par $k = 0$. Arrivé à la droite de coefficient constant k on a épuisé

$$\sum_{p=0}^{k}(p+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

entiers. On reprend le décompte au successeur de cette quantité. Cette démarche permet de construire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$. Elle est représentée figure 5.

Exemple 4.6. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En effet, chaque nombre rationnel $\frac{p}{q}$ a une unique forme réduite (forme où p et q n'ont pas de facteurs communs différents de 1 ou -1). L'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ qui envoie un nombre rationnel vers un le couple composé du numérateur et dénominateur de la forme réduite est une bijection sur une partie de $\mathbb{Z}^2$. Donc, d'après les exemples précédents, sur une partie de $\mathbb{N}^2$ et donc de $\mathbb{N}$.

4.3 Non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$

C'est un point qu'il nous est pas encore possible d'aborder proprement. Le fait que $\mathbb{R}$ soit d'un cardinal plus ***gros*** que $\mathbb{N}$ nécessite plus d'aisance avec les représentations diadiques des nombres réels et les suites et séries numériques. Ce point, tout comme le précédent, pourra être revu avec un peu plus de détail lors des années prochaines. L'un des arguments pour montrer cette non-dénombrabilité se fait en deux temps. Vous connaissez le développement décimal d'un nombre réel, chaque chiffre de ce développement est un chiffre entre 0 et 9 compris. Le développement diadique d'un réel permet d'écrire un nombre réel uniquement avec des 0 et des 1, de la même manière. C'est une extension de l'écriture en base 2 des entiers naturels. Cette écriture d'un nombre réel est unique à un cas prêt à exclure ; le cas où on n'a que des 1 dans l'écriture diadique. Si on ne regarde que les indices des coefficients du développement égaux à 1 on décrit une unique partie de $\mathbb{N}$. Cette démarche construit une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Vous avez cependant vus que $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sont pas en bijection. D'où notre affirmation de départ.

4.4 Pathologies dans le cas infini

Les propriétés ensemblistes évoquées dans le cas des ensembles finis ne s'étendent pas au cadre général. Dans leurs énoncés la majeure partie introduiraient des sommes ou des produits infinis, la dernière comparerait des quantités qui ne sont pas réelles et qu'on ne sait donc pas comparer. Même si dans ce dernier point on gardait une notion vague de ***grosseur*** d'un ensemble, on voit bien que l'inclusion stricte, par exemple $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Q}$ n'implique pas une différence sur les cardinaux associés.