Programmes linéaires

Qu'est-ce qu'un programme linéaire?

Bashar Dudin

May 28, 2018

EPITA

Considérations politiciennes

Cet exemple est extrait de **Introduction to Algorithms** par ***Cormen et Al.*** :

> *Suppose that you are a politician trying to win an election. Your district has three different types of areas: urban, suburban, and rural. These areas have respectively: 100.000, 200.000 and 50.000 registered voters. Although not all the registered voters actually go to the polls, you decide that to govern effectively, you would like at least half the registered voters in each of the three regions to vote for you. You are honorable and would never consider supporting policies in which you do not believe. You realize, however, that certain issues may be more effective in winning votes in certain places. Your primary issues are building roads, gun control, farm subsidies, and a gasoline tax dedicated to improve public transit. According to your campaign staff's research, you can estimate how many voters you win or lose from each population segment by spending 1.000€ on advertising on each issue.*

Considérations politiciennes

politique	z. urbaine	périphérie	z. rurale
Réseau Routier	-2	5	3
Contrôle des armes	8	2	-5
Subvention de l'agriculture	0	0	10
Taxer le diesel	10	0	-2

Dans la table ci-dessus, chaque entrée indique le nombre en ***milliers*** *des votants des zones urbaines, périphériques ou rurales dont on gagne le soutien en dépensant 1.000€ de publicités sur une politique en particulier. Les entrées négatives indiques le nombres de votants qu'on perds. Notre but est de trouver le plus petit budget pub qui nous permet de gagner au moins 50.000 votes urbains, 100.000 votes des périphéries et 25.000 votes des zones rurales.*

Modélisation

Le coût totale de la campagne est égal au coût des campagnes de pubs sur chaque mesure. On note x_1, x_2, x_4 and x_5 les coûts respectifs des publicités concernant le réseau de routes, le contrôle des armes, les subventions agricoles et la taxation du diesel. Chaque tel coût est positif. Ainsi

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \tag{1}$$

La première colonne donne les contraintes suivantes sur chaque coût

$$-2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 10x_4 \geqslant 50 \tag{2}$$

Le membre de gauche de l'inégalite décrit le fait qu'il nous faut plus que 50.000 votants des zones urbaines.

Modélisation

Le coût totale de la campagne est égal au coût des campagnes de pubs sur chaque mesure. On note x_1, x_2, x_4 and x_5 les coûts respectifs des publicités concernant le réseau de routes, le contrôle des armes, les subventions agricoles et la taxation du diesel. Chaque tel coût est positif. Ainsi

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \tag{1}$$

La première colonne donne les contraintes suivantes sur chaque coût

$$-2x_1 + 8x_2 + 10x_4 \geqslant 50 \tag{2}$$

Le membre de gauche de l'inégalite décrit le fait qu'il nous faut plus que 50.000 votants des zones urbaines.

Modélisation

Chaque colonne de la table des coûts donne une telle ***contrainte d'inégalité*** sur l'ensemble des coûts. En résum'e, notre problème s'écrit sous la forme

$$\begin{array}{ll}
\text{minimiser} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{sujet à} & \\
& \begin{aligned} -2x_1 + 8x_2 + \ \ 0x_3 + 10x_4 &\geq 50 \\ 5x_1 + 2x_2 + \ \ 0x_3 + \ \ 0x_4 &\geq 100 \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - \ \ 2x_4 &\geq 25 \end{aligned} \\
\text{avec} & x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4 \geq 0
\end{array}$$

Ceci est notre premier exemple de probléme linéaire.

Définition Générale

Définition

Un programme linéaire est un probléme de minimisation ou de maximisation d'une fonction linéaire sujet à un nombre de contraintes également linéaires.

Une ***fonction linéaire*** en k variables (pour $k \in \mathbb{N}^*$) est une fonction f ayant une expression de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \qquad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k$$

pour k nombres réels c_1, ..., c_k. Une ***contrainte linéaire*** est ou bien une égalité ou alors une inégalité (large), contenant uniquement des expressions affines.

Définition Générale

Définition

Un programme linéaire est un probléme de minimisation ou de maximisation d'une fonction linéaire sujet à un nombre de contraintes également linéaires.

Une ***fonction linéaire*** en k variables (pour $k \in \mathbb{N}^*$) est une fonction f ayant une expression de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \qquad c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k$$

pour k nombres réels c_1, …, c_k. Une ***contrainte linéaire*** est ou bien une égalité ou alors une inégalité (large), contenant uniquement des expressions affines.

La *fonction linéaire* qu'on cherche à optimiser dans un programme linéaire est appelée la ***fonction objectif***. Quand on cherche à minimiser la fonction objectif on dit qu'on a affaire à un problème de minimisation. C'est un problème de maximisation sinon.

Définition Générale

Définition

Un programme linéaire est un probléme de minimisation ou de maximisation d'une fonction linéaire sujet à un nombre de contraintes également linéaires.

Une ***fonction affine*** en k variables (pour $k \in \mathbb{N}^*$) est une fonction f ayant une expression de la forme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k$$

pour k nombres réels $c_1, \ldots, c_k$. Une ***contrainte linéaire*** est ou bien une égalité ou alors une inégalité (large), contenant uniquement des expressions affines.

La *fonction affine* qu'on cherche à optimiser dans un programme linéaire est appelée la ***fonction objectif***. Quand on cherche à minimiser la fonction objectif on dit qu'on a affaire à un problème de minimisation. C'est un problème de maximisation sinon.

Définition Générale

Étant donné un programme linéaire, notre but est de trouver des points qui satisfonts les contraintes linéaires, et pour lesquels la fonction objectif prend sa valeur optimale. Une valeur prise par la fonction objectif est appelée une ***valeur objectif***.

Définition Générale

Étant donné un programme linéaire, notre but est de trouver des points qui satisfonts les contraintes linéaires, et pour lesquels la fonction objectif prend sa valeur optimale. Une valeur prise par la fonction objectif est appelée une ***valeur objectif***.

Une solution aux contraintes linéaires, même si elle n'optimise pas la fonction objectif, est dite ***solution admissible***. L'essentiel des algorithmes qui optimisent des problèmes linéaires procèdent en construisant des suites de solutions admissibles itérativement, et qui convergent vers une ***solution optimale***.

Définition Générale

Étant donné un programme linéaire, notre but est de trouver des points qui satisfonts les contraintes linéaires, et pour lesquels la fonction objectif prend sa valeur optimale. Une valeur prise par la fonction objectif est appelée une ***valeur objectif***.

Une solution aux contraintes linéaires, même si elle n'optimise pas la fonction objectif, est dite ***solution admissible***. L'essentiel des algorithmes qui optimisent des problèmes linéaires procèdent en construisant des suites de solutions admissibles itérativement, et qui convergent vers une ***solution optimale***.

Retour aux éléctions

Donner des solutions admissibles ayant d'aussi petites valeurs que vous pouvez.

Définition Générale

Étant donné un programme linéaire, notre but est de trouver des points qui satisfonts les contraintes linéaires, et pour lesquels la fonction objectif prend sa valeur optimale. Une valeur prise par la fonction objectif est appelée une ***valeur objectif***.

Une solution aux contraintes linéaires, même si elle n'optimise pas la fonction objectif, est dite ***solution admissible***. L'essentiel des algorithmes qui optimisent des problèmes linéaires procèdent en construisant des suites de solutions admissibles itérativement, et qui convergent vers une ***solution optimale***.

Retour aux éléctions

Donner des solutions admissibles ayant d'aussi petites valeurs que vous pouvez.

Tip

La vraie réponse n'est peut-être pas si facile que cela.

Forme standard

Voici deux exemples apparemment différent du programme linéaire politique:

Forme standard

Voici deux exemples apparemment différent du programme linéaire politique:

$$
\begin{array}{lr}
\text{minimiser} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\text{sujet à} & \\
& 2x_1 - 8x_2 - 0x_3 - 10x_4 \leq -50 \\
& 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \geq 100 \\
& 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 \geq 25 \\
\text{avec} & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Forme standard

Voici deux exemples apparemment différent du programme linéaire politique:

$$
\begin{array}{lr}
\text{maximiser} & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\
\text{sujet à} & \\
& -2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 10x_4 \geq 50 \\
& 5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \geq 100 \\
& 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - 2x_4 \geq 25 \\
\text{avec} & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Forme standard

Voici deux exemples apparemment différent du programme linéaire politique:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{maximiser} & & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\
\text{sujet à} & & \\
& -2x_1 + 8x_2 + \ \ 0x_3 + 10x_4 \geq 50 & \\
& 5x_1 + 2x_2 + \ \ 0x_3 + \ \ 0x_4 \geq 100 & \\
& 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 - \ \ 2x_4 \geq 25 & \\
\text{avec} & & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Le premier programme est obtenu á partir de notre exemple de départ en multipliant la première contrainte par -1. Le second en choisissant de maximiser l'opposé de la fonction objectif au lieu de la minimiser.

Forme standard

Si notre but est de construire un algorithme qui nous permette de résoudre des programmes linéaires, un tel algorithme va prendre en entrée la liste des coefficients de notre programmes. Les exemples précédents suggèrent qu'on a différentes listes de coefficients possibles pour un même programme linéaire. Il nous faut donc standardiser l'entrée.

Définition

Un programme linéaire est sous ***forme standard*** si

- c'est un problème de maximisation
- toutes les contraintes sont des inégalités larges
- toutes les variables sont sujet à des contraintes de positivité.

Des trois formes que notre programme d'étude ̀prise aucune n'est sous forme standard.

Réduction à la forme standard

Afin que la notion de forme standard puisse être intéréssante il faut qu'on puisse transformer n'importe quel programme linéaire en un programme linéaire sous forme standard. On s'attend, de façon similaire à ce qu'on a dans le cas du pivot de Gauss, à une notion d'***équivalence*** de programmes linéaires pour laquelle tous programmes linéaire est équivalent à un programme sous forme standard.

Cette notion d'équivalence de programme linéaire est assez délicate ; on va prendre le temps de l'expliquer dans le détail.

Réduction à la forme standard

Définition

- Deux programmes linéaires de maximisation L et L' sont ***equivalent*** si pour toute solution admissible de L ayant valeur objectif v il existe une solution admissible de L' ayant même valeur objectif, et vice versa.
- Un programme de minimisation L est ***equivalent*** à un porgramme de maximization L' si pour chaque solution admissible x de L ayant valeur objectif v il existe une solution admissible x' de L' ayant valeur objectif $-v$, et vice versa.

Réduction à la forme standard

Définition

- Deux programmes linéaires de maximisation L et L' sont ***equivalent*** si pour toute solution admissible de L ayant valeur objectif v il existe une solution admissible de L' ayant même valeur objectif, et vice versa.
- Un programme de minimisation L est ***equivalent*** à un porgramme de maximization L' si pour chaque solution admissible x de L ayant valeur objectif v il existe une solution admissible x' de L' ayant valeur objectif $-v$, et vice versa.

Proposition

Si L et L' sont des programmes de maximization équivalents alors L et L' ont mêmes valeurs optimales.

Réduction à la forme standard

Définition

- Deux programmes linéaires de maximisation L et L' sont ***equivalent*** si pour toute solution admissible de L ayant valeur objectif v il existe une solution admissible de L' ayant même valeur objectif, et vice versa.
- Un programme de minimisation L est ***equivalent*** à un porgramme de maximization L' si pour chaque solution admissible x de L ayant valeur objectif v il existe une solution admissible x' de L' ayant valeur objectif $-v$, et vice versa.

Proof

Utilisez vos mots pour justifier ce fait.

Réduction à la forme standard

Définition

- Deux programmes linéaires de maximisation L et L' sont ***equivalent*** si pour toute solution admissible de L ayant valeur objectif v il existe une solution admissible de L' ayant même valeur objectif, et vice versa.
- Un programme de minimisation L est ***equivalent*** à un porgramme de maximization L' si pour chaque solution admissible x de L ayant valeur objectif v il existe une solution admissible x' de L' ayant valeur objectif $-v$, et vice versa.

Variantes

Comment s'adapte cet énoncé au cas de minimsations? Au cas mixte?

Examples de cas d'équivalences

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & 2x_1 + x_2 + 3 \\
\text{sujet à} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Examples de cas d'équivalences

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & 2x_1 + x_2 + 3 \\
\text{sujet à} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiser} & -2x_1 - x_2 - 3 \\
\text{sujet à} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Examples de cas d’équivalences

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & 2x_1 + x_2 + 3 \\
\text{sujet à} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimiser} & -2x_1 - x_2 - 3 \\
\text{sujet à} & \\
& -s + x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1,\, x_2,\, x_3,\, s \geq 0
\end{array}
$$

Examples de cas d'équivalences

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & 2x_1 + x_2 + 3 \\
\text{sujet à} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1,\, x_2,\, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & 2x_1 + x_2 + 3 \\
\text{sujet à} & \\
& -s + x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1,\, x_2,\, x_3,\, s \geq 0
\end{array}
$$

Examples de cas d'équivalences

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & 2x_1 + x_2 + 3 \\
\text{sujet à} & \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximiser} & t \\
\text{sujet à} & \\
& -t + 2x_1 + x_2 + 3 \geq 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\
& x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\
& -x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
\text{avec} & x_1, x_2, x_3, t \geq 0
\end{array}
$$

Réduction à la forme standard

Un programme linéaire pourrait ne pas être sous forme standard à cause de l'un des problèmes suivants:

1. La fonction objectif n'est pas à maximiser mais à minimiser.
2. Une variable peut ne pas être sans contraintes de positivité.
3. Il se peut qu'on ait une contrainte d'égalité et non une contrainte d'inégalité large.
4. Il se peut que certaines contraintes d'inégalités soient inversées.
5. Il se peut que certaines contraintes d'inégalités ne soient pas larges, mais strictes.

Réduction à la forme standard

Un programme linéaire pourrait ne pas être sous forme standard à cause de l'un des problèmes suivants:

1. La fonction objectif n'est pas à maximiser mais à minimiser.
2. Une variable peut ne pas être sans contraintes de positivité.
3. Il se peut qu'on ait une contrainte d'égalité et non une contrainte d'inégalité large.
4. Il se peut que certaines contraintes d'inégalités soient inversées.
5. Il se peut que certaines contraintes d'inégalités ne soient pas larges, mais strictes.

How-do?

Comment régler chacune des pathologies précédentes.

Réduction à la forme standard

Un programme linéaire pourrait ne pas être sous forme standard à cause de l'un des problèmes suivants:

1. La fonction objectif n'est pas à maximiser mais à minimiser.
2. Une variable peut ne pas être sans contraintes de positivité.
3. Il se peut qu'on ait une contrainte d'égalité et non une contrainte d'inégalité large.
4. Il se peut que certaines contraintes d'inégalités soient inversées.
5. Il se peut que certaines contraintes d'inégalités ne soient pas larges, mais strictes.

Cas d'étude

Mettex notre programme linéaire sous forme standard. Quelles sont les opérations que vous avex effectuées? Pourquoi donnent-elle un programme linéaire équivalent à l'original?

Forme *slack*

Malgré le fait que la forme standard soit naturelle, l'algorithme du ***simplexe*** on travaille avec une forme équivalente dite ***slack*** ou des ***écarts***.

Définition

Étand donné un programme linéaire sous forme standard L la forme *slack* de L est obtenue à partir de L en injectant une variable supplémentaire (dite d'écart) pour chaque inégalité comme membre gauche. Chaque inégalité est dès lors remplacée par une égalit'e, et les variables d'écarts subissent des contraintes d'inégalités.

Forme *slack*

Malgré le fait que la forme standard soit naturelle, l'algorithme du ***simplexe*** on travaille avec une forme équivalente dite ***slack*** ou des ***écarts***.

Définition

Étand donné un programme linéaire sous forme standard L la forme *slack* de L est obtenue à partir de L en injectant une variable supplémentaire (dite d'écart) pour chaque inégalité comme membre gauche. Chaque inégalité est dès lors remplacée par une égalit'e, et les variables d'écarts subissent des contraintes d'inégalités.

Par exemples les deux inégalités

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$2x_1 - x_2 \leq 2$$

Forme *slack*

Malgré le fait que la forme standard soit naturelle, l'algorithme du ***simplexe*** on travaille avec une forme équivalente dite ***slack*** ou des ***écarts***.

Définition

Étand donné un programme linéaire sous forme standard L la forme *slack* de L est obtenue à partir de L en injectant une variable supplémentaire (dite d'écart) pour chaque inégalité comme membre gauche. Chaque inégalité est dès lors remplacée par une égalit'e, et les variables d'écarts subissent des contraintes d'inégalités.

donnent les inégalités

$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 + 20 &= x_3 \\
-2x_1 + x_2 + 2 &= x_4
\end{aligned}
$$

Forme *slack*

Malgré le fait que la forme standard soit naturelle, l'algorithme du ***simplexe*** on travaille avec une forme équivalente dite ***slack*** ou des ***écarts***.

Définition

Étand donné un programme linéaire sous forme standard L la forme *slack* de L est obtenue à partir de L en injectant une variable supplémentaire (dite d'écart) pour chaque inégalité comme membre gauche. Chaque inégalité est dès lors remplacée par une égalit'e, et les variables d'écarts subissent des contraintes d'inégalités.

donnent les inégalités

$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 + 20 &= x_3 \\
-2x_1 + x_2 + 2 &= x_4
\end{aligned}
$$

Proposition

Les formes standard et *slack* d'un programme linéaire sont équivalentes.

Slack Form

Proposition

Les formes standard et *slack* d'un programme linéaire sont équivalentes.

Slacking

Donnez la forme standard de notre programme d'étude.

C’est tout pour aujourd’hui!