

1) Beli: Es gilt nicht  $\Gamma \vdash \text{if } 2==3: x=4 \text{ else: } x=\text{True}: \text{unit}?$

Bew:

$$\frac{\frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash 2: \text{int}} \quad \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash 3: \text{int}} \quad \frac{\{x: \text{int}\}}{\Gamma \vdash x:} \quad \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash 4: \text{int}} \quad \frac{\{x: \text{bool}\}}{\Gamma \vdash x:} \quad \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash \text{True}: \text{bool}}}{\frac{\Gamma \vdash 2==3: \text{bool} \quad \Gamma \vdash x=4: \text{unit} \quad \Gamma \vdash x=\text{True}: \text{unit}}{\Gamma \vdash \text{if } 2==3: x=4 \text{ else: } x=\text{True}: \text{unit}}}$$

Die Ableitungen im Typsystem sind bis auf die rot markierten Stellen eindeutig. Ob nun zuerst  $x=4$  oder  $x=\text{True}$  abgeleitet wird ist irrelevant, da in beiden Situationen  $x$  zu unterschiedlichen Typen ausgewertet da  $\text{int} \neq \text{bool}$ . q.e.d.

2) Beli: Unter der Annahme, dass  $\frac{\Gamma \vdash u_1: \text{unit} \dots \Gamma \vdash u_n: \text{unit}}{\Gamma \vdash [u_1, \dots, u_n]: \text{unit}}$  gilt, gilt auch  $\Gamma \vdash [x=42, y=\text{True}, x=x+3, \text{if } y: x=4 \text{ else: } x=7]: \text{unit}$

Bew:

$$\frac{\frac{\{x: \text{int}\}}{\uparrow} \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash x: \text{int}} \quad \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash 42: \text{int}} \quad \frac{\{y: \text{bool}\}}{\uparrow} \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash y: \text{bool}} \quad \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash \text{True}: \text{bool}} \quad \frac{\{x: \text{int}\}}{\uparrow} \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash x: \text{int}} \quad \frac{\{x: \text{int}\}}{\uparrow} \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash x+3: \text{int}} \quad \frac{\{y: \text{bool}\}}{\uparrow} \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash y: \text{bool}} \quad \frac{\{x: \text{int}\}}{\uparrow} \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash x=4: \text{unit}} \quad \frac{\{x: \text{int}\}}{\uparrow} \frac{\text{Axiom}}{\Gamma \vdash x=7: \text{unit}}}{\frac{\Gamma \vdash x=42: \text{unit} \quad \Gamma \vdash y=\text{True}: \text{unit} \quad \Gamma \vdash x=x+3: \text{unit} \quad \Gamma \vdash \text{if } y: x=4 \text{ else: } x=7: \text{unit}}{\Gamma \vdash [x=42, y=\text{True}, x=x+3, \text{if } y: x=4 \text{ else: } x=7]: \text{unit}}}$$

Diese Ableitung bezeugt die Ableitbarkeit aus der Behauptung mit der Umgebung  $\{x: \text{int}, y: \text{bool}\}$  q.e.d.