

## מטלה – חלוקת חפצים עם כסף

### שאלה 1: אלגוריתם המכרז עם מס

נתונה בעיית חלוקה עם כסף, של  $m$  חפצים בין  $n$  אנשים. כל אדם מקבל סכום כסף חיובי כלשהו  $x$  לצורך תשלום  $x^*$  מס הכנסה, כאשר  $x$  הוא מספר קבוע כלשהו בין 0 ל-1 (נניח  $x = 0.3$  זה 30% מס).

- א [חימום]. הראו שאלגוריתם "המכרז השווה" לא תמיד מוחזר חלוקה ללא קנאה.
- שימושו לב: מס הכנסה מתיחס לתשלומים נטו, לדוגמה, אם שחקן שילם 100 וקיבל 150, הוא ישלם מס רק על 50; אם הוא שילם 100 וקיבל 50, הוא לא ישלם מס בכלל.

ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה עילית-פארטו ולא קנאה, או הוכחו שלא קיים כזה.

### שאלה 2: אלגוריתם המכרז: התחרכמוויות

א. אם שחקנים מחלקים בינםים חפץ אחד בעזרת אלגוריתם "המכרז השווה". שחקן 1 הצליח לגלוות את הערכיכים של כל השחקנים  $2, \dots, n$ , לאחר מכן חפץ. שחקן 1 רוצה להשתמש במידע הזה כדי להתחשך - למסור לאלגוריתם ערך שונה מהערך האמתי שלו, כך שהתועלת שלו תהיה גדולה יותר. תארו אלגוריתם שיעזר לשחקן 1 למצוא התחרכמוויות טוביה ביותר (כלומר: להחליט איזה ערך למסור לאלגוריתם כדי להשיג את התועלת הגבוהה ביותר האפשרית).

ב. הוכחו, שאם שחקן 1 לא יודע את הערכיכים של השחקנים  $2, \dots, n$ , אז לא קיימת התחרכמוויות בטוחה (כלומר: כל התחרכמוויות עלולה לנגרום לכך שהשחקן יפסיד).

### שאלה 3: בניית סימפלקס התמחורים

נתונה דירה עם שלושה חדרים, ושלישת דירותים עם תועלות קוואזיליניאריות, והערכים הבאים:

סלון	חדר שני	חדר אחד	מטרה
70	20	10	אבי
35	45	20	בני
45	45	10	גבי

כמו כן, נתון  $R=T=100$ .

א. בנו את סימפלקס התמחורים המוחולק למשולשים שצלעם באורך 0.2. לכל קודקוד בסימפלקס, ציינו את החדר המועדף על כל אחד מהשחקנים [מומלץ להיעזר בקוד].

ב. מיצאו את כל המשולשונים המוגונים בסימפלקס מסעיף א.

ג. מיצאו חלוקה אחת ללא קנאה; ציינו את התיכון ואת ההשמה.

### שאלה 4: חלוקה ללא קנאה של מטלות

צריך לחלק  $n$  מטלות בין  $n$  שחקנים. השחקנים מייחסים ערכים שונים (שליליים) למטלות השונות. כל המטלות מתבצעות באותו זמן, ולכן כל שחקן צריך לקבל מטלה אחת לבדוק. כדי לפצות את השחקנים על המאמץ, אנחנו מוכנים לשלם לכל שחקן סכום-כספי כלשהו; התקציב הכללי שלנו הוא 1000. המטרה היא למצוא חלוקה ללא-קנאה של מטלות וכסף, כך שאף שחקן לא יקנא בסל (מטלה + תקובל-כספי) של שחקן אחר.

נתון: כל שחקן מעדיף לעשות כל מטלה בתשלום, על פני כל מטלה אחרת בחינם.  
הוכיחו שתמיד קיימת חלוקה ללא קנאה.

### שאלה 5: חלוקת חדרים ללא קנאה - תכנות

כתבו פונקציה בפייתון, המקבלת כקלט מטריצה של ערכים שהשחקנים מייחסים לחדרים, ומחזירה השמה  
ותמchor ללא קנאה. כותרת הפונקציה:

```
def envy_free_room_allocation(  
    valuations: list[list[float]], rent:float)
```

כאשר `valuations` היא מטריצת הערכים. דוגמה לקלט ופלט:

```
>>> envy_free_room_allocation([[150, 0], [140, 10]], rent=100)
```

Player 0 gets room 0 with value 150, and pays 115

Player 1 gets room 1 with value 0, and pays -15

יש לחשב את התמchor בשיטת **"המסלול הבודד ביותר"**, כפי שהסביר בהוכחת המשפט.  
יש לכתוב בדיקות על קלטים מגוונים ולודא שהפונקציה נכונה.

### \* שאלה 6: חלוקת חדרים ללא קנאה - מציאת תמchor טוב ביותר

א. פתרו את שאלה 5 בהבדל אחד: יש לחשב את התמchor בעזרת **תיכנות ליניארי**.

ב. שפרו את התוכנית של סעיף א כך שתמצא השמה ללא קנאה שבה המחיר של כל החדרים הוא לפחות  
0, או תודיע שאין תמchor לכך.

ג. שפרו את התוכנית של סעיף א כך שתמצא השמה ללא קנאה שבה המחיר של כל החדרים הוא **גדול  
מש מ-0**, או תודיע שאין תמchor לכך. הסבירו את תשובהכם.

בכל הסעיפים יש לכתוב בדיקות על קלטים מגוונים ולודא שהפונקציה נכונה.