אלגוריתמים כלכליים — מטלה 1

שאלה 1

סעיף (א) – חלוקה פרופורציונלית עם קטעים רציפים

בבעיה נדרש לחלק את היום (נניח את הקטע [0,1]) בין n ילדים כך שכל ילד יקבל משבצת זמן רציפה אחת של שמירה, ושהחלוקה תהיה פרופורציונלית – כלומר, כל ילד מרגיש שחלקו שווה לפחות ל־n/1 מהערך הכולל של היום בעיניו.

האלגוריתם – Even–Paz (חלוקה מדורגת לפי חציון)

- **מודל:** כל ילד מגדיר פונקציית ערך רציפה על פני היום.
- **שלב ראשוני:** אם מספר הילדים אי־זוגי, נשתמש תחילה באלגוריתם *המקטין האחרון (Last Diminisher)* כדי למצוא ילד אחד שיקבל קטע שערכו בעיניו בדיוק n/1 מהיום. הילד הזה יוצא מהמשחק, והיום שנותר יחולק בין n−1 הילדים האחרים.

חלוקה רקורסיבית (כאשר מספר הילדים זוגי)

1. כל ילד מסמן נקודת חיתוך שמחלקת את הקטע הנוכחי לשני חצאים ששווים בעיניו בערכם.
2. מחשבים את חציון כל סימוני החיתוך, וחותכים את היום בנקודה זו.
3. הילדים שמיקמו את החיתוך שלהם משמאל לחציון ממשיכים לעבוד רק על החצי השמאלי; והאחרים – על הימני.
4. חוזרים על התהליך בכל חצי עד שכל ילד נשאר לבד עם קטע רציף משלו.

נכונות האלגוריתם

בכל שלב, כל ילד נשאר בחלק שהוא עצמו העריך לפחות כחצי מהערך שהיה לו קודם, ולכן בתום התהליך יקבל לפחות n/1 מערך היום כולו בעיניו. מאחר שכל חיתוך מחלק את הקטע פעם אחת בלבד, כל ילד מקבל קטע רציף יחיד.

סיבוכיות

האלגוריתם דורש O(n log n) שאילתות בלבד (בכל רמה שואלים את כל הילדים פעם אחת, ויש O(log n) רמות).

סיכום

אלגוריתם Even–Paz (עם שלב מקדים של Last Diminisher אם n אי־זוגי) מספק חלוקה פרופורציונלית ורציפה של היום בין הילדים, ומבטיח שכל ילד יקבל קטע שערכו בעיניו לפחות n/1 מהיום כולו.

סעיף (ב) – חלוקה כמעט־ללא־קנאה (עם קטעים רציפים, דיוק עד כדי שנייה)

האלגוריתם המומלץ

אלגוריתם **Simmons–Su** (תיוי סימפלקס וחיפוש סימפלקסון "מגוון" בעזרת **למת שפרנר**), בגרסה חד־ממדית עם קטעים רציפים, כשהדיוק נקבע ל"עד כדי שנייה אחת" כפי שנדרש בשאלה.

הרעיון בקצרה

- אוספים את כל החלוקות הרציפות של היום ל־n קטעים רציפים – מרחב כל האורכים (שסכומם 1) הוא סימפלקס בממד n−1. במקרה של שלושה משתתפים זה "משולש החלוקות". כל נקודה בסימפלקס מייצגת חלוקה (האורכים או מיקומי החיתוכים).
- במקום לחפש נקודה מדויקת (אינסוף נקודות), ממשלשים (triangulation) את הסימפלקס לצלעות קטנות – כאן נקבעת רזולוציה של שנייה אחת לאורך היום, כך שמיקום החיתוכים נופל על שניות. זה הופך את הבעיה לסופית.
- מתייגים כל קודקוד ע"פ הפרוסה המועדפת על השחקן המשויך אליו (למשל "שמאל/אמצע/ימין" בשלושה שחקנים, או מספר הפרוסה ב־n שחקנים). נקודה שבה כל המשתתפים מסומנים בתוויות שונות מייצגת חלוקה כמעט־ללא־קנאה (אף אחד לא מעדיף את חלקו של אחר, עד סטייה של יחידת הרזולוציה).
- לפי למת שפרנר, בתיווי כזה תמיד קיים סימפלקסון מגוון (כל התוויות מופיעות בו), ולכן קיימת חלוקה כמעט־ללא־קנאה ברזולוציה שנבחרה.

איך לבצע בפועל (ניסוח אלגוריתמי קצר)

1. **דיסקרטיזציה של היום:** פרקו את [0,1] ל־T תתי־קטעים באורך שנייה אחת (כלומר T = מספר השניות ביום).
2. **ייצוג חלוקה רציפה:** חלוקה ל־n חלקים מיוצגת ע״י n−1 חיתוכים על סרגל השניות. אוספים את כל הקונפיגורציות האפשריות ברשת זו (או מחלקים את סימפלקס האורכים למשולשים/טטראדרים קטנים לפי T).
3. **תיוג קודקודים:** מייחסים כל קודקוד לשחקן, ושואלים אותו – עבור מיקום החיתוכים של אותו קודקוד – איזו פרוסה הוא מעדיף (1..n); רושמים את התווית על הקודקוד.
4. **חיפוש סימפלקסון מגוון:** מוצאים תא קטן שבו מופיעות כל התוויות 1..n. נקודת המפגש בתא זה נותנת חלוקה כמעט־ללא־קנאה עד כדי שנייה אחת. תקפות הקיום מובטחת ע״י למת שפרנר.

למה "כמעט" ולא "בדיוק"?

לחלוקות רציפות אין אלגוריתם סופי שמבטיח חלוקה ללא־קנאה מדויקת כבר עבור שלושה שחקנים; לכן פועלים בקירוב מבוקר ("עד כדי שנייה").

סיכום

עבור סעיף (ב) נשתמש ב־**Simmons–Su** עם **תיוג שפרנר** על מרחב החלוקות הרציפות בדיסקרטיזציה של שנייה אחת. האלגוריתם מחזיר חלוקה כמעט־ללא־קנאה (עם קטעים רציפים), כנדרש.

סעיף (ג) — למה האלגוריתם של סעיף (א) לא עובד כשלא אוהבים לשמור (חלוקת "מטלות")

בסעיף (א) השתמשנו באבן–פז: כל ילד מסמן חיתוך ל"חצי–חצי" לפי הערך שלו; חותכים בחציון, ושולחים את מי שסימן משמאל לחצי השמאלי ואת מי שסימן מימין לחצי הימני, וממשיכים רקורסיבית. ההוכחה שם נשענת על זה שכל ילד נשאר בכל שלב בחצי שהוא עצמו מעריך **לפחות כחצי** מן הערך שהיה בסיבוב הקודם — ולכן בסוף יקבל לפחות n/1 (פרופורציונליות לטובת "טובין").

כאשר עוברים ל"מטלות" (הילדים **לא** אוהבים לשמור ורוצים **כמה שפחות**), מושג הפרופורציה מתהפך: עכשיו הדרישה היא שכל ילד יקבל **לכל היותר** n/1 מן ה"רע" (הדיס־ערך) לפי דעתו. אלא שהצעד הקריטי באבן–פז נשבר:

- אם לילד החיתוך ה"חצי–חצי" נפל **משמאל** לחציון ואנו שולחים אותו **לשמאל**, הרי מבחינתו החצי השמאלי מכיל **לפחות** חצי מן הדיס־ערך — בדיוק ההפך ממה שצריך (אנחנו צריכים להבטיח שבכל שלב הוא יקבל **לא יותר** מחצי מן הדיס־ערך). לכן האינדוקציה של אבן–פז לא רצה בכיוון הנכון עבור מטלות.

במילים אחרות: אותו שלב שהבטיח "≥ חצי" בטובין, אינו מבטיח "≤ חצי" במטלות. האלגוריתם במבנהו המקורי פשוט לא מקיים את תנאי הפרופורציונליות למטלות.

דוגמה קטנה שממחישה את הכשל

נניח שלושה ילדים, והיום ([0,1]) הוא "מטלה". לכל אחד יש חיתוך "חצי–חצי" שונה: עמי ב־x=0.2, תמי ב־x=0.4, רמי ב־x=0.6. החציון הוא x=0.4. לפי אבן–פז שולחים את עמי לשמאל ([0,0.5]) ואת תמי ורמי לימין. אבל מבחינת עמי, כבר ב־x=0.2 נמצא חצי הדיס־ערך שלו; החצי ([0,0.5]) שהוא קיבל **רע יותר** (מכיל **יותר** מחצי הדיס־ערך). כך אין הבטחה שיֵרד מתחת ל־1/3 בסוף התהליך, ולכן אין פרופורציונליות למטלות.

> **סיכום:** ההוכחה של אבן–פז נשענת על "השארת כל שחקן בחצי שהוא מעריך לפחות כחצי" (מתאים לטובין), בעוד שבמטלות צריך "לכל היותר חצי". מאחר והכיוון מתהפך אך ההקצאה לפי חציון לא — האלגוריתם במתכונתו מסעיף (א) **אינו תקף** למקרה שבו הילדים לא אוהבים לשמור.

סעיף (ד) – איך כן מחלקים "מטלות" (כשלא אוהבים לשמור)

כשמדובר במטלות (לא בטובין), כל ילד רוצה **כמה שפחות עבודה.** לכן במקום שכל ילד יקבל לפחות $n/1$ מהערך הכולל, עכשיו נרצה שכל ילד יקבל **לא יותר מ־$n/1$** מהעומס בעיניו.

האלגוריתם – גרסת "אבן–פז הפוכה"

1. כל ילד מסמן נקודה שבה **החצי הראשון** של היום שווה **בחומרתו** לחצי השני (כלומר שני חלקים "שווים ברע").
2. מסתכלים על כל הסימונים ובוחרים את **החציון.**
3. מחלקים את היום לשני חלקים לפי הנקודה הזו.
4. הפעם עושים **היפוך:**

- מי שסימן את נקודת החצי שלו **משמאל** לחציון (כלומר הוא חושב שהשמאלי יותר רע) – נשלח לחלק **הימני.**
- מי שסימן את נקודת החצי שלו **מימין** לחציון (כלומר הימני יותר רע) – נשלח לחלק **השמאלי.**

5. חוזרים על זה בכל צד עם הילדים שנשארו, עד שלכל ילד יש קטע אחד בלבד.

למה זה עובד

בכל שלב כל ילד נשאר בצד שהוא עצמו חושב **שפחות גרוע** (לא יותר מחצי מהעומס שהיה קודם). אחרי כמה שלבים, אף ילד לא יקבל יותר מ־$n/1$ מהעומס הכולל בעיניו. בנוסף, כל ילד נשאר תמיד באותו צד, אז הוא מקבל **קטע אחד רציף בלבד.**

בקצרה

- האלגוריתם זהה לאבן–פז, רק עם כיוונים הפוכים.
- כל ילד נשאר בצד הפחות "רע" מבחינתו.
- כך מתקבלת חלוקה **פרופורציונלית למטלות** עם **קטעים רציפים.**

סעיף (ה) — האם האלגוריתם של סעיף (ב) עובד גם כשלא אוהבים לשמור?

לא. האלגוריתם של סעיף (ב) (הבנוי על תיוג סימפלקס והיפוש "סימפלקסון מגוון" בעזרת **למת שפרנר**) מניח תיוג לפי **הפרוסה המועדפת** (מקסימום ערך) – זה מתאים ל־*טובין* ("אוהבים לשמור"). כאשר עוברים ל־*מטלות* ("לא אוהבים לשמור") ומנסים לתייג לפי **הפרוסה הפחות גרועה** (מינימום דיס־ערך), תנאי הגבול הדרושים ללמת שפרנר נשברים, ולכן אין הבטחה שיתקבל "סימפלקסון מגוון" $\Longrightarrow$ אין הבטחת נכונות. מתודולוגיית חלק (ב) נבנתה עבור חלוקה כמעט־ללא־קנאה ב־*טובין* באמצעות סימפלקס ותיוג, ולא למטלות.

דוגמה נגדית קצרה (3 ילדים, קטעים רציפים)

נראה מצב שבו **אף פעם** לא מתקבלת תווית "אמצע", כך שלאלגוריתם אין "חדר מגוון" (אין את כל $\{1,2,3\}$ יחד).

הגדרו צפיפויות דיס־ערך (כמה "רע" כל נקודה) על $[0,1]$:

- ילד א: $f_a(x) = 1 - x$ — דיס־ערך **יורד** (ימינה נהיה פחות רע).
- ילד ב: $f_\beta(x) = x$ — דיס־ערך **עולה** (שמאלה פחות רע).
- ילד ג: $f_{\mathcal{C}}(x) = x$ — גם **עולה.**

לכל חלוקה רציפה לשלושה קטעים ברצף שמאל–אמצע–ימין:

- עבור ילד א (יורד) – הקטע הימני תמיד בעל הדיס־ערך הקטן ביותר $\Longrightarrow$ הוא תמיד בוחר **ימין** (תווית 3).
- עבור ילדים ב ו־ג (עולים) – הקטע השמאלי תמיד בעל הדיס־ערך הקטן ביותר $\Longrightarrow$ שניהם תמיד בוחרים **שמאל** (תווית 1).

מסקנה: אף שחקן לעולם לא בוחר את הקטע האמצעי (תווית 2) בשום קודקוד/חלוקה ברשת. לכן בתריאנגולציה לא יופיע אף "סימפלקסון מגוון" (אין את כל $\{1,2,3\}$ יחד), והאלגוריתם של סעיף (ב) **לא יכול** להחזיר חלוקה כמעט־ללא־קנאה במודל המטלות. זו בדיוק דרישת סעיף (ה): האלגוריתם **לא עובד** – והוצגה **דוגמה נגדית.**