שאלה 4

א

נראה שבעבור **הפסד ריבועי**, מנגנון ה־linear phantoms **אינו** אמת־מידי (truthful), ע"י הצגת שקר מועיל בדוגמה הנתונה.

הגדרה:

- 2 אזרחים: A, B
- 3 נושאים
- תקציב כולל $C = 100$

אידיאלי אמתיים:

- אזרח A: $p_A = (20, 60, 20)$
- אזרח B: $p_B = (50, 50, 0)$

שני הווקטורים מסתכמים ל־100, אז $C = 100$. מספר אזרחים $n = 2$, ולכן יש לנו $n - 1 = 1$ פנטום:

$$f_1(t) = C \cdot \min(1, t) = 100t, \quad t \in [0, 1].$$

לכל t, עבור כל נושא, לוקחים את החציון של:

$$\{p_{A,j}, p_{B,j}, 100t\}$$

ואז בוחרים t^* כך שסכום החציונים יהיה בדיוק 100.

הפסד ריבועי מוגדר כ:

$$\text{loss}_i(d) = \sum_{j=1}^{3} (d_j - p_{i,j})^2.$$

נבצע:

1. חישוב התוצאה כששניהם אומרים אמת.
2. ניתן ל־B לשקר ונחשב מחדש.
3. נראה שההפסד הריבועי של B קטן ממש.

זה מוכיח שהמנגנון אינו חסין־אסטרטגיה (לא strategyproof) תחת הפסד ריבועי.

1. התוצאה כששניהם אומרים אמת

הצבעות אמיתיות:

- נושא 1: A: 20, B: 50, פנטום: $100t$
- נושא 2: A: 60, B: 50, פנטום: $100t$
- נושא 3: A: 20, B: 0, פנטום: $100t$

נמצא את החציונים באופן חלקי לפי t.

נושא 1: המספרים $\{20, 50, 100t\}$

- אם $100t \leq 20$ (כלומר $t \leq 0.2$): הסדרה הממוינת $(100t, 20, 50)$, החציון = 20.
- אם $20 \leq 100t \leq 50$ ($0.2 \leq t \leq 0.5$): הסדרה $(20, 100t, 50)$, החציון = $100t$.
- אם $100t \geq 50$ ($t \geq 0.5$): הסדרה $(20, 50, 100t)$, החציון = 50.

לכן

$$m_1(t) = \begin{cases} 20 & 0 \leq t \leq 0.2, \\ 100t & 0.2 \leq t \leq 0.5, \\ 50 & 0.5 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

נושא 2: המספרים $\{60, 50, 100t\}$

- אם $100t \leq 50$ ($t \leq 0.5$): הסדרה $(100t, 50, 60)$, חציון = 50.
- אם $50 \leq 100t \leq 60$ ($0.5 \leq t \leq 0.6$): הסדרה $(50, 100t, 60)$, חציון = $100t$.
- אם $100t \geq 60$ ($t \geq 0.6$): הסדרה $(50, 60, 100t)$, חציון = 60.

לכן

$$m_2(t) = \begin{cases} 50 & 0 \leq t \leq 0.5, \\ 100t & 0.5 \leq t \leq 0.6, \\ 60 & 0.6 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

נושא 3: המספרים $\{20, 0, 100t\}$

- עבור $0 \leq 100t \leq 20$ (כלומר $0 \leq t \leq 0.2$): הסדרה $(0, 100t, 20)$, חציון = $100t$.
- עבור $100t \geq 20$ ($t \geq 0.2$): הסדרה $(0, 20, 100t)$, חציון = 20.

לכן

$$m_3(t) = \begin{cases} 100t & 0 \leq t \leq 0.2, \\ 20 & 0.2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

סכום כולל $S(t)$ וה־t^*

נגדיר $S(t) = m_1(t) + m_2(t) + m_3(t)$. נחפש את התחום שבו $S(t) = 100$.

ב־$0.2 \le t \le 0.5$:

- $m_1(t) = 100t$
- $m_2(t) = 50$
- $m_3(t) = 20$

לכן

$$S(t) = 100t + 50 + 20 = 70 + 100t.$$

נדרוש $S(t) = 100$:

$$70 + 100t = 100 \;\Rightarrow\; t = 0.3.$$

בדיקה:

- ב־$t = 0$, $S(0) = 20 + 50 + 0 = 70$.
- ב־$t = 0.5$, $S(0.5) = 50 + 50 + 20 = 120$.

אז $t^* = 0.3$ הוא פתרון יחיד ב־$[0, 1]$.
עכשיו נחשב את החציונים ב־t^*:
פנטום $= 100t^* = 30$.

- נושא 1: $\{20, 50, 30\} \Rightarrow$ ממויין $(20, 30, 50)$ □ חציון $d_1 = 30$.
- נושא 2: $\{60, 50, 30\} \Rightarrow$ ממויין $(30, 50, 60)$ □ חציון $d_2 = 50$.
- נושא 3: $\{20, 0, 30\} \Rightarrow$ ממויין $(0, 20, 30)$ □ חציון $d_3 = 20$.

לכן כאשר כולם אומרים אמת:

$$d^{\text{truth}} = (30, 50, 20).$$

בדיקה: $C = 100 = 30 + 50 + 20$.

ההפסד הריבועי של B כאשר הוא אמת־מיד

האידיאל האמיתי של B הוא $p_B = (50, 50, 0)$.
ההפסד שלו:

$$\begin{aligned}
\text{loss}_B(d^{\text{truth}}) &= (30-50)^2 + (50-50)^2 + (20-0)^2 \\
&= (-20)^2 + 0^2 + 20^2 \\
&= 400 + 0 + 400 \\
&= 800.
\end{aligned}$$

2. נותנים ל־B לשקר ומחשבים מחדש

נניח ש־B **מדווח שקר**:

$$p'_B = (100, 0, 0)$$

(עדיין מסתכם ל־100, כך שזה ``הצעת תקציב'' תקפה).
כעת:

- A: (20, 60, 20)
- B (מדווח): (100, 0, 0)
- פנטום: 100t

נחשב מחדש את החציונים.

נושא 1: $\{20, 100, 100t\}$

- **אם** $20 \le 100t$ ($t \ge 0.2$): ממויין $(20, 100t, 100)$, **חציון** $= 100t$.

טעות — לפי הדף:

- **אם** $100t \le 20$ ($t \le 0.2$): ממויין $(100t, 20, 100)$, **חציון** $= 20$.
- **אם** $20 \le 100t \le 100$ ($0.2 \le t \le 1$): ממויין $(20, 100t, 100)$, **חציון** $= 100t$.

לכן

$$m_1(t) = \begin{cases} 20 & 0 \le t \le 0.2, \\ 100t & 0.2 \le t \le 1. \end{cases}$$

נושא 2: $\{60, 0, 100t\}$

- **עבור** $0 \le 100t \le 60$ ($0 \le t \le 0.6$): ממויין $(0, 100t, 60)$, **חציון** $= 100t$.
- **עבור** $100t \ge 60$ ($t \ge 0.6$): ממויין $(0, 60, 100t)$, **חציון** $= 60$.

לכן

$$m_2(t) = \begin{cases} 100t & 0 \le t \le 0.6, \\ 60 & 0.6 \le t \le 1. \end{cases}$$

נושא 3: $\{20, 0, 100t\}$

זה אותו מבנה כמו קודם עבור (20,0,100t):

$$m_3(t) = \begin{cases} 100t & 0 \le t \le 0.2, \\ 20 & 0.2 \le t \le 1. \end{cases}$$

הסכום $S(t)$ וה־t^* החדש

שוב $S(t) = m_1(t) + m_2(t) + m_3(t)$.
ב־$0.2 \le t \le 0.6$:

- $m_1(t) = 100t$
- $m_2(t) = 100t$
- $m_3(t) = 20$

לכן

$$S(t) = 100t + 100t + 20 = 200t + 20.$$

דורשים $S(t) = 100$:

$$200t + 20 = 100 \;\Rightarrow\; 200t = 80 \;\Rightarrow\; t^* = 0.4.$$

$t^* = 0.4$ נמצא בתחום $[0.2, 0.6]$, אז זה עקבי.
נחשב את החציונים ב־$t^* = 0.4$:
פנטום = $100 \cdot 0.4 = 40$.

- נושא 1: $\{20, 100, 40\} \Rightarrow$ ממויין $(20, 40, 100)$ <= חציון $d'_1 = 40$.
- נושא 2: $\{60, 0, 40\} \Rightarrow$ ממויין $(0, 40, 60)$ <= חציון $d'_2 = 40$.
- נושא 3: $\{20, 0, 40\} \Rightarrow$ ממויין $(0, 20, 40)$ <= חציון $d'_3 = 20$.

לכן כאשר B משקר:

$$d^{\text{lie}} = (40, 40, 20),$$

ושוב $40 + 40 + 20 = 100$.

3. השוואת ההפסד הריבועי של B

האידיאל האמיתי של B נשאר $p_B = (50, 50, 0)$.
ההפסד תחת תוצאת השקר:

$$\begin{aligned}
\text{loss}_B(d^{\text{lie}}) &= (40-50)^2 + (40-50)^2 + (20-0)^2 \\
&= (-10)^2 + (-10)^2 + 20^2 \\
&= 100 + 100 + 400 \\
&= 600.
\end{aligned}$$

נזכור: עם דיווח אמיתי ההפסד היה 800.

לכן

$$\mathrm{loss}_B(d^{\mathrm{lie}}) = 600 < 800 = \mathrm{loss}_B(d^{\mathrm{truth}}),$$

כלומר, ע"י דיווח שקרי $(100,0,0)$ במקום האמת $(50,50,0)$, האזרח B **משפר ממש** את מצבו (מוריד את ההפסד הריבועי שלו).

מסקנה

הצגנו:

- פרופיל אמיתי:
  - $p_A = (20,60,20)$, $p_B = (50,50,0)$,
- ודיווח שקרי $p'_B = (100,0,0)$,
- כך (כאשר A אמת־מיד) שמנגנון ה־linear phantoms נותן ל־B תוצאה טובה יותר (מבחינת הפסד ריבועי) כשהוא משקר.

לכן, כאשר התועלת מוגדרת כ

$$-\sum_j (d_j - p_{i,j})^2,$$

מנגנון החציון המוכלל עם פנטומים ליניאריים **אינו מגלה אמת (not truthful)**.

ב

צריך להראות:

כשפונקציית התועלת היא $-\sum_j(d_j-p_{i,j})^2$, **התקציב הממוצע** הוא פארטו-יעיל לכל מספר נושאים.

1. מה אלגוריתם הממוצע עושה

כל אזרח i מציע תקציב:

$$p_i=(p_{i,1},\dots,p_{i,m}),\quad \sum_j p_{i,j}=C.$$

האלגוריתם קובע תקציב סופי

$$d_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_{i,j}\quad \text{לכל נושא } j.$$

נבדוק שזה תקציב תקף (מסתכם ל־C):

$$\sum_j d_j=\sum_j\frac{1}{n}\sum_i p_{i,j}=\frac{1}{n}\sum_i\sum_j p_{i,j}=\frac{1}{n}\sum_i C=C.$$

2. סך ההפסד הריבועי ולמה הממוצע הוא האופטימלי

ההפסד של אזרח i:

$$\text{loss}_i(d)=\sum_j(d_j-p_{i,j})^2.$$

סך ההפסד:

$$L(d)=\sum_i \text{loss}_i(d)=\sum_i\sum_j(d_j-p_{i,j})^2.$$

נתמקד **בנושא יחיד** j. עבור נושא זה, התרומה לסך ההפסד היא

$$L_j(d_j)=\sum_{i=1}^n(d_j-p_{i,j})^2.$$

זו בעיית least squares חד-ממדית: בוחרים מספר יחיד x שקרוב ככל האפשר (בריבועי מרחק) למספרים $p_{1,j},\dots,p_{n,j}$.

עובדה בסיסית מסטטיסטיקה / חשבון אינפי:

עבור מספרים $a_1, \dots, a_n$, הערך x שממזער את $\sum_i (x-a_i)^2$ הוא **הממוצע** $\frac{1}{n}\sum_i a_i$.

ניישם זאת עם $a_i = p_{i,j}$. מכאן שמינימייזר יחיד של $L_j(x)$ הוא

$$x = \frac{1}{n}\sum_i p_{i,j} = d_j.$$

מאחר שזה נכון לכל נושא j, וקטור הממוצעים d (ממוצע בכל קואורדינטה) ממזער את **סך ההפסד** $L(d)$.
וכבר ראינו ש־d הוא תקציב תקף (מסתכם ל־C).
מסקנה:

- מבין כל התקציבים האפשריים, **התקציב הממוצע** הוא זה שמינימלי מבחינת **סכום ההפסדים הריבועיים** על פני כל האזרחים.

זה בדיוק המינימום ה``Utilitarian'' תחת הפסד ריבועי (או תועלת $-$loss).

3. למה מזה נובע שזו הקצאה פארטו-יעילה

נניח, כדי להגיע לסתירה, ש־d **אינו** פארטו-יעיל. אז קיים תקציב אחר d' כך ש:

- כל אזרח לפחות לא נפגע: $\mathrm{loss}_i(d') \le \mathrm{loss}_i(d)$ לכל i.
- יש אזרח אחד שמשתפר ממש: $\mathrm{loss}_k(d') < \mathrm{loss}_k(d)$ עבור איזה k.

נסכם את האי־שוויונות על כל האזרחים:

$$\sum_i \mathrm{loss}_i(d') < \sum_i \mathrm{loss}_i(d),$$

כלומר

$$L(d') < L(d).$$

אבל הראינו ש־d **ממזער** את $L(d)$ על פני כל התקציבים התקפים. סתירה.
לכן לא יכול להתקיים כזה d'. התקציב הממוצע הוא **פארטו-יעיל** תחת תועלות מהצורה $-\sum_j (d_j - p_{i,j})^2$, לכל מספר של נושאים.