

מטלה – חלוקת חפצים עם כסף

שאלה 1: אלגוריתם המכרז עם מס

נתונה בעיית חלוקה עם כסף, של m חפצים בין n אנשים. כל אדם המקבל סכום כסף חיובי כלשהו x צריך לשלם $t \cdot x$ מס הכנסה, כאשר t הוא מספר קבוע כלשהו בין 0 ל-1 (נניח $t=0.3$ זה 30% מס).

- א. [חימום]. הראו שאלגוריתם "המכרז השווה" לא תמיד מחזיר חלוקה ללא קנאה.
- שימו לב: מס הכנסה מתייחס לתשלום נטו, לדוגמה, אם שחקן שילם 100 וקיבל 150, הוא ישלם מס רק על 50; אם הוא שילם 100 וקיבל 50, הוא לא ישלם מס בכלל.

ב. תארו אלגוריתם המוצא חלוקה יעילה-פארטו וללא קנאה, או הוכיחו שלא קיים כזה.

שאלה 2: אלגוריתם המכרז: התחכמויות

א. n שחקנים מחלקים ביניהם חפץ אחד בעזרת אלגוריתם "המכרז השווה". שחקן 1 הצליח לגלות את הערכים של כל השחקנים 2, ..., n , לאותו חפץ. שחקן 1 רוצה להשתמש במידע הזה כדי להתחכם - למסור לאלגוריתם ערך שונה מהערך האמיתי שלו, כך שהתועלת שלו תהיה גדולה ביותר. תארו אלגוריתם שיעזור לשחקן 1 למצוא התחכמות טובה ביותר (כלומר: להחליט איזה ערך למסור לאלגוריתם כדי להשיג את התועלת הגבוהה ביותר האפשרית).

ב. הוכיחו, שאם שחקן 1 לא יודע את הערכים של השחקנים 2, ..., n , אז לא קיימת התחכמות בטוחה (כלומר: כל התחכמות עלולה לגרום לכך שהשחקן יפסיד).

שאלה 3: בניית סימפלקס התמחורים

נתונה דירה עם שלושה חדרים, ושלושה דיירים עם תועלות קוואזיליניאריות, והערכים הבאים:

מרתף	חדר שינה	סלון	אבי
10	20	70	
20	45	35	בני
10	45	45	גבי

כמו כן, נתון $R=T=100$.

א. בנו את סימפלקס התימחורים המחולק למשולשים שצלעם באורך 0.2. לכל קודקוד בסימפלקס, ציינו את החדר המועדף על כל אחד מהשחקנים [מומלץ להיעזר בקוד].

ב. מיצאו את כל המשולשונים המגוונים בסימפלקס מסעיף א.

ג. מיצאו חלוקה אחת ללא קנאה; ציינו את התימחור ואת ההשמה.

שאלה 4: חלוקה ללא קנאה של מטלות

צריך לחלק n מטלות בין n שחקנים. השחקנים מייחסים ערכים שונים (שליליים) למטלות השונות. כל המטלות מתבצעות באותו זמן, ולכן כל שחקן צריך לקבל מטלה אחת בדיוק. כדי לפצות את השחקנים על המאמץ, אנחנו מוכנים לשלם לכל שחקן סכום-כסף כלשהו; התקציב הכולל שלנו הוא 1000. המטרה היא למצוא חלוקה ללא-קנאה של מטלות וכסף, כך שאף שחקן לא יקנא בסל (מטלה + תקבול-כסף) של שחקן אחר.

נתון: כל שחקן מעדיף לעשות כל מטלה בתשלום, על פני כל מטלה אחרת בחינם.
הוכיחו שתמיד קיימת חלוקה ללא קנאה.

שאלה 5: חלוקת חדרים ללא קנאה – תכנות

כתבו פונקציה בפייטון, המקבלת כקלט מטריצה של ערכים שהשחקנים מייחסים לחדרים, ומחזירה השמה ותמחור ללא קנאה. כותרת הפונקציה:

```
def envy_free_room_allocation(  
    valuations: list[list[float]], rent:float)
```

כאשר valuations היא מטריצת הערכים. דוגמה לקלט ופלט:

```
>>> envy_free_room_allocation([[150, 0],[140, 10]], rent=100)
```

```
Player 0 gets room 0 with value 150, and pays 115
```

```
Player 1 gets room 1 with value 0, and pays -15
```

יש לחשב את התמחור בשיטת "**המסלול הכבד ביותר**", כפי שהוסבר בהוכחת המשפט.

יש לכתוב בדיקות על קלטים מגוונים ולוודא שהפונקציה נכונה.

* שאלה 6: חלוקת חדרים ללא קנאה – מציאת תמחור טוב ביותר

א. פתרו את שאלה 5 בהבדל אחד: יש לחשב את התמחור בעזרת **תיכנות ליניארי**.

ב. שפרו את התוכנית של סעיף א כך שתמצא השמה ללא קנאה שבה המחיר של כל החדרים הוא לפחות 0, או תודיע שאין תמחור כזה.

ג. שפרו את התוכנית של סעיף א כך שתמצא השמה ללא קנאה שבה המחיר של כל החדרים הוא **גדול ממש מ-0**, או תודיע שאין תמחור כזה. הסבירו את תשובתכם.

בכל הסעיפים יש לכתוב בדיקות על קלטים מגוונים ולוודא שהפונקציה נכונה.