

# אלגוריתמים כלכליים – מטלה 05

## שאלה 2: א הmercץ לא מגלה-אמת

דוגממה נגדית

נתונים:

- הערך האמתי של שחקן 1:  $v_1 = 100$ .
- הצעת שחקן 2:  $b_2 = 50$ .

תיאור המנגנון:

המנגנון קובע כי המשותף שהציג את ההצעה הגבוהה ביותר זוכה. הזוכה משלם 90% מסכום ההצעה שלו.

ניטוח מקרים:

מקרה 1 – שחקן 1 דובר אמת (מציע את ערכו האמתי):

- שחקן 1 מציע:  $b_1 = 100$ .
- הוא זוכה בmercץ (כי  $50 < 100$ ).
- הוא משלם:  $0.9 \cdot 100 = 90$ .
- התועלת של שחקן 1 היא:  $v_1 - 90 = 10 = \text{תשולם} - u_1$ .

מקרה 2 – שחקן 1 משקר (מציע ערך נמוך יותר אך עדין זוכה):

- נניח שחקן 1 מציע הצעה  $b'_1 = 60$ , שהוא נמוכה כמעט ממהיר האמתי אך עדין מספיקה כדי לנצח את ההצעה שחקן 2.
- הוא עדין זוכה בmercץ (כי  $50 > 60$ ).

- הוא משלם:  $0.9 \cdot 60 = 54$

- התועלת של שחקן 1 היא:  $v_1' = v_1 - 54 = 46$  – תשלום – .

#### **מסקנה:**

- התועלת של שחקן 1 כאשר הוא דובר אמת היא 10.

- התועלת של שחקן 1 כאשר הוא משקר (ומציע 60) היא 46.

אחר שהצעה שקרים מניבה לשחקן 1 תועלת גבוהה יותר באופן מובהק ( $46 > 10$ ) מאשר הצעה אמיתית, הרי שהמנגנון אינו מגלה-אמת.

## **שאלה 2: ב**

### **כלל המנגנון**

"המצביע את ההצעה הגבוהה ביותר זוכה, ומשלם את הממוצע בין הצעתו לבין ההצעה הגבוהה".

### **פורמלית**

יהו ההצעות  $b_1, \dots, b_n$ .

נסמן את ההצעה הגבוהה ביותר ב- $b_{(1)}$  ואת ההצעה השנייה הגבוהה ב- $b_{(2)}$ .

הזוכה: השחקן שהצעתו היא  $b_{(1)}$ .

$$\text{התשלום: } P = \frac{b_{(1)} + b_{(2)}}{2}$$

נכיה כי מנגנון זה אינו מגלה-אמת.

### **דוגמה נגדית**

נתיחס לשני שחקנים:

- שחקן 1: ערכו האמתי  $v_1 = 100$ .

- שחקן 2: הצעתו  $b_2 = 50$ . (אין חשיבות לערכו האמתי של שחקן 2; הוא יכול להיות  $50 \leq$ ).

nbachן את התמරיצים של שחקן 1.

### **מקרה 1 – שחקן 1 דובר אמת**

שחקן 1 מציע  $v_1 = 100$ .

- ההצעה הגבוהה ביותר:  $b_1 = 100$ .

- ההצעה השנייה בגובהה:  $b_2 = 50$ .

• שחקן 1 זוכה.

$$\cdot p_1 = \frac{100+50}{2} = 75$$

$$\cdot u_1^{\text{מ''ח}} = v_1 - p_1 = 100 - 75 = 25 : 1$$

**מקרה 2 – שחקן 1 משקר (מציע הצעה נמוכה מהערך האמתי אך עדין זוכה)**

שחקן 1 מציע 60 (עדין גבוהה מ-50, ולכז הוא זוכה).

- ההצעה הגבוהה ביותר:  $b'_1 = 60$

- ההצעה השנייה בגובהה:  $b_2 = 50$ .

• שחקן 1 זוכה.

$$\cdot p'_1 = \frac{60+50}{2} = 55$$

$$\cdot u_1^{\text{מ''ש}} = v_1 - p'_1 = 100 - 55 = 45 : 1$$

### השוויה ומסקנה

$$\text{אנו רואים שמתקיים אמת: } u_1^{\text{מ''ש}} = 45 > 25 = u_1^{\text{מ''ח}}.$$

במצב זה, שחקן 1 מפיק תועלת גבוהה יותר באופן מובהק על ידי הצעה שקרים (60 במקום 50). לכן, מנגנון זה אינו מוגלה-אמת.

## שאלה 2: ג

### כלל המנגנון

"הציע את ההצעה הגבוהה ביותר זוכה, ומשלם את ההצעה השלישייה בגובהה."

### פורמלית

• ההצעות הממוינות בסדר יורד:  $b_{(1)} \geq b_{(2)} \geq b_{(3)} \geq \dots \geq$

• ההצעה: השחקן שהצעתו היא  $b_{(1)}$

• התשלום:  $P = b_{(3)}$

נוכיח כי גם מנגנון זה אינו מוגלה-אמת.

## דוגמה נגדית

נתיחה לשלושה שחקנים:

- שחקן 1: ערכו האמיתי  $v_1 = 80$ .

- שחקן 2: הצעתו  $b_2 = 100$ .

- שחקן 3: הצעתו  $b_3 = 70$ .

התמקדות היא במשחק 1; מצבם של האחרים - אם הם דוברי אמת או לא - אינם רלוונטיים.  
הצעות האחרות הן:

- הגבואה ביותר בין האחרות:  $s_1 = 100$ .

- השנייה בגובהה בין האחרות:  $s_2 = 70$ .

נשים לב שערכו האמיתי של שחקן 1 ( $v_1 = 80$ ) נמצא בין ההצעות הללו:  $70 < v_1 < 100$ .

### מקרה 1 - שחקן 1 דובר אמת

משחק 1 מציע  $b_1 = v_1 = 80$ .

הצעות:  $b_{(3)} = 70, b_{(2)} = 80, b_{(1)} = 100$ . מסודרות:  $100, 80, 70$ .

- הזכיה: שחקן 2.

- שחקן 1 מפסיד, ומשלם 0.

- התועלת של שחקן 1:  $u_1^{\text{אמת}} = 0$ .

### מקרה 2 - שחקן 1 משקר (מציע הצעה גבוהה מאוד)

משחק 1 מציע  $b'_1 = 200$ .

הצעות:  $b_{(3)} = 70, b_{(2)} = 100, b_{(1)} = 200$ . מסודרות:  $200, 100, 70$ .

- הזכיה: שחקן 1.

- התשלום: ההצעה השלישייה בגובהה  $b_{(3)} = 70$ .

- התועלת של שחקן 1:  $u_1^{\text{שקר}} = v_1 - 70 = 80 - 70 = 10$ .

### השוויה ומסקנה

- תועלת מאמירות אמת:  $u_1^{\text{אמת}} = 0$ .

- תועלת משקר:  $u_1^{\text{שקר}} = 10$ .

משחק 1 משפר את מצבו באופן מובהק על ידי ההצעה שקרים (הצעה 200 במקום ערכו האמיתי 80).  
לכן, מנגנון מחיר-שלישי זה אינו מגלה-אמת.