# שאלה 4

## א

**טענה 1.** אם לגרף $G$ יש פירוק בירקוף, אז $G$ מאוזן.

### הגדרות (בקצרה)

- יהי $G = (V, E)$ גרף דו־חלקי עם משקולות חיוביות $w(e) > 0$ על הקשתות.
- שידוך מושלם $M$ הוא קבוצה של קשתות כך שכל קודקוד צמוד בדיוק לקשת אחת ב־$M$.
- פירוק בירקוף של $G$ הוא:
  - שידוכים מושלמים $M_1, \dots, M_k$,
  - מקדמים $\alpha_1, \dots, \alpha_k > 0$,

  כך שלכל קשת $e \in E$:

$$w(e) = \sum_{t : e \in M_t} \alpha_t.$$

- גרף משוקלל נקרא מאוזן אם קיים קבוע $c$ כך שלכל קודקוד $v$:

$$\sum_{e \ni v} w(e) = c.$$

### הוכחה

נניח של־$G$ יש פירוק בירקוף:

$$w(e) = \sum_{t : e \in M_t} \alpha_t \quad \text{לכל} e \in E,$$

כאשר כל $M_t$ הוא שידוך מושלם.

ניקח קודקוד כלשהו $v \in V$. נבחן את סכום המשקולות של הקשתות הצמודות ל־$v$:

$$S(v) := \sum_{e \ni v} w(e).$$

נכניס את פירוק המשקולות:

$$S(v) = \sum_{e \ni v} \left( \sum_{t : e \in M_t} \alpha_t \right).$$

נחליף סדרי סכימה:

$$S(v) = \sum_{t=1}^{k} \alpha_t \cdot (\text{מספר הקשתות ב־}\ M_t\ \text{הצמודות ל־}\ v)\,.$$

כעת נשתמש בתכונה המרכזית של שידוך מושלם:

- בכל שידוך מושלם $M_t$, כל קודקוד מופיע בדיוק בקשת אחת.

לכן, לכל $t$ ולכל קודקוד $v$:

$$\text{מספר הקשתות ב־}\ M_t\ \text{הצמודות ל־}\ v = 1.$$

ומכאן:

$$S(v) = \sum_{t=1}^{k} \alpha_t \cdot 1 = \sum_{t=1}^{k} \alpha_t.$$

האגף הימני אינו תלוי ב־$v$. לכן לכל קודקוד $v$:

$$\sum_{e \ni v} w(e) = \sum_{t=1}^{k} \alpha_t =: c,$$

אותו קבוע $c$ לכל הקודקודים.
לכן $G$ מאוזן.

## ב

**טענה 2.** כל הגרלה שהיא ללא־קנאה לכתחילה היא גם פרופורציונלית לכתחילה.

### הגדרות רלוונטיות

נסמן $X$ – הגרלה על חלוקות (השמות) של החפצים בין השחקנים.

- $X_i$ – הסל ששחקן $i$ מקבל (משתנה מקרי).
- $v_i(\cdot)$ – פונקציית הערך של שחקן $i$.

הגדרות:

- **ללא־קנאה לכתחילה**: לכל שני שחקנים $i, j$,

$$E[v_i(X_i)] \geq E[v_i(X_j)].$$

- **פרופורציונלית לכתחילה**: לכל שחקן $i$,

$$E[v_i(X_i)] \geq \frac{1}{n}\, v_i(\text{All}),$$

כאשר $v_i(\text{All})$ הוא הערך ששחקן $i$ מייחס לכל החפצים יחד.

נוכיח: אם $X$ ללא־קנאה לכתחילה $\Rightarrow X$ פרופורציונלית לכתחילה.

**הוכחה**

נקבע שחקן כלשהו $i$.

מ"ללא־קנאה לכתחילה" נקבל שלכל $j$:

$$E[v_i(X_i)] \geq E[v_i(X_j)].$$

נסכום את האי־שוויון הזה על פני כל $j = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n} E[v_i(X_i)] \ \geq \ \sum_{j=1}^{n} E[v_i(X_j)].$$

האגף השמאלי:

$$\sum_{j=1}^{n} E[v_i(X_i)] = n \cdot E[v_i(X_i)].$$

באגף הימני נשתמש בליניאריות התוחלת:

$$\sum_{j=1}^{n} E[v_i(X_j)] = E\left[\sum_{j=1}^{n} v_i(X_j)\right].$$

כעת נסתכל על תוצאה קונקרטית אחת של ההגרלה. בכל תוצאה כזאת, החלוקה $(X_1, \ldots, X_n)$ מחלקת את כל החפצים בין השחקנים (מחיצה של כל החפצים), ולכן:

$$\sum_{j=1}^{n} v_i(X_j) = v_i(\text{All}).$$

זה נכון בכל תוצאה של ההגרלה, ולכן זה משתנה מקרי קבוע; לכן:

$$E\left[\sum_{j=1}^{n} v_i(X_j)\right] = v_i(\text{All}).$$

נקבל:

$$n \cdot E[v_i(X_i)] \geq v_i(\text{All}).$$

נחלק ב־$n$:

$$E[v_i(X_i)] \geq \frac{1}{n}\, v_i(\text{All}).$$

קיבלנו את תנאי הפרופורציונליות לכתחילה עבור השחקן $i$. מכיוון ש-$i$ היה שרירותי, הטענה נכונה לכל השחקנים. לכן כל הגרלה שהיא ללא־קנאה לכתחילה היא בהכרח גם פרופורציונלית לכתחילה.

## ג

נתונה חלוקה דטרמיניסטית
$X=(X_1,\dots,X_n)$ של כל החפצים בין $n$ שחקנים.
לכל שחקן $i$ מגדירים את ``**הגרלת ההחלפה**'' כך:

- מגרילים שחקן $j \neq i$ באופן אחיד מבין $n-1$ השחקנים האחרים;
- השחקן $i$ מקבל את הסל $X_j$.

צריך להוכיח:

החלוקה $X$ היא פרופורציונלית
אם ורק אם כל שחקן $i$ מעדיף את הסל שלו $X_i$ על פני הגרלת־ההחלפה שלו.

כלומר, עבור כל $i$:
$$v_i(X_i) \;\geq\; E[\text{swap}_i].$$

### 1. תנאי הפרופורציונליות

בחלוקה דטרמיניסטית, **פרופורציונליות** עבור שחקן $i$ פירושה:

$$v_i(X_i) \;\geq\; \frac{1}{n}\, v_i(\text{All}),$$

נסמן בקיצור $V_i^{\text{all}} := v_i(\text{All})$.
אז התנאי הוא:

$$v_i(X_i) \;\geq\; \frac{1}{n} V_i^{\text{all}}. \tag{P}$$

### 2. תוחלת הערך של הגרלת־ההחלפה

נתמקד בשחקן קבוע $i$.
בהגרלת־ההחלפה:

- כל $j \neq i$ נבחר בהסתברות $\frac{1}{n-1}$,
- ואז $i$ מקבל את הסל $X_j$.

לכן התוחלת של הערך עבור $i$ היא:

$$E[\text{swap}_i] = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} v_i(X_j).$$

מכיוון שהסלים $X_1, \dots, X_n$ מהווים חלוקה של כל החפצים, מתקיים עבור $i$:

$$\sum_{j=1}^{n} v_i(X_j) = V_i^{\text{all}}.$$

לכן:

$$\sum_{j \neq i} v_i(X_j) = V_i^{\text{all}} - v_i(X_i),$$

ומכאן:

$$E[\text{swap}_i] = \frac{1}{n-1} \left( V_i^{\text{all}} - v_i(X_i) \right). \tag{S}$$

"השחקן $i$ מעדיף את הסל שלו על פני הגרלת־ההחלפה" פירושו:

$$v_i(X_i) \;\geq\; E[\text{swap}_i] = \frac{1}{n-1} \left( V_i^{\text{all}} - v_i(X_i) \right). \tag{SWAP}$$

**3. שקילות: (P) $\Leftrightarrow$ (SWAP) עבור כל שחקן**

**($\Rightarrow$) אם החלוקה פרופורציונלית $\Rightarrow$ השחקן מעדיף את הסל שלו**
נניח ש-$X$ פרופורציונלית עבור $i$, כלומר:

$$v_i(X_i) \;\geq\; \frac{1}{n} V_i^{\text{all}}.$$

נכפיל ב-$n$:

$$n\, v_i(X_i) \;\geq\; V_i^{\text{all}}.$$

נעביר אגפים:

$$(n-1)\, v_i(X_i) \;\geq\; V_i^{\text{all}} - v_i(X_i).$$

כעת נחלק ב-$n-1>0$:

$$v_i(X_i) \;\geq\; \frac{1}{n-1} \left( V_i^{\text{all}} - v_i(X_i) \right).$$

אבל לפי $(S)$, אגף ימין הוא בדיוק $E[\text{swap}_i]$. לכן:

$$v_i(X_i) \;\geq\; E[\text{swap}_i],$$

כלומר השחקן $i$ מעדיף את הסל שלו על פני הגרלת־ההחלפה.

**($\Leftarrow$) אם השחקן מעדיף את הסל שלו $\Rightarrow$ החלוקה פרופורציונלית**
נניח כעת שלשחקן $i$ עדיף הסל שלו:

$$v_i(X_i) \;\geq\; \frac{1}{n-1}\left(V_i^{\text{all}} - v_i(X_i)\right).$$

נכפיל ב-$n-1$:

$$(n-1)\, v_i(X_i) \;\geq\; V_i^{\text{all}} - v_i(X_i).$$

נעביר אגפים:

$$n\, v_i(X_i) \;\geq\; V_i^{\text{all}}.$$

נחלק ב-$n$:

$$v_i(X_i) \;\geq\; \frac{1}{n} V_i^{\text{all}}.$$

זהו בדיוק תנאי הפרופורציונליות $(P)$ עבור השחקן $i$.

**4. סיכום**

הראינו שלכל שחקן $i$:

$X$ פרופורציונלית עבור $i$ $\iff$ $i$ מעדיף את $X_i$ על הגרלת־ההחלפה שלו.

לכן, החלוקה $X$ היא פרופורציונלית (לכל השחקנים)
אם ורק אם כל שחקן מעדיף את הסל שלו על פני הגרלת־ההחלפה.
■