שאלה 5: חסרת-קנאה עד פריט אחד (EF1) עם חבילות שוות בגודל

בהינתן n·k פריטים בלתי-חלקים ו-n שחקנים. כל שחקן חייב לקבל בדיוק k פריטים. עלינו לתכנן אלגוריתם מהיר שמוצא הקצאה כזו שהיא גם EF1. יש להוכיח נכונות.

תשובה

אלגוריתם (Capacity-aware envy-cycle elimination)

רעיון: מקצים פריטים אחד אחד לסוכנים שעדיין יש להם קיבולת (‎< k), ושומרים על גרף הקנאה אציקלי על ידי ביטול מעגלי קנאה באמצעות רוטציות של חבילות. גרפי קנאה אציקליים מבטיחים EF1; רוטציות שומרות על מספר הפריטים, כך שכולם מסיימים עם בדיוק k פריטים.

קלט: ערכים אדיטיביים, לא-שליליים v_i(g) עבור כל שחקן i ופריט g; m = n·k.

קוד פסאודו:

```
ECE-k(v, n, k):
  For all i: X_i ← ∅             # current bundles
  Build an empty envy graph G  # vertices are players; edge i→j if i envi

  For each unallocated good g (any order is fine):
    Choose an eligible player a with |X_a| < k (e.g., one maximizing v_a(
    Give g to a: X_a ← X_a ∪ {g}
    Update G (recompute edges i→j where v_i(X_i) < v_i(X_j))

    While G contains a directed cycle C = (p1 → p2 → … → pℓ → p1):
      # Cycle elimination by bundle-rotation
      Let (Y_1, …, Y_ℓ) ← (X_{p1}, …, X_{pℓ})
      For r = 1..ℓ: X_{p_{r}} ← Y_{r+1} with indices mod ℓ
      Update G

  Return (X_1, …, X_n)
```

למה זה מהיר?

- כל פריט מוקצה פעם אחת. כל רוטציית-מעגל משפרת באופן קפדני את כל הסוכנים במעגל (הם מקבלים חבילה שהם מקנאים בה), וטיעון מוכר של פונקציית פוטנציאל (מ-Lipton–Markakis–Mossel–Saberi, 2004) חוסם את מספר הרוטציות בפולינום. באופן נאיבי: $O(m \cdot n^2)$–$O(m \cdot n^3)$, תלוי באיתור המעגלים והעדכונים. לכן זמן פולינומיאלי.

למה כולם מקבלים בדיוק k פריטים?

- אנחנו מקצים רק לסוכנים עם $|X\_i| < k$, ויש בדיוק $n \cdot k$ פריטים. רוטציות-מעגל מחליפות חבילות שלמות בין הסוכנים במעגל, כך שהן שומרות על גודל החבילה של כל סוכן. לכן, בסוף $|X\_i| = k$ לכל i.

למה התוצאה היא EF1?

- האלגוריתם שומר על גרף קנאה ומבטל כל מעגל מכוון ברגע שהוא מופיע. בסיום, גרף הקנאה G הוא אציקלי.
- עבור הערכות אדיטיביות ולא-שליליות, גרף קנאה אציקלי גורר EF1: אם סוכן i עדיין מקנא "בחוזקה" ב-j אפילו אחרי הסרת פריט בודד כלשהו מ-j, אפשר לעקוב אחר שרשרת הפריט-המקונא-ביותר (מ-j לבעלים שמעריך אותו הכי הרבה, וכך הלאה) כדי לבנות מעגל מכוון של קנאה—בסתירה לאציקליות. זהו הטיעון הסטנדרטי של Lipton–Markakis–Mossel–Saberi.
- מכיוון שרוטציות-מעגל אף פעם לא מורידות את הערכת הסוכן ושומרות על גודלי החבילות, אציקליות בסוף מאשרת EF1. לכן ההקצאה המאוזנת הסופית (כל אחד מקבל k פריטים) היא EF1.