

אלגוריתמים כלכליים – מטלה 05

שאלה 2: א

המכרז לא מגלה-אמת

דוגמה נגדית

נתונים:

- הערך האמיתי של שחקן 1: $v_1 = 100$.
- הצעת שחקן 2: $b_2 = 50$.

תיאור המנגנון:

המנגנון קובע כי המשתתף שהציע את ההצעה הגבוהה ביותר זוכה. הזוכה משלם 90% מסכום הצעתו שלו.

ניתוח מקרים:

מקרה 1 - שחקן 1 דובר אמת (מציע את ערכו האמיתי):

- שחקן 1 מציע: $b_1 = 100$.
- הוא זוכה במכרז (כי $100 > 50$).
- הוא משלם: $0.9 \cdot 100 = 90$.
- התועלת של שחקן 1 היא: $100 - 90 = 10$ תשלום $u_1 = v_1$.

מקרה 2 - שחקן 1 משקר (מציע ערך נמוך יותר אך עדיין זוכה):

- נניח ששחקן 1 מציע הצעה $b'_1 = 60$, שהיא נמוכה במעט מהערך האמיתי אך עדיין מספיקה כדי לנצח את הצעת שחקן 2.
- הוא עדיין זוכה במכרז (כי $60 > 50$).

• הוא משלם: $0.9 \cdot 60 = 54$.

• התועלת של שחקן 1 היא: $u'_1 = v_1 - \text{תשלום} = 100 - 54 = 46$.

מסקנה:

• התועלת של שחקן 1 כאשר הוא דובר אמת היא 10.

• התועלת של שחקן 1 כאשר הוא משקר (ומציע 60) היא 46.

מאחר שהצעה שקרית מניבה לשחקן 1 תועלת גבוהה יותר באופן מובהק ($10 < 46$) מאשר הצעה אמיתית, הרי שהמנגנון אינו מגלה-אמת.

שאלה 2: ב

כלל המנגנון

“המציע את ההצעה הגבוהה ביותר זוכה, ומשלם את הממוצע בין הצעתו לבין ההצעה השנייה בגובהה.”

פורמלית

יהיו ההצעות b_1, \dots, b_n .

נסמן את ההצעה הגבוהה ביותר ב- $b_{(1)}$ ואת ההצעה השנייה בגובהה ב- $b_{(2)}$.

הזוכה: השחקן שהצעתו היא $b_{(1)}$.

התשלום: $P = \frac{b_{(1)} + b_{(2)}}{2}$.

נוכיח כי מנגנון זה אינו מגלה-אמת.

דוגמה נגדית

נתייחס לשני שחקנים:

• שחקן 1: ערכו האמיתי $v_1 = 100$.

• שחקן 2: הצעתו $b_2 = 50$. (אין חשיבות לערכו האמיתי של שחקן 2; הוא יכול להיות ≤ 50).

נבחן את התמריצים של שחקן 1.

מקרה 1 - שחקן 1 דובר אמת

שחקן 1 מציע $b_1 = v_1 = 100$.

• ההצעה הגבוהה ביותר: $b_1 = 100$.

- ההצעה השנייה בגובהה: $b_2 = 50$.
- שחקן 1 זוכה.
- התשלום: $p_1 = \frac{100+50}{2} = 75$.
- התועלת של שחקן 1: $u_1^{\text{אמת}} = v_1 - p_1 = 100 - 75 = 25$.

מקרה 2 - שחקן 1 משקר (מציע הצעה נמוכה מהערך האמיתי אך עדיין זוכה)

שחקן 1 מציע $b'_1 = 60$ (עדיין גבוה מ-50, ולכן הוא זוכה).

- ההצעה הגבוהה ביותר: $b'_1 = 60$.
- ההצעה השנייה בגובהה: $b_2 = 50$.
- שחקן 1 זוכה.
- התשלום: $p'_1 = \frac{60+50}{2} = 55$.
- התועלת של שחקן 1: $u_1^{\text{שקר}} = v_1 - p'_1 = 100 - 55 = 45$.

השוואה ומסקנה

אנו רואים שמתקיים $u_1^{\text{שקר}} = 45 > 25 = u_1^{\text{אמת}}$.
 במצב זה, שחקן 1 מפיק תועלת גבוהה יותר באופן מובהק על ידי הצעה שקרית (60 במקום 100).
 לכן, מנגנון זה אינו מגלה-אמת.

שאלה 2: ג

כלל המנגנון

“המציע את ההצעה הגבוהה ביותר זוכה, ומשלם את ההצעה השלישית בגובהה.”

פורמלית

יהיו ההצעות הממוינות בסדר יורד: $b_{(1)} \geq b_{(2)} \geq b_{(3)} \geq \dots$.
 הזוכה: השחקן שהצעתו היא $b_{(1)}$.
 התשלום: $P = b_{(3)}$.
 נוכיח כי גם מנגנון זה אינו מגלה-אמת.

דוגמה נגדית

נתייחס לשלושה שחקנים:

• שחקן 1: ערכו האמיתי $v_1 = 80$.

• שחקן 2: הצעתו $b_2 = 100$.

• שחקן 3: הצעתו $b_3 = 70$.

ההתמקדות היא בשחקן 1; מצבם של האחרים - אם הם דוברי אמת או לא - אינו רלוונטי. ההצעות האחרות הן:

• הגבוהה ביותר מבין האחרות: $s_1 = 100$.

• השנייה בגובהה מבין האחרות: $s_2 = 70$.

נשים לב שערכו האמיתי של שחקן 1 ($v_1 = 80$) נמצא בין ההצעות הללו: $70 < 80 < 100$.

מקרה 1 - שחקן 1 דובר אמת

שחקן 1 מציע $b_1 = v_1 = 80$.

ההצעות: 100, 80, 70. מסודרות: $b_{(1)} = 100, b_{(2)} = 80, b_{(3)} = 70$.

• הזוכה: שחקן 2.

• שחקן 1 מפסיד, ומשלם 0.

• התועלת של שחקן 1: $u_1^{\text{אמת}} = 0$.

מקרה 2 - שחקן 1 משקר (מציע הצעה גבוהה מאוד)

שחקן 1 מציע $b'_1 = 200$.

הצעות: 200, 100, 70. מסודרות: $b_{(1)} = 200$ (שחקן 1), $b_{(2)} = 100, b_{(3)} = 70$.

• הזוכה: שחקן 1.

• התשלום: ההצעה השלישית בגובהה $b_{(3)} = 70$.

• התועלת של שחקן 1: $u_1^{\text{שקר}} = v_1 - 70 = 80 - 70 = 10$.

השוואה ומסקנה

• תועלת מאמירת אמת: $u_1^{\text{אמת}} = 0$.

• תועלת משקר: $u_1^{\text{שקר}} = 10$.

שחקן 1 משפר את מצבו באופן מובהק על ידי הצעה שקרית (הצעת 200 במקום ערכו האמיתי 80). לכן, מנגנון מחיר-שלישי זה אינו מגלה-אמת.