שאלה 2

א

הגדרה מוכללת: תקציב הוגן לקבוצות

בגרסה הרגילה (שוויונית), קבוצה בגודל k זכאית לחלק $\frac{k}{n}C$ מהתקציב. כאן לכל אזרח i יש "חלק הוגן" C_i, ולכן לקבוצה K מגיע סך הכל $\sum_{i\in K} C_i$.

הגדרה (הוגן לקבוצות עם מסים שונים):
תקציב d הוא *הוגן לקבוצות* אם לכל קבוצה $K \subseteq \{1,\dots,n\}$ מתקיים:

$$\sum_{j:\exists i\in K \text{with} u_{i,j}=1} d_j \;\;\geq\;\; \sum_{i\in K} C_i.$$

במילים: לכל קבוצת אזרחים K, סך התקציב שמושקע בכל הנושאים שלפחות אחד מחברי K תומך בהם גדול או שווה לסכום המסים שמשלמים כל חברי הקבוצה.

הגדרה מוכללת: תקציב פריק

בגרסה השוויונית: לכל אזרח יש C/n והוא "מפרק" את חלקו בין הנושאים שהוא תומך בהם. כאן לכל אזרח i יש חלק אישי C_i.

הגדרה (תקציב פריק עם מסים שונים):
תקציב d נקרא *פריק* אם קיימים מספרים $d_{i,j} \geq 0$ כך ש־

1. כל אזרח מחלק בדיוק את חלק המס שלו:

$$\forall i: \quad \sum_{j=1}^{m} d_{i,j} = C_i$$

2. הסכום שמגיע לכל נושא שווה לסעיף התקציב שלו:

$$\forall j: \quad \sum_{i=1}^{n} d_{i,j} = d_j$$

3. אזרח תומך רק בנושאים שהוא באמת תומך בהם:

$$\forall i,j: \quad d_{i,j} > 0 \;\Rightarrow\; u_{i,j} = 1$$

כלומר: אפשר לחשוב כאילו לכל אזרח יש ארנק של C_i שקלים, והוא מפזר אותו *רק* בין הנושאים שהוא תומך בהם, וביחד הפיזורים של כולם בדיוק מכתיבים את וקטור התקציב d.

ב

נסמן שוב את ההגדרות מסעיף א׳, ואז נוכיח.

- לכל אזרח i יש חלק אישי C_i, והתקציב הכולל הוא $C = \sum_i C_i$.
- תקציב d הוא **פריק** אם קיימים $d_{i,j} \geq 0$ כך ש:
  1. לכל i: $\sum_j d_{i,j} = C_i$
  2. לכל j: $\sum_i d_{i,j} = d_j$
  3. אם $d_{i,j} > 0$ אז $u_{i,j} = 1$ (אזרח תורם רק לנושאים שהוא תומך בהם).
- תקציב d הוא **הוגן לקבוצות** אם לכל קבוצה K מתקיים:

$$\sum_{j:\exists i\in K,\, u_{i,j}=1} d_j \;\; \geq \;\; \sum_{i\in K} C_i.$$

נסמן את קבוצת הנושאים שנתמכים ע״י לפחות אחד מחברי K ב־

$$S_K := \{j \mid \exists i \in K \text{ עם } u_{i,j} = 1\}.$$

המטרה היא להוכיח:

$$\sum_{j\in S_K} d_j \;\geq\; \sum_{i\in K} C_i.$$

הוכחה: כל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות

נניח ש־d פריק, כלומר קיימים $d_{i,j}$ שמקיימים את שלושת התנאים למעלה.

1. נכתוב את סכום התקציב על הנושאים ב־S_K:

$$\sum_{j\in S_K} d_j = \sum_{j\in S_K} \sum_{i=1}^{n} d_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j\in S_K} d_{i,j}.$$

2. נוריד את התרומות של אזרחים שלא בקבוצה K (כל האיברים אי־שליליים, אז זו אי־שוויון):

$$\sum_{j\in S_K} d_j \;\geq\; \sum_{i\in K} \sum_{j\in S_K} d_{i,j}.$$

3. עכשיו, עבור כל $i \in K$, נשתמש בפריקות: אם $d_{i,j} > 0$, אז $u_{i,j} = 1$, כלומר j הוא נושא שהתומך i תומך בו. אבל כל נושא שבו i תומך בהחלט שייך ל־S_K (כי $i \in K$). לכן:

$$\sum_{j \in S_K} d_{i,j} = \sum_j d_{i,j} = C_i.$$

4. נחבר על פני כל $i \in K$:

$$\sum_{i \in K} \sum_{j \in S_K} d_{i,j} = \sum_{i \in K} C_i.$$

5. נחזיר את זה לאי־שוויון מהשלב השני:

$$\sum_{j \in S_K} d_j \ \geq \ \sum_{i \in K} \sum_{j \in S_K} d_{i,j} = \sum_{i \in K} C_i.$$

וזו בדיוק דרישת ההוגנות לקבוצות.
מסקנה: **כל תקציב פריק הוא הוגן לקבוצות** גם במקרה המוכלל עם מסים שונים C_i.

ג

נזכיר את ההגדרה:

- תקציב נאש מוכלל הוא וקטור תקציב d שממקסם את הפונקציה

$$F(d) := \sum_{i=1}^{n} C_i \log(u_i(d)),$$

כאשר

$$u_i(d) = \sum_{j=1}^{m} u_{i,j} d_j,$$

ו־$u_{i,j} \in \{0,1\}$.

נניח שכל אזרח עם $C_i > 0$ אכן מקבל תועלת חיובית $u_i(d) > 0$ בנקודת המקסימום, כדי שהלוג יהיה מוגדר (אפשר תמיד לחשוב על הקצאה עם $\varepsilon > 0$ לכל נושא רלוונטי ולתת לו לגשת לגבול).

המטרה: להראות שתקציב כזה d הוא **פריק** לפי ההגדרה המוכללת מסעיף א׳:
קיימים מספרים $d_{i,j} \geq 0$ כך ש־

1. $\forall i: \quad \sum_j d_{i,j} = C_i$
2. $\forall j: \quad \sum_i d_{i,j} = d_j$
3. $\forall i,j: \quad d_{i,j} > 0 \Rightarrow u_{i,j} = 1$.

שלב 1: הנגזרת השולית לפי כל נושא

נגזור את F לפי d_j. מאחר ש־$u_i(d) = \sum_k u_{i,k} d_k$, נקבל:

$$\frac{\partial F}{\partial d_j} = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \frac{1}{u_i(d)} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial d_j} = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \frac{1}{u_i(d)} \cdot u_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)}.$$

הבעיה היא מקסימום של $F(d)$ תחת האילוץ

$$\sum_{j=1}^{m} d_j = C, \quad d_j \geq 0.$$

בנקודת מקסימום פנימית (עבור נושאים עם $d_j > 0$) תנאי KKT אומרים שהנגזרת השולית זהה עבור כל j עם $d_j > 0$. כלומר, קיים קבוע Z כך שלכל j עם $d_j > 0$:

$$Z \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)}.$$

(לנושאים עם $d_j = 0$ אפשר להגדיר $d_{i,j} = 0$, זה לא ישפיע על הפריקות.)

שלב 2: הגדרת הפירוק $d_{i,j}$

נגדיר:

$$d_{i,j} := C_i \cdot d_j \cdot \frac{u_{i,j}}{u_i(d)} \quad \text{לכל} i, j.$$

נבדוק את שלושת התנאים:

(א) לכל אזרח i: $\sum_j d_{i,j} = C_i$

$$\sum_{j=1}^{m} d_{i,j} = \sum_j \left(C_i \cdot d_j \cdot \frac{u_{i,j}}{u_i(d)} \right) = C_i \cdot \frac{1}{u_i(d)} \sum_j d_j u_{i,j}.$$

אבל לפי ההגדרה של $u_i(d)$:

$$u_i(d) = \sum_j d_j u_{i,j}.$$

לכן:

$$\sum_j d_{i,j} = C_i \cdot \frac{u_i(d)}{u_i(d)} = C_i.$$

כל אזרח מחלק בדיוק את החלק שלו C_i — טוב.

(ב) לכל נושא j: $\sum_i d_{i,j} = d_j$

נחשב:

$$\sum_{i=1}^{n} d_{i,j} = \sum_i \left(C_i \cdot d_j \cdot \frac{u_{i,j}}{u_i(d)} \right) = d_j \cdot \sum_i \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)}.$$

אבל לפי תנאי האופטימום הגדרנו:

$$Z := \sum_i \frac{C_i u_{i,j}}{u_i(d)}$$

וזה אותו Z לכל j עם $d_j > 0$. לכן:

$$\sum_i d_{i,j} = d_j \cdot Z.$$

כדי להבין מהו Z, נסכם על כל i, j בשתי דרכים.
מצד אחד:

$$\sum_{i,j} d_{i,j} = \sum_i \sum_j d_{i,j} = \sum_i C_i = C$$

(כי לכל i סכום התרומות הוא C_i).
מצד שני:

$$\sum_{i,j} d_{i,j} = \sum_j \sum_i d_{i,j} = \sum_j (d_j \cdot Z) = Z \cdot \sum_j d_j = Z \cdot C.$$

קיבלנו:

$$C = Z \cdot C \;\Rightarrow\; Z = 1.$$

מכאן:

$$\sum_i d_{i,j} = d_j \cdot Z = d_j \cdot 1 = d_j.$$

כלומר כל נושא j מקבל בדיוק את תקציבו d_j.

(ג) תמיכה בלבד בנושאים רצויים

לפי ההגדרה:

$$d_{i,j} = C_i \cdot d_j \cdot \frac{u_{i,j}}{u_i(d)}.$$

אם $u_{i,j} = 0$ (האזרח i לא תומך בנושא j) אז $d_{i,j} = 0$. כלומר אם $d_{i,j} > 0$ בהכרח $u_{i,j} = 1$.

זה בדיוק התנאי ש"אזרח תורם רק לנושאים שהוא תומך בהם".

סיכום

הראינו שקיימים $d_{i,j}$ שמקיימים:

- $\sum_j d_{i,j} = C_i$ לכל i,
- $\sum_i d_{i,j} = d_j$ לכל j,
- $d_{i,j} > 0 \Rightarrow u_{i,j} = 1$.

לכן תקציב נאש מוכלל הוא **פריק** לפי ההגדרה המוכללת מסעיף א׳, וממילא (בעקבות סעיף ב׳) גם הוגן לקבוצות ביחס ל-C_i.