Домашняя работа 5

December 13, 2019

Задача 1 (3 балла) Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, причем X_n принимает значения $-\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$ с вероятностями $1/2$ каждое. Выполняется для этой последовательности закон больших чисел?

Решение:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n$$

$$E\overline{X}_n = 0$$

Докажем что для последовательности X_n не выполняется ЗБЧ. Тк из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению, для этого достаточно доказать что последовательность $\overline{X}_n$ не сходится по распределению к $E\overline{X}_n = 0$.
Найдем хар функцию:

$$\varphi_{X_j}(t/n) = Ee^{iX_j t/n} = \frac{1}{2}(e^{i\sqrt{j}t/n} + e^{-i\sqrt{j}t/n}) = \cos(\sqrt{j}t/n)$$

$$\varphi_{\overline{X}_n}(t) = \varphi_{\sum X_j}(t/n) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t/n)$$

$$\varphi_{\overline{X}_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \cos(\sqrt{j}t/n)$$

Пусть $t > 1$. При достаточно больших n выполняется:

$$\prod_{j=1}^{n} \cos(\sqrt{j}t/n) < \prod_{j=\frac{n}{2}}^{n} \cos(\sqrt{j}t/n) < (\cos(t/\sqrt{2n}))^{\frac{n}{2}} \simeq (1 - \frac{t^2}{2n})^n \to e^{-\frac{t^2}{2}} < 1$$

Следовательно последовательность $\overline{X}_n$ не сходится по распределению к нулю.
чтд

Задача 2 (2 балла) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин,

$$\mathbb{P}(\xi_n = \pm 2^n) = 2^{-(2n+1)}, \mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - 2^{-2n}$$

Решение:

$$E\xi_n = 0$$

$$E\xi_n^2 = 1$$

$$D\xi_n = 1$$

$$\overline{\xi_n} = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} \xi_m$$

$$E\overline{\xi_n} = 0$$

$$D\overline{\xi_n} = \frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{n} D\xi_m = \frac{1}{n}$$

Неравенство Чебышева: $\forall\varepsilon > 0$

$$P(|\overline{\xi_n}| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\overline{\xi_n}}{\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

Следлвательно $\overline{\xi_n}$ сходится по вероятности к $E\overline{\xi_n} = 0$. Значит ЗБЧ выполняется.

Задача 3 (5 баллов)

Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока общая сумма выпавших очков не превысит 700. Оценить вероятность того, что для этого потребуется более 210 бросаний; менее 180 бросаний; от 190 до 210 бросаний. (показать все выкладки и получить конкретное число)

Решение:

ξ – номер броска при котором общая сумма выпавших очков превысила 700
S_n – сумма очков при n-том броске
Будем считать что $\xi = n$, это тоже самое что $S_n = 700$

$$P(\xi = n) = P(S_n = 700)$$

S_n сумма случайных независимых величин($E = 3.5$, $D = 2.9$) поэтому $\eta = \frac{S_n - 3.5n}{sqrt(2.9n)}$ при большом n распределена как $N(0, 1)$
Тогда:

$$P(S_n = 700) = P(\frac{S_n - 3.5n}{\sqrt{2.9n}} = \frac{700 - 3.5n}{\sqrt{2.9n}}) \simeq \int\limits_{\frac{700-3.5n}{\sqrt{2.9n}}}^{\frac{701-3.5n}{\sqrt{2.9n}}} f_{N(0,1)}(x)dx \simeq (f_{N(0,1)}(\frac{700 - 3.5n}{\sqrt{2.9n}}))/\sqrt{2.9n} = u(n)$$

Тогда:

$$P(\xi > 210) = \int\limits_{210}^{\infty} u(n)dn = 0.02$$

$$P(\xi < 180) = 1 - P(\xi > 180) = 1 - \int\limits_{180}^{\infty} u(n)dn = 0.72$$

$$P(190 < \xi < 210) = \int\limits_{190}^{210} u(n)dn = 0.24$$

Задача 4 (5 баллов)

Известно, что вероятность рождения мальчика приблизительно равна $0,515$. Какова вероятность того, что среди 10 тысяч новорождённых мальчиков будет меньше, чем девочек? (показать все выкладки и получить конкретное число)

Решение:

Введем случайную величину S_n – колличество мальчиков при n новорожденных. Заметим что S_n является суммой независимых случаных величин $Be(p = 0,515)$. Тогда используем интегральную теорему Муавра-Лапласа:
$P(-\infty \leq S_n \leq 4999) = P(-\infty \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b) \simeq \Phi(b) - \Phi(-\infty)$, где $b = \frac{4999 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = -3,02$
Получаем ответ: $P(-\infty \leq S_n \leq 4999) = 0,00123$

Задача 5 (5 баллов)

Докажите

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{\lfloor n/2+\sqrt{n}\rfloor}^{n} C_n^k 2^{-n} = 1 - \Phi(2)$$

Решение:

$$\xi_n \sim Bi(p = 1/2, n)$$

Перебором по всем $n \geq k \geq \lfloor n/2 + \sqrt{n}\rfloor$ можно получить:

$$P(\xi_n \geq \lfloor n/2 + \sqrt{n}\rfloor) = \sum_{\lfloor n/2+\sqrt{n}\rfloor}^{n} C_n^k 2^{-n}$$

Теперь используем интегральную теорему Муавра-Лапласа:

$$P(\xi_n \geq \lfloor n/2 + \sqrt{n}\rfloor) = P(\frac{\xi_n - n/2}{\sqrt{n/4}} > 2) = P(\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} > 2) = \Phi(+\infty) - \Phi(2) = 1 - \Phi(2)$$

Задача 6 (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с конечными дисперсиями. Для любого фиксированного вещественного x найти предел.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n < x)$$

Решение:

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

Используя ЦПТ получаем:

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{nD\xi_1}} \sim N(0,1)$$

$$f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$P(S_n < x) = P(\frac{S_n - nm}{\sqrt{nD\xi_1}} < \frac{x - nm}{\sqrt{nD\xi_1}}) = \int_{-\infty}^{y_0(n)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \Phi(y_0(n))$$

где $y_0(n) = \frac{x-nm}{\sqrt{nD\xi_1}}$
Найдем пределы $y_0(n)$:
$\lim\limits_{n\to\infty} y_0(n) = -\infty$, при $m > 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_0(n) = +\infty$, при $m < 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_0(n) = 0$, при $m = 0$
Тогда:
$\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n < x) = 0$, при $m > 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n < x) = 1$, при $m < 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} P(S_n < x) = \Phi(0) = 1/2$, при $m = 0$