Домашняя работа 2 (дедлайн – 15:00 3.10.19)

October 9, 2019

Задача 1 (3 балла)

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с функцией распределения $F(x)$. Найти функции распределения $\max\limits_{1 \le i \le n} X_i$ и $\min\limits_{1 \le i \le n} X_i$.

Решение:

$P(X_i < x) = F(x)$

$F_{min} = P(\min\limits_{1 \le i \le n} X_i < x) = P((X_1 < x) + \cdots + (X_n < x)) = 1 - P((X_1 \ge x) * \cdots * (X_n \ge x)) =$
$= 1 - \sqcap_{i=1}^{n} P(X_i \ge x) = 1 - (1 - F(x))^n$

$F_{max} = P(\max\limits_{1 \le i \le n} X_i < x) = P((X_1 < x) * \cdots * (X_n < x)) = F^n(x)$

Задача 2 (3 балла) Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $\frac{1}{2}(\xi + |\xi|)$

Решение:

$\frac{1}{2}(\xi + |\xi|) = \eta$

$(\xi + |\xi|) \ge 0$

$(\xi + |\xi|) = 0$, при $\xi \le 0$
$(\xi + |\xi|) = 2 * \xi$, при $\xi > 0$

$P(\xi < x) = F(x)$
$P(\eta < x) = F_\eta(x)$
$P(\eta < 0) = 0 = F_\eta(0)$

При $x > 0$: $P(\eta < x) = P(0 < \xi < x) + P(\xi < 0)$
$P(0 < \xi < x) = F(x) - F(0)$
$P(\eta < x) = F(x) - F(0) + F(0)$

$F_\eta(x) = F(x)$, при $x > 0$
$F_\eta(x) = 0$, при $x \le 0$

Задача 3 (3 балла)

В круглой комнате произвольным образом провели диаметр и в одном из концов этого диаметра поставили прожектор так, чтобы он мог светить внутрь комнаты (направление, в котором светит прожектор задаётся углом α, который отсчитывается от направления проведённого диаметра; $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ – отрицательный угол отсчитывается по часовой стрелке от направления диаметра, положительный – против часовой). Найти функцию распределения длины луча от прожектора до стены, если угол α – это равномерно распределённая случайная величина на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Решение:

Из геометрии:
$l = 2r * cos\alpha$
$F_l(x) = P(l < x) = P(cos\alpha < \frac{x}{2r}) = 2 * P(\alpha > arccos\frac{x}{2r}) = (\frac{\frac{\pi}{2} - arccos\frac{x}{2r}}{\frac{\pi}{2}})$

Задача 4 (4 балла)

Допустим, что вероятность столкновения молекулы с другими молекулами в промежутке времени $[t, t+\Delta t)$ равна $p = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ и не зависит от времени, прошедшего после предыдущего столкновения ($\lambda = const$). Найти распределение времени свободного пробега молекулы (показательное распределение) и вероятность того, что это время превысит заданную величину $t^\star$

Решение:

t - время свободного пробега
$p(x) = \lambda x + o(x)$
$F(x) = P(t < x) = p(x)$
$\rho(x) = F'(x) = \lambda + o'(x)$
Доп условие на $o(x)$:
$\int\limits_0^{+\infty} (\lambda + o'(x))dx = 1$
$F'(x) = \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = \frac{P(t<x+dx)-P(t<x)}{dx} = \frac{P(x<t<x+dx)}{dx} = \frac{(1-p(x))p(x)}{dx} =$
$= \frac{(1-\lambda x-o(x))(\lambda dx+o(dx))}{dx} = \lambda(1 - \lambda x - o(x))$
$\lambda(1 - \lambda x - o(x)) = \lambda + o'(x)$, $o(x) = y$
$y' + \lambda y = -\lambda^2 x$
Учитывая доп условие получаем:
$y = o(x) = -e^{-2x} - \lambda x + 1$
$p(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$P(t > t^*) = 1 - p(t^*) = e^{-\lambda t^*}$
$F(x) = p(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
$\rho(x) = F'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Задача 5 (2 балла)

Диаметр круга измерен приближенно. Считая, что его величина равномерно распределена в отрезке $[a, b]$, найти распределение площади круга, её среднее значение и дисперсию.

Решение:

$S = \frac{\pi}{4}d^2$

$F_s(x) = P(S < x) = P(d^2 < \frac{4x}{\pi}) = P(d < \sqrt{\frac{4x}{\pi}}) = \{\frac{\sqrt{\frac{4x}{\pi}}-a}{b-a}$, при $a < \sqrt{\frac{4x}{\pi}} < b$; 1, при $b < \sqrt{\frac{4x}{\pi}}$; 0, при $\sqrt{\frac{4x}{\pi}} < a\}$

$\rho_s(x) = F_s'(x) = \frac{1}{b-a}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{2}$ при $\frac{\pi a^2}{4} < x < \frac{\pi b^2}{4}$

$ES = \int\limits_{\frac{\pi}{4}a^2}^{\frac{\pi}{4}b^2} \rho_s(x)xdx = \frac{1}{\sqrt{\pi}(b-a)}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_{\frac{\pi}{4}a^2}^{\frac{\pi}{4}b^2} = \frac{2}{3}\frac{(\frac{\pi}{4}b^2)^{\frac{3}{2}} - (\frac{\pi}{4}a^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}(b-a)} = \frac{\pi}{12}\frac{b^3-a^3}{b-a}$

$ES^2 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}a^2}^{\frac{\pi}{4}b^2} \rho_s(x)x^2dx = \frac{2}{5}\frac{(\frac{\pi}{4}b^2)^{\frac{5}{2}} - (\frac{\pi}{4}a^2)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}(b-a)} = \frac{\pi^2}{80}\frac{b^5-a^5}{b-a}$

$DS = ES^2 - (ES)^2$

Задача 6 (2 балла)

Пусть случайные величины ξ и η независимы и $\mathbb{E}\xi = 1$, $\mathbb{E}\eta = 2$, $\mathbb{D}\xi = 1$, $\mathbb{D}\eta = 4$. Найти математические ожидания случайных величин:

а) $\xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4$; б) $(\xi + \eta + 1)^2$

Решение:

$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$
$E\xi^2 = D\xi + (E\xi)^2 = 2$
$E\eta^2 = 8$

а) $E(\xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4) = E\xi^2 + 2E\eta^2 - E\xi E\eta - 4E\xi + E\eta + 4 = 18$

б) $E(\xi + \eta + 1)^2 = E(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2 + 2\xi + 2\eta + 1) = E\xi^2 + 2E\xi E\eta + E\eta^2 + 2E\xi + 2E\eta + 1 = 21$

Задача 7 (3 балла)

а) Пусть ξ – положительная невырожденная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Доказать, что

$$\frac{1}{\mathbb{E}\xi} \leq \mathbb{E}\frac{1}{\xi}$$

Решение:

Так как матожидание положительной случайной величины положительно:
$\frac{1}{\mathbb{E}\xi} \leq \mathbb{E}\frac{1}{\xi}$ эквивалентно $1 \leq \mathbb{E}\frac{1}{\xi}\mathbb{E}\xi$

Пусть $\eta_1 = \sqrt{\xi}$ и $\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{\xi}}$, тогда из неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$\mathbb{E}\eta_1^2\eta_2^2 \leq \mathbb{E}\eta_1^2\mathbb{E}\eta_2^2$$
$$1 \leq \mathbb{E}\eta_1^2\mathbb{E}\eta_2^2$$
$$1 \leq \mathbb{E}\frac{1}{\xi}\mathbb{E}\xi$$

б) Пусть ξ и η – независимые положительные случайная величины, с конечным математическим ожиданием. Доказать, что $\mathbb{E}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^r \geq \frac{\mathbb{E}\xi^r}{\mathbb{E}\eta^r}$

Решение:

Из пункта а, $\frac{\mathbb{E}\xi^r}{\mathbb{E}\eta^r} \leq \mathbb{E}\xi^r\mathbb{E}\frac{1}{\eta^r}$
Из неравенства Коши-Буняковского-Шварца:

$$\mathbb{E}\sqrt{\xi^r}^2 * \mathbb{E}\frac{1}{\sqrt{\eta^r}}^2 \leq \mathbb{E}\sqrt{\xi^r}^2\frac{1}{\sqrt{\eta^r}}^2$$

$$\mathbb{E}\xi^r\mathbb{E}\frac{1}{\eta^r} \leq \mathbb{E}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^r$$

$$\mathbb{E}\xi^r\mathbb{E}\frac{1}{\eta^r} \leq \mathbb{E}\frac{1}{\eta^r}\xi^r$$

Получаем:

$$\mathbb{E}\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^r \geq \mathbb{E}\xi^r\mathbb{E}\frac{1}{\eta^r} \geq \frac{\mathbb{E}\xi^r}{\mathbb{E}\eta^r}$$

Задача 8 (5 баллов)

На небольшом кластере GPU прямо сейчас очередь на обучение из 30 нейросетей. Единовременно на кластере может обучаться только одна сеть. За каждую нейросеть отвечают разные ML-инженеры. Нейросети имеют разные свойства: 10 из них больших (время их обучения 15 часов) и 20 маленьких (время их обучения 1 час). Пока не наступил момент начала обучения, разработчик переживает и внимательно следит за очередью, бесполезно растрачивая время. Посчитайте математическое ожидание, сколько человеко-часов будет потрачено на переживания разработчиков ровно с текущего момента (кластер освободился и начинает обрабатывать очередь, описанную выше), если задачи в очереди расположены в случайном порядке

Решение:

Каждому инженеру дадим номер в очереди начиная с конца, начиная с нуля: от 0 до 29. Затрата в человеко-часах ξ равна сумме произведений номера инженера на колличество часов требуемые на задачу(1 или 15). Событием ξ_i будет являться некоторая упорядоченная расстановка инженеров в очереди, а значением – $\sum\limits_{i=0}^{29} i * t_j$, где i номер инженера в очереди, а t_j колличество часов требуемые на его задачу. Вероятность любой конкретной упорядоченной расстановки равна $\frac{1}{30!}$. Так как вероятность постоянна ее можно вынести за знак суммы выражения для матожидания: $E\xi = \frac{1}{30!} \sum \sum\limits_{i=0}^{29} i * t_j$, где внешнее суммирование идет по всем расстановкам очереди. Сумму можно посчитать следующим образом: n-й инженер, который стоит на m-м месте встречается в 29! выборках, а значит в сумму входит 29! раз, таких инженеров 20 с маленькой задачей и 10 с большой. Получаем: $\sum \sum\limits_{i=0}^{29} i * t_j = 29! * 20 * \sum\limits_{i=0}^{29} i * 1 + 29! * 10 * \sum\limits_{i=0}^{29} i * 15 = 73950 * 29!$.

Тогда $E\xi = 2465$