Домашняя работа 4

November 14, 2019

Задача 1 (5 баллов)

Гамма-распределение $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ - это распредление с плотностью вероятности $f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ ($\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера) Посчитайте мат.ожидание и дисперсию для гамма-распределения. Как распределена сумма n независимых случайных величин, каждая из которых распределена как $\Gamma(\alpha, \lambda)$? Если $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, то как распределена с.в. aX, где $a > 0$ - произвольная константа? (приведите все! выкладки)

Решение:
G - с.в. с гамма-распределением $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$
Найдем характеристическую функцию гамма-распределения:
$\varphi_G(t) = \int\limits_0^{+\infty} f(x) e^{itx} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{(it-\lambda)x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha ((\lambda-it)x)^{\alpha-1}}{(\lambda-it)^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-(\lambda-it)x} d(\lambda-it)x = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\lambda^\alpha (u)^{\alpha-1}}{(\lambda-it)^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-ux} du =$
$= \frac{\lambda^\alpha \Gamma(\alpha)}{(\lambda-it)^\alpha \Gamma(\alpha)} = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-it)^\alpha}$
Теперь с помощью характеристической функции найдем матожидание и дисперсию:
$iEG = \varphi_G'(0) = i\frac{\alpha}{\lambda}$
$EG = \frac{\alpha}{\lambda}$
$-EG^2 = \varphi_G''(0) = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$
$DG = EG^2 - (EG)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
Так как хар. функция суммы н.с.в. равна произведению хар. функций:
$\varphi_{\Sigma G}(t) = \varphi_G(t)^n = \frac{\lambda^{n\alpha}}{(\lambda-it)^{n\alpha}}$
Тогда ΣG распределена как $\text{Gamma}(n\alpha, \lambda)$

Пусть f_a,F_a – плотность и функция распределения aX соответственно.

$$F_a(x) = F(ax)$$

$$f_a(x) = F_a'(x) = F'(ax) = f(ax) * a = \frac{(a\lambda)^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-a\lambda x} = \text{Gamma}(\alpha, a\lambda)$$

Задача 2 (4 балла)
Пусть ξ с.в. с действительной характеристической функцией $f(t)$ и дисперсией σ^2. Доказать, что:

$$f(t) \geq 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

Решение:

$$Ee^{it\xi} \geq 1 - \frac{t^2\sigma^2}{2}$$

Так как функция действительнозначная то можно отбросить мнимую часть. Также заметим, что матожидание ξ равно нулю:

$$E\xi = -i * f'(0) = 0$$

Так как комплексная часть $f'(0)$ равна нулю.

Тогда:

$$Ee^{it\xi} = Ecos(t\xi) \geq 1 - \frac{t^2 E\xi^2}{2} = 1 - \frac{E\xi^2 t^2}{2}$$

Достаточно доказать что

$$Ecos(t\xi) - (1 - \frac{E\xi^2 t^2}{2}) \geq 0$$

$$E(cos(t\xi) - (1 - \frac{\xi^2 t^2}{2})) \geq 0$$

Для любого u верно:

$$cosu - (1 - \frac{u^2}{2}) \geq 0$$

Следовательно:

$$cos(t\xi) - (1 - \frac{\xi^2 t^2}{2}) \geq 0$$

$$E(cos(t\xi) - (1 - \frac{\xi^2 t^2}{2})) \geq 0$$

чтд

Задача 3 (2 балла)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 14 \end{pmatrix} \right)$$

Найдите распределение случайного вектора $(Y_1, Y_2)^T$, где $Y_1 = X_1 + X_2 - X_3$, $Y_2 = X_1 + X_2 + X_3$

Решение:

$(Y_1, Y_2)^T = y = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Также введем обозначения: $R = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 14 \end{pmatrix}$, $m = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда $y \sim N(Am, ARA^T)$

$Am = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$ARA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 56 \end{pmatrix}$

$$y = \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 56 \end{pmatrix} \right)$$

Задача 4 (5 баллов)

Докажите, что сумма n независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$, имеет плотность f, задаваемую формулой

$$f(x) = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\tfrac{\sin t}{t}\right)^n \cos(tx) dt$$

Верна ли эта формула при $n = 1$?

Решение:
Найдем характеристическую функцию св равномерно распределенной на отрезке $[-1, 1]$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-itx}dx = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2it} = \frac{sint}{t}$$

Тогда хар функция суммы n независимых случайных величин, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$,

$$\varphi_\Sigma(t) = \left(\tfrac{sint}{t}\right)^n$$

Найдем функцию плотности распределения с помощью обратного преобразования:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n e^{-itx}dt$$

Благодаря тому что функция плотности действительнозначная можно откинуть комплексную часть. Получим:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos(tx)dt$$

Для того чтобы проверить верно ли это при $n = 1$ проинтегруем $f(x)$ в Вольфраме от $-\infty$ до $+\infty$
Получаем функцию которая на отрезке $[-1, 1]$ равна $\frac{1}{2}$, а вне отрезка нулю, что соответствует равномерному распределнию.

Задача 5 (4 балла)
Пусть f - непрерывная, монотонно-возрастающая, неотрицательная, ограниченная функция, такая, что $f(0) = 0$.
Докажите, что для сходимости ξ_n к 0 по вероятности необходимо и достаточно, чтобы сходилась к 0 последовательность $\mathbb{E}f(|\xi_n|)$

Решение:
Сначала докажем что из сходимости к нулю последовательности $\mathbb{E}f(|\xi_n|)$ следует сходимость ξ_n к 0 по вероятности.

Используем обобщенное неравенство Маркова для св $|\xi_n|$:

$$P(|\xi_n| \geq t) \leq \frac{Ef(|\xi_n|)}{f(t)},$$

где $t > 0$, f удовлетворяет условию монотонного возрастания.
$f(t) > 0$, так как $f()$ сторого монотонна и равна нулю в нуле.
Тогда при фиксированном $t > 0$ последовательность $P(|\xi_n| \geq t)$ стремится к нулю, так как она ограниченна сходящейся к нулю последовательностью и положительна.
Значит, ξ_n сходится к нулю по вероятности.
В другую сторону верно, так как из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.
Из сходимости по распределению:
$Ef(|\xi_n|) \to Ef(|\xi|)$, где $f(|t|)$ удовлетворяет условиям непрерывности и ограниченности.
чтд

Задача 6 (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность случайных величин с конечными дисперсиями. Положим $a_n = \mathbb{E}\xi_n$, $\sigma_n^2 = \mathbb{D}\xi_n$. Доказать, что если $a_n \to \infty$ и $\sigma_n^2 = o(a_n^2)$ при $n \to \infty$, то

$$\frac{\xi_n}{a_n} \xrightarrow{P} 1, n \to \infty$$

Решение:
Введем случайную величину $\eta = \frac{\xi_n}{a_n}$.

$$E\eta = 1$$

$$D\eta = \frac{D\xi}{a_n^2} = \frac{\sigma_n^2}{a_n^2}$$

Неравенство Чебышева:

$$P(|\eta - E\eta| \geq t) \leq \frac{D\eta}{t^2}, \forall t > 0$$

$$P(|\frac{\xi_n}{a_n} - 1| \geq t) \leq \frac{(\frac{\sigma_n^2}{a_n^2})}{t^2}$$

Последовательность $P(|\frac{\xi_n}{a_n} - 1| \geq t)$ сходится к нулю так как она ограниченна сходящейся к нулю $\frac{\sigma_n^2}{a_n^2}$.
Следовательно $\frac{\xi_n}{a_n}$ сходится по вероятности к 1.