Домашняя работа 3 (дедлайн – 15:00 24.10.19)

October 24, 2019

Задача 1 (5 баллов) Пусть $\xi, \eta \sim \text{Exp}(1)$ – независимые случайные величины. Найдите распределение случайной величины $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ (подсказка: рассмотрите преобразование обратное к преобразованию $(\xi, \eta) \longrightarrow (\zeta, \theta), \zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}, \theta = \xi + \eta$ и выразите $f_{\zeta,\theta}(z, u)$, используя $f_{\zeta,\theta}(z, u)$).

Решение:
Распределение Exp(1)
$f_{exp} = e^{-x}, x \geq 0$
$f_{exp} = 0, x \leq 0$
$F_{exp} = 1 - e^{-x}, x \geq 0$
$F_{exp} = 0, x \leq 0$

$\zeta = \frac{\xi}{\xi+\eta}$
$\theta = \xi + \eta$

Прямое преобразование:
(ξ, η) с координатами $(x_1, x_2) \mapsto (\zeta, \Theta)$ с (y_1, y_2)
$y_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2}$
$y_2 = x_1 + x_2$
Обратное:
$x_1 = y_1 * y_2$
$x_2 = y_2 + y_1 * y_2$
Рассмотрим плотность при:
$x_1 > 0$
$x_2 > 0$
следовательно: $0 < y_1 < 1$
$y_2 > 0$
в остальных случаях она равна нулю.
Якобиан обратного перехода:
$J = y_2 - y_1 * y_2 + y_1 * y_2 = y_2$
Плотность распределения:
$f_{\zeta,\theta}(y_1, y_2) = f_{\xi,\eta}(y_1 * y_2, y_2 - y_1 * y_2) * |J|$
$F_{\xi,\eta} = F_{exp}(x1) * F_{exp}(x_2) = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} - e^{-x_1-x_2}$
$f_{\xi,\eta} = \frac{\partial^2(e^{-x_1-x_2})}{\partial x_1 \partial x_2} = e^{-x_1-x_2} = e^{-y_2}$
$f_{\zeta,\theta} = e^{-y_2} * y_2$
Получаем, что плотность не зависит от y_1, а значит:
$f_\zeta = 1$, при $0 < y_1 < 1$
$f_\zeta = 0$, в остальных случаях.

Задача 2 (3 балла) Пусть $\xi \sim \text{Poly}(k, p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Покажите, что $\xi_i \sim \text{Bi}(k, p_i)$

Решение:

$$\xi = \frac{k!}{k_1!...k_n!} p_1^{k_1} ... p_n^{k_n}$$

Надо доказать, что:

$$P(\xi_i = k_i) = C_k^{k_i} p_i^{k_i} (1-p_i)^{k-k_i}$$

$$P(\xi_i = k_i) = \sum_{k_1,...,k_n \setminus k_i} P(\xi_1 = k_1, ..., \xi_n = k_n)$$

Доказательство сводится к равенству:

$$C_k^{k_i} p_i^{k_i} (1-p_i)^{k-k_i} = \sum_{k_1,...,k_n \setminus k_i} \frac{k!}{k_1!...k_n!} p_1^{k_1} ... p_n^{k_n}$$

$$\frac{1}{(n-n_i)!}(1-p_i)^{k-k_i} = \sum_{k_1,...,k_n \setminus k_i} \frac{1}{k_1!...k_{i-1}!...k_{i+1}!...k_n!} p_1^{k_1} ... p_{i-1}^{k_{i-1}} ... p_{i+1}^{k_{i+1}} ... p_n^{k_n}$$

$$(1-p_i)^{k-k_i} = \sum_{k_1,...,k_n \setminus k_i} \frac{(n-n_i)!}{k_1!...k_{i-1}!...k_{i+1}!...k_n!} p_1^{k_1} ... p_{i-1}^{k_{i-1}} ... p_{i+1}^{k_{i+1}} ... p_n^{k_n}$$

И справа и слева от знака равенства написана вероятность что фиксированные $(k - k_i)$ "шаров" не попадут в i-й "ящик" при полиномиальном распределении.
чтд

Задача 3 (5 баллов) Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет равномерное распределение в треугольнике с вершинами в точках $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$. Найти распределение случайной величины $\eta = \frac{\xi_1+\xi_2}{2}$

Решение:
Прямое преобразование:
$\theta_1 = \frac{\xi_1-\xi_2}{2}$
$\theta_2 = \eta$
Новые координаты (y_1, y_2)
Старые (x_1, x_2)
При переходе в новые координаты треугольник $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$ переходит в $(-0.5, -0.5), (0.5, 0.5), (0.5, -0.5)$

Так как якобиан обратного преобразования равен 2, новая плотность вероятности в треугольнике:
$f_{\theta_1,\theta_2}(y_1, y_2) = 2f_{\xi_1,\xi_2}(y_1 + y_2, y_1 - y_2)$
Проинтегрировав по y_1 от -inf до +inf (геометрически) получаем:

$$f_\eta(y) = \begin{cases} 2y + 1, & |y| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Задача 4 (3 балла) В каждую i-ую единицу времени живая клетка получает случайную дозу облучения X_i, причем $\{X_i\}_{i=1}^t$ имеют одинаковую функцию распределения $F_X(x)$ и независимы в совокупности для любого t. Получив интегральную дозу облучения, равную ν, клетка погибает. Оценить среднее время жизни клетки $\mathrm{E}T$.

Решение:
Расшарил решение задачи 51 из https://mccme.ru/ium/postscript/s12/gasnikov-tasks.pdf

Задача 5 (4 балла) Пусть N – случайная величина, принимающая натуральные значения, $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ – некоррелированные одинаково распределенные случайные величины с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями, не зависящие от N. Рассмотрим $S_N = \sum\limits_{i=1}^N \xi_i$. Посчитайте $\mathrm{D}S_N$.

Решение:
По тождеству Вальда:

$$E(S_N) = E(N)E(\xi_1)$$

Из того, что св некоррелируемые следует:
$E\xi_i\xi_j = E\xi_i E\xi_j$
t – число

$$E(\sum_{i=1}^{t}\xi_i)^2 = E(\sum_{i=1}^{t}\xi_i^2) + 2E\sum_{i\neq j}^{t}\xi_i\xi_j \; = \sum_{i=1}^{t}E\xi_i^2 \; + 2\sum_{i\neq j}^{t}E\xi_i E\xi_j = tE\xi_1^2 + t(t-1)(E\xi_1)^2 = t(t(E\xi_1)^2 + D\xi_1)$$

Через условное матожидание:

$$ES_N^2 = \sum_{n=1}^{\infty}P(N=t)E(S_N^2|N=t) = \sum_{n=1}^{\infty}P(N=t)E(S_t^2) = \sum_{n=1}^{\infty}P(N=t)E(\sum_{i=1}^{t}\xi_i)^2 = (E\xi_1)^2EN^2 + END\xi_1$$

$$DS_N = E(S_N^2) - (ES_N)^2$$

$$DS_N = D\xi_1 EN + (E\xi_1)^2 DN$$

Задача 6 (5 баллов) Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые одинаково распределённые с.в. с конечным мат.ожиданием, $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Доказать, что

$$\mathbb{E}(\xi_1|\eta_n, \eta_{n+1}, \dots) = \frac{\eta_n}{n}$$

Решение:

$$E(\eta_n|\eta_n,\ \eta_{n+1},\ ...) = E(\xi_1 + ... + \xi_n|\ \eta_n,\ \eta_{n+1},\ ...) = \eta_n$$

Из о.р.

$$\eta_n = nE(\xi_1|\eta_n,\ \eta_{n+1}, ...)$$