

УДК 004.94+517.95

doi 10.26089/NumMet.vXXrXXX

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКОВ С ИХ БАЛАНСИРОВКОЙ ПРИ ФИКСИРОВАНИИ РАБОЧЕГО ДАВЛЕНИЯ НА СКВАЖИНАХ В ПРОЦЕССЕ НЕФТЕДОВЫЧИ

А. С. Овчинникова¹, И. И. Патрушев², А. М. Гриф³, М. Г. Персова⁴,
Ю. Г. Соловейчик⁵

Рассмотрены подходы к моделированию многофазных потоков в нефтяном коллекторе при фиксировании рабочего давления на зонах перфорации активных скважин. Предложенный численный метод основан на неявном расчете давления и явном пересчете насыщенностей фаз в ячейках сетки на каждом временном шаге. Представлено описание математической модели, общей вычислительной схемы, конечноэлементной аппроксимации поля давления. Для сохранения консервативности потоков смеси используется специальный метод балансировки, приводится его алгоритм. Проведены исследования на задаче сравнительного проекта SPE-10, для которой расчет потоков на зонах перфорации скважин при фиксированном давлении выполнялся с использованием двух подходов. Первый из них основан на фиксации численных потоков на скважинах и требует уточнения аппроксимации градиента давления в окрестности скважин с дополнительными локальными дроблениями сетки и применением конечных элементов высокого порядка с иерархическими базисными функциями. Во втором подходе потоки на скважинах корректируются в процессе их балансировки. Результаты расчетов показали, что подход с коррекцией потоков в процессе балансировки требует значительно меньших вычислительных затрат, при этом обеспечивая требуемую точность моделирования.

Ключевые слова: многофазная фильтрация в пористых средах, численное 3D-моделирование месторождений углеводородов, метод конечных элементов, локальная консервативность потоков

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании процессов разработки месторождений часто требуется фиксировать давление на зонах перфорации скважин при превышении его пороговых значений. В этом случае потоки смеси на скважинах вычисляются численно по рассчитанному полю давления. Для получения потоков на скважинах, по сути, требуется дифференцирование численного решения, и обеспечить необходимую точность можно путем дробления ячеек (сгущения сетки) и использования базисных функций высоких порядков, что приводит к существенному возрастанию вычислительных затрат.

Известно, что при использовании МКЭ со скалярными базисными функциями (непрерывный метод Галеркина или Continuous Galerkin Finite Element Method (CG FEM)) для расчета поля давления (и последующего нахождения объемов перетекающей смеси) закон сохранения масс строго не выполняется,

¹ Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск; аспирант, e-mail: ovchinnikova.2014@stud.nstu.ru

² Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск; аспирант, e-mail: patrushev@ami.nstu.ru

³ Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск; аспирант, e-mail: grif.2013@stud.nstu.ru

⁴ Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск; зав. научно-исследовательской лабораторией, e-mail: persova@ami.nstu.ru

⁵ Новосибирский государственный технический университет, факультет прикладной математики и информатики, просп. К. Маркса, 20, 630073, Новосибирск; зав. кафедрой, e-mail: soloveychik@ami.nstu.ru

а лишь аппроксимируется [1, 2]. Поэтому достаточно часто применяются методы моделирования, основанные на комбинации методов конечных элементов и конечных объемов [1, 3, 4]. Также предлагается использовать гибридные/смешанные методы конечных элементов [5, 6]. Однако одни из этих методов являются достаточно ограниченными по описанию геометрии модели месторождения и использованию для расчетов несогласованных сеток и элементов с базисными функциями высоких порядков [7, 8], другие хотя и не имеют этих недостатков, но характеризуются высокими вычислительными затратами [5, 6, 9]. Некоторые методы рассмотрены только для двухфазных течений или для моделей с пренебрежением влияния силы гравитации [10].

Основным недостатком CG FEM является его локальная неконсервативность. Вместе с тем, существуют методы постобработки [11, 12], делающие CG FEM локально консервативным. Эти методы модифицируют численные потоки путем вычисления кусочно-постоянных функций и добавления их разрывов к неконсервативным потокам. Мы же будем использовать другой способ обеспечения закона сохранения масс, который основан на использовании процедуры балансировки потоков. Он использует специальный функционал баланса с регуляризацией, позволяющей учесть близость скорректированных потоков смеси к численным [14].

Мы покажем, что применение этой процедуры позволяет не только обеспечить выполнение закона сохранения масс, но и значимо уточнить численные потоки смеси на скважинах, полученные на грубой сетке с использованием базисных функций низкого порядка.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

Для моделирования процессов многофазной фильтрации в задачах нефтедобычи мы будем применять принцип, аналогичный используемому в известной конечно-разностной схеме IMPES [5] с неявным расчетом давления и явным расчетом насыщенностей в ячейках сетки на каждом временном шаге. Но в отличие от схемы IMPES мы будем использовать МКЭ, обладающий более широкими возможностями расчета поля давления в сложных и высококонтрастных средах, и балансировку потоков смеси, обеспечивающую локальную консервативность. Таким образом, применяемая нами схема моделирования многофазной фильтрации требует решения на каждом временном шаге следующих подзадач:

- 1) расчет поля давления (CG FEM) по текущему распределению насыщенностей фаз и численный расчет потоков смеси через границы ячеек конечноэлементной сетки (п. 1.1);
- 2) балансировка потоков смеси для выполнения закона сохранения (п. 1.2);
- 3) расчет потоков отдельных фаз и их перенос между ячейками сетки (вычисляется новый фазовый состав в конечных элементах) на текущем времени.

1.1. Расчет давления и потоков смеси. В каждый момент времени пористая среда, которая описывается тензором структурной проницаемости \mathbf{K} и пористостью Φ , заполнена смесью фаз, и m -я фаза характеризуется плотностью ρ^m и такими фильтрационными свойствами, как вязкость μ^m и коэффициент относительной фазовой проницаемости κ^m .

Поле давления P вычисляется путем решения краевой задачи:

$$-\operatorname{div} \left(\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m} \mathbf{K} \left(\operatorname{grad} (P + P_c^m) + (0, 0, \rho^m g)^T \right) \right) = 0, \quad (1)$$

$$P|_{\Gamma_{gr}^1} = P^{gr}, \quad (2)$$

$$P|_{\Gamma_w^1} = P^w, \quad (3)$$

$$\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m} \mathbf{K} \left(\operatorname{grad} (P + P_c^m) + (0, 0, \rho^m g)^T \right) \Big|_{\Gamma^2} \cdot \vec{n} = \sum_{m=1}^{NP} f^{m, \Gamma^2}. \quad (4)$$

Здесь NP – количество фаз, P_c^m – капиллярное давление, g – ускорение свободного падения; Γ_{gr}^1 – границы расчетной области Ω , на которых задано пластовое давление P^{gr} , Γ_w^1 – границы Ω , соответствующие зонам перфорации скважины w , на которых фиксируется давление P^w (при котором производится добыча или

нагнетание); Γ^2 – объединение границ Ω , где задан поток смеси $f^{\Gamma^2} = \sum_{m=1}^{NP} f^{m, \Gamma^2}$. Функция f^{Γ^2} не равна нулю на границах Γ_w^2 ($\Gamma_w^2 \subset \Gamma^2$), которые соответствуют активным (в рассматриваемом интервале времени Δt) зонам перфорации скважин. Остальные границы из Γ^2 являются непроницаемыми (на них $f^{\Gamma^2} = 0$).

Краевая задача (1)–(4) решается методом конечных элементов с непрерывными базисными функциями (CG FEM). Расчетная область Ω разбивается на конечные элементы Ω_e ($\cup_e \Omega_e = \Omega$) и искомая функция P ищется в виде линейной комбинации базисных функций ψ_j ($P = \sum_j p_j \psi_j$, p_j – искомые коэффициенты разложения P по базисным функциям). Для моделирования реальных месторождений рационально использовать шестигранные некомпактные конечноэлементные сетки. Основные аспекты их применения представлены в [14, 15].

Вариационная постановка для краевой задачи (1)–(4) имеет вид:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m} \mathbf{K} \text{grad} P \right) \cdot \text{grad} \Psi d\Omega = - \int_{\Omega} \left(\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m} \mathbf{K} \left(\text{grad} P_c^m + (0, 0, \rho^m g)^T \right) \right) \cdot \text{grad} \Psi d\Omega + \int_{\Gamma^2} f^{\Gamma^2} \Psi d\Gamma, \quad (5)$$

где Ψ – пробная функция из гильбертова пространства функций, имеющих суммируемые с квадратом первые производные. Для получения численного решения P заменяется своим разложением по базису $\{\psi_i\}$, а пробная функция Ψ поочередно заменяется на базисные функции ψ_i . В результате получается система конечноэлементных уравнений

$$\mathbf{G} \mathbf{p} = \mathbf{b}, \quad (6)$$

где \mathbf{p} – вектор искомых коэффициентов разложения поля P по базису $\{\psi_i\}$, и компоненты матрицы \mathbf{G} и вектора правой части \mathbf{b} определяются соотношениями

$$G_{ij} = \int_{\Omega} \left(\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m} \mathbf{K} \text{grad} \psi_j \right) \cdot \text{grad} \psi_i d\Omega, \quad (7)$$

$$b_i = - \int_{\Omega} \left(\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m} \mathbf{K} \text{grad} P_c^m \right) \cdot \text{grad} \psi_i d\Omega - \int_{\Omega} \left(\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m} \mathbf{K} (0, 0, \rho^m g)^T \right) \cdot \text{grad} \psi_i d\Omega + \int_{\Gamma^2} f^{\Gamma^2} \psi_i d\Gamma. \quad (8)$$

В системе (6) при учете краевых условий (4) функция f^{Γ^2} модифицирована таким образом, чтобы полученное давление на зонах перфорации скважин соответствовало давлению столба жидкости [16]. Главные краевые условия (2) и (3) учитываются стандартной модификацией конечноэлементной системы [17].

Чтобы получить более точную численную аппроксимацию поля давления обычно используют базисные функции высоких порядков. Если конечноэлементная сетка содержит элементы разных порядков, то удобно использовать базисные функции, построенные по иерархическому принципу (базис высокого порядка содержит все базисные функции более низкого порядка). Вид иерархических базисных функций и правила их построения изложены, например, в [17]. Элементы высокого порядка имеет смысл использовать в окрестности скважин, в зонах наибольшего градиента давления, тогда как в остальной области можно использовать функции первого порядка.

По полученным значениям давления вычисляются объемы смеси, перетекающие через грани Γ_i конечных элементов Ω_e за единицу времени:

$$Q_{\Gamma_i, \Omega_e} = - \int_{\Gamma_i} \left[\sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m} \mathbf{K} \left(\text{grad} (P + P_c^m) + (0, 0, \rho^m g)^T \right) \right] \cdot \vec{n}_{\Gamma_i, \Omega_e} d\Gamma, \quad (9)$$

где $\vec{n}_{\Gamma_i, \Omega_e}$ – внешняя (по отношению к Ω_e) нормаль к Γ_i . Формула (9) определяет не только значение потока смеси через грань Γ_i , но и его направление по отношению к конечному элементу Ω_e (при положительном Q_{Γ_i, Ω_e} смесь вытекает из Ω_e , при отрицательном – втекает в Ω_e).

Для внутренних граней Γ_i объем смеси, перетекающий за единицу времени из конечного элемента (ячейки) Ω_e в смежную с ним по грани Γ_i ячейку Ω_k ($\Gamma_i = \Omega_e \cap \Omega_k$), определяется как взвешенное среднее перетекающих через Γ_i объемов, вычисленных на конечных элементах Ω_e и Ω_k (с учетом противоположной направленности нормалей $\vec{n}_{\Gamma_i, \Omega_e}$ и $\vec{n}_{\Gamma_i, \Omega_k}$):

$$Q_{\Gamma_i} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_e} Q_{\Gamma_i, \Omega_e} - \frac{\lambda_e}{\lambda_k + \lambda_e} Q_{\Gamma_i, \Omega_k}. \quad (10)$$

Коэффициенты λ в (10) (λ_e для Ω_e и λ_k для Ω_k) определяются как $\lambda = \tilde{K} \sum_{m=1}^{NP} \frac{\kappa^m}{\mu^m}$, где $\tilde{K} = \vec{n}_{\Gamma_i}^T \mathbf{K} \vec{n}_{\Gamma_i}$, т.е. \tilde{K} определяется по значению тензора \mathbf{K} на соответствующем конечном элементе. Потоки Q_{Γ_i} далее будем называть численными потоками.

Отметим, что в данной работе для расчета поверхностных интегралов в (9) используется метод численного интегрирования Гаусса с девятью точками интегрирования для граней элементов первого порядка и с двадцатью пятью точками для граней элементов третьего порядка.

Поскольку основная идея рассматриваемой схемы моделирования заключается в том, что фильтруемые фазы перетекают между ячейками сетки, крайне важно, чтобы во всех конечных элементах выполнялся баланс потоков (т.е. втекающие в конечный элемент потоки фаз были сбалансированы с вытекающими с учетом источников). Известно, что МКЭ с базисными функциями из \mathbf{H}^1 (CG FEM) не гарантирует локальное сохранение фильтрующейся смеси [1, 2]. Поэтому предлагается использовать специальный метод балансировки потоков смеси.

1.2. Процедура балансировки потоков. Введем на гранях Γ_i такие корректирующие добавки объемов смеси δQ_{Γ_i} , которые обеспечат требуемый уровень баланса смеси в каждом конечном элементе и будут минимальны по абсолютной величине (последнее обеспечит близость скорректированных объемов смеси к численным, полученным по конечноэлементному решению задачи (1)–(4)).

Корректирующие добавки δQ_{Γ_i} могут быть найдены в результате минимизации следующего функционала:

$$\sum_{e=1}^{N^e} \tilde{\beta}_e \left(\sum_{i \in I_{\Omega_e}} \left(Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e} \cdot |Q_{\Gamma_i}| + Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e} \cdot \delta Q_{\Gamma_i} \right) \right)^2 + \sum_{i=1}^{N^f} \tilde{\alpha}_i (\delta Q_{\Gamma_i})^2 \rightarrow \min_{\delta Q_{\Gamma_i}}, \quad (11)$$

где e – номер конечного элемента, N^e и N^f – число конечных элементов и их граней соответственно, I_{Ω_e} – множество номеров граней Γ_i конечного элемента Ω_e , $Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e}$ – величина, определяющая направление потока смеси через грань Γ_i по отношению к конечному элементу, содержащему эту грань (значение “1” соответствует направлению внутрь элемента Ω_e , “-1” – направлению из Ω_e), а $\tilde{\beta}_e$, $\tilde{\alpha}_i$, – параметры регуляризации. Параметры регуляризации $\tilde{\beta}_e$ определяют остаточный небаланс перетекающих через Ω_e объемов смеси и выбираются таким образом, чтобы для каждого Ω_e обеспечивалось выполнение соотношения

$$\left(\sum_{i \in I_{\Omega_e}} \left(Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e} \cdot |Q_{\Gamma_i}| + Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e} \cdot \delta Q_{\Gamma_i} \right) \right) / \max_i (|Q_{\Gamma_i}|) < \delta Q^{crit}, \quad (12)$$

где δQ^{crit} – некоторое заданное значение, определяющее предельно допустимый небаланс перетекающих объемов смеси. Параметры же регуляризации $\tilde{\alpha}_i$ влияют на близость скорректированных объемов смеси к исходным.

Минимизация функционала (11) по δQ_{Γ_i} приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$(\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{A}}) \mathbf{q} = \mathbf{d}, \quad (13)$$

где \mathbf{q} – это вектор, составленный из искоемых значений δQ_{Γ_i} , $\tilde{\mathbf{A}}$ – диагональная матрица с элементами $\tilde{\alpha}_i$ на главной диагонали, а компоненты матрицы \mathbf{B} и вектора правой части \mathbf{d} определяются соотношениями

$$B_{ij} = \begin{cases} \sum_{k \in I_{\Gamma_i}} \tilde{\beta}_k, & i = j, \\ \tilde{\beta}_e \cdot Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e} \cdot Sg_{\Gamma_j}^{\Omega_e}, & i, j \in I_{\Omega_e}, i \neq j, e = 1 \dots N^e, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (14)$$

$$d_i = - \sum_{e=1}^{N^e} \left(\tilde{\beta}_e Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e} \cdot \left(\sum_{j \in I_{\Omega_e}} Sg_{\Gamma_j}^{\Omega_e} |Q_{\Gamma_i}| \right) \right).$$

В (14) I_{Γ_i} – множество конечных элементов, содержащих грань Γ_i . Если на Γ_i заданы известные значения объема добычи/нагнетания (4), то эти значения следует присвоить Q_{Γ_i} , а соответствующие строки/столбцы для δQ_{Γ_i} исключить из СЛАУ (13) (с соответствующей коррекцией вектора правой части \mathbf{d}).

Число неизвестных в системе уравнений (13) равно количеству граней в конечноэлементной сетке, а структура ее матрицы \mathbf{B} (и, соответственно, $\mathbf{B} + \tilde{\mathbf{A}}$) является такой же, как и в блоках матрицы, соответствующих векторным функциям Равьяра - Томаса при использовании mixed FEM [4, 5, 9].

Сбалансированный поток смеси \tilde{Q}_{Γ_i} , перетекающий через грань Γ_i , рассчитывается по формуле

$$\tilde{Q}_{\Gamma_i} = Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e} \cdot |Q_{\Gamma_i}| + Sg_{\Gamma_i}^{\Omega_e} \cdot \delta Q_{\Gamma_i}. \quad (15)$$

Алгоритм балансировки численных потоков имеет следующий вид.

Algorithm 1 Алгоритм процедуры балансировки

- 1: Массив $Beta[e]$ размерности N^e ($\tilde{\beta}_e$ – вес небаланса на элементе Ω_e) берется с предыдущего шага по времени (на первом шаге инициализирован некоторыми начальными значениями)
- 2: Массив $Alpha^{abs}[f]$ размерности N^f ($\tilde{\alpha}_i$ – параметр регуляризации, определяющий близость к численным потокам) берется с предыдущего шага по времени (на первом шаге инициализирован единицами)
- 3: **for** грани Γ_i **do**
- 4: $Alpha[\Gamma_i] \leftarrow Alpha^{abs}[\Gamma_i]/|Q_{\Gamma_i}|$
- 5: **end for**
- 6: M_1 :
- 7: Сборка матрицы и вектора правой части СЛАУ (13)
- 8: Применение главных краевых условий для $\delta Q_{\Gamma_i}|_{\Gamma_i \in \Gamma^2}$ ▷ исключение Гаусса
- 9: Нахождение вектора решения \mathbf{q}
- 10: $\chi^\beta \leftarrow true$ ▷ критерий останова итераций по β
- 11: **for** КЭ Ω_e **do**
- 12: Вычисление небаланса на элементе $\delta_{\Omega_e} \leftarrow \left(\sum_{i \in I_{\Omega_e}} \tilde{Q}_{\Gamma_i} \right) / \max_i |Q_{\Gamma_i}|$
- 13: **if** $\delta_{\Omega_e} > \delta Q^{crit}$ **then** ▷ δQ^{crit} выбирается достаточно малым
- 14: $Beta[e] \leftarrow c^\beta Beta[e]$ ▷ c^β коэффициент изменения β
- 15: $\chi^\beta \leftarrow false$
- 16: **end if**
- 17: **end for**
- 18: **if** $\chi^\beta = false$ **then**
- 19: **go to** M_1
- 20: **end if**
- 21: M_2 :
- 22: $\chi^\alpha \leftarrow true$ ▷ критерий останова итераций по α
- 23: **for** грани Γ_i **do**
- 24: **if** $|\delta Q_{\Gamma_i}| > c^{\alpha, crit} \max_i |Q_{\Gamma_i}|$ **then** ▷ $c^{\alpha, crit}$ выбирается достаточно малым
- 25: $Alpha^{abs}[\Gamma_i] \leftarrow c^\alpha Alpha^{abs}[\Gamma_i]$ ▷ c^α – коэффициент изменения $Alpha^{abs}$
- 26: $\chi^\alpha \leftarrow false$
- 27: **end if**
- 28: **end for**

```

29: if  $\chi^\alpha = false$  then
30:   for грани  $\Gamma_i$  do
31:      $Alpha[\Gamma_i] \leftarrow Alpha^{abs}[\Gamma_i] / |Q_{\Gamma_i}|$ 
32:   end for
33:   Сборка матрицы и вектора правой части СЛАУ (13)
34:   Применение главных краевых условий для  $\delta Q_{\Gamma_i} |_{\Gamma_i \in \Gamma^2}$ 
35:   Нахождение вектора решения  $\mathbf{q}$ 
36:   go to  $M_2$ 
37: end if

```

Отметим, что цикл по подбору значений $\tilde{\beta}_e$ (цикл M_1) зачастую выполняется только один раз в начале процесса моделирования, и найденные значения затем используются на всех последующих временных шагах. Цикл по подбору значений $\tilde{\alpha}_i$ (цикл M_2) также можно выполнять не на каждом шаге по времени, а только в случае существенных изменений в течении флюидов. Поэтому, когда для решения системы уравнений (13) используется прямой решатель (например, PARDISO [18]), отсутствует необходимость в факторизации матрицы этой системы на каждом временном шаге. В результате затраты вычислительного времени на балансировку составляют только несколько процентов от общих затрат, основной частью которых является расчет давления и перенос фаз.

Описание процедуры переноса фаз, в которой по сбалансированным потокам смеси \tilde{Q}_{Γ_i} вычисляются потоки отдельных фаз, осуществляется их перенос через грани Γ_i и вычисляется новый фазовый состав в конечных элементах, приведено в работах [14, 19].

1.3. Способы выполнения балансировки при задании давления на скважинах. При моделировании процессов нефтедобычи на зонах перфорации скважин задаются, как правило, объемы нагнетаемой воды или добываемой смеси. В этом случае потоки Q_{Γ_i} на соответствующих гранях известны, и в процедуре балансировки значения δQ_{Γ_i} фиксируются нулями. Но если в процессе нефтедобычи на каких-либо зонах перфорации рассчитанное давление выходит за свои предельные значения (нижнее или верхнее), то на соответствующих гранях задается предельное значение давления. В этом случае потоки на этих гранях неизвестны (вычисляются в процессе моделирования), и возможны два способа выполнения балансировки.

В первом способе на гранях зон перфорации, где задано давление, фиксируются значения потоков Q_{Γ_i} , вычисленных по формулам (9)–(10). Фактически, соответствующие значения δQ_{Γ_i} зануляются, и из СЛАУ (13) исключаются строки и столбцы для δQ_{Γ_i} .

Во втором способе на гранях зон перфорации, где задано давление, потоки не фиксируются (остаются “свободными”), т.е. из решения СЛАУ (13) мы получаем поправки δQ_{Γ_i} к численным потокам Q_{Γ_i} , вычисленным по формулам (9)–(10). Фактически, в этом способе потоки на зонах перфорации (с заданным давлением) корректируются с учетом потоков смеси через грани ячеек во всей расчетной области.

На численных экспериментах мы покажем, что при использовании первого способа (с фиксацией потоков) для получения решения требуемой точности даже при использовании элементов высокого порядка необходимо существенное дробление конечноэлементной сетки в окрестности скважин, что приводит к значительному росту вычислительных затрат. При использовании же второго способа (“свободные” потоки в балансировке) решение требуемой точности может быть получено при использовании элементов только первого порядка и на достаточно грубой сетке.

2. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Численное исследование проведем на задаче из сравнительного проекта SPE-10, рассмотренной в статье [20]. Модель нефтяного коллектора представляет собой куб с размерами $1200 \times 2200 \times 170$ фут³ ($365.76 \times 670.56 \times 51.816$ м³), в углах которого расположены четыре добывающие скважины P1–P4, а в центре находится нагнетательная скважина П. Зоны перфорации скважин расположены на всей глубине моделируемого пласта. Радиус скважин – 0.1524 м. Модель показана на рис. 1 в общем виде (слева) и с рассечением (справа).

На зонах перфорации добывающих скважин задано давление $P^w = 272$ атмосферы. Нагнетательная скважина закачивает 5000 баррелей воды в сутки. Внешние границы расчетной области – непроницаемые.

Исходная модель содержит 85 слоев и характеризуется высокой неоднородностью структурной проницаемости и пористости. Значения параметров задачи заданы на регулярной сетке, содержащей 1122000 ячеек ($60 \times 220 \times 85$ ячеек), и варьируются в диапазоне от $6.65 \cdot 10^{-4}$ до 20000 мД для проницаемости и в диапазоне от $1.4 \cdot 10^{-6}$ до 0.5 для пористости.

Для этой модели была выполнена предварительная обработка с укрупнением ячеек сетки по вертикали (upscaling), что позволило сократить число слоев до 17. Полученное распределение проницаемости по латерали показано на рис. 1. Период моделирования месторождения – 2000 суток.

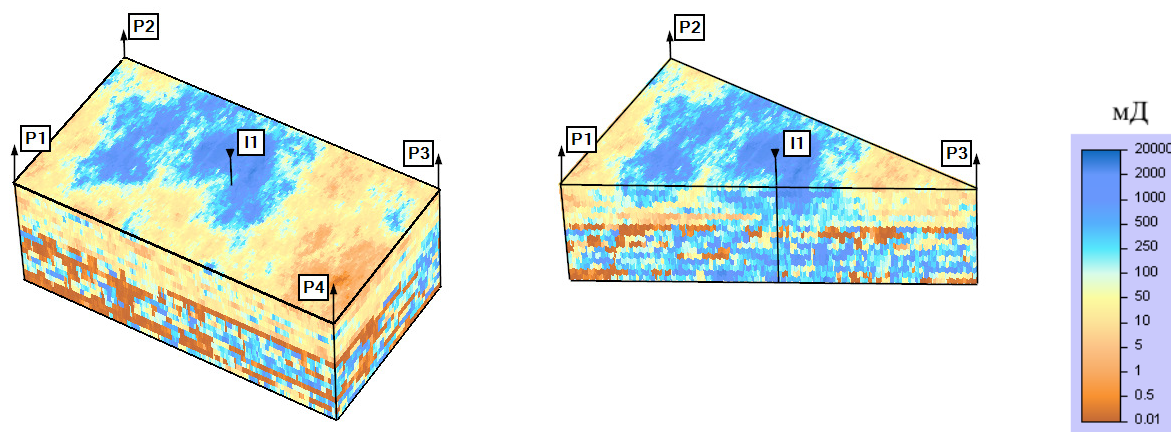


Рис. 1. Модель задачи SPE-10, цветом показано распределение структурной проницаемости по латерали
Fig. 1. Model of the SPE-10 problem, color shows the distribution of the absolute lateral permeability

При использовании первого способа выполнения балансировки (с фиксацией численных потоков) для получения приемлемых по точности значений перетекающих потоков смеси на гранях зон перфорации скважин, где задано давление, необходимо использовать достаточно подробные пространственные сетки. Для повышения точности расчета потока смеси, перетекающего через грани скважин P1-P4, дробление сетки будет проводиться, в первую очередь, вблизи скважин, так как именно в этих областях происходит наиболее резкое изменение давления. Размер ячеек сетки в остальной части расчетной области изменять не будем (достаточность подробности сетки в области вне окрестности скважин мы проверим позже отдельным заверочным расчетом). Дробление сетки около скважин осуществляется таким образом, чтобы каждая последующая дробленая сетка в области встраивания скважин была вложена в предыдущую. Схема такого “вложенного” дробления показана на рис. 2. Для краткости далее обозначим исходную сетку H , один раз вложенную – $H/2$, дважды вложенную – $H/4$ и т.д. Латеральный размер ячеек, содержащих грани зон перфорации скважин, для самой грубой сетки H составляет порядка 1 м. Повышение порядка базисных функций проводилось на элементах, находящихся в радиусе 10 м вокруг добывающих скважин.

На рис. 3 по данным дебита нефти для скважин P1 и P3 на вложенных сетках показана сходимость численных решений с фиксацией в балансировке численных потоков смеси, вычисленных по формулам (9)–(10) с использованием базисных функций третьего порядка в окрестности добывающих скважин.

В табл. 1 приведены значения средней погрешности дебита нефти (относительно полученного на сетке $H/16$ решения), а также общее время расчетов. Из представленных результатов видно, что для получения требуемой аппроксимации потоков потребовалось существенное дробление сетки в области скважин даже при использовании базисных функций третьего порядка.

Увеличение количества ячеек в области скважин и появление большого количества маленьких элементов в сетке (околоскважинные ячейки в сетке $H/8$ имеют размер порядка 0.15 м, что сопоставимо с радиусом скважин) привело к значительному росту вычислительных затрат. Для сокращения количества элементов построим сетку с сильным сгущением конечных элементов в области скважин. Используем такое же количество КЭ в области встраивания скважин, как и для сетки $H/2$, но выберем коэффициент сгущения ячеек таким образом, чтобы латеральный размер околоскважинных ячеек соответствовал ячейкам из сетки $H/8$. Построенную сетку обозначим $H/2^*$. Вид данной сетки вблизи скважины в сравнении с сеткой $H/8$ показан на рис. 4.

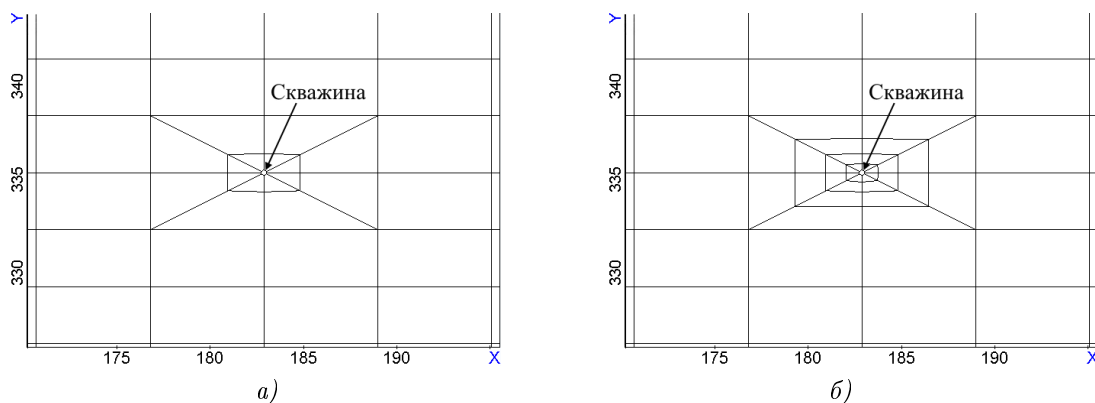


Рис. 2. Схема дробления сетки в окрестности скважины: а) Н; б) Н/2
 Fig. 2. Scheme of mesh refinement in the vicinity of the well: а) Н; б) Н/2

Таблица 1. Значения погрешностей дебита нефти и временные затраты расчетов с фиксацией потоков в балансировке на различных сетках

Table 1. Values of oil rate errors and computational time of calculations with fixed flows in the balancing procedure on different meshes

Сетка	Средняя погрешность, %		Общее время расчетов
	Скважина Р1	Скважина Р3	
Н	49.50	45.08	33 мин
Н/2	21.21	18.91	36 мин
Н/4	4.29	3.75	58 мин
Н/8	0.28	0.27	2 ч 9 мин

Средняя погрешность дебита нефти, полученного на сетке Н/2*, относительно расчета на сетке Н/16, составила 0.85% для скважины Р1 и 0.42% для скважины Р3. Время моделирования составило 1 час 27 минут.

Для подтверждения достаточной точности найденного решения были проведены заверочные расчеты на сетке, дробленной по латерали во всей расчетной области. В таком случае значения средних отклонений дебитов нефти для скважин Р1 и Р3 относительно решений на сетке Н/2* составили 0.46% и 0.37%, соответственно. Таким образом было подтверждено, что для получения приемлемой аппроксимации значений потоков на скважинах необходимо дробление сетки именно вблизи скважины.

Теперь рассмотрим второй вариант расчета, в котором численные потоки на скважине остаются “свободными”, т.е. корректируются в ходе процедуры балансировки. Расчет проведем на исходной грубой сетке Н (рис. 2а). Значения дебита нефти, полученные в результате расчета, показаны на рис. 5. Время расчета составило 29 минут.

Средняя погрешность дебитов нефти для расчета на сетке Н с использованием второго подхода (“свободные” потоки) относительно расчета на сетке Н/16 с использованием варианта с фиксацией потоков составляет 1.15% для скважины Р1 и 0.55% для скважины Р3.

Рассмотрим вычислительную эффективность обоих вариантов расчета. В табл. 2 приведен размер СЛАУ для расчета давления.

Временные затраты для моделирования на различных сетках с использованием двух рассмотренных вариантов расчета показаны в табл. 3. Из представленных результатов видно, что наиболее затратными процедурами являются расчет давления и процедура переноса фаз.

Заметим, что при использовании в окрестности скважин элементов первого порядка погрешность на грубой сетке Н для варианта с фиксацией потоков составляет 85% для скважины Р1 и 81% для скважины Р3. При этом на сетке Н/16 погрешность сокращается лишь до 25% и 22%, соответственно. Аналогичная погрешность остается и на сетке с оптимальной разрядкой Н/2* при использовании элементов только первого порядка. Дальнейшее же дробление сетки (даже с оптимальной разрядкой) влечет за собой быстрый рост вычислительных затрат на перенос фаз, которые с измельчением сетки в окрестности скважин стано-

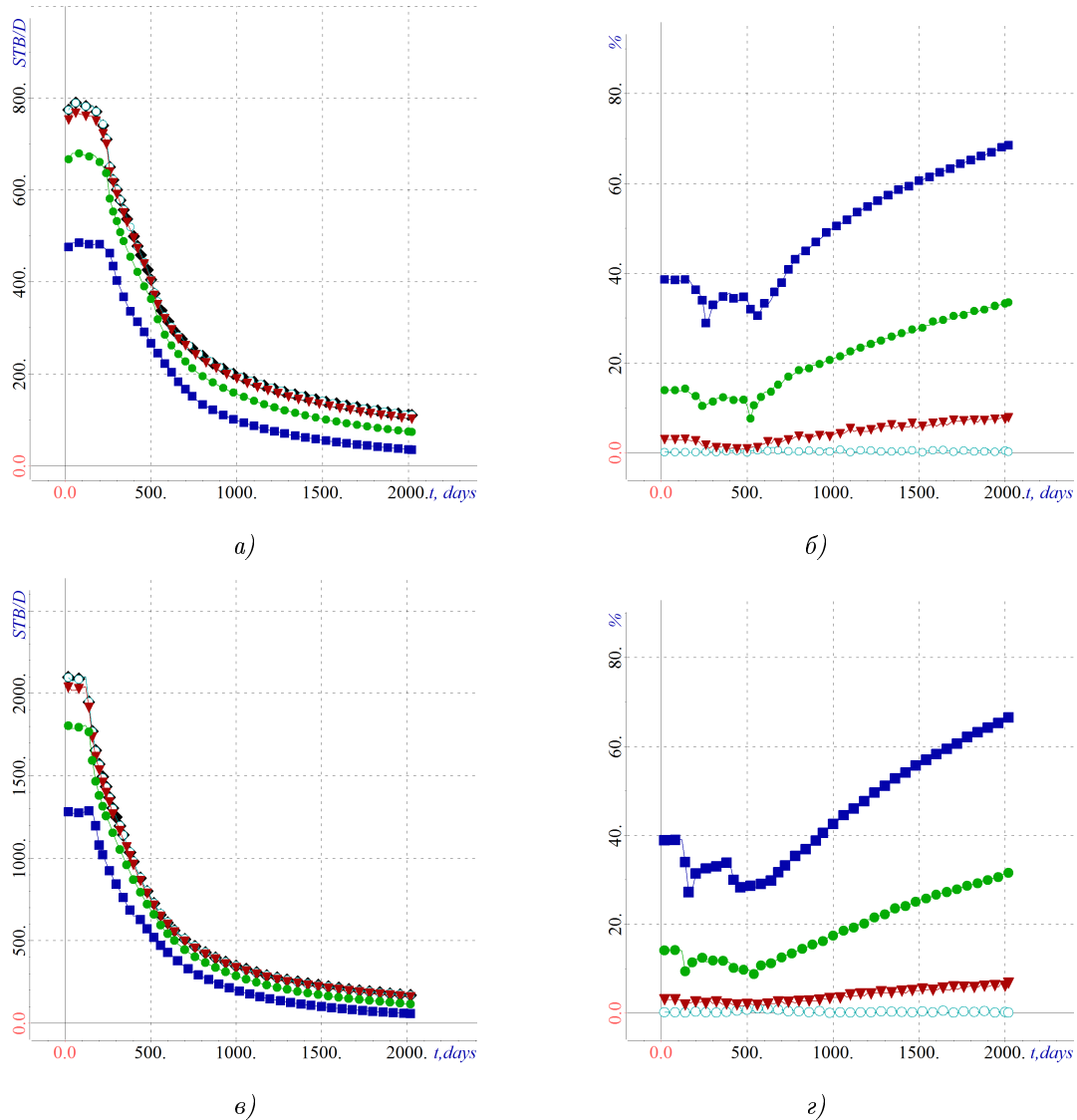


Рис. 3. Дебиты нефти, полученные в результате расчета на сетках H (синий), $H/2$ (зеленый), $H/4$ (красный), $H/8$ (голубой) и $H/16$ (черный): а) скважина P1; б) скважина P3. Отклонения от дебита нефти, полученного на сетке $H/16$: в) скважина P1; г) скважина P3
 Fig. 3. Oil rates obtained as a result of calculation on meshes H (dark blue), $H/2$ (green), $H/4$ (red), $H/8$ (blue) and $H/16$ (black): а) well P1; б) well P3. Deviations from the oil rate obtained on the mesh $H/16$: в) well P1; г) well P3

вятся основными (см., например, табл. 3). Поэтому гораздо более эффективным в этом способе является сочетание локальных дроблений сетки с использованием элементов высокого порядка.

Тем не менее, использование базисных функций третьего порядка в окрестности добывающих скважин приводит к существенному увеличению количества неизвестных в конечноэлементной СЛАУ при расчете давления, что делает использование подхода с фиксацией потоков довольно затратным. Для сетки $H/2^*$ с оптимальной разрядкой вблизи скважин затраты на вычисление давления невелики, но в целом значимого снижения вычислительных затрат не происходит, так как основное время процедуры переноса фаз занимает обработка малых околоскважинных ячеек.

Использование же подхода со “свободными” потоками позволяет получить аналогичные по качеству аппроксимации результаты на значительно более грубых сетках без применения базисных функций высоких порядков. Это позволяет кардинальным образом снижать вычислительные затраты. Так, общее время расчета для этого подхода на сетке H в 3 раза меньше, чем для варианта с фиксацией потоков на

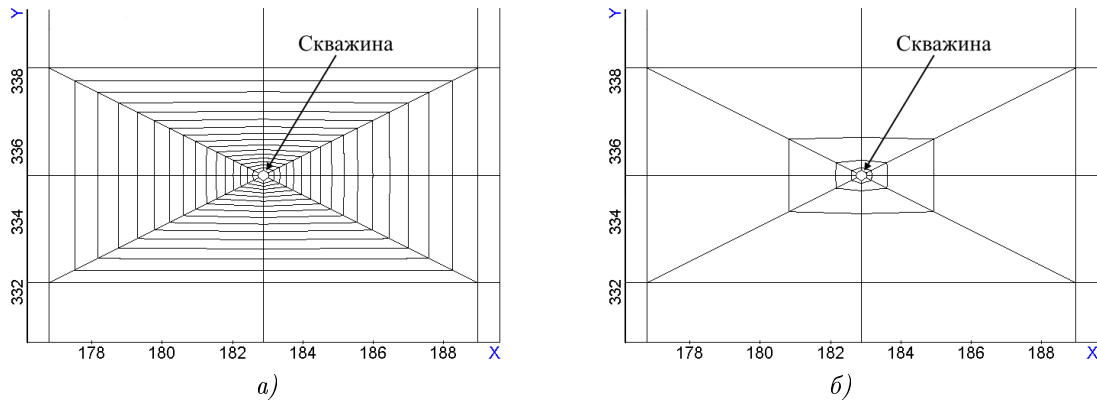


Рис. 4. Участок сечения сеток в окрестности скважины: а) $H/8$; б) $H/2^*$

Fig. 4. Section of the meshes in the vicinity of the well: а) $H/8$; б) $H/2^*$

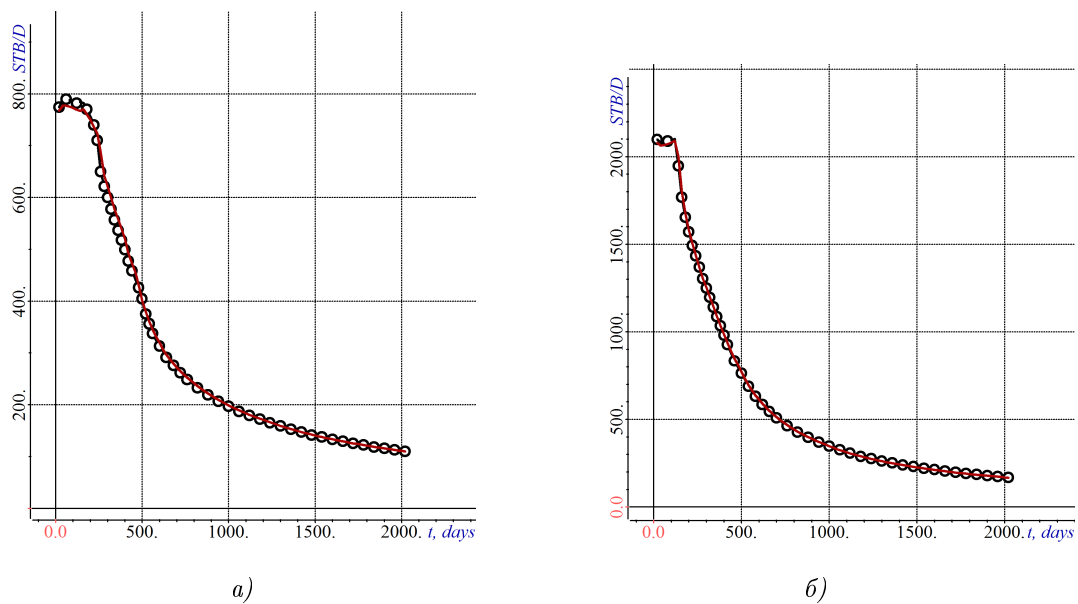


Рис. 5. Дебиты нефти; незакрашенные круги – значения, полученные в результате расчета с фиксацией потоков в балансировке на сетке $H/16$, красная кривая – значения, полученные на сетке H с использованием “свободных” потоков в балансировке: а) скважина P1; б) скважина P3

Fig. 5. Oil rates; open circles are obtained as a result of calculation on the mesh $H/16$ with fixed flows in the balancing procedure, the red curve is obtained on the mesh H using the “free” flows in the balancing procedure: а) well P1; б) well P3

сетке $H/2^*$, при этом среднее значение погрешности в обоих случаях оказалось примерно одинаковым и не превысило 1.2%.

Наконец, сравним полученные решения с результатами проекта SPE-10. На рис. 6 представлены графики дебита нефти для скважин P1 и P3 при использовании варианта расчета со “свободными” потоками в балансировке на сетке H , а также результаты участника проекта SPE-10 (Rohar). Принимая во внимание высокую сходимость описанных методов, полученные результаты можно считать корректными.

Таблица 2. Размер конечноэлементной СЛАУ (число степеней свободы) для расчета давления
Table 2. Size of finite element SLAE (number of degrees of freedom) for pressure calculation

Сетка	Базисные функции только первого порядка	Локальное повышение порядка в окрестности скважин
H	264600	310576
H/2	266040	340816
H/4	268920	401296
H/8	274680	522256
H/16	286200	764176
H/2*	266040	340816

Таблица 3. Временные затраты для расчетов на различных сетках
Table 3. Computational time of calculations on different meshes

	Балансировка с фиксацией потоков						Балансировка со “свободными” потоками
	H	H/2	H/4	H/8	H/16	H/2*	H
Расчет давления	21 мин	19 мин	27 мин	40 мин	1 ч 15 мин	19 мин	14 мин
Вычисление численных потоков	2 мин	2 мин	2 мин	3 мин	4 мин	2 мин	2 мин
Балансировка потоков	2 мин	2 мин	2 мин	2 мин	2 мин	2 мин	2 мин
Перенос фаз	6 мин	11 мин	24 мин	1 ч 21 мин	5 ч 38 мин	1 ч 3 мин	9 мин
Общее время расчета	33 мин	36 мин	58 мин	2 ч 9 мин	7 ч 2 мин	1 ч 27 мин	29 мин

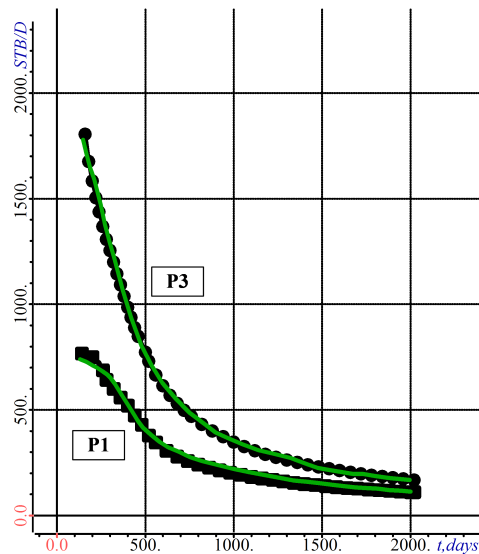


Рис. 6. Сравнение дебитов нефти скважин P1 и P3 на грубой сетке H, полученных в результате расчета со “свободными” потоками в балансировке (метки черного цвета), с решением одного из участников проекта SPE-10 (Roxar, кривые зеленого цвета)

Fig. 6. Comparison of oil rates for wells P1 and P3 on a coarse mesh H, obtained as a result of calculation with the “free” flows in the balancing procedure (black labels), with the solution of one of the participants in the SPE-10 project (Roxar, green curves)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача моделирования разработки нефтяных месторождений со скважинами, работающими при фиксированном давлении. Моделирование базируется на неявном методе расчета дав-

ления и явном переносе фаз с использованием потоков, вычисляемых по полю давления. Для обеспечения локальной консервативности потоков применяется метод балансировки.

Проведено сравнение двух способов выполнения балансировки. Первый способ основан на фиксации численных потоков на скважинах при выполнении балансировки, а второй – на коррекции этих потоков в процессе балансировки.

Проведенное исследование показало, что при использовании варианта с фиксацией потоков для обеспечения требуемого уровня аппроксимации необходимо использовать более мелкую сетку в окрестности скважин с конечными элементами, размеры которых должны быть сопоставимы с радиусом скважин, и базисные функции высоких порядков. Это приводит к существенному увеличению вычислительных затрат. Использование другого способа, в котором численные потоки корректируются в ходе процедуры балансировки, позволяет достичь требуемой точности решения при значительно меньших вычислительных затратах. Для задачи из сравнительного проекта SPE-10 время расчета при использовании второго подхода оказалось в три раза меньшим.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90049

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmid K.S., Geiger S., Sorbie K.S. Higher order FE-FV method on unstructured grids for transport and two-phase flow with variable viscosity in heterogeneous porous media // Journal of Computational Physics. Vol. 241, 2013. pp. 416–444. doi 10.1016/j.jcp.2012.12.017
2. Zhang R., Zhang L., Luo J., Yang Z., Xu M. Numerical simulation of water flooding in natural fractured reservoirs based on control volume finite element method // Journal of Petroleum Science and Engineering. Vol. 146, 2016. pp. 1211–1225. doi 10.1016/j.petrol.2016.08.024
3. Nick H.M., Matthäi S.K. Comparison of three FE-FV numerical schemes for single- and two-phase flow simulation of fractured porous media // Transport Porous Media. Vol. 90(2), 2011. pp. 421–444. doi 10.1007/s11242-011-9793-y
4. Abushaikh A.S., Blunt M.J., Gosselin O.R., Pain C.C., Jackson M.D. Interface control volume finite element method for modelling multi-phase fluid flow in highly heterogeneous and fractured reservoirs // Journal of Computational Physics. Vol. 298, 2015. pp. 41–61. doi 10.1016/j.jcp.2015.05.024
5. Moortgat J., Firoozabadi A. Higher-order compositional modeling of three-phase flow in 3D fractured porous media based on cross-flow equilibrium // Journal of Computational Physics. Vol. 250, 2013. pp. 425–445. doi 10.1016/j.jcp.2013.05.009
6. Moortgat J., Sun S., Firoozabadi A. Compositional modeling of three-phase flow with gravity using higher-order finite element methods // Water Resources Research Vol. 47(5), 2011. art. W05511. doi 10.1029/2010WR009801
7. Jackson M.D., Gomes J.L.M.A., Mostaghimi P., Percival J.R., Tollit B.S., Pavlidis D., Pain C.C., El-Sheikh A.H., Muggeridge A.H., Blunt M.J. Reservoir modeling for flow simulation using surfaces, adaptive unstructured meshes and control-volume-finite-element methods // Soc. Pet. Eng. - SPE Reserv. Simul. Symp. 2013, Society of Petroleum Engineers. 2013. pp. 774–792. doi 10.2118/163633-ms
8. Abd A., Abushaikh A. Velocity dependent up-winding scheme for node control volume finite element method for fluid flow in porous media // Scientific Reports. Vol. 10(1), 2020. art. 4427. doi 10.1038/s41598-020-61324-4
9. Amooie M.A., Moortgat J. Higher-order black-oil and compositional modeling of multiphase compressible flow in porous media // International Journal of Multiphase Flow. Vol. 105, 2018. pp. 45–59. doi 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.03.016
10. Odsæter L.H., Wheeler M.F., Kvamsdal T., Larson M.G. Postprocessing of non-conservative flux for compatibility with transport in heterogeneous media // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 315, 2017. pp. 799–830. doi 10.1016/J.CMA.2016.11.018
11. Larson M. G., Niklasson A. J. A conservative flux for the continuous Galerkin method based on discontinuous enrichment // Calcolo. Vol. 41(2), 2004. pp. 65–76.
12. Sun S., Wheeler M.F. Projections of velocity data for the compatibility with transport // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. Vol. 195(7-8), 2006. pp. 653–673. doi 10.1016/j.cma.2005.02.011
13. Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Grif A.M., Patrushev I.I. Flow Balancing in FEM Modelling of Multi-Phase Flow in Porous Media // 2018 14th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering, APEIE 2018 - Proceedings. Novosibirsk, 2018. pp. 205–211. doi 10.1109/APEIE.2018.8545457

14. *Persova M.G., Soloveichik Yu.G., Vagin D.V., Grif A.M., Kiselev D.S., Patrushev I.I., Nasybullin A.V., Ganiev B.G.* The design of high-viscosity oil reservoir model based on the inverse problem solution // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. Vol. 199, 2021. art. 108245. doi 10.1016/j.petrol.2020.108245
15. *Persova M.G., Soloveichik Y.G., Vagin D.V., Kiselev D.S., Koshkina Yu.I.* Finite element solution to 3-D airborne time-domain electromagnetic problems in complex geological media using non-conforming hexahedral meshes // *Journal of Applied Geophysics*. Vol. 172, 2020. art. 103911. doi 10.1016/j.jappgeo.2019.103911
16. *Овчинникова А.С., Персова М.Г.* Краевые условия на зонах перфорации при расчете поля давления в задачах многофазной фильтрации // *Наука. Технологии. Инновации* : сб. науч. тр. : в 9 ч., Новосибирск, 30 ноября -- 4 дек. 2020 г. 2020. 139-143.
17. *Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г.* Метод конечных элементов для скалярных и векторных задач. Новосибирск : НГТУ, 2007.
18. *Schenk O., Gärtner K.* Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO // *Future Generation Computer Systems*. Vol. 20(3), 2004. pp. 475-487. doi 10.1016/j.future.2003.07.011
19. *Soloveichik Yu.G., Persova M.G., Patrushev I.I., Glushkov S.A.* Numerical modeling of multi-phase flow in porous media for petroleum technology using polymers flood // 2018 14th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering, APEIE 2018 - Proceedings. Novosibirsk, 2018. pp. 301–306. doi 10.1109/APEIE.2018.8545132
20. *Christie M.A., Blunt M.J.* Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques // *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*. Vol. 4(04), 2001. pp. 308–316. doi 10.2118/72469-pa

Поступила в редакцию
10 ноября 2021

Finite element modeling of multiphase flows with their balancing while setting the working pressure on wells during oil production

A. S. Ovchinnikova¹, I. I. Patrushev,² A. M. Grif³, M. G. Persova⁴, Yu. G. Soloveichik⁵

¹ *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Post-graduate student, e-mail: ovchinnikova.2014@stud.nstu.ru*

² *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Post-graduate student, e-mail: patrushev@ami.nstu.ru*

³ *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Post-graduate student, e-mail: grif.2013@stud.nstu.ru*

⁴ *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: persova@ami.nstu.ru*

⁵ *Novosibirsk State Technical University, Faculty of Applied Mathematics and Computer Science; prospekt K. Marksa, 20, 630073, Novosibirsk, Russia; Dr. Sci., Professor, e-mail: soloveychik@ami.nstu.ru*

Received November 10, 2021

Abstract: Approaches to modeling multiphase flow in oil reservoir while setting the working pressure for the perforation zones of active wells are considered. The proposed numerical method is based on an implicit calculation of the pressure and an explicit recalculation of the phase saturations in the mesh cells at each time step. Description of the mathematical model, general computational scheme, finite element approximation of the pressure field are presented. To ensure conservation of the mixture flows, special method of balancing is used, and its algorithm is presented. The studies were carried out on the problem of the comparative project SPE-10, for which the calculation of flows for the perforated zones of wells with a set pressure was carried out using two approaches. The first one is based on fixing the numerical flows on the wells and requires refining the approximation of the pressure gradient in the vicinity of the wells with additional local grid refinement and the use of high-order finite elements with hierarchical basis functions. In the second approach, the flows in the wells are corrected during their balancing. The calculation results showed that the approach with the correction of flows in the balancing process requires significantly lower computational costs, while providing the required simulation accuracy.

Keywords: multiphase flow in porous media, numerical 3D modeling of hydrocarbon reservoirs, finite element method, local flows conservation

References

1. K.S. Schmid, S. Geiger, K.S. Sorbie, "Higher order FE-FV method on unstructured grids for transport and two-phase flow with variable viscosity in heterogeneous porous media," *Journal of Computational Physics*. **241**, 416–444 (2013). doi 10.1016/j.jcp.2012.12.017
2. R. han Zhang, L. hui Zhang, J. xin Luo, Z. dong Yang, M. yang Xu, "Numerical simulation of water flooding in natural fractured reservoirs based on control volume finite element method," *Journal of Petroleum Science and Engineering* **146**, 1211–1225 (2016). doi 10.1016/j.petrol.2016.08.024
3. H.M. Nick, S.K. Matthäi, "Comparison of three FE-FV numerical schemes for single- and two-phase flow simulation of fractured porous media," *Transport Porous Media*. **90**(2), 421–444 (2011). doi 10.1007/s11242-011-9793-y
4. A.S. Abushaikh, M.J. Blunt, O.R. Gosselin, C.C. Pain, M.D. Jackson, "Interface control volume finite element method for modelling multi-phase fluid flow in highly heterogeneous and fractured reservoirs," *Journal of Computational Physics*. **298**, 41–61 (2015). doi 10.1016/j.jcp.2015.05.024
5. J. Moortgat, A. Firoozabadi, "Higher-order compositional modeling of three-phase flow in 3D fractured

porous media based on cross-flow equilibrium,” *Journal of Computational Physics*. **250**, 425–445 (2013) doi 10.1016/j.jcp.2013.05.009

6. J. Moortgat, S. Sun, A. Firoozabadi, “Compositional modeling of three-phase flow with gravity using higher-order finite element methods,” *Water Resources Research* **47**(5), art. W05511 (2011) doi 10.1029/2010WR009801

7. M.D. Jackson, J.L.M.A. Gomes, P. Mostaghimi, J.R. Percival, B.S. Tollit, D. Pavlidis, C.C. Pain, A.H. El-Sheikh, A.H. Muggeridge, M.J. Blunt, “Reservoir modeling for flow simulation using surfaces, adaptive unstructured meshes and control-volume-finite-element methods,” in *Soc. Pet. Eng. - SPE Reserv. Simul. Symp. 2013, Society of Petroleum Engineers*. 774–792 (2013). doi 10.2118/163633-ms

8. A. Abd, A. Abushaikh, “Velocity dependent up-winding scheme for node control volume finite element method for fluid flow in porous media,” *Scientific Reports*. **10**(1), art. 4427 (2020). doi 10.1038/s41598-020-61324-4

9. M.A. Amooie, J. Moortgat, “Higher-order black-oil and compositional modeling of multiphase compressible flow in porous media,” *International Journal of Multiphase Flow*. **105**, 45–59 (2018). doi 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.03.016

10. L.H. Odsæter, M.F. Wheeler, T. Kvamsdal, M.G. Larson, “Postprocessing of non-conservative flux for compatibility with transport in heterogeneous media,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **315**, 799–830 (2017). doi 10.1016/J.CMA.2016.11.018

11. M. G. Larson, A. J. Niklasson, “A conservative flux for the continuous Galerkin method based on discontinuous enrichment,” *Calcolo*. **41**(2), 65–76 (2004).

12. S. Sun, M.F. Wheeler, “Projections of velocity data for the compatibility with transport,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **195**(7-8), 653–673 (2006). doi 10.1016/j.cma.2005.02.011

13. M.G. Persova, Yu.G. Soloveichik, A.M. Grif, I.I. Patrushev, “Flow Balancing in FEM Modelling of Multi-Phase Flow in Porous Media,” in *2018 14th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering, APEIE 2018 - Proceedings. Novosibirsk, 2018* 205–211. doi 10.1109/APEIE.2018.8545457

14. M.G. Persova, Yu.G. Soloveichik, D.V. Vagin, A.M. Grif, D.S. Kiselev, I.I. Patrushev, A.V. Nasybullin, B.G. Ganiev, “The design of high-viscosity oil reservoir model based on the inverse problem solution,” *Journal of Petroleum Science and Engineering*. **199**, art. 108245 (2021). doi 10.1016/j.petrol.2020.108245

15. M.G. Persova, Y.G. Soloveichik, D.V. Vagin, D.S. Kiselev, Yu.I. Koshkina, “Finite element solution to 3-D airborne time-domain electromagnetic problems in complex geological media using non-conforming hexahedral meshes,” *Journal of Applied Geophysics*. **172**, art. 103911 (2020). doi 10.1016/j.jappgeo.2019.103911

16. A.S. Ovchinnikova, M.G. Persova, “Boundary conditions on perforation zones in the calculation of the pressure field for the problems of multiphase flow,” in *Conf. Science. Technologies. Innovations : Novosibirsk, Russia, nov. 30 - dec. 4, 2020*, 139-143 [in Russian].

17. Yu.G. Soloveichik, M.E. Roiak, M.G. Persova *The finite element method for the solution of scalar and vector problems* (Novosibirsk, NSTU, 2007) [in Russian].

18. O. Schenk, K. Gärtner, “Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO,” *Future Generation Computer Systems*, **20**(3), 475-487 (2004). doi 10.1016/j.future.2003.07.011

19. M.G. Persova, Yu.G. Soloveichik, I.I. Patrushev, S.A. Glushkov, “Numerical modeling of multi-phase flow in porous media for petroleum technology using polymers flood,” in *2018 14th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering, APEIE 2018 - Proceedings. Novosibirsk, 2018*, 301–306. doi 10.1109/APEIE.2018.8545132

20. M.A. Christie, M.J. Blunt, “Tenth SPE comparative solution project: A comparison of upscaling techniques,” *SPE Reservoir Evaluation and Engineering*. **4**(04) 308–316 (2001). doi 10.2118/72469-pa