|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | | |
|  | | | |
| Кафедра прикладной математики | | | |
|  | | | |
|  | | | |
| Курсовой проект по курсу | | | |
| **«Метод конечных элементов»** | | | |
|  | | | |
|  | Группа | ПМ-13 |
|  |  |
| Студент(ка) | Голубь андрей дмитриевич |
|  |  |
|
|  |
| Новосибирск | | | |

2025

1. **Тема курсового проекта**

Разработка и программная реализация вычислительных схем для трехмерной задачи моделирования многофазной фильтрации в неоднородной области.

1. **Постановка задачи**

Расчетная область в поставленной задаче является пористой средой, характеризующейся структурной пористостью породы **Ф** и структурной проницаемостью породы . Пористость – доля пространства в объёме породы, доступного для движения смеси. Структурная проницаемость в общем случае тензор, характеризующий способность породы пропускать смесь в определенном направлении, измеряется в мкм2. В данной работе будем считать пористость и проницаемость постоянными на каждом прямоугольном фрагменте, определяющих расчетную область. Так же будем полагать, что в любой момент времени все пространство среды заполнено смесью.

Под фазой будем понимать жидкость, входящую в состав фильтруемой смеси и обладающую своими фильтрационными свойствами. К свойствам фазы относятся: плотность фазы (, кг/м3), динамическая вязкость (, Па\*с) и множитель структурной проницаемости (, зависит от насыщенности фазы в среде, безразмерная величина). Насыщенность фазы в среде характеризует долю фазы в смеси, распределенной по расчетной области.

1. **Теоретическая часть**

Для моделирования фильтрации производится расчет движения смеси в среде из-за перепада давления. Скорость фильтрации однофазного потока описывается законом Дарси:

()

где – скорость фильтрации, – давление, – количество фаз. Записав для фазы закон сохранения массы, получим уравнение:

()

где – отбор или закачка фазы в области.

С учетом предположения, что фаза несжимаемая (т.е. – постоянная величина), правую и левую часть уравнения можно разделить на плотность фазы. Тогда , т.к. насыщенность одной фазы равна 1. В итоге получаем эллиптическую краевую задачу для давления:

()

()

()

где 𝑆1 – удаленные границы, где сохраняется пластовое давление, и 𝑆2 – непроницаемые границы с нулевым потоком и границы скважин, через которые осуществляется отбор или закачка смеси.

Краевая задача (3)-(5) решается методом конечных элементов (триквадратичные базисные функции на параллелепипедах). По полученным значениям давления вычисляются объемы смеси, перетекающие через грани конечных элементов за единицу времени:

(6)

где – вектор внешней нормали элемента для этой грани Г.

Представим в виде

(7)

где – количество узлов, – -е значение вектора весов, полученных при решение конечноэлементной СЛАУ, – глобальные базисные функции для -го узла. С учетом найденного поля давления, для вычисления будем использовать следующее соотношение:

(8)

(9)

(10)

где , , – грани конечного элемента с неизменными координатами по , , соответственно, , , – шаг по , , на конечном конечном элементе соответственно, – веса разложения функции по локальным базисным функциям в элементе . – вектор производных по базисным функциям, где , , – значение на грани , , соответственно (0 или 1):

(11)

(12)

(13)

(14)

(15)

(16)

(17)

Для проверки работоспособности программы будем находить небаланс суммы всех элементов. Небаланс на элементе , если источник не нулевой, вычисляется следующим образом:

(18)

где – среднее значение функции на элементе .

1. **Исследования**
   1. **Расчет небаланса в однородной среде и неоднородной.**

Расчетную область зададим как куб от 1 до 6 по каждой из осей, с шагом 1.

При этом задана одна зона перфорации от 2 до 5 по и . Зададим необходимые краевые условия, т.е. на боковых гранях – первые краевые; на верхних () – нулевые вторые; на внутренних (у зоны перфорации) – вторые краевые. выберем равным 617.5 (среда однородная). Так как задана однородная область, то для функций, получающих точную аппроксимацию, суммарный небаланс должен быть равен 0.

Результаты приведены в таблице 1. Как видно из результатов, на полиноме третьей степени еще не возникает погрешность, хотя теоретически должна. Это объясняется выбором расчета δ только в узлах сетки, когда внутри конечных элементов уже будут неточные значения. Следовательно, небаланс еще близок к теоретическому, а для следующего полинома заметно возрастает и уже не равен 0.

Таблица 1 – Небаланс на разных функциях

|  |  |
| --- | --- |
| , вид заданной функции | , суммарный небаланс |
|  | 1.90E-10 |
|  | 9.71E-10 |
|  | 1.22E-08 |
|  | 4.69E+04 |

Изменим область для задания нелинейности. Подобласти будут распределены по : для первой подобласти от 1 до 4, для второй – от 4 до 7, и также изменяются от 1 до 7 но уже без разбиения. Задана одна зона перфорации от 5 до 6 по и от 3 до 4 по . Краевые условия аналогичны предыдущему исследованию, в первой подобласти равен 617.5, во второй – 1630.

Возьмем функцию . Результаты приведены в таблице 2. Из таблиц видно, что порядок уменьшения небаланса при дроблении сетки в два раза уменьшается тоже в два раза, что соответствует теории.

Таблица 2 – Порядок уменьшения небаланса

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Шаг по сетке | , суммарный небаланс |  |
| 1 | 13430.68826 | - |
| 0,5 | 7851.291824 | 1.71 |
| 0,25 | 4037.146362 | 1.94 |

* 1. **Сравнение с задачей, имеющей аналитическое решение**

Возьмем задачу, имеющую аналитическое решение. Расчетную область зададим кубом с ребром 210м (). Скважина радиусом расположена в центре расчетной области вдоль оси и закачивает 0,79 м3/сут. На границе задано пластовое давление . Коэффициент, связывающий поток смеси с , возьмем равным 500. Сравнивать будем давление вдоль линии от центра скважины до края расчетной области.

Аналитическое решение (в цилиндрических координатах) имеет вид:

(19)

Результаты приведены в таблице 3. Из таблиц видно, что при дроблении погрешность конечноэлементного решения падает в соответствии с порядком сходимости.

Таблица 3 – Погрешность численного решения относительно аналитического

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Сетка (следующая – вложенная к предыдущей) | , погрешность полученного решения | Порядок сходимости |
| 1 |  | - |
| 2 |  | 3,83 |
| 3 |  | 3,91 |

1. **Тексты основных модулей программ**

Текст реализованных модулей программы:

***Модуль генерации расчетной области***

}

#pragma endregion

***Модуль решателя СЛАУ***

#include <iostream>

}

***Модуль расчета давления***

#include <iostream>

}