

## Варианты теоретической части курсовой работы

### Задание № 1

1. Рассмотрим *алгоритм полиномиального взвешивания экспертных решений*, основанный на потенциальной функции

$$\Phi_p(u) = \left[ \sum_{k=1}^N (u_k)_+^p \right]^{2/p} = \|u_+\|_p^2,$$

где  $p \geq 2$ , а

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

обозначает срезку числа  $x$ . Выпишите выражение для веса  $w_k(t)$  эксперта  $k$  в момент времени  $t$ . Докажите следующее утверждение: *предположим, что функция потерь  $l(\cdot, \cdot)$  является выпуклой по первому аргументу и принимает значения из отрезка  $[0, 1]$ . Тогда для любых допустимых исходов  $u$  и  $t \geq 1$  общий регрет удовлетворяет неравенству*

$$R_{k,t} \leq \sqrt{t(p-1)N^{2/p}}.$$

Что можно сказать о среднем регрете при увеличении количества раундов  $t$ , если  $p \geq 2$ ? Определите (приближенное или точное) значение параметра  $p$ , минимизирующее полученную верхнюю оценку. Выпишите соответствующую оценку.

2. Рассмотрите вариант *алгоритма большинства* для случая, когда существует эксперт, про которого известно, что он делает не более  $k$  ошибок. Получите оценку числа ошибок такого алгоритма большинства.
3. Предположим, что вам надо предсказать последовательность  $Y_1, Y_2, \dots \in \{0, 1\}$  независимо и одинаково распределенных случайных величин с неизвестным распределением. Пусть  $\mathcal{D} = [0, 1]$ ,  $l(x, y) = |x - y|$ . Придумайте свой алгоритм для решения этой задачи. Оцените средний ожидаемый регрет своего алгоритма по сравнению с двумя экспертами, один из которых всегда выбирает исход 0, а другой — исход 1. Сравните результат со средним ожидаемым регретом алгоритма взвешенного большинства, который не обладает информацией о том, что исходы независимо и одинаково распределены. Можно ли с течением времени для алгоритма взвешенного большинства сделать средний ожидаемый регрет сколь угодно малым? Какой алгоритм в итоге оказался лучше?
4. Рассмотрим задачу принятия решений, длящуюся  $T$  раундов, в которой имеется только два возможных исхода. Пусть  $m$  обозначает общее количество ошибок допущенных лучшим экспертом, причем  $m \leq T/2$ . Докажите, что не существует детерминированного алгоритма, который бы совершал ошибок в количестве меньше, чем  $2m$ .

5. Рассмотрим алгоритм взвешивания экспертных решений, основанный на потенциальной функции

$$\Phi_p(u) = \left[ \sum_{k=1}^N (u_k)_+^{2p} \right]^{1/p},$$

где  $p > 1$ . Выпишите выражение для веса  $w_k(t)$  эксперта  $k$  в момент времени  $t$ . Докажите следующее утверждение: *предположим, что функция потерь  $l(\cdot, \cdot)$  является выпуклой по первому аргументу и принимает значения из отрезка  $[0, 1]$ . Тогда для любых допустимых исходов  $u$  и  $t \geq 1$  общий регрет удовлетворяет неравенству*

$$R_{k,t} \leq \sqrt{t(2p-1)N^{1/p}}.$$

Что можно сказать о среднем регрете при увеличении количества раундов  $t$ , если  $p > 1$ ? Определите (приближенное или точное) значение параметра  $p$ , минимизирующее полученную верхнюю оценку. Выпишите соответствующую оценку.

6. Рассмотрим аналог алгоритма полиномиального взвешивания экспертных решений, в котором потенциальная функция определяется выражением

$$\Phi_p(u) = \left[ \sum_{k=1}^N (u_k)_+^p \right]^{1/p} = \|u_+\|_p$$

для  $p \geq 2$ . Применим ли к такой потенциальной функции общий аппарат для алгоритмов взвешивания экспертных решений? Если да, то приведите оценку общего регрета, если же нет, то дайте обоснование.

7. Рассмотрите алгоритм экспоненциального взвешивания экспертных решений с произвольными исходными весами  $w_1(0), \dots, w_N(0) > 0$ . Докажите следующую оценку:

$$\hat{L}_t \leq \min_{k=1, \dots, N} \left( L_{k,t} - \frac{1}{\varepsilon} \ln w_k(0) \right) + \frac{\ln W_0}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon t}{8},$$

где  $W_0$  — сумма всех исходных весов.

8. Рассмотрим алгоритм взвешивания экспертных решений, основанный на потенциальной функции

$$\Phi(u) = \psi \left( \sum_{k=1}^N \varphi(u_k) \right).$$

Предположим, что выполнены все условия теоремы, доказанной на лекции, и, кроме того, величина  $C(r_t)$  ограничена для любого вектора  $r_t$ , а функция  $\psi(\varphi(x))$  является сильно выпуклой. Докажите, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t} \cdot \max_{k=1, \dots, N} R_{k,t} \right) = 0.$$

9. Рассмотрим задачу принятия решений с помощью экспертов, длящуюся  $T$  раундов, в которой потери принадлежат отрезку  $[0, a]$ ,  $a > 0$ . Придумайте алгоритм, для которого общие ожидаемые потери оцениваются снизу величиной

$$\max_{k=1, \dots, N} L_{k,T} - c\sqrt{T \log N},$$

где  $c$  — наилучшая константа, которую вы можете получить, независящая от числа раундов  $T$  и числа экспертов  $N$ .

10. Пусть  $Y = \{0, 1\}$ ,  $\mathcal{D} = [0, 1]$ ,  $l(x, y) = |x - y|$ . Докажите, что общие потери алгоритма экспоненциального взвешивания экспертных решений не меньше общих потерь лучшего эксперта.
11. Рассмотрим задачу принятия решений,  $\mathcal{D} = [0, 1]$ ,  $Y = \{0, 1\}$ ,  $l(x, y) = |x - y|$ . Покажите, что в этой ситуации алгоритм экспоненциального взвешивания на основе градиента делает те же самые предсказания, что и обычный алгоритм экспоненциального взвешивания экспертных решений.
12. Рассмотрите алгоритм экспоненциального взвешивания на основе градиента с переменным шагом обучения. Приведите исчерпывающие выкладки и получите оценку на кумулятивный регрет. Как следует выбирать параметр обучения на каждом шаге?

## Список литературы

- [1] *Вьюгин В.В.* Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования. 2013.
- [2] *Cesa-Bianchi N., Lugosi G.* Predictions, Learning, and Games. 2006.