Алгоритм экспоненциального взвешивания экспертных решений с переменным параметром. Взвешивание на основе градиента

В алгоритме экспоненциального взвешивания экспертных решений оптимальная оценка на кумулятивный регрет имеет вид

$$R_{k,t} \leq \frac{\ln N}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon t}{8} = O(t),$$

а выбор оптимального параметра ε возможен только при априорном знании количества раундов T. Вместе с тем особый интерес представляют алгоритмы, для которых справедлива оценка $R_{k,t} = o(t)$, т. е. средний относительно числа раундов кумулятивный регрет стремится к нулю:

$$\frac{R_{k,t}}{t} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Для решения этой проблемы параметр ε можно выбирать в зависимости от раунда t, т. е. $\varepsilon = \varepsilon_t$. В такой постановке предсказание *алгоритмом экспоненциального взвешивания экспертных решений с переменным параметром* ε_t осуществляется по формуле

$$\hat{p}_t = \frac{\sum_{k=1}^N e^{-\varepsilon_t L_{k,t-1}} f_{k,t}}{\sum_{k=1}^N e^{-\varepsilon_t L_{k,t-1}}}.$$

Специальный выбор параметра ε_t позволяет получить оценку вида $R_{k,t} = O\left(\sqrt{t}\right)$, а именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что функция потерь $l(\cdot,\cdot)$ является выпуклой по первому аргументу и принимает значения из отрезка $[0,1]$. Тогда для любой монотонно убывающей последовательности $\{\varepsilon_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ положительных чисел, для любого раунда $t \geq 1$, а также произвольных исходов $\{y_s\}_{s=1}^t$ кумулятивный регрет для алгоритма экспоненциального взвешивания с переменным параметром ε_t удовлетворяет неравенству*

$$R_{k,t} \leq \frac{\ln N}{\varepsilon_t} + \frac{1}{8}\sum_{s=1}^t \varepsilon_s.$$

В частности, при $\varepsilon_s = \sqrt{\frac{4\ln N}{s}}$ справедлива оценка

$$R_{k,t} \leq \sqrt{t \ln N}.$$

Доказательство. Из выпуклости функции потерь $l(\cdot,\cdot)$ по первому аргументу следует неравенство

$$l(\hat{p}_t, y_t) = l\left(\sum_{k=1}^N \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} f_{k,t}, y_t\right) \leq \sum_{k=1}^N \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} l(f_{k,t}, y_t).$$

Далее, воспользуемся неравенством Хёфдинга, сразу применяя к левой и правой части функцию $\xi \mapsto e^{-\varepsilon_t \xi}$, а затем еще и предыдущим неравенством:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^N \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} \exp\left[-\varepsilon_t \cdot l(f_{k,t}, y_t)\right] &\leq \exp\left[-\varepsilon_t \sum_{k=1}^N \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} l(f_{k,t}, y_t) + \frac{\varepsilon_t^2}{8}\right] \leq \\ &\leq \exp\left[-\varepsilon_t l(\hat{p}_t, y_t) + \frac{\varepsilon_t^2}{8}\right].\end{aligned}$$

Умножив левую и правую часть последнего неравенства на $e^{\varepsilon_t l(\hat{p}_t, y_t) - \varepsilon_t^2/8}$ в итоге получим

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} \exp\left[-\varepsilon_t \cdot l(f_{k,t}, y_t) - \frac{\varepsilon_t^2}{8} + \varepsilon_t l(\hat{p}_t, y_t)\right] \leq 1. \tag{1}$$

Введем вспомогательные величины

$$a_k(t-1) = \exp\left[-\varepsilon_{t-1} L_{k,t-1} + \varepsilon_{t-1}\left(\hat{L}_{t-1} - \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{t-1}\varepsilon_s\right)\right],$$

заметив, что

$$\frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} = \frac{\frac{1}{N}\left[a_k(t-1)\right]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}\left[a_j(t-1)\right]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}}}. \tag{2}$$

Используя принцип математической индукции покажем, что

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} a_j(t) \leq 1. \tag{3}$$

Очевидно, что $a_j(0) = 1$, поэтому при $t = 0$ неравенство (3) справедливо. Пусть теперь выполняется неравенство (3) при $t := t - 1$:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} a_j(t-1) \leq 1.$$

Поскольку $\varepsilon_{t-1} \geq \varepsilon_t > 0$, то функция $\xi \mapsto \xi^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}}$ является вогнутой, поэтому

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N}\left[a_j(t-1)\right]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}} \leq \left[\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{N}a_j(t-1)\right]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}} \leq 1.$$

Используя полученную оценку для синего выражения в (2), получим неравенство

$$\frac{w_k(t-1)}{W_{t-1}} \geq \frac{1}{N}\left[a_k(t-1)\right]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}},$$

которое вместе с (1) приводит к неравенству

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\left[a_k(t-1)\right]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}} \exp\left[-\varepsilon_t \cdot l(f_{k,t}, y_t) - \frac{\varepsilon_t^2}{8} + \varepsilon_t \cdot l(\hat{p}_t, y_t)\right] \leq 1.$$

Вместе с тем простая проверка показывает, что

$$a_k(t) = \left[a_k(t-1)\right]^{\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}} \exp\left[-\varepsilon_t \cdot l(f_{k,t}, y_t) - \frac{\varepsilon_t^2}{8} + \varepsilon_t \cdot l(\hat{p}_t, y_t)\right],$$

следовательно последнее неравенство и есть (3). Наконец, в силу неравенста (3) справедливы выкладки

$$1 \geq \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}a_k(t) \geq \frac{1}{N}a_k(t) = \frac{1}{N}\exp\left[-\varepsilon_t L_{k,t} + \varepsilon_t\left(\hat{L}_t - \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{t}\varepsilon_s\right)\right],$$

откуда после логарифмирования и упрощения получаем итоговое неравенство

$$\hat{L}_t - L_{k,t} \le \frac{\ln N}{\varepsilon_t} + \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{t} \varepsilon_s.$$

Осуществляя подстановку $\varepsilon_s = \sqrt{\frac{4\ln N}{s}}$ для $s = 1, \ldots, t$, получаем

$$R_{k,t} \le \frac{1}{2}\sqrt{t\ln N} + \frac{\sqrt{\ln N}}{4}\sum_{s=1}^{t}\frac{1}{\sqrt{s}} \le \frac{1}{2}\sqrt{t\ln N} + \frac{\sqrt{\ln N}}{4}\cdot 2\sqrt{t} \le \sqrt{t\ln N}. \qquad \square$$

Упражнение 1. *Докажите неравенство* $\sum_{s=1}^{t}\frac{1}{\sqrt{s}} \le 2\sqrt{t}$.

Рассмотрим версию *алгоритма экспоненциального взвешивания на основе градиента функции потерь*. Будем предполагать, что функция потерь $l(x, y)$ является не только выпуклой по первому аргументу, но и дифференцируемой, а ее градиент по x будем обозначать через $\nabla l(x, y)$. Предсказание алгоритмом экспоненциального взвешивания на основе градиента функции потерь осуществляется по формуле

$$\hat{p}_t = \frac{\sum_{k=1}^{N}\exp\left[-\varepsilon\sum_{s=1}^{t-1}\langle\nabla l(\hat{p}_s, y_s), f_{k,s}\rangle\right] f_{k,t}}{\sum_{j=1}^{N}\exp\left[-\varepsilon\sum_{s=1}^{t-1}\langle\nabla l(\hat{p}_s, y_s), f_{j,s}\rangle\right]}.$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть пространство решений $\mathcal{D}$ является выпуклым подмножеством единичного евклидова шара $\{u \in \mathbb{R}^d : \|u\|_2 \le 1\}$ и функция потерь $l(\cdot,\cdot)$ является выпуклой по первому аргументу, а ее градиент удовлетворяет неравенству*

$$\|\nabla l(u, y)\|_2 \le 1$$

для $u \in \mathcal{D}$, $y \in Y$. Тогда для любого раунда t и $\varepsilon > 0$, а также произвольных исходов $\{y_s\}_{s=1}^{t} \subset Y$ справедлива следующая оценка на куммулятивный регрет:

$$\hat{L}_t - L_{k,t} \le \frac{\ln N}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon t}{2}.$$

Доказательство. Веса в этом алгоритме определяются формулой

$$w_k(t-1) = \exp\left[-\varepsilon\sum_{s=1}^{t-1}\langle\nabla l(\hat{p}_s, y_s), f_{k,s}\rangle\right].$$

Введем новую функцию потерь по закону

$$l_*(u, y_s) = \langle\nabla l(\hat{p}_s, y_s), u\rangle, \quad u \in \mathcal{D}.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского $l_*(u, y_s) \in [-1, 1]$, поэтому чтобы применить результат об оптимальной оценке алгоритма экспоненциального взвешивания, введем еще одну функцию

$$l_\circ(u, y_s) = \frac{1 + l_*(u, y_s)}{2},$$

принимающую значения из отрезка $[0,1]$. Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t}\langle\hat{p}_s - f_{k,s}, \nabla l(\hat{p}_s, y_s)\rangle = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t} l_*(\hat{p}_s, y_s) - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{t} l_*(f_{k,s}, y_s) =$$
$$= \sum_{s=1}^{t} l_\circ(\hat{p}_s, y_s) - \sum_{s=1}^{t} l_\circ(f_{k,s}, y_s) \le \frac{\ln N}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon t}{4},$$

поскольку для функции потерь $l_\circ(\cdot,\cdot)$ обычный алгоритм экспоненциального взвешивания в нашем случае имеет параметр 2ε. Вспоминая, что функция $l(\cdot,\cdot)$ является выпуклой по первому аргументу, записываем неравенство

$$l(f_{k,s}, y_s) \ge l(\hat{p}_s, y_s) + \langle f_{k,s} - \hat{p}_s, \nabla l(\hat{p}_s, y_s)\rangle,$$

откуда

$$\langle\hat{p}_s - f_{k,s}, \nabla l(\hat{p}_s, y_s)\rangle \ge l(\hat{p}_s, y_s) - l(f_{k,s}, y_s).$$

Таким образом,

$$\hat{L}_t - L_{k,t} \le \sum_{s=1}^{t}\langle\hat{p}_s - f_{k,s}, \nabla l(\hat{p}_s, y_s)\rangle \le \frac{\ln N}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon t}{2}. \qquad \square$$