Варианты теоретической части курсовой работы

Задание № 1

1. Рассмотрим *алгоритм полиномиального взвешивания экспертных решений*, основанный на потенциальной функции

$$\Phi_p(u) = \left[\sum_{k=1}^{N} (u_i)_+^p\right]^{2/p} = \|u_+\|_p^2,$$

где $p \geq 2$, а

$$(x)_+ = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

обозначает срезку числа x. Выпишите выражение для веса $w_k(t)$ эксперта k в момент времени t. Докажите следующее утверждение: *предположим, что функция потерь $l(\cdot,\cdot)$ является выпуклой по первому аргументу и принимает значения из отрезка $[0,1]$. Тогда для любых допустимых исходов и $t \geq 1$ общий регрет удовлетворяет неравенству*

$$R_{k,t} \leq \sqrt{t(p-1)N^{2/p}}.$$

Что можно сказать о среднем регрете при увеличении количества раундов t, если $p \geq 2$? Определите (приближенное или точное) значение параметра p, минимизирующее полученную верхнюю оценку. Выпишите соответствующую оценку.

2. Рассмотрите вариант *алгоритма большинства* для случая, когда существует эксперт, про которого известно, что он делает не более k ошибок. Получите оценку числа ошибок такого алгоритма большинства.

3. Предположим, что вам надо предсказать последовательность $Y_1, Y_2, \ldots \in \{0,1\}$ независимо и одинаково распределенных случайных величин с неизвестным распределением. Пусть $\mathcal{D} = [0,1]$, $l(x,y) = |x-y|$. Придумайте свой алгоритм для решения этой задачи. Оцените средний ожидаемый регрет своего алгоритма по сравнению с двумя экспертами, один из которых всегда выбирает исход 0, а другой — исход 1. Сравните результат со средним ожидаемым регретом алгоритма взвешенного большинства, который не обладает информацией о том, что исходы независимо и одинаково распределены. Можно ли с течением времени для алгоритма взвешенного большинства сделать средний ожидаемый регрет сколь угодно малым? Какой алгоритм в итоге оказался лучше?

4. Рассмотрим задачу принятия решений, длящуюся T раундов, в которой имеется только два возможных исхода. Пусть m обозначает общее количество ошибок допущенных лучшим экспертом, причем $m \leq T/2$. Докажите, что не существует детерминированного алгоритма, который бы совершал ошибок в количестве меньшем, чем $2m$.

5. Рассмотрим алгоритм взвешивания экспертных решений, основанный на потенциальной функции
$$\Phi_p(u) = \left[\sum_{k=1}^{N} (u_i)_+^{2p}\right]^{1/p},$$
где $p > 1$. Выпишите выражение для веса $w_k(t)$ эксперта k в момент времени t. Докажите следующее утверждение: *предположим, что функция потерь $l(\cdot,\cdot)$ является выпуклой по первому аргументу и принимает значения из отрезка $[0,1]$. Тогда для любых допустимых исходов и $t \geq 1$ общий регрет удовлетворяет неравенству*
$$R_{k,t} \leq \sqrt{t(2p-1)N^{1/p}}.$$
Что можно сказать о среднем регрете при увеличении количества раундов t, если $p > 1$? Определите (приближенное или точное) значение параметра p, минимизирующее полученную верхнюю оценку. Выпишите соответствующую оценку.

6. Рассмотрим аналог алгоритма полиномиального взвешивания экспертных решений, в котором потенциальная функция определяется выражением
$$\Phi_p(u) = \left[\sum_{k=1}^{N} (u_i)_+^{p}\right]^{1/p} = \|u_+\|_p$$
для $p \geq 2$. Применим ли к такой потенциальной функции общий аппарат для алгоритмов взвешивания экспертных решений? Если да, то приведите оценку общего регрета, если же нет, то дайте обоснование.

7. Рассмотрите алгоритм экспоненциального взвешивания экспертных решений с произвольными исходными весами $w_1(0), \ldots, w_N(0) > 0$. Докажите следующую оценку:
$$\hat{L}_t \leq \min_{k=1,\ldots,N} \left(L_{k,t} - \frac{1}{\varepsilon} \ln w_k(0)\right) + \frac{\ln W_0}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon t}{8},$$
где W_0 — сумма всех исходных весов.

8. Рассмотрим алгоритм взвешивания экспертных решений, основанный на потенциальной функции
$$\Phi(u) = \psi\left(\sum_{k=1}^{N} \varphi(u_k)\right).$$
Предположим, что выполнены все условия теоремы, доказанной на лекции, и, кроме того, величина $C(r_t)$ ограничена для любого вектора r_t, а функция $\psi(\varphi(x))$ является сильно выпуклой. Докажите, что
$$\lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t} \cdot \max_{k=1,\ldots,N} R_{k,t}\right) = 0.$$

9. Рассмотрим задачу принятия решений с помощью экспертов, длящуюся T раундов, в которой потери принадлежат отрезку $[0,a]$, $a > 0$. Придумайте алгоритм, для которого общие ожидаемые потери оцениваются снизу величиной
$$\max_{k=1,\ldots,N} L_{k,T} - c\sqrt{T \log N},$$

где c — наилучшая константа, которую вы можете получить, независящая от числа раундов T и числа экспертов N.

10. Пусть $Y = \{0, 1\}$, $\mathcal{D} = [0, 1]$, $l(x, y) = |x - y|$. Докажите, что общие потери алгоритма экспоненциального взвешивания экспертных решений не меньше общих потерь лучшего эксперта.

11. Рассмотрим задачу принятия решений, $\mathcal{D} = [0, 1]$, $Y = \{0, 1\}$, $l(x, y) = |x - y|$. Покажите, что в этой ситуации алгоритм экспоненциального взвешивания на основе градиента делает те же самые предсказания, что и обычный алгоритм экспоненциального взвешивания экспертных решений.

Список литературы

[1] *Вьюгин В.В.* Математические основы теории машинного обучения и прогнозирования. 2013.

[2] *Cesa-Bianchi N., Lugosi G.* Predictions, Learning, and Games. 2006.