Stohastički Sistemi i Estimacija
Domaći zadatak 1

Mladen Bašić
2018/0111 OS

Vrednosti parametara za domaći zadatak: $P = 0, Q = 1, R = 3, S = 2$

1 Potrebno je simulirati eksperiment iz tabele I

Eksperiment bacanja novčića. Novčić je deblji od standardnog, tako da je verovatnoća da padne na ivicu 0.01 (ne dobije se ni pismo ni glava), a verovatnoća da se dobije glava prilikom bacanja je dva puta veća nego

---

a) Matematički opisati eksperiment, elementarne ishode, slučajnu promenljivu, analitički odrediti funkciju raspodele $F_X(k)$ funkciju mase verovatnoće $p_X(k) = P(X = k)$ matematičko očekivanje $m = E\{X\}$ i varijansu $\sigma^2 = E\{(X - m)^2\}$

Rešenje:
U eksperimentu postoje tri elementarna ishoda:

1. Novčić pada na glavu
2. Novčić pada na pismo
3. Novčić pada na stranu

Definišimo slučajnu promenljivu X tako $X = 0$ odgovara prvom elementarnom ishodu, $X = 1$ drugom, i $X = 2$ trećem.
U zadatku je dato da $P(X = 2) = 0.01$ i $P(X = 1) = 2P(X = 0)$. Ako je zbir svih verovatnoća 1 tada možemo izračunati zakon raspodele:

$$\sum_{k=0}^{2} P(X = k) = 1$$
$$3P(X = 0) = 0.99$$
$$P(X = 0) = 0.33$$
$$P(X = 1) = 0.66$$

Zakon raspodele:

$$\boxed{X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.33 & 0.66 & 0.01 \end{pmatrix}}$$

Funkcija mase verovatnoće ($p(k) = P(X = k)$:

$$\boxed{p(k) = \begin{cases} 0.33 & k = 0 \\ 0.66 & k = 1 \\ 0.01 & k = 2 \\ 0 & inace \end{cases}}$$

Funkcija raspodele ($F(k) = \sum_{-\infty}^{k} p(k)$)

$$\boxed{F(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 0.33 & k = 0 \\ 0.99 & k = 1 \\ 1 & 2 \leq k \end{cases}}$$

Matematičko očekivanje:

$$m = E\{X\} = \sum_{-\infty}^{\infty} kp(k)$$

$$\boxed{m = 0.68}$$

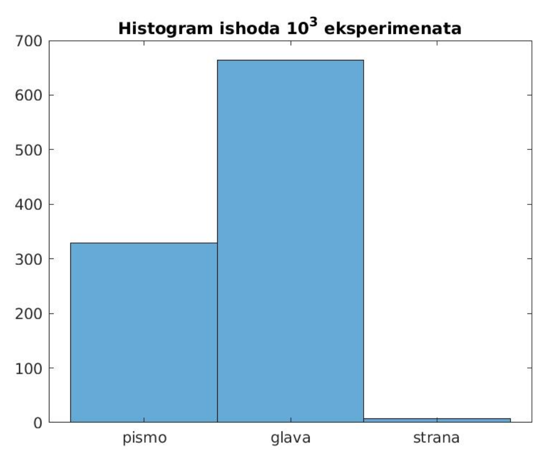
Varijansa:

$$\sigma^2 = E\{X^2\} - E\{X\}^2$$

$$\boxed{\sigma^2 = 0.2376}$$

b) Generisati $N = 10^3$ ishoda i prikazati njihov histogram

Rešenje:

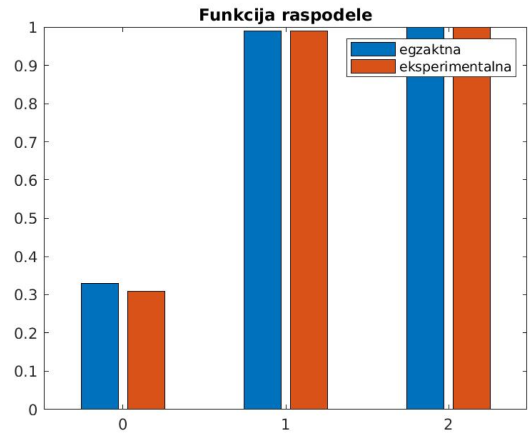


Slika 1: *Ishod* 10^3 *Eksperimenata*

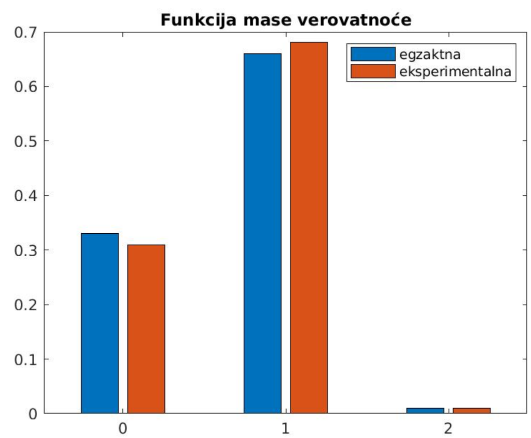
c) Na osnovu generisanih odabiraka eksperimentalno proceniti funkciju mase verovatnoće $\hat{p}_X(k)$ kao količnik broja povoljnih ishoda (X = k) i ukupnog broja ishoda. Takođe, odrediti i funkciju raspodele kao:

$$F_X(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} \hat{p}_X(n)$$

Rešenje:



Slika 2: *Grafik gustine verovatnoće*



Slika 3: *Grafik mase verovatnoće*

d) Na osnovu generisanih odabiraka eksperimentalno odrediti matematičko očekivanje ($\hat{m}$) i varijansu $\hat{\sigma}^2$ kao:

$$\hat{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \hat{m})^2$$

Rešenje:

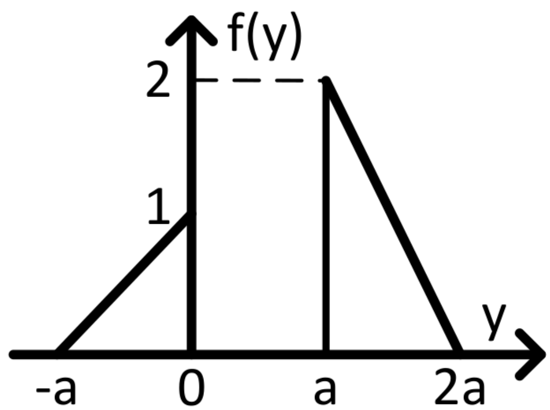
	Očekivanje	**Varijansa**
teorija	0.6800	0.2376
eksperiment	0.6980	0.2470

Kod za prvi zadatak:

```
% Zadatak 1
% Eksperiment: bacanje debelog n o v i a

% P(pismo)  = 0.33
% P(glava)  = 0.66
% P(strana) = 0.01

% Teorijske vrednosti
p = [0.33, 0.66, 0.01];
F = cumsum(p);
x_osa = [0, 1, 2];

%% Eksperiment
N = 1000;
eksperiment = rand(N, 1);
eksperiment(eksperiment <= 0.33) = 0;
eksperiment(0.33 < eksperiment & eksperiment <= 0.99) = 1;
eksperiment(0.99 < eksperiment & eksperiment < 1) = 2;

pismo  = sum(eksperiment == 0) / N;
glava  = sum(eksperiment == 1) / N;
strana = sum(eksperiment == 2) / N;

p_eksp = [pismo, glava, strana];
F_eksp = cumsum(p_eksp);

%% Plot
f0 = figure;
histogram(eksperiment)
xticks([0 1 2])
xticklabels({'pismo'; 'glava'; 'strana'})
title('Histogram ishoda 10^3 eksperimenata')
saveas(f0, 'z1_ishod eksperimenta.jpg')

f1 = figure;
bar(x_osa, [p; p_eksp]');
title('Funkcija mase verovatno e')
legend('egzaktna', 'eksperimentalna')
saveas(f1, 'z1_masa_verovatnoce.jpg')

f2 = figure;
bar(x_osa, [F; F_eksp]')
```

```
title('Funkcija raspodele')
legend('egzaktna', 'eksperimentalna')
saveas(f2, 'z1_gustina_raspodele.jpg')

%% Numericke karakteristike
m = sum(eksperiment) / N
v = sum((eksperiment - m) .^ 2) / (N - 1)
```

2 Potrebno je generisati odbirke slučajne promenljive Y čija je funkcija gustine verovatnoće data u tabeli II



Slika 4: *Funkcija gustine verovatnoće promenljive Y*

---

a) Izračunati vrednost realne konstante a

Rešenje:

Da bi data funkcija bila funkcija gustine verovatnoće, onda mora da ispunjava uslov $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Ovaj uslov se može tumačiti i na sledeći način: površina ispod grafika funkcije $f(Y)$ mora biti jednaka 1. Ova površina se sastoji od dva trougla pa se može postaviti uslov:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (2a - a) \cdot 2 = 1$$

$$\boxed{a = \frac{2}{3}}$$

b) Odrediti funkciju $Y = g(X)$ kojom se postiže željena raspodela slučajne promenljive Y. Ovde je X unofrmno raspodeljena promenljiva na intervalu $[0, 1]$.

Rešenje:

Funkcija $f(y)$ se sastoji od dva linerna segmenta, jedan u intervalu $[-\frac{2}{3}, 0]$ i drugi u intervalu $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$, a van ovih segmenata $f(y) = 0$. Koeficijente linearnih segmenata možemo iztačunati iz datih vrednosti sa grafika funkcije.

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y + 1 & -\frac{2}{3} < y < 0 \\ -3y + 4 & \frac{2}{3} < y < \frac{4}{3} \\ 0 & inace \end{cases}$$

Funkcija raspodele promenljive Y se može izračunati kao $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt$.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < -\frac{2}{3} \\ \int_{-\frac{2}{3}}^{y} (\frac{3}{2}t + 1)dt = \frac{3}{4}y^2 + y + \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} < y < 0 \\ \int_{-\frac{2}{3}}^{0} (\frac{3}{2}t + 1)dt = \frac{1}{3} & 0 < y < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} (-3t + 4)dt = -\frac{3}{2}y^2 + 4y - \frac{5}{3} & \frac{2}{3} < y < \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} < y \end{cases}$$

Kako je X uniformno raspodeljena slučajna promenljiva, za njenu funkciju raspodele važi:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \\ x & 0 < x < 1\ 0 \\ 1 & 1 < x \end{cases}$$

Poštno je $Y = g(X)$, za funkciju raspodele Y važi:

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(g(X) < y) = P(X < g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

Ako se izjednače obe definicije funkcije $F_Y(y)$:

1. Prvi deo Y:

$$\frac{3}{4}y^2 + y + \frac{1}{3} = x$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{x}$$
$$y = \frac{2(\sqrt{3x} - 1}{3}$$

Postavimo uslove za opseg u kome je y:

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{2(\sqrt{3x} - 1}{3} \leq 0$$
$$0 \leq \sqrt{3x} \leq 1$$
$$0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

2. Drugi deo Y:

$$-\frac{3}{2}y^2 + 4y - \frac{5}{3} = x$$
$$1 - x = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}y - \frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2$$

$$y = \frac{-\sqrt{6-6x}+4}{3}$$

Postavimo uslove za opseg u kome je y:

$$\frac{2}{3} \leq \frac{-\sqrt{6-6x}+4}{3} \leq \frac{4}{3}$$

$$-2 \leq -\sqrt{6-6x} \leq 0$$

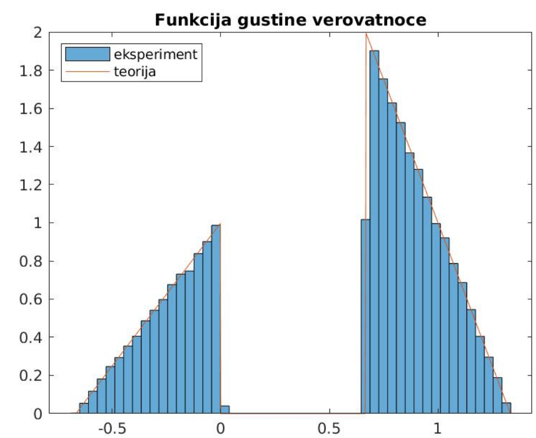
$$\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

Zaključujemo da je $Y = g(X)$ gde je funkcija g:

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \frac{2(\sqrt{3x}-1}{3} & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{-\sqrt{6-6x}+4}{3} & \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}}$$

c) Generisati $N = 10^5$ odabiraka slučajne promenljive Y i na osnovu njih proceniti odgovarajuću funkciju gustine verovatnoće koristenći histogram. Na istom grafiku prikazati i analitičku funkciju gustine verovatnoće datu u tabeli II

Rešenje:



Slika 5: *Simulacija za 10^5 odabiraka*

d) Analitički odrediti matematičko očekivanje i varijansu slučajne promenljive Y i uporediti ih sa eksperimentalno procenjenom vrednošću ovih parametara

Rešenje:

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} t f_Y(t)dt = \int_{-\frac{2}{3}}^{0} t(\frac{3}{2}t+1)dt + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} t(-3t+4)dt = -\frac{2}{27} + \frac{16}{27} = \frac{14}{27} = 0.5185$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_Y(t)dt = \int_{-\frac{2}{3}}^{0} t^2(\frac{3}{2}t^2+1)dt + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}} t^2(-3t+4)dt = \frac{2}{81} + \frac{44}{81} = \frac{46}{81} = 0.5679$$

$$VarY = E(Y^2) - (EY)^2 = 0.2991$$

	Očekivanje	Varijansa
teorija	0.5185	0.2991
eksperiment	0.5196	0.2984

Kod za drugi zadatak:

```
%% Zadatak 2
x_osa   = linspace(-2/3, 4/3, 1000);
teorija = linspace(-2/3, 4/3, 1000);

%% Teoretska raspodela
teorija(x_osa < 0) = (3/2) * teorija(x_osa < 0) + 1;
teorija(x_osa > 0 & x_osa < 2/3) = 0;
teorija(2/3 < x_osa) = -3 * teorija(2/3 < x_osa) + 4;

%% Eksperiment
N = 1e5;
eksperiment = rand(N, 1);

eksperiment(eksperiment < 1/3) = (sqrt(3 * eksperiment(eksperiment < 1/3)) - 1) * 2/3;
eksperiment(eksperiment >= 1/3) = (4 - sqrt(6 - 6 * eksperiment(eksperiment >= 1/3))) / 3;

%% Plot
f1 = figure;
histogram(eksperiment, 50, 'Normalization', 'pdf')
hold on
plot(x_osa, teorija)
legend('eksperiment', 'teorija', 'Location', 'NorthWest')
title('Funkcija gustine verovatnoce')
saveas(f1, 'z2_plot.jpg')

%% Numericke karakteristike
m = sum(eksperiment) / N
v = sum((eksperiment - m) .^ 2) / (N - 1)
```

3 Generisati $N = 10^5$ odbiraka dvodimenzionalnog normalno raspodeljenog slučajnog vektora $\mathbf{X} = [X_1\ X_2]^T$ sa nežavisnim komponentama koje imaju nulto očekivanje i varijanse σ_1^2 i σ_2^2 date u tabeli III

$$\sigma_1^2 = 0.01$$

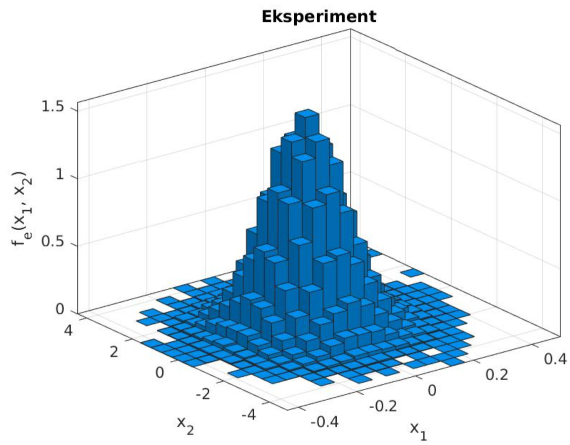
$$\sigma_2^2 = 1$$

$$m_Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

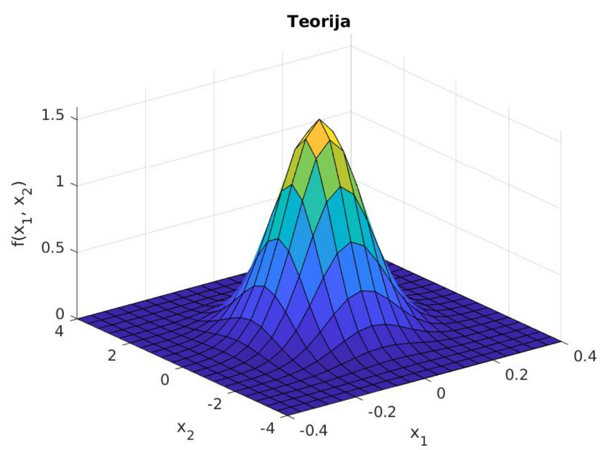
$$R_Y = \begin{bmatrix} 4 & -3.6 \\ -3.6 & 9 \end{bmatrix}$$

a) **Izdeliti ravan (x_1, x_2) na 20 x 20 elementarnih površina i eksperimentalno proceniti vrednosti funkcije gustine verovatnoće $\hat{f}(x_1, x_2)$ u tačkama koje odgovaraju centrima ovih površina. Skicirati jedne ispod drugih eksperimentalno određenu i analitički dobijenu funkciju gustine verovatnoće**

Rešenje:



Slika 6: *Eksperimentalno dobijena raspodela*



Slika 7: *Teorijski dobijena raspodela*

b) Analitički odrediti matricu A i vektor b tako da slučajan vektor Y = AX+b ima očekivanje m_Y i kovarijacionu matricu R_Y iz tabele IV. Odrediti koeficijent korelacije ρ između komponenti slučajnog vektora Y. Usvojiti da matrica A ima trougaonu formu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

Rešenje:
Raspisivanjem matrične jednačine za vektor **Y**:

$$Y_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1$$

$$Y_2 = a_{22}X_2 + b_2$$

Znajući očekivanja obe slučajne promenljive iz vektora m_Y sledi:

$$E\{Y_1\} = a_{11}E\{X_1\} + a_{12}E\{X_2\} + b_1 = 0$$

$$\boxed{b_1 = 0}$$

$$E\{Y_2\} = a_{22}E\{X_2\} + b_2 = 10$$

$$\boxed{b_2 = 10}$$

Poznato je da kovariaciona matrica, za slučajan vektor oblika $\mathbf{Y} = [Y_1\, Y_2]^T$ ima oblik

$$R_Y = \begin{bmatrix} var(Y_1) & cov(Y_1, Y_2) \\ cov(Y_2, Y_1) & var(Y_2) \end{bmatrix}$$

Možemo iz postavke zaključiti da:

$$var(Y_1) = 4$$

$$var(Y_2) = 9$$

$$cov(Y_1, Y_2) = cov(Y_2, Y_1) = -3.6$$

Koeficijent korelacije je:

$$\rho = \frac{cov(Y_1, Y_2}{\sqrt{var(Y_1)var(Y_2)}}$$

$$\boxed{\rho = -0.6}$$

Predstavimo varijanse promenljivih Y_1 i Y_2, i primenimo teoremu $var(aX) = a^2 var(X)$:

$$var(Y_1) = a_{11}^2 var(X_1) + a_{12}^2 var(X_2) + var(b_1)$$

$$4 = 0.01a_{11}^2 + a_{12}^2$$

$$var(Y_2) = a_{22}^2 var(X_2) + var(b_2)$$

$$9 = a_{22}^2$$

Kovarijansa dve slučajne promenljive se može napisati i u obliku:

$$cov(Y_1, Y_2) = E\{Y_1 Y_2\} - E\{Y_1\}E\{Y_2\} = E\{(a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1)(a_{22}X_2 + b_2)\} - E\{a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_1\}E\{a_{22}X_2 + b_2\}$$

$$cov(Y_1, Y_2) = a_{12}a_{22}Var(X_2)$$

$$a_{12}a_{22} = -3.6$$

Rešavanjem sistema jednačina:

$$0.01a_{11}^2 + a_{12}^2 = 4$$

$$a_{22}^2 = 9$$

$$a_{12}a_{22} = -3.6$$

Dobijamo:

$$\boxed{a_1 1 = \pm 16 \wedge a_{12} = \mp 1.2 \wedge a_{22} = \pm 3}$$

Analitičke vrednosti matrice A i vektora **b**:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} \pm 16 & \mp 1.2 \\ 0 & \pm 3 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}}$$

c) Na osnovu generisanih odabiraka slučajnog vektora X i dobijenih vrednosti A i b iz prethodne tačke generisati odbirke slučajnog vektora Y i eksperimentalno proveriti da li vektor očekivanja i kovarijaciona matrica imaju tražene vrednosti

Rešenje:

Vrednosti simulacije za R_Y i m_Y su:

$$\boxed{m_Y = \begin{bmatrix} 0.0053 \\ 9.9837 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{R_Y = \begin{bmatrix} 4.0208 & -3.6145 \\ -3.6145 & 9.0952 \end{bmatrix}}$$

d) Ponoviti postupak iz tačke b) za iste vrednosti $m_{Y_1}, m_{Y_2}, \sigma_{Y_1}, \sigma_{Y_2}$, ali za promenjen koeficijent korelacije: $\rho = 0$ i $\rho = 0.8$ Generisati odbirke odgovarajućih slučajnih vektora. Predstaviti na tri grafika odbirke sva tri slučajna vektora (za ρ koje odgovara vektoru Y, zatim za $\rho = 0$ i $\rho = 0.8$)

Rešenje: Izrazimo kovarijansu preko koeficijenta korelacije:

$$cov(Y_1, Y_2) = \rho\sqrt{var(Y_1)var(Y_2)}$$

Ako je $\rho = 0$ tada je i $cov(Y1, Y2) = 0$. Rešavanjem istih jednačina kao u tački pod **b)** samo za promenjenu jednačinu $a_{12}a_{22} = 0$ dobijamo vrednosti za A_1:

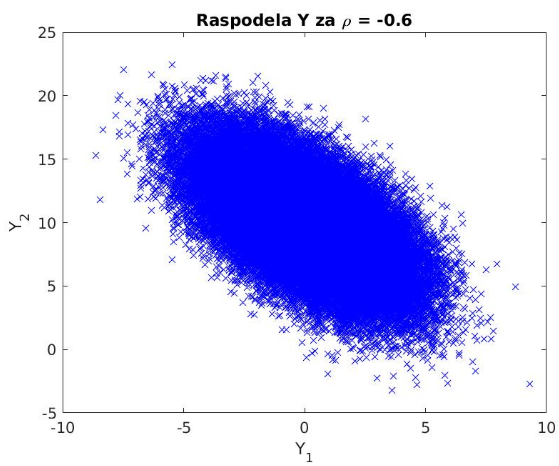
$$\boxed{A_1 = \begin{bmatrix} \pm 20 & 0 \\ 0 & \pm 3 \end{bmatrix}}$$

Ako je $\rho = 0.8$ tada je i $cov(Y1, Y2) = 4.8$. Rešavanjem istih jednačina kao u tački pod **b)** samo za promenjenu jednačinu $a_{12}a_{22} = 4.8$ dobijamo vrednosti za A_2:

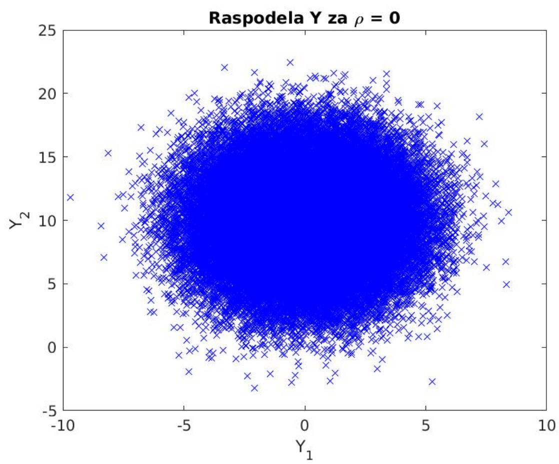
$$\boxed{A_2 = \begin{bmatrix} \pm 12 & \pm 1.6 \\ 0 & \pm 3 \end{bmatrix}}$$

Vektor m_Y ostaje nepromenjen zato što promena koeficijenta korelacije ne menja očekivanje.

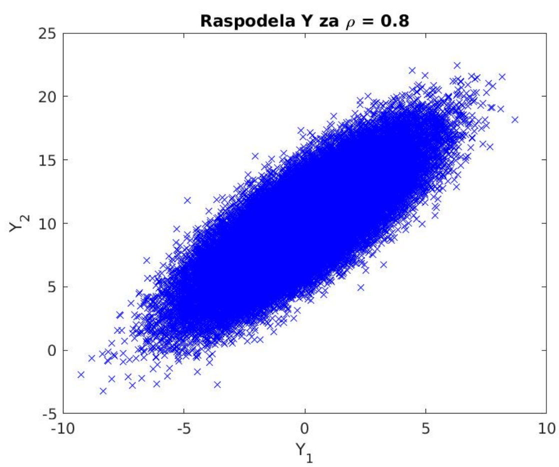
Rezultati simulacije:



Slika 8: *Eksperimentalno raspodela za* $\rho = -0.6$



Slika 9: *Eksperimentalno raspodela za* $\rho = 0$



Slika 10: *Eksperimentalno raspodela za* $\rho = 0.8$

Kod za treći zadatak:

```
%% Zadatak 3
sigma1 = 0.1;
sigma2 = 1;

%% Teorija
x1 = -0.4:0.04:0.4;
x2 = -4:0.4:4;

[X1, X2] = meshgrid(x1, x2);
F = 1/(2*pi*sigma1*sigma2) *  ...
        exp(-(X1.^2)/(2*(sigma1^2)) - (X2.^2)/(2*(sigma2^2)));

%% Eksperiment
N = 1e5;
eksperiment = randn(N, 2);
eksperiment(:, 1) = eksperiment(:, 1) .* sigma1;
eksperiment(:, 2) = eksperiment(:, 2) .* sigma2;
```

```
%% Plot
f0 = figure;
histogram2(eksperiment(:, 1), eksperiment(:, 2), [20 20], ...
            'Normalization', 'pdf');
title('Eksperiment')
xlabel('x_1'); ylabel('x_2'); zlabel('f_e(x_1, x_2)')
saveas(f0, 'z3_a_eksperiment.jpg');

f1 = figure;
h = surf(x1, x2, F);
title('Teorija')
xlabel('x_1'); ylabel('x_2'); zlabel('f(x_1, x_2)')
saveas(f1, 'z3_a_teorija.jpg')

%% Drugi deo zadatka
%% Generisanje Y

A = [16, -1.2; 0, 3];
b = [0; 10];

Y = (A*eksperiment' + b)';

%% Ocekivanje
m = sum(Y) / N

%% Varijansa
R = ((Y - m)' * (Y - m)) / (N - 1);
R

f2 = figure;
plot(Y(:, 1), Y(:, 2), 'bx')
xlabel('Y_1')
ylabel('Y_2')
title('Raspodela Y za \rho = -0.6')
saveas(f2, 'z3_y.jpg')

%% d) ro = 0
A_1 = [20 0; 0 3];
Y_1 = (A_1*eksperiment' + b)';

f3 = figure;
plot(Y_1(:, 1), Y_1(:, 2), 'bx')
xlabel('Y_1')
ylabel('Y_2')
title('Raspodela Y za \rho = 0')
saveas(f3, 'z3_y1.jpg')

%% d) ro = 0.8
A_2 = [12 1.6; 0 3];
Y_2 = (A_2*eksperiment' + b)';

f4 = figure;
plot(Y_2(:, 1), Y_2(:, 2), 'bx');
xlabel('Y_1')
ylabel('Y_2')
title('Raspodela Y za \rho = 0.8')
saveas(f4, 'z3_y2.jpg')
```