Üzleti Elemzések Módszertana

5. Előadás: Együttes tanulás

Kuknyó Dániel
Budapesti Gazdasági Egyetem

2023/24
2.félév

Az együttes tanulás mögötti intuíció

- Egy gazda szeretné lemérni, milyen a hőmérséklet a szőlős birtokán.
- A birtok egy hegyoldalban fekszik, ezért a szőlőtőkéket eltérő időjárási hatások érik.

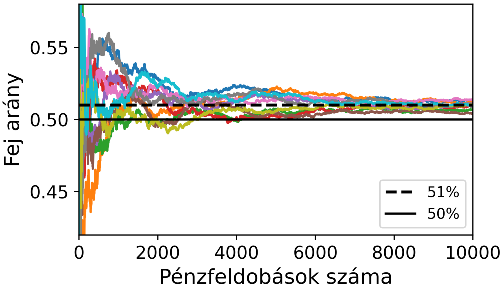
Példa: szavazó osztályozók

A következő példában 10 osztályozó modell feladata, hogy megbecsüljék, melyik oldalára fog esni egy torzított pénzérme.

A pénzérme 51% valószínűséggel esik fejre, 49% eséllyel pedig írásra.

1000 dobás után 75%, hogy a modellek valószínűsége fejt fog szavazni. Ugyanez a valószínűség 10000 dobás után 97%.

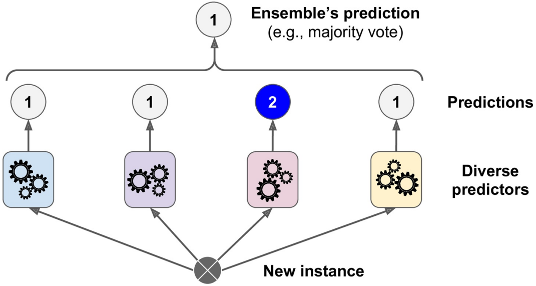
A szavazó osztályozók nagyobb pontosságot érnek el együttesen, mint a modellcsoport bármelyik tagja.



Szavazó osztályozók

A szavazó osztályozó kifejezés modellek egy csoportjára utal, amelyben a modellek **egymástól függetlenül képesek predikciót adni** egy adott mintaegyedre vonatkozóan.

A szavazó osztályozó a végső predikciót úgy állítja elő, hogy **a benne lévő modellek predikcióit aggregálja** valamilyen módszertan szerint pl. kiválasztja belőle a leggyakoribb elemet.

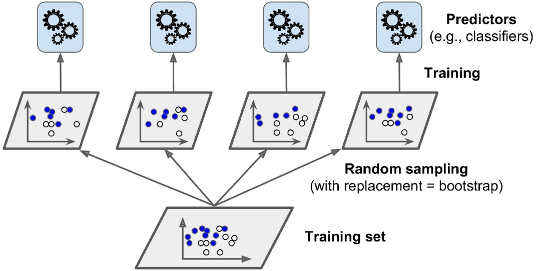


Bagging és Pasting

Az együttes tanuló modellek taníthatók az adathalmaz különböző részhalmazain. Ez robusztusabb modellt fog eredményezni, ami jobb általánosító képességeket jelent éles felhasználásban.

Bagging

Együttes tanulási módszer, melyben a modellek **visszatevés nélküli mintavétellel** kapják meg a saját tanító mintájukat.

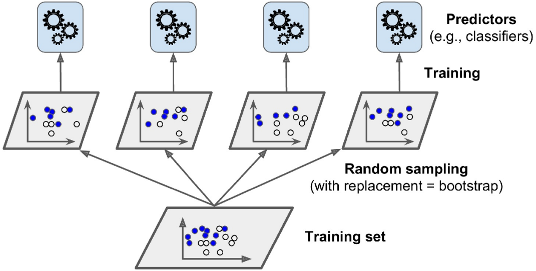


Bagging és Pasting

Az együttes tanuló modellek taníthatók az adathalmaz különböző részhalmazain. Ez robusztusabb modellt fog eredményezni, ami jobb általánosító képességeket jelent éles felhasználásban.

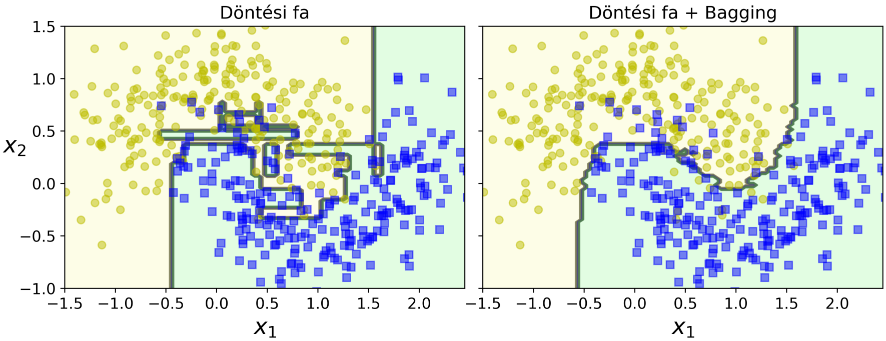
Pasting

Együttes tanulási módszer, melyben a modellek **visszatevéses mintavétellel** kapják meg a saját tanító mintájukat.



Bagging hatása a döntési határokra

A bal oldali ábrán egyetlen döntési fa határai láthatóak, a jobb oldalin pedig több bagging technikával tanított döntési fának a határait. A bagging modellcsoport egyértelműen jobb általánosító képességekkel rendelkezik mint a döntési fa.



Adaptív turbózás

Adaptív turbózás

Az együttes tanulás súlyozott változata. A modellek szekvenciálisan állnak elő olyan módon, hogy az új modell mindig tanul az elődje hibájából.

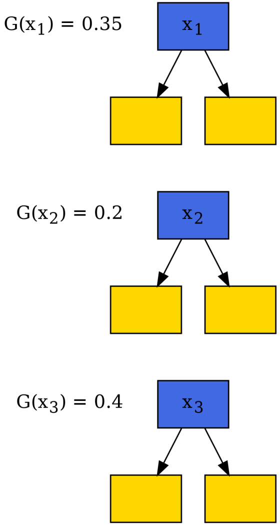
Algoritmus 1: Adaptív turbózás

1. Kezdeti súlyok rekordokhoz rendelése
2. Modell illesztés minden változóra
3. Legjobb modell kiválasztása
4. Modell súlyozása
5. Egyedsúlyok frissítése
6. Adathalmaz újramintázása
7. Iteráció kilépésig

Adaptív turbózás: lépésről lépésre

Az Adaptív turbózás algoritmusa:

1. Az algoritmus minden mintaegyedhez $w = \frac{1}{n}$ kezdeti súlyt rendel, ahol n az összes a minta halmaz mérete.
2. Minden x változóra egy döntési tönk kerül illesztésre. Ez egy lineáris döntési határ minden változóra.
3. Az a döntési tönk kerül kiválasztásra, amely a legjobban képes szeparálni az egyedeket. Ez ebben az esetben az x_2 változóhoz tartozó modell.



Adaptív turbózás: lépésről lépésre

4. A modell súlyozása a teljes modellcsoportban. Egy tönk hibája azon mintaegyedek súlyainak összege, amelyeket helytelenül osztályozott:

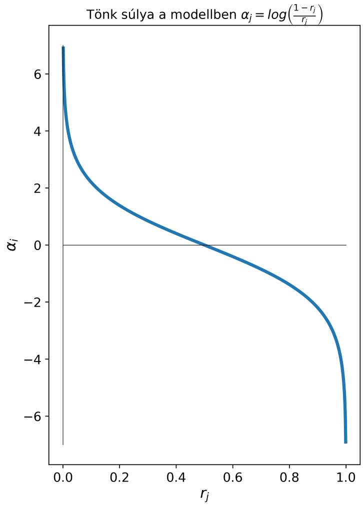
Prediktor teljes hibája

$$r_j = \frac{\sum_{\substack{i=1\\ \hat{y}_j \neq y_i}}^{m} w_i}{\sum_{i=1}^{m} w_i}$$

Tönk súlya a modellben

$$W_j = \alpha \cdot log\left(\frac{1 - r_j}{r_j}\right)$$

Ahol α a tanulási sebesség.



Adaptív turbózás: lépésről lépésre

5. Az eljárás frissíti a mintaegyed súlyait.

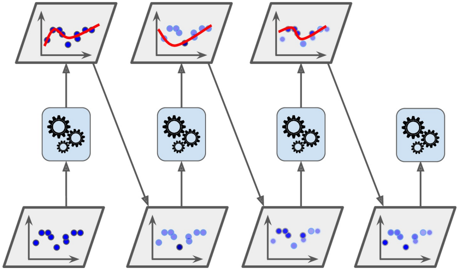
   Minden helyesen beosztályozott mintaegyedre:

$$w \leftarrow w \cdot e^{W_j}$$

   Minden helyesen beosztályozott mintaegyedre:

$$w \leftarrow w \cdot e^{-W_j}$$

6. A létrejött egyedsúlyoknak megfelelő valószínűség eloszlást felhasználva az adathalmaz újramintázódik és eszerint kapja meg a következő fa a saját mintáját.
7. Az algoritmus a folyamatot addig ismétli, amíg el nem éri a kilépési kritériumot.

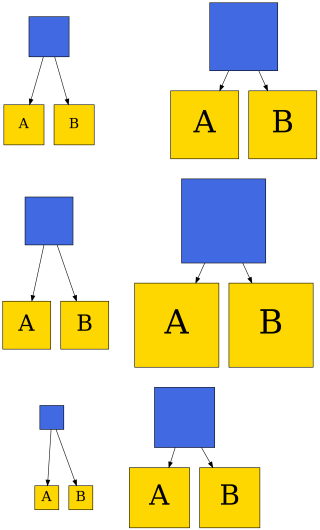


Az osztályozás eljárása

Osztályozáskor minden létrejött döntési tönk létrehozza a saját predikcióját, és a különböző prediktorok szavazása által dől el, mi legyen a végső predikció.

Az egyed abba az osztályba lesz besorolva, amelyikhez tartozó tönkök súlyának összege a legnagyobb.

$$\hat{y} = \underset{k}{argmax} \sum_{\substack{j=1 \\ \hat{y}_j(x)=k}}^{N} \alpha_j$$



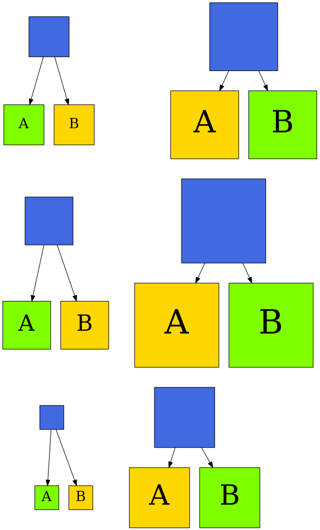
Az osztályozás eljárása

Osztályozáskor minden létrejött döntési tönk létrehozza a saját predikcióját, és a különböző prediktorok szavazása által dől el, mi legyen a végső predikció.

Az egyed abba az osztályba lesz besorolva, amelyikhez tartozó tönkök súlyának összege a legnagyobb.

$$\hat{y} = \underset{k}{argmax} \sum_{\substack{j=1 \\ \hat{y}_j(x)=k}}^{N} \alpha_j$$

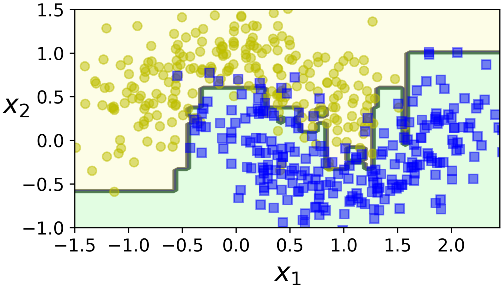
A példában: $\hat{y} = B$



Adaptív turbózás a Moons halmazon

A `make-moons` könyvtár egy nemlineárisan szeparálható adathalmazt generál.

A következő ábrán egy döntési fa alapú adaptív turbózó döntési határai láthatók.

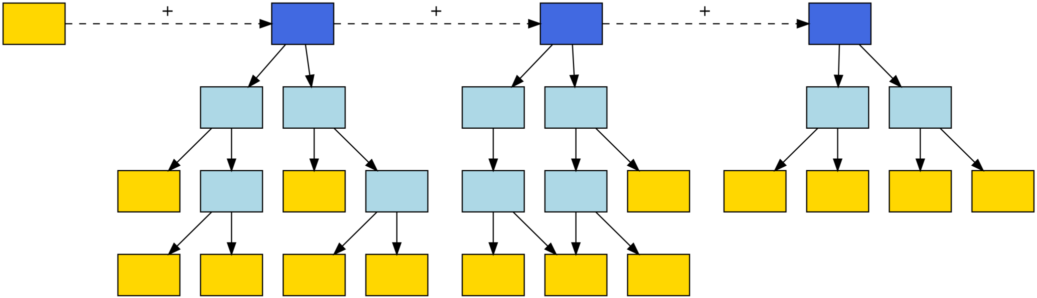


Gradiens turbózás (GBDT)

Együttes tanuló algoritmus, amely a rezidumok szekvenciális javításával állítja elő a becsült értéket. Minden újonnan létrejövő modell javít az elődje hibáján.

A becsült érték előállítása:

```
Becsült érték = előző predikció + tanulási sebesség * rezidum
```



Gradiens turbózás (GBDT)

Együttes tanuló algoritmus, amely a rezidumok szekvenciális javításával állítja elő a becsült értéket. Minden újonnan létrejövő modell javít az elődje hibáján.

Algoritmus 2: Gradiens turbózás

1. Kezdeti predikció a célváltozóra
2. Rezidumok kiszámítása
3. Döntési fa illesztése a rezidumokra
4. Levelek output értékének kiszámítása
5. Predikció a minta adathalmazra
6. 2-5 lépés iterálása kilépésig

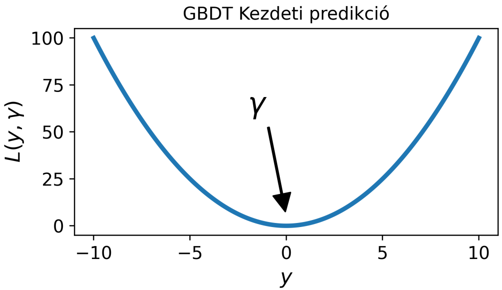
Gradiens turbózás: lépésről lépésre

1. A GBDT egy adott y célváltozóra vonatkozó első predikciója a célváltozó várható értéke:

$$F_0(x) = \underset{\gamma}{argmin} \sum_{i=1}^{n} L(y_i, \gamma)$$

Ahol:

- $L(y, \gamma)$: Deriválható költségfüggvény
- γ: Az az érték, ami minimalizálja a mintaegyedekre kiszámolt rezidumok összegét



Gradiens turbózás: lépésről lépésre

2. Következőnek az algoritmus kiszámolja a rezidumokat minden mintaegyedre. A rezidum a becsült és valós érték különbsége adott L költségfüggvény szerint:

Rezidum

$$r_{i,m} = -\left[\frac{\partial L\left(y_i, F\left(x_i\right)\right)}{\partial F\left(x_i\right)}\right]_{F(x)=F_{m-1}(x)}$$

Ahol:

- i: A minta indexe
- m: A modell indexe

Magasság	Szemszín	Nem	Súly	Rezidum
1.6	Kék	Férfi	88	16.8
1.6	Barna	Nő	76	4.8
1.5	Kék	Nő	56	−15.2
1.8	Zöld	Férfi	73	1.8
1.5	Barna	Férfi	77	5.8
1.4	Kék	Nő	57	−14.2

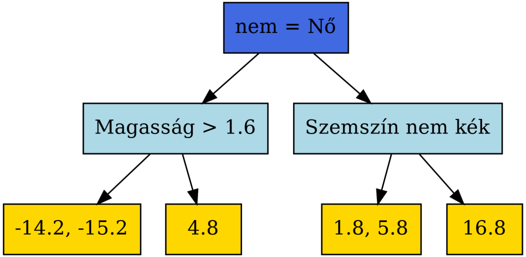
$$F_0(x) = \frac{1}{6}(88 + 76 + 56 + 73 + 77 + 57) = 71.2$$

$$r_{1,1} = 88 - 71.2 = 16.8$$

$$r_{1,2} = 76 - 71.2 = 4.8$$

Gradiens turbózás: lépésről lépésre

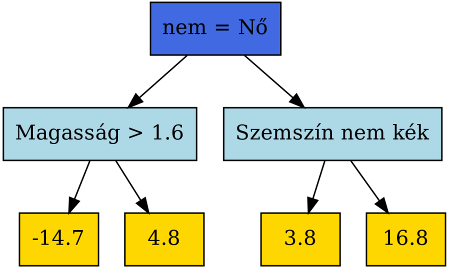
3. Döntési fa illesztése a **rezidumokra**. Ebben a lépésben az algoritmus besorolja a rezidumokat egy döntési fa leveleibe.



Magasság	Szemszín	Nem	Súly	Rezidum
1.6	Kék	Férfi	88	16.8
1.6	Barna	Nő	76	4.8
1.5	Kék	Nő	56	−15.2
1.8	Zöld	Férfi	73	1.8
1.5	Barna	Férfi	77	5.8
1.4	Kék	Nő	57	−14.2

Gradiens turbózás: lépésről lépésre

4. Levelek output értékének kiszámítása: a levelek outputja az az érték, ami minimalizálja a levélbe bekerült értékekre a költségfüggvényt. Ez az esetek többségében a rezidumok átlaga.



Levél output

$$\gamma_{j,m} = \underset{\gamma}{argmin} \sum_{x_i \in R_{i,j}} L\left(y_i, F_{m-1}\left(x_i\right) + \gamma\right)$$

Ahol:

- γ: A levél outputja
- $F_{m-1} x_i$: A modell előző fája által adott predikció x_i egyedre.
- y_i: A célváltozó valós értéke

Gradiens turbózás: lépésről lépésre

5. Predikciók készítése a minta adathalmazra

GBDT Predikció

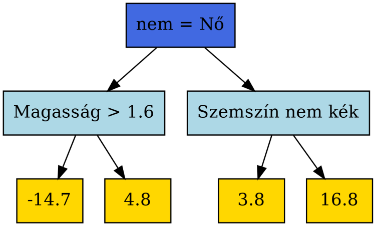
$$F_m(x) = F_{m-1}(x) + \alpha \sum_{j=1}^{J_m} \gamma_{j,m} \quad x \in R_{j,m}$$

Ahol:

- $F_{m-1}(x)$: Az x mintaegyedre az előző fa által adott becsült érték
- α: A tanulási sebesség
- J: A levelek száma

A predikció az első mintaegyedre $\alpha = 0.1$ tanulási sebességgel:

Magasság	Szemszín	Nem	Súly	Rezidum
1.6	Kék	Férfi	88	16.8



$$F_0(x) = 71.2$$
$$F_1(x) = 71.2 + 0.1 \cdot 16.8 = 72.9$$

Gradiens turbózás: lépésről lépésre

Az $F_1(x)$ predikciója alapján a következő rezidumok minden mintaegyedre:

Magasság	Szemszín	Nem	Súly	Rezidum $r_{i,1}$	Rezidum $r_{i,2}$
1.6	Kék	Férfi	88	16.8	15.1
1.6	Barna	Nő	76	4.8	4.3
1.5	Kék	Nő	56	−15.2	−13.7
1.8	Zöld	Férfi	73	1.8	1.4
1.5	Barna	Férfi	77	5.8	5.4
1.4	Kék	Nő	57	−14.2	−12.7

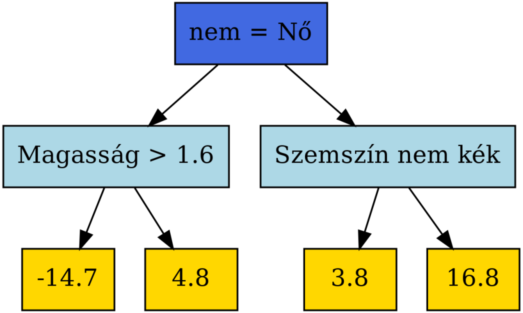
$$r_{1,2} = 88 - (71.2 + 0.1 \cdot 16.8) = 15.1$$

$$r_{2,2} = 76 - (71.2 + 0.1 \cdot 4.8) = 4.3$$

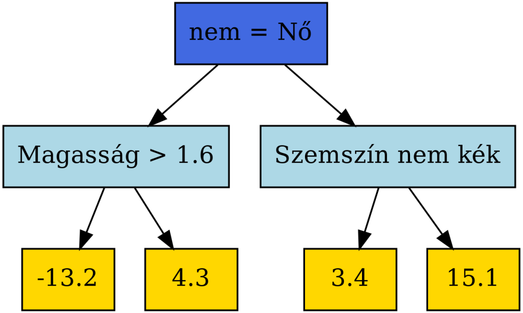
Gradiens turbózás: lépésről lépésre

Miután létrejöttek az $r_{i,2}$ rezidumok ismételten besorolódnak egy döntési fába.

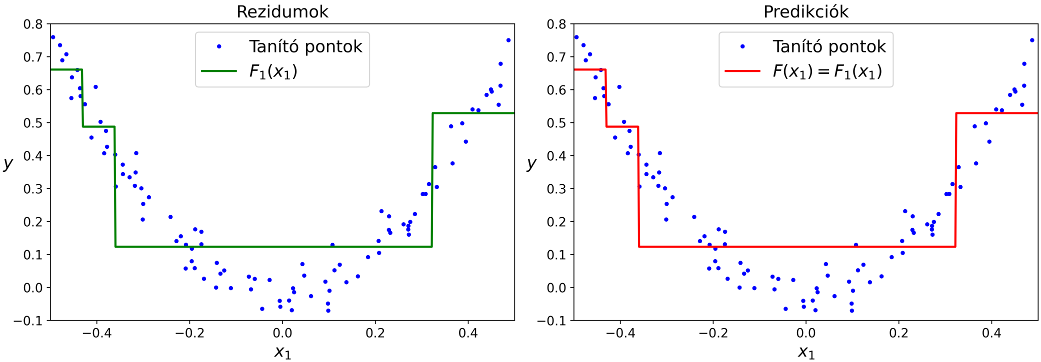
Az első döntési fa:



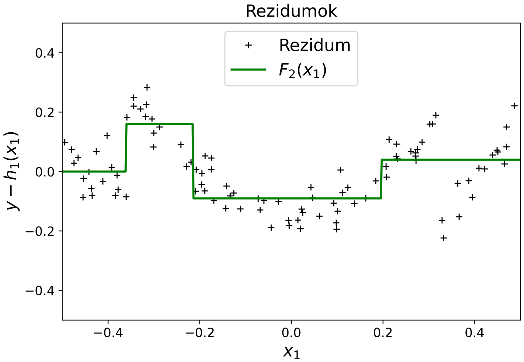
A második döntési fa:

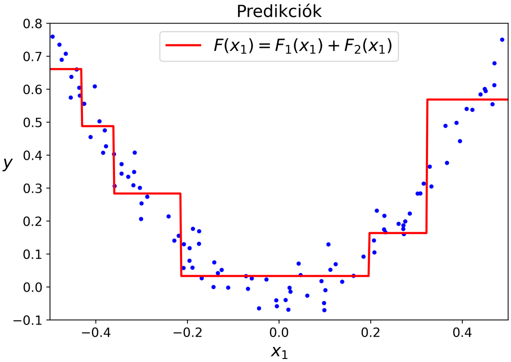


Tanítás lépései egy minta adathalmazon

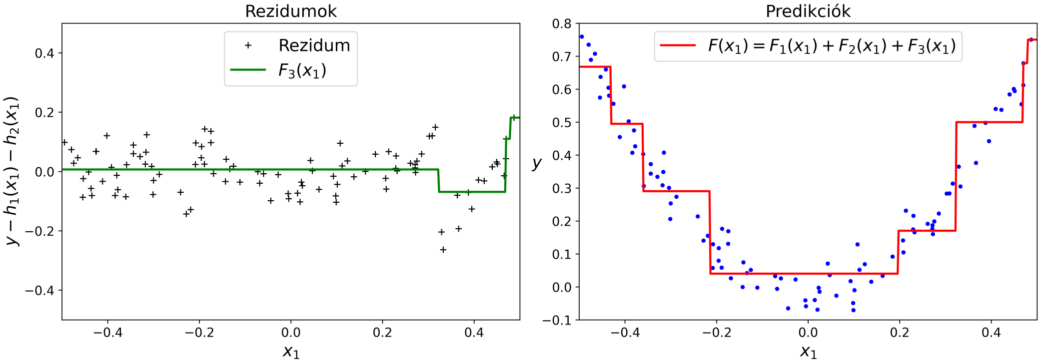


Tanítás lépései egy minta adathalmazon





Tanítás lépései egy minta adathalmazon

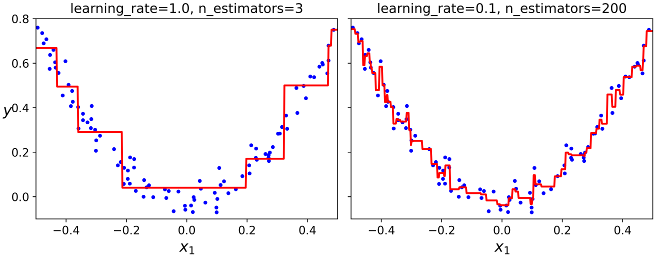


Alultanulás és túltanulás

A turbózott regresszor fák is hajlamosak a túltanulásra.

A tanító feladata felismerni a túltanulás jelenségét és vagy **az egyéni fák korlátozásával, vagy a tanítási időszakok rövidítésével regularizálni a modellcsoportot**.

A bal oldali ábrán egy alultanult, a jobb oldalin pedig egy túltanult modell predikciói láthatók.



Korai leállás gradiens turbózással

Korai leállás implementálása segíthet elkerülni a túltanulást. Ilyenkor az a modell lesz a végleges, amelyik a legkisebb validációs hibát érte el. Ha a validációs hiba emelkedőn van, a tanító iteráció kilép.