

Üzleti Elemzések Módszertana

1. Előadás: Regresszió

Kuknyó Dániel
Budapesti Gazdasági Egyetem

2023/24
2.félév

1 Bevezetés

2 Regresszió

3 Optimalizáció

4 Gradiens ereszkedés

1 Bevezetés

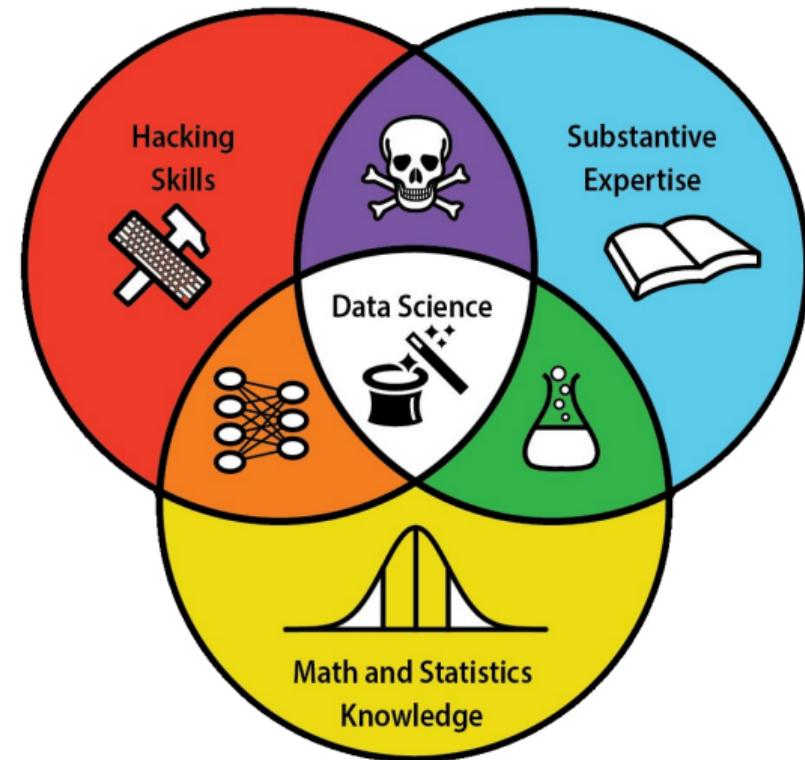
2 Regresszió

3 Optimalizáció

4 Gradiens ereszkedés

Hol vagyunk?

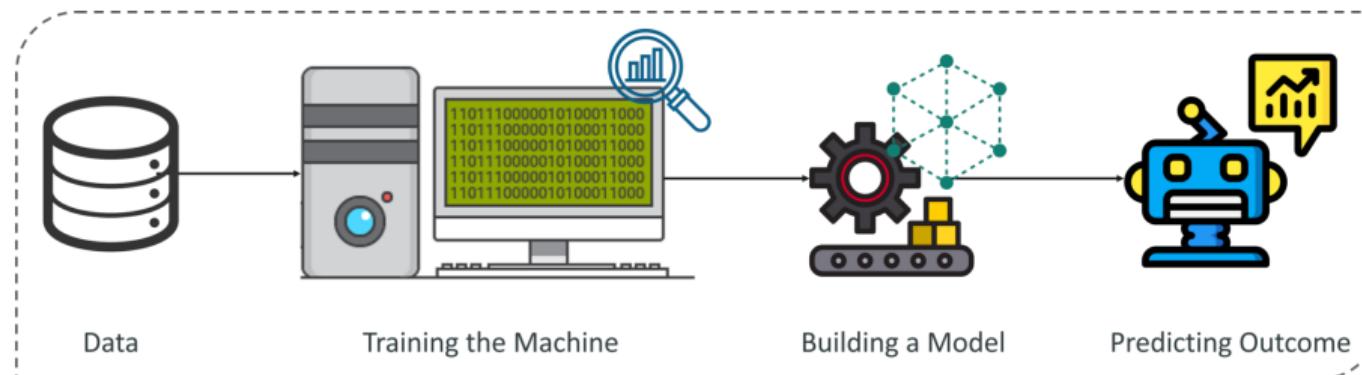
- **Programozási készségekre** van szükség nagy mennyiségű elektronikus adat kezeléséhez
- **A matematika és statisztika** ismerete lehetővé teszi a megfelelő módszerek és eszközök kiválasztását
- **A szaktudás** egy tudományos területen elengedhetetlen az eredmények értelmezéséhez



A gépi tanulás mögötti megfontolás

A hagyományos szemléletmódban a programozó utasításokat írt egymás után a probléma megoldására.

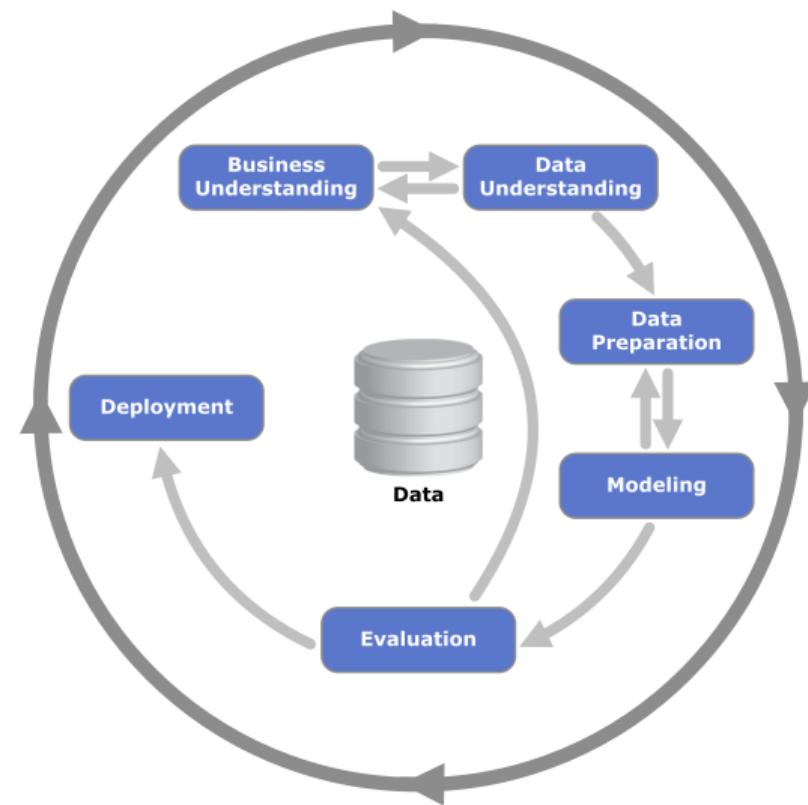
A gépi tanulás szemléletmódjában az algoritmus explicit programozás nélkül tanulja meg megoldani a problémát azáltal, hogy tapasztalat alapján tanul.



A CRISP-DM módszertan

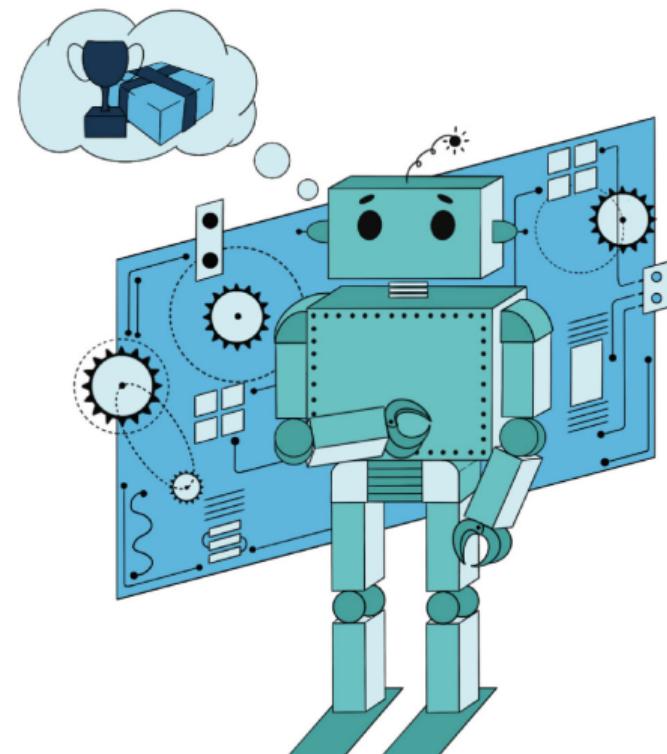
A Cross Industry Standard Process for Data Mining egy folyamatmodell ami az adatbányászati projektek folyamatát adja meg.

- **Business understanding:** Üzleti igények felmérése
- **Data understanding:** Rendelkezésre álló adatok gyűjtése
- **Modeling:** Modell adatokra illesztése
- **Evaluation:** Illesztett modell kiértékelése
- **Deployment:** Átadás a tulajdonosoknak és használatba vétel



Kihívások a gépi tanulás területén

- Gyenge minőségű adatok
- Nem reprezentatív adatok
- Felesleges jellemzők
- Gép és ember kapcsolata
- Folyamatosan változó világ
- A problémák eredhetnek:
 - Rossz változókból
 - Rosszul általánosító algoritmusból
 - Nehezen értelmezhető eredményekből
 - Nagyon specifikus szakterületi specializációból
 - Elégtelen minőségű vagy mennyiségű adatból



1 Bevezetés

2 Regresszió

3 Optimalizáció

4 Gradiens ereszkedés

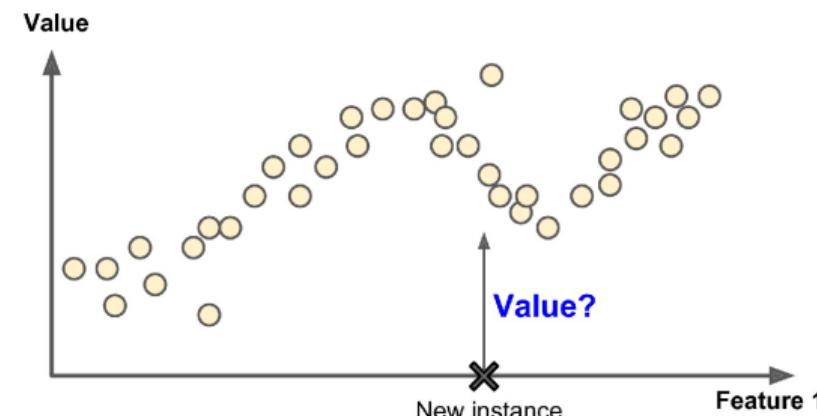
Alapfogalmak

Regresszió

Statisztikai elemző eljárás, amely változók közötti kapcsolatot modellez. Eredménye a **modell**.

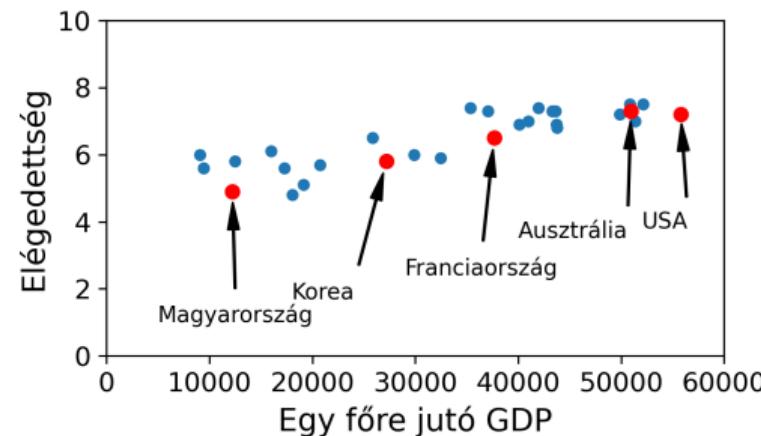
A regressziós elemzés **tárgya egy folytonos változó**.

A **felügyelt tanulás** kategóriájába tartozik, tehát a modellezés során ismertek a kívánt outputok.



A regresszió komponensei

- **Célváltozó:** Egy jelenség, amely az elemzés tárgyát képezi. Példában: élet elégedettség.
- **Független változó:** Azok a megfigyelések, amelyek alapján a célváltozó megbecsülhető.
- **Modell:** A változók közötti feltételezett kapcsolat, ami a valóságot leírja.

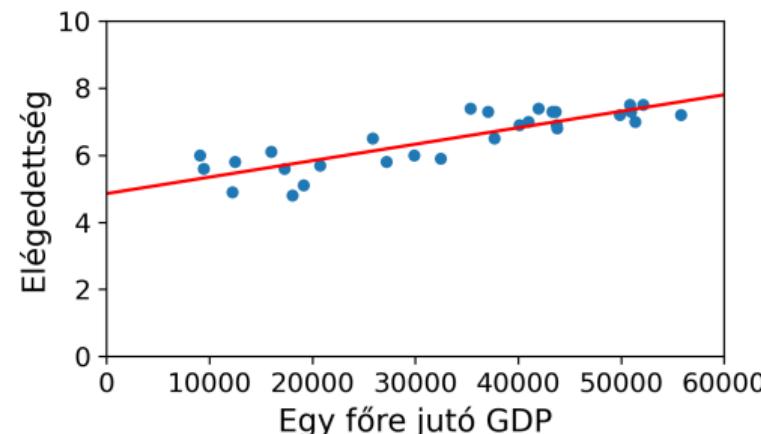


A regresszió alkalmazása

Tipikusan akkor használatosak a regressziós eljárások, amikor a vizsgálat tárgya, hogy **egyes jelenségek hogyan befolyásolnak másokat**. Ezzel lehetséges annak a feltárása, hogy milyen **kapcsolati rendszer szerint hozhatók összefüggésbe**.

Regresszió segítségével lehetséges **valamilyen választ előre jelezni**.

Például meg lehet jósolni az egy országban élők saját életükkel való elégedettséget az ország egy főre jutó GDP mutatója alapján.

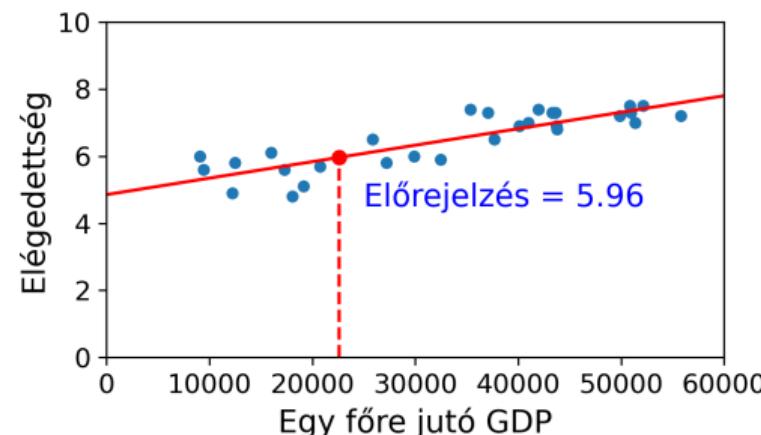


A regresszió alkalmazása

Tipikusan akkor használatosak a regressziós eljárások, amikor a vizsgálat tárgya, hogy **egyes jelenségek hogyan befolyásolnak másokat**. Ezzel lehetséges annak a feltárása, hogy milyen **kapcsolati rendszer szerint hozhatók összefüggésbe**.

Regresszió segítségével lehetséges **valamelyen választ előre jelezni**.

Például meg lehet jósolni az egy országban élők saját életükkel való elégedettséget az ország egy főre jutó GDP mutatója alapján.



A regresszió felírása

A lineáris regresszió célja, hogy valamely y változót megbecsülje adott

$x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ magyarázó változók alapján.

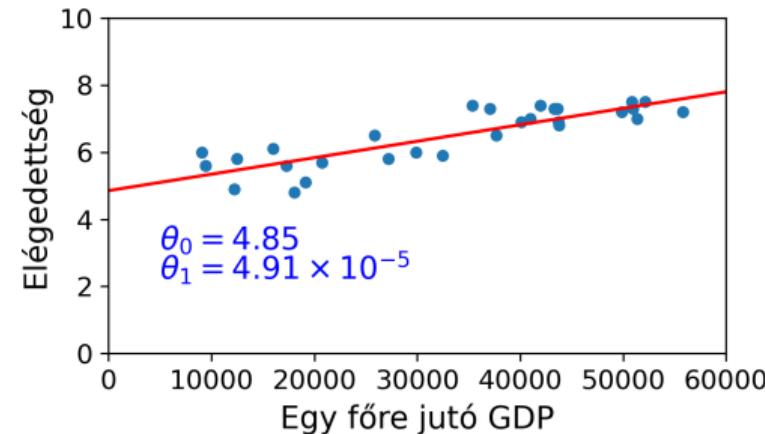
Lineáris regresszió

A regresszió egyenlete:

$$\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 \cdot x + \varepsilon$$

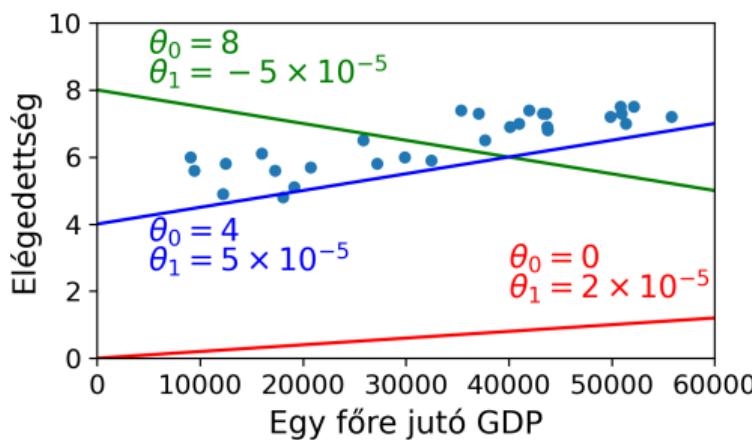
Ahol \hat{y} a becsült érték, θ értékek a regressziós együtthatók vagy **paraméterek**, ε pedig a véletlen hiba.

Ebben az esetben θ_0 az egyenes eltolása, θ_1 pedig a meredeksége.



A regresszió teljesítménye

A gépi tanulás esetén szükség van arra, hogy meglehessen mondani, mennyire jó a modell. Regresszió esetén a feladat a legkisebb hibához tartozó modell megkeresése.



Reziduum

Az y_i valós érték és \hat{y}_i becsült érték távolsága adott d távolságfüggvény szerint:

$$r_i = d(y_i, \hat{y}_i), \quad r_i \in \mathbb{R}$$

Költségfüggvény

A rezidumok összege az összes minta adatpontra:

$$L(y, \hat{y}) = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n d(y_i, \hat{y}_i)$$

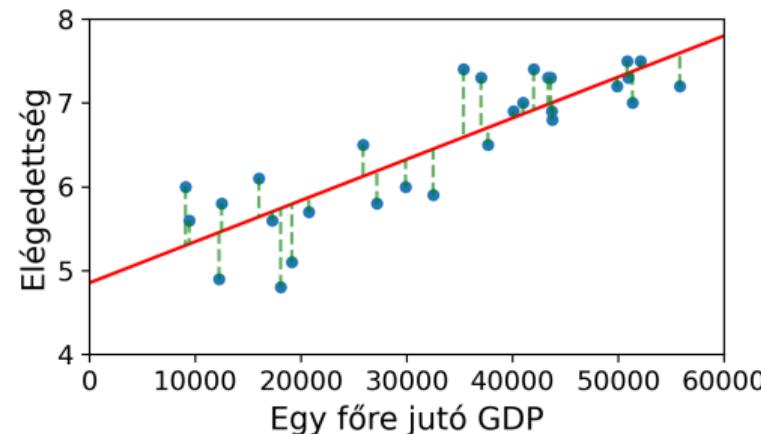
Hiba kiszámítása MSE módszerrel

Az egyik legismertebb költségfüggvény az átlagos négyzetes hiba.

MSE (Mean Squared Error)

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Ahol y_i az aktuális minta adatpont és \hat{y}_i a regressziós modell által adott becsült érték.



1 Bevezetés

2 Regresszió

3 Optimalizáció

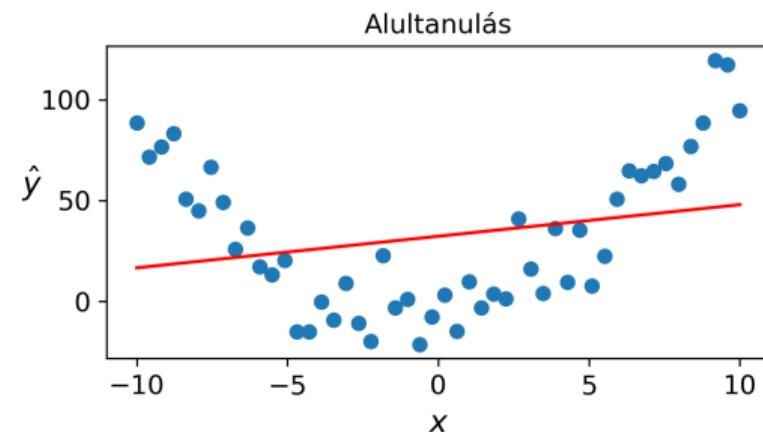
4 Gradiens ereszkedés

Alultanulás és túltanulás

A gépi tanulásban két egymással ellentétes célra kell optimalizálni a modelleket. Ez a jó általánosító képesség és a pontos becslés.

Alultanulás

Alultanulás esetén az illesztett modell **túlságosan általános**, nem képes hitelesen leképezni a valóságban rejlő komplex kapcsolati rendszert. Az alultanult modell **egyformán rosszul teljesít mind a tanító és előre nem látott adatokon**.

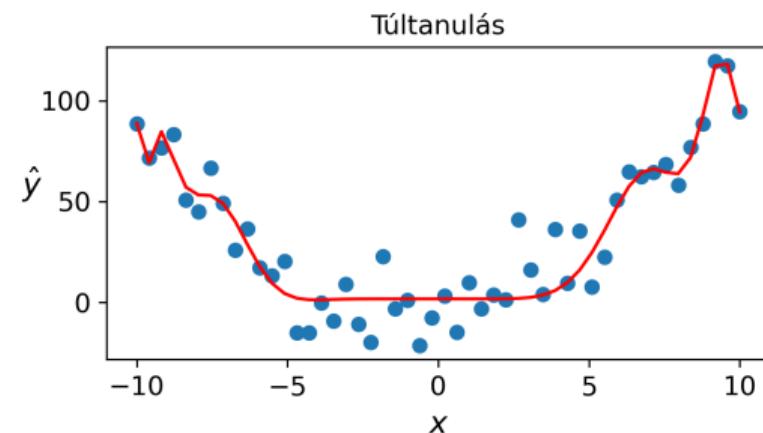


Alultanulás és túltanulás

A gépi tanulásban két egymással ellentétes célra kell optimalizálni a modelleket. Ez a jó általánosító képesség és a pontos becslés.

Túltanulás

Túltanulás esetén a modell nagyon pontosan, akár hiba nélkül illeszkedik a tanító adatpontokra, de **komplexitása miatt elveszíti a jó általánosító képességét**, és nem fog jól teljesíteni előre nem látott adatokon.

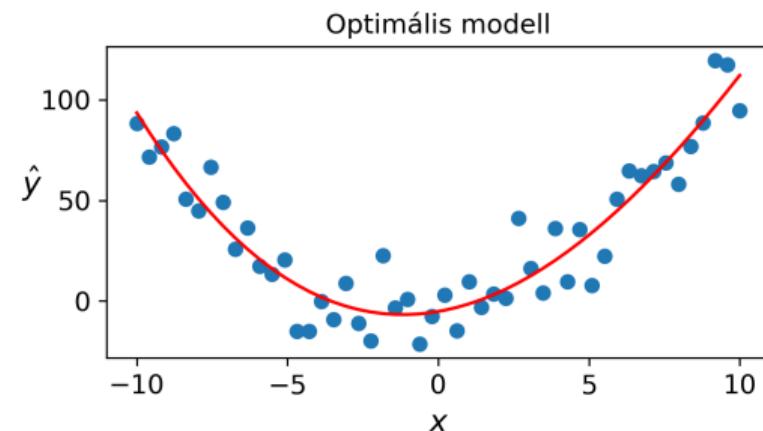


Alultanulás és túltanulás

A gépi tanulásban két egymással ellentétes célra kell optimalizálni a modelleket. Ez a jó általánosító képesség és a pontos becslés.

Optimális modell

Az optimális modell **egyszerre** képezi le hűen a valóság kapcsolatait és általánosít olyan módon, hogy az előre nem látott adatokon is jó előrejelzéseket legyen képes adni.



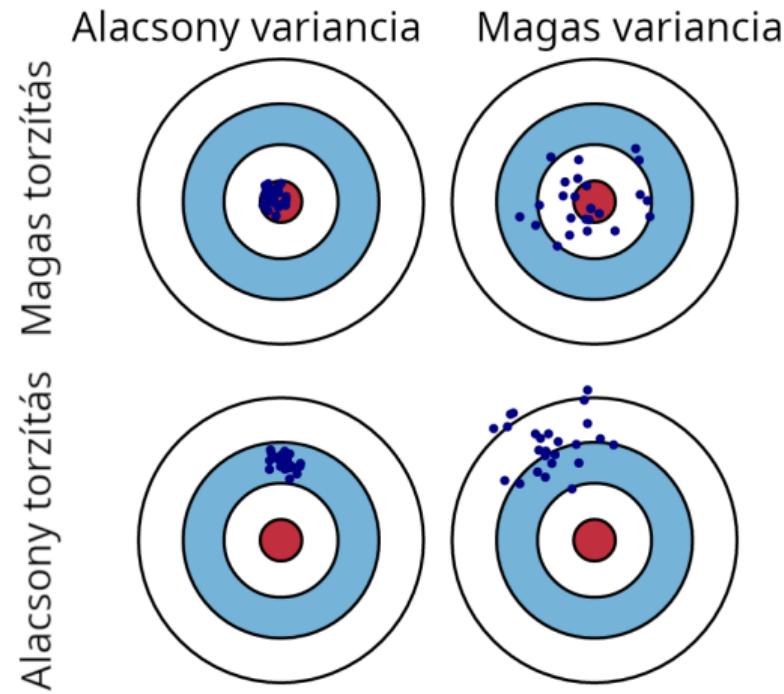
Torzítás és variancia

A modellezés két szélsőértéke a torzítás és variancia.

Torzítás

Ez arra utal, hogy **mennyire jól képes a modell leképezni a valós kapcsolatokat a tanító adatokon**.

Magas torzítás azt jelenti, hogy a modell túlságosan egyszerű, és nem képes megragadni az adatok összefüggéseit.



Torzítás és variancia

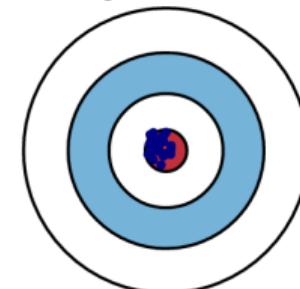
A modellezés két szélsőértéke a torzítás és variancia.

Variancia

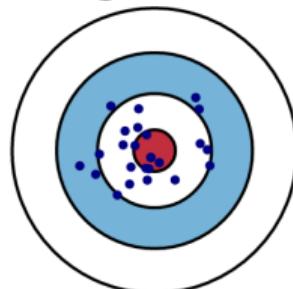
A variancia azt mutatja meg, hogy a modell **hogyan reagál a különböző tanító adatkészletekre**.

Magas variancia esetén a modell túlzottan érzékeny a tanító adatok kis változásaira, tehát túlilleszti magát a tanító adatokra, és nem képes jól generalizálni új, látatlan adatokra.

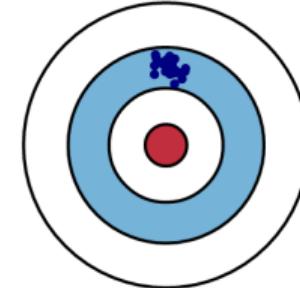
Alacsony torzítás Magas torzítás



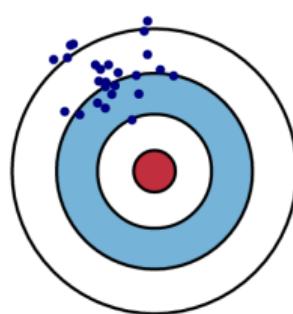
Alacsony variancia



Magas variancia



Alacsony torzítás Magas torzítás

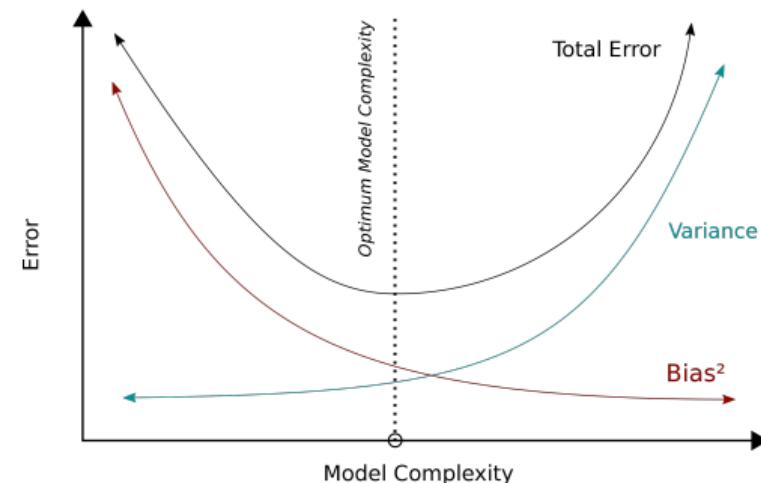


A modell optimalitása

A modellezés során egyszerre kell úgy illeszteni a függvényt, hogy jól általánosítson, ugyanakkor a valóság kapcsolatait ne hamisítsa meg.

Amikor a tanítás elején a modell nagyon egyszerű, jól képes általánosítani, viszont a hibája magas lesz a tanító adatpontokon.

Ahogy egyre tanultabb lesz a modell a hiba csökkenni fog, viszont annál specializáltabb lesz és veszíti el az általánosító képességét.



1 Bevezetés

2 Regresszió

3 Optimalizáció

4 Gradiens ereszkedés

Gradiens

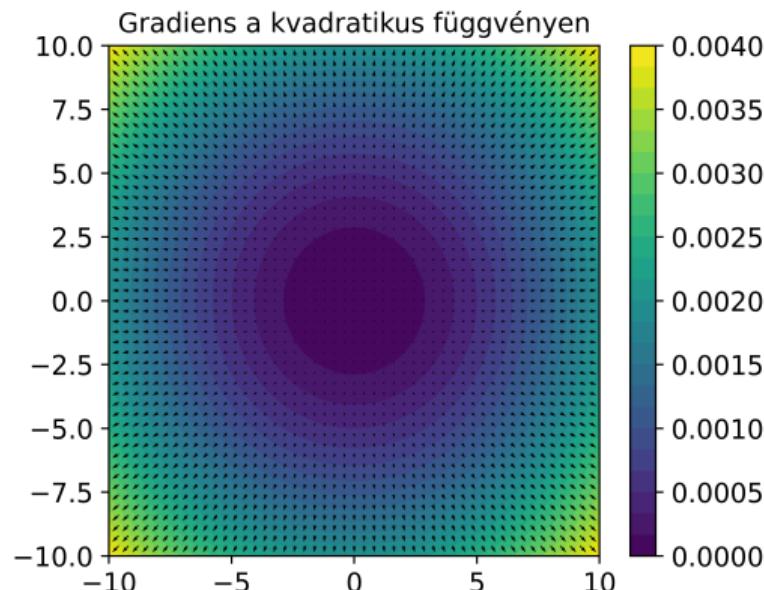
Gradiens

Egy $f(x, y, z)$ függvény esetén a gradiens egy olyan vektor, amely arra az irányra mutat, ahol az f függvény a legmeredekebben emelkedik.

Ha f 3D térben van definiálva, (x, y, z) koordinátákkal, a gradiens:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]$$

A gradiens tetszőleges dimenziószámra általánosítható.

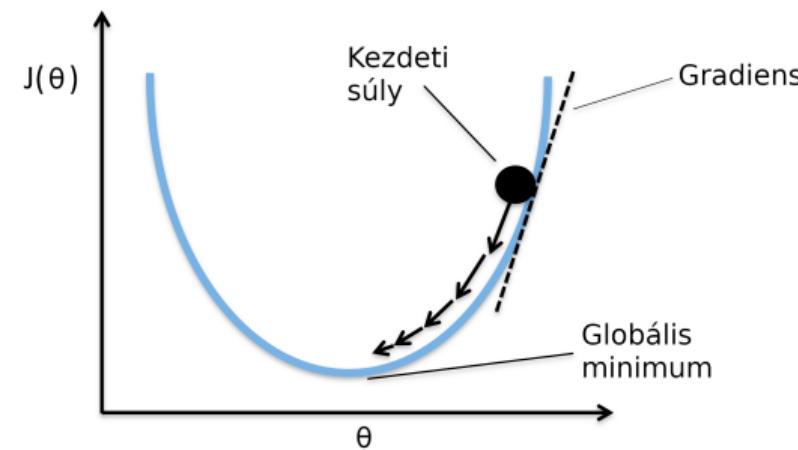


Gradiens ereszkedés

Gradiens ereszkedés

Iteratív optimalizálási módszer **egy célfüggvény minimum helyének megtalálására**, amely a célfüggvény gradiensét használja a keresési irány meghatározására.

Az eljárás alapvető elgondolása, hogy a függvény gradiensének ellentétes irányában haladva eljut a legkisebb értékhez, mivel a gradiens a függvény növekedésének legnagyobb irányát mutatja.



Gradiens ereszkedés

Egy alapvető algoritmus gradiens ereszkedésre:

Algoritmus 1: Gradiens ereszkedés

Input: $\alpha, f(\theta)$

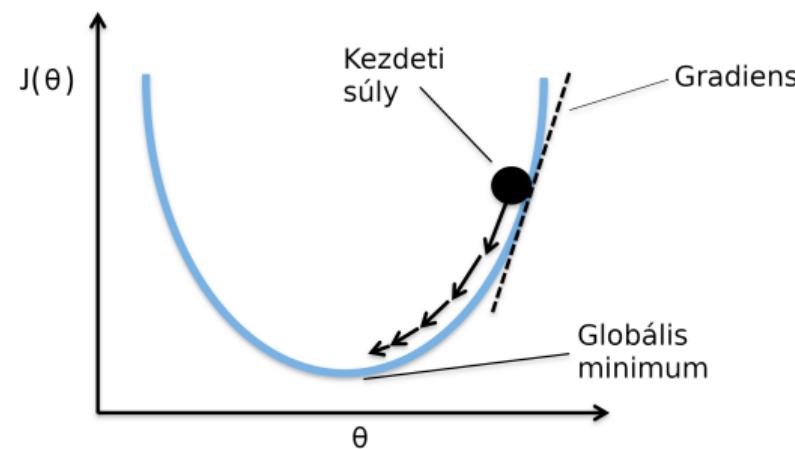
$\theta_0 \leftarrow 0;$

for $t = 0 \rightarrow max_t$ **do**

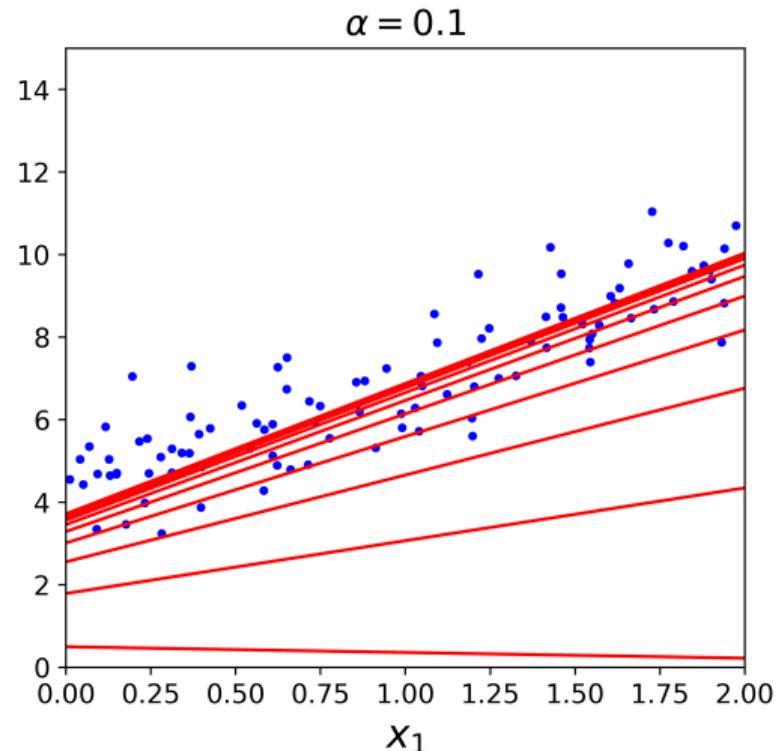
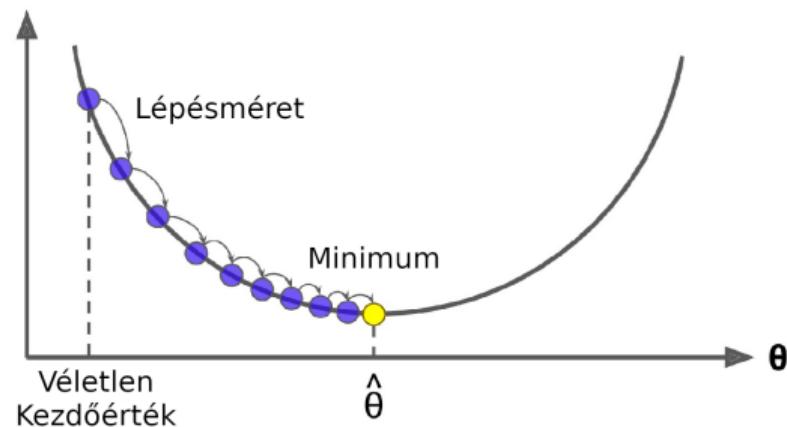
$\nabla f(\theta_t)$ gradiens kiszámítása;
 $\theta_{t+1} = \theta_t - \alpha \cdot \nabla f(\theta_t);$

end

Ahol θ a célfüggvényt meghatározó paraméterek vektora, $\nabla f(\theta_t)$ a célfüggvény gradiense, $\alpha \in [0, 1]$ a tanulási sebesség.

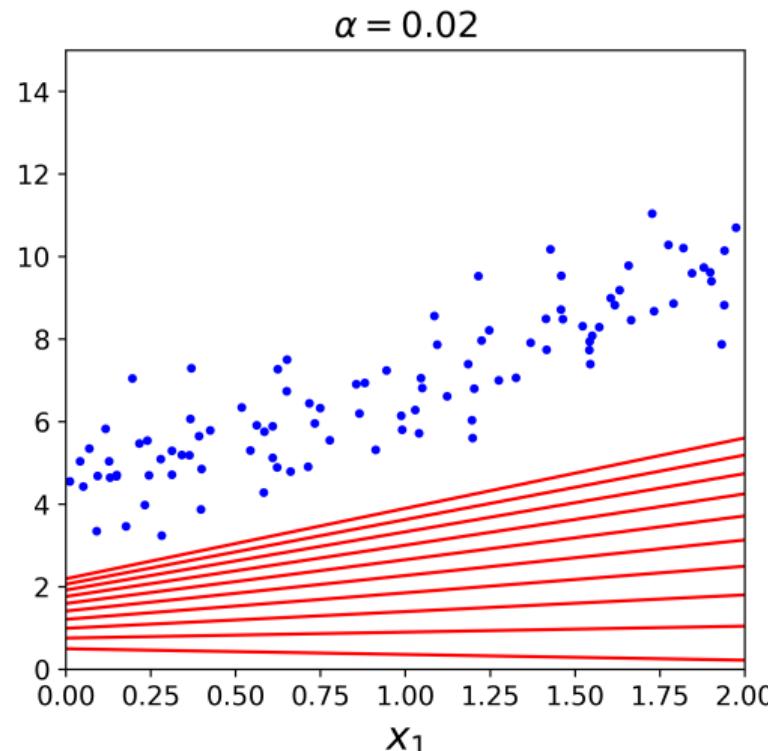
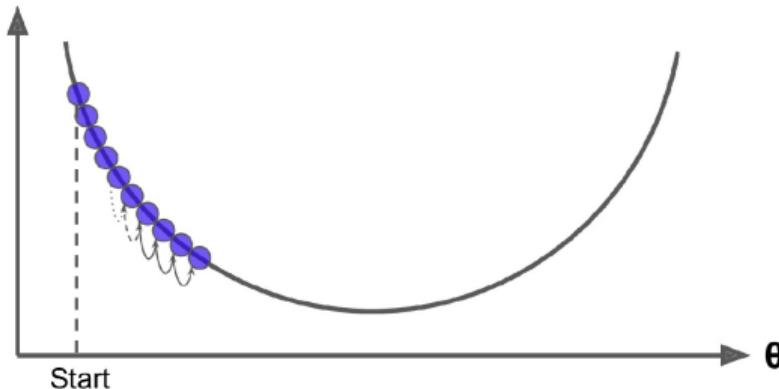


Gradiens ereszkedés optimális esetben



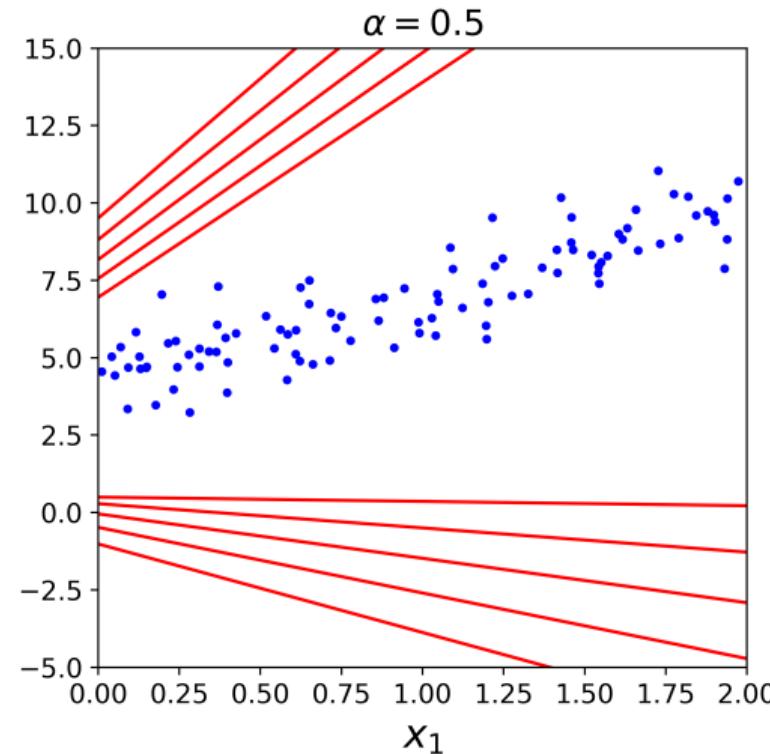
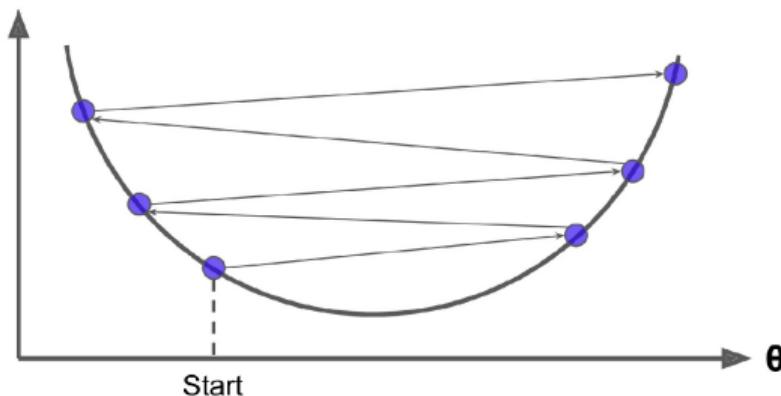
Túl alacsony tanulási sebesség

Ha a tanulási sebesség túlságosan alacsony, az optimalizáció lehet sosem éri el a minimumot.

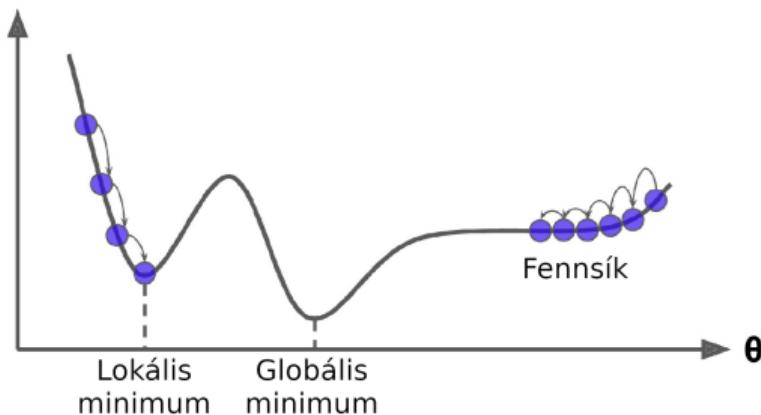


Túl magas tanulási sebesség

Túlságosan magas tanulási sebesség esetén az algoritmus divergálhat vagy nagyon lassú lesz az optimalizáció folyamata.



Egyéb problémák



- Az optimalizáció folyamata megakadhat egy lokális minimum helyen.
- Ha az algoritmus elér egy fennsíkot, az alacsony gradiens érték miatt instabillá válhát.