Üzleti Intelligencia

3. Előadás: Markov döntési folyamatok megoldása

Kuknyó Dániel
Budapesti Gazdasági Egyetem

2023/24
1.félév

1. Bevezetés
2. A rabló probléma
3. Dinamikus programozás
4. Politika iteráció

1 Bevezetés

2 A rabló probléma

3 Dinamikus programozás

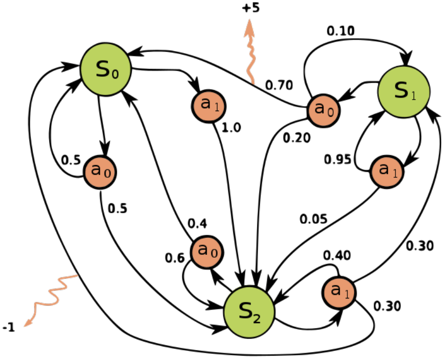
4 Politika iteráció

Az RL modellje

Markov döntési folyamat

$$MDP\,(S, A, P, R, s_0, \gamma)$$

- S: állapotok halmaza
- A: cselekvések halmaza
- $P: \;\; S \times A \times S \to [0,1]$: állapotátmeneti valószínűségek
- $R: \;\; S \times A \to \mathbb{R}$: azonnali jutalmak
- s_0: kezdőállapot
- γ: diszkont faktor



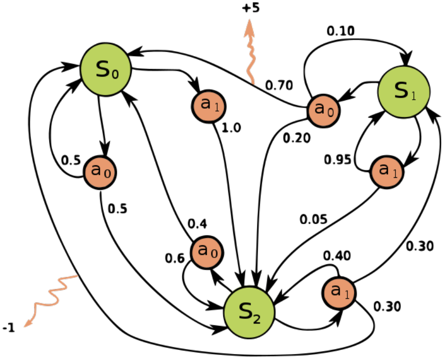
Az RL modellje

Az MDP folyamata:

1. Az ügynök s_0 állapotból indul
2. Az ügynök π politika szerint cselekszik: $a \sim \pi(s)$
3. A környezet reagál a cselekvésre, és visszaadja az ügynöknek r jutalmat és s' következő állapotot
4. Ez ismétlődik amíg a kilépési kritérium be nem teljesül

Cél: Az optimális politika megtalálása. A politika optimális, ha a hozamának várható értéke maximális:

$$E_{\pi}\left(r_1 + \gamma r_2 + \gamma^2 r_3 + \ldots\right) \rightarrow max$$



A mohó ügynök

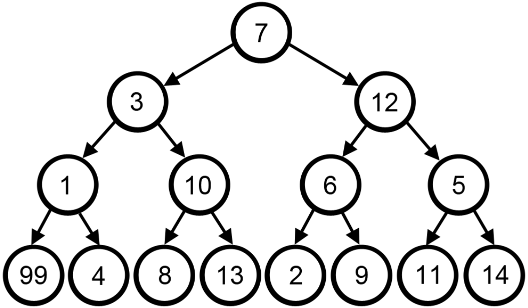
A legegyszerűbb cselekvés kiválasztási szabály, ha az ügynök mindig azt a cselekvést választja, ami számára a lehető legnagyobb várható hozammal rendelkezik.

Mohó cselekvés választás

Mohó politika mindig azt a cselekvést fogja választani, amelyik - egy lépéses távlatban - a lehető legnagyobb várható jutalommal fog járni az ügynök számára v_π szerint.

$$a_t = \underset{a}{argmax}\, Q_t(a)$$

- Mi lenne a mohó politika ebben az estben?
- Mindig ez a legjobb megoldás?
- A legjobb megoldás mindig mohó?



A mohó ügynök

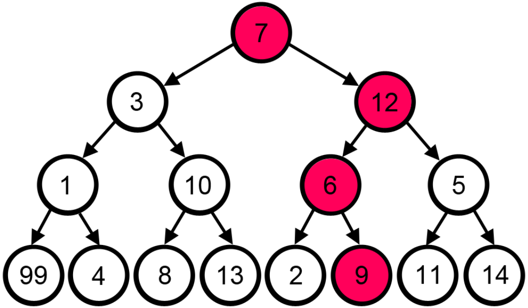
A legegyszerűbb cselekvés kiválasztási szabály, ha az ügynök mindig azt a cselekvést választja, ami számára a lehető legnagyobb várható hozammal rendelkezik.

Mohó cselekvés választás

Mohó politika mindig azt a cselekvést fogja választani, amelyik - egy lépéses távlatban - a lehető legnagyobb várható jutalommal fog járni az ügynök számára v_π szerint.

$$a_t = \underset{a}{argmax}\, Q_t(a)$$

- Mi lenne a mohó politika ebben az estben?
- Mindig ez a legjobb megoldás?
- A legjobb megoldás mindig mohó?



Az ε-mohó stratégia

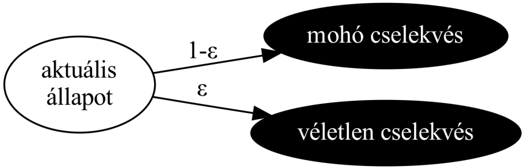
Egy másik lehetőség, ha adott valószínűséggel az ügynök véletlen cselekvést hajt végre remélve, hogy ezzel elér egy olyan állapotba amelyhez nagy jutalom tartozik. A véletlen cselekvés a **felfedezés**, és végrehajtásának valószínűsége ϵ.

ε-mohó cselekvés választás

$$a_t \leftarrow \begin{cases} \underset{a}{argmax} Q_t(a) & P{=}1{-}\varepsilon \\ a{\sim}A & P{=}\varepsilon \end{cases}$$

Ahol A az összes cselekvés halmaza.

Az ügynök tehát ε valószínűséggel véletlen cselekvést választ az ismeretlen, de nagyobb jutalom reményében. Ez a **felfedezés** művelete.
ε valószínűséggel pedig a már ismert és a legnagyobb várható jutalommal járó cselekvést hajtja végre. Ez a **kizsákmányolás** művelete.



Példák

A következő valós példák alkalmasak a felfedezés/kizsákmányolás dilemma bemutatására:

- Étterem választás:
  - **Kizsákmányolás**: elmész a kedvenc éttermedbe.
  - **Felfedezés**: elmész egy új étterembe, hátha találsz egy jobbat mint a kedvenced.
- Online hirdetés:
  - **Kizsákmányolás**: a legjobb reklám megmutatása a felhasználónak.
  - **Felfedezés**: egy új reklám megmutatása a felhasználónak, hátha tetszik neki.
- Olajfúrás:
  - **Kizsákmányolás**: Egy meglévő helyen fúrás az olajért.
  - **Felfedezés**: Egy új helyen fúrás.
- Klinikai kezelés:
  - **Kizsákmányolás**: A bevált kezelés alkalmazása.
  - **Felfedezés**: Új kezelés kipróbálása.

1 Bevezetés

2 A rabló probléma

3 Dinamikus programozás

4 Politika iteráció

A rabló probléma

A k-karú rabló problémája egy elméleti megerősítéses tanulás probléma. A játékos egy rablógépen játszik, amelynek k karja van.

Minden karhúzás után egy állandó eloszlásból választott jutalmat kap az ügynök. Az ügynök célja, hogy olyan politikát válasszon, ami az elvárt hozamot maximalizálja 1000 cselekvés vagy *időlépés* után.

A rabló probléma

Az ügynöknek számon kell tartania, mennyi a jutalom várható értéke, ha adott egy a cselekvés. Ez a $Q(s,a)$ állapot-cselekvés minőség függvény. A rabló problémában csak egy állapot van, ezért elég csak a cselekvésekhez tartozóan számon tartani:

$$Q_*(a) = E\left[r_t | a_t = a\right]$$

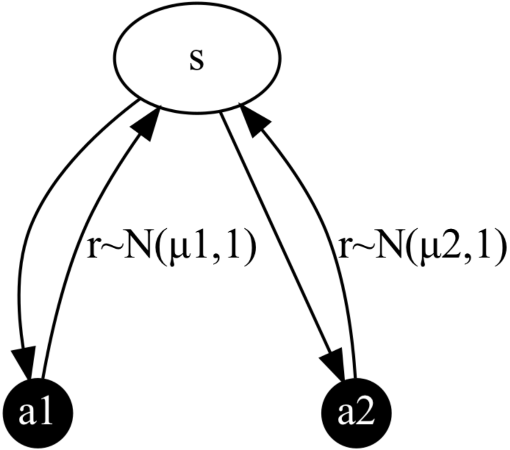
A jutalom várható értéke:

$$Q_n = \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1}}{n-1}$$

A rabló folyamat modellje

A példában egy kétkarú rabló folyamat modellje látható. A modell egyetlen állapotot tartalmaz. az ügynök minden lépésben innen választhat, hogy melyik kart húzza meg. Ez a két cselekvéssel egyezik meg: a_1, a_2.

A jutalmak minden cselekvés után egy normál eloszlásból származnak, valamilyen μ_1 és μ_2 várható értékkel és 1 szórással: $r \sim N(\mu, 1)$.



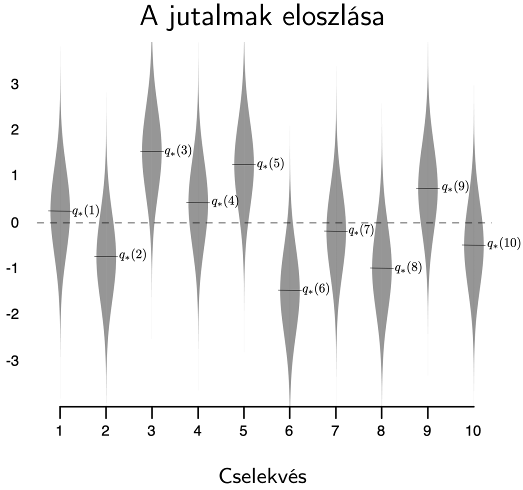
Algoritmus 1: Rabló játék

```
Q(a) ← 0 for a = 1 → k;                        /* Cselekvés minőségének függvénye */
N(a) ← 0 for a = 1 → k;                        /* Kar meghúzásainak a száma */
for t = 1 → max_t do
    p = random(0, 1);                          /* Véletlen szám 0 és 1 között */
    if p > ε then
        a ← argmax_a Q(a);                     /* Legnagyobb ismert jutalom cselekvése */
    else
        a ← a ~ A;                             /* Véletlen cselekvés */
    end
    r ← env(a);                                /* Cselekvés végrehajtása a környezetben */
    N(a) ← N(a) + 1;                           /* Cselekvés számlálójának növelése */
    Q(a) ← Q(a) + 1/N(a) [r − Q(a)];           /* Q-érték frissítése */
end
```

Egy példa rabló

Hogy meg lehessen mérni a mohó és ε-mohó stratégiák teljesítményét, szükség van egy teszt rablóra. A példában szereplő egy 10-karú rabló. Minden karhoz tartozóan a jutalmak eloszlása Gauss-i eloszlást követ 1 varianciával, viszont nem 0 átlaggal.

Valamelyik karok nagyobb valószínűséggel járnak magas jutalommal mint a többi. Az ügynök feladata megtalálni melyik kartól remélhet nagyobb jutalmat. Ehhez szükség van arra, hogy végig próbálja őket.

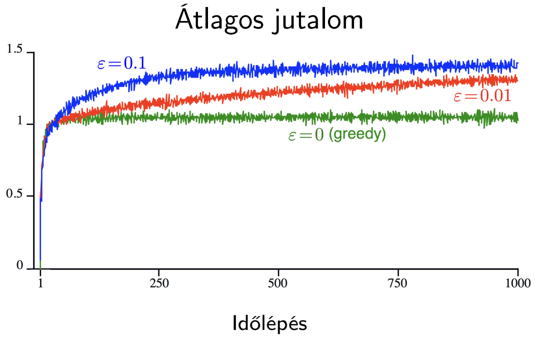


A futás teljesítménye

Az algoritmus 1000 időlépésen keresztül futott $\varepsilon = 0, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$ hiperparaméterekkel. Minél nagyobb a ε érték, annál nagyobb a felfedezés valószínűsége.

Mindegyik módszer megbecsülte az állapot-cselekvés minőség függvényt a rabló minden karára a mozgóátlagolás technikájával. A diagramon a várható jutalom mértékét mutatja az időlépések függvényében.

A mohó stratégia kezdetben gyorsabban javult mint a többi, de kisebb értékre konvergált a futásidő végére.

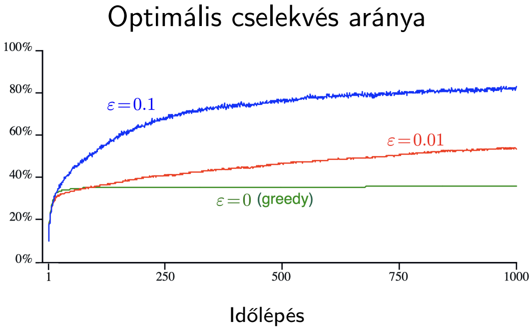


A futás teljesítménye

Az ábra azt mutatja, hogy a mohó módszer csak a feladatok mintegy 30%-ában találta meg az optimális műveletet. Az ε-mohó módszerek végül jobban teljesítettek, mert folytatták a felfedezést és javították az esélyüket az optimális művelet felismerésére.

Az $\varepsilon = 0.1$ módszer többet fedezett fel, és általában korábban megtalálta az optimális műveletet, de soha nem választotta ki azt több mint 91%-ban.

Az $\varepsilon = 0.01$ módszer lassabban javult, de végül mindkét teljesítménymérőn jobban teljesített.



1 Bevezetés

2 A rabló probléma

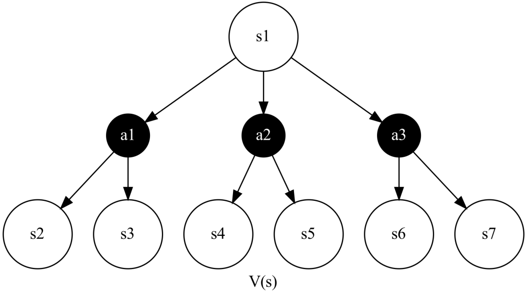
3 Dinamikus programozás

4 Politika iteráció

Dinamikus programozás alapjai

A dinamikus programozás egy gyűjtőfogalom olyan algoritmusokra amelyekkel kiszámolható az optimális politika *ha adott egy tökéletes környezeti modell egy Markov döntési folyamatként*.

A klasszikus dinamikus programozási algoritmusok ritkák a megerősítéses tanulásban **mert egy tökéletes környezeti modellt feltételeznek** és mert rendkívül erőforrás igényesek.

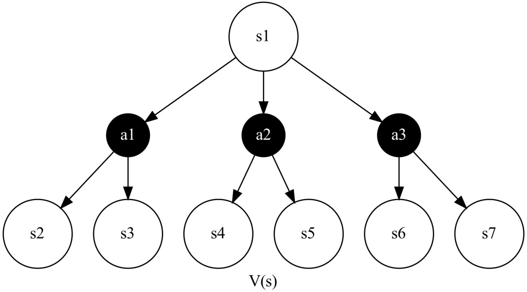


Dinamikus programozás alapjai

Dinamikus programozás

A DP algoritmusok a komplex problémákat alproblémákra bontják, majd a végső megoldást az alproblémák megoldásaiból állítják elő. Ehhez két feltételnek kell érvényesnek lennie:

- **Optimális alstruktúra**: Az almegoldásoknak felhasználhatóknak kell lenniük a probléma megoldására.
- **Átfedésben lévő alproblémák**: Bizonyos alproblémák megoldásait többször is fel lehet használni hasonló feladatok elvégzéséhez.



Példa dinamikus programozásra

A példa a Fibonacci számok kiszámításának dinamikus programozása. A Fibonacci számokat a következőképpen lehet definiálni:

Fibonacci sorozat

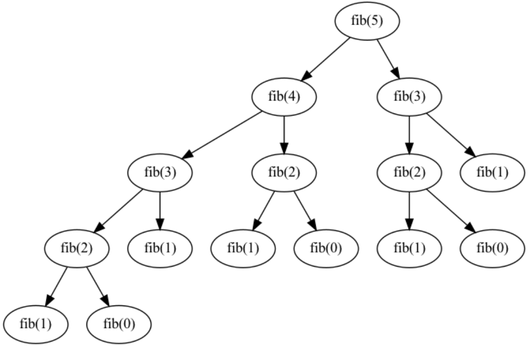
$$F_0 = 0\,; F_1 = 1$$

és

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Tehát a sorozat első pár tagja:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$$



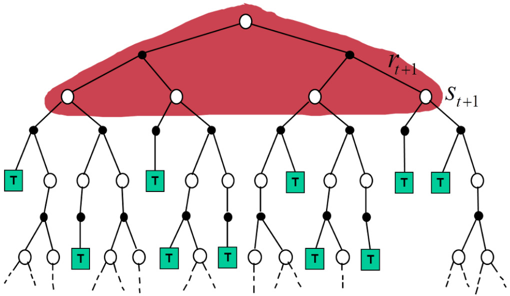
Dinamikus programozás az RL-ben

DP állapot-érték frissítési szabálya

$$V(s) \leftarrow E_{\pi}\left[r + \gamma V(s')\right]$$

- E_{π}: Várható érték π politika alatt
- $V(s)$: Cselekvés-érték függvény az aktuális s állapotban
- r: Jutalom a cselekvésért
- γ: Diszkont faktor
- $V(s')$: állapot-érték függvény s_{t+1} következő állapotban.

A megerősítéses tanulásban a dinamikus programozás egy szélességi bejárásnak felel meg. Mivel az állapotok tere túlságosan nagy, ez gyakran nem vezet megoldáshoz.



Markov döntési folyamatok dinamikus programozása

A Markov döntési folyamatok kielégítik a dinamikus programozás feltételeit.
Az értékfüggvény eltárolja és újra felhasználja a kiszámított megoldásokat: ez egy gyorsítótárként szolgál azoknak az információknak az MDP-ről, ami megadja, hogy mennyi a jutalom várható értéke egy s állapotból indulva:

$$V_\pi(s) = E_\pi\left[G_t | S_t = s\right] = E_\pi\left[\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k r_{t+k+1} \mid S_t = s\right]$$

A Bellman egyenlet megadja, hogyan kell lebontani az optimális állapot-érték függvényt két részre: a következő időlépés optimális cselekvése és az összes többi lépés optimális cselekvése:

$$V_\pi(s) = \sum_a \pi(a|s) \sum_{s',r} p\left(s', r | s, a\right) \left[r + \gamma V_\pi\left(s'\right)\right] \;\; minden\ s \in S - re$$

Dinamikus programozás felhasználásai

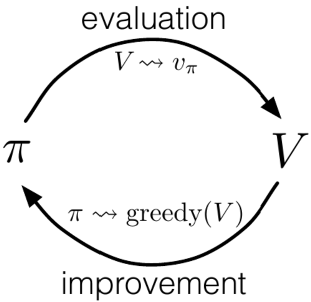
A dinamikus programozási eljárások akkor tudnak megoldani megerősítéses tanulási problémákat, ha adott a környezet dinamikája (az állapotok, az állapotátmeneti valószínűségek, jutalmak). Ezért két fő felhasználása van:

1. Politika kiértékelés

Ha adott egy $MDP(S, A, P, R, \gamma, s_0)$ és egy π politika, a feladat megtalálni π-hez tartozó v_π állapot-érték függvényt ahhoz, hogy meg lehessen mondani mennyire jövedelmező a politika.

2. Politika keresés

Ha adott egy $MDP(S, A, P, R, \gamma, s_0)$, a feladat megtalálni az optimális állapot-érték függvényt (v_π) és a hozzá tartozó π_* optimális politikát.

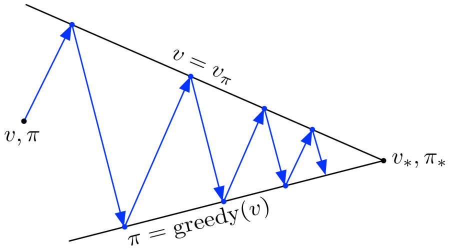


1. Bevezetés
2. A rabló probléma
3. Dinamikus programozás
4. Politika iteráció

Politika iteráció

Miután egy π politika javult v_π segítségével annak érdekében, hogy egy π' jobb politikát eredményezzen ki lehet számítani $v_{\pi'}$ javított állapot-érték függvényt és felhasználni egy újabb javított politika, π'' kiszámítására. Ezáltal egy monoton javuló politika - értékfüggvény sorozatot eredményezve:

$$\pi_0 \xrightarrow{K} V_{\pi_0} \xrightarrow{J} \pi_1 \xrightarrow{K} V_{\pi_1} \xrightarrow{J} \pi_2 \xrightarrow{K} \dots \xrightarrow{J} \pi_* \xrightarrow{K} V_*$$



- K: Kiértékelés
- J: Javítás
- V_*: Optimális állapot-érték függvény
- π_*: Optimális politika

Algoritmus 2: Politika kiértékelése

while $\Delta > \theta$ **do**
    $\Delta \leftarrow 0$; `/* Hiba nullára állítása */`
    for $s \in S$ **do**
        $v \leftarrow V(s)$; `/* Jelenlegi állapot-érték */`
        $V(s) \leftarrow \sum_{s',r} p\left(s', r, |s, \pi(s)\right)\left[r + \gamma V(s')\right]$; `/* Új állapot-érték */`
        $\Delta \leftarrow max(\Delta, |v - V(s)|)$; `/* Hiba kiszámolása */`
    end
end

- Δ: $V(s)$ jelen állapot-érték és $V(s')$ következő állapot-érték különbsége.
- θ: hibahatár: egy alacsony szám ami a becslés pontosságát adja.
- $p\left(s', r, |s, \pi(s)\right)$: s' következő állapot és r jutalom valószínűsége ha adott s állapot és $\pi(s)$ cselekvés π politika szerint (a környezet dinamikája).

Algoritmus 3: Politika javítása

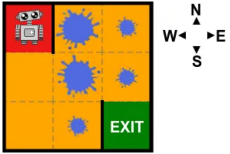
```
π_instabil ← false;                                      /* Politika instabilon indul */
while π_instabil do
    for s ∈ S do
        a ← π(s);                                        /* Jelenlegi cselekvés */
        π(s) ← argmax_a Σ_{s',r} p(s', r, |s, a) [r + γV(s')];   /* Új cselekvés */
        if a ≠ π(s) then
            π_instabil ← false;                          /* politika instabillá állítása */
        end
    end
end
return V ≈ V_*, π ≈ π_*
```

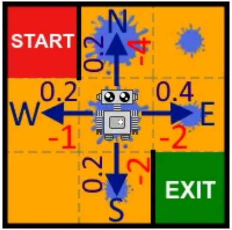
A politika ebben az esetben mohó, tehát úgy választja ki a cselekvést, hogy melyik következő állapothoz tartozik a lehető legnagyobb várható jutalom. Egy politika akkor számít stabilnak, amikor egyik lépésben sem változik a cselekvés.

Példa politika iterációra

Cél: a robotnak el kell jutnia a célhoz, miközben minél kevesebb üzemanyagot használ. A környezetben a következő változók érvényesek:

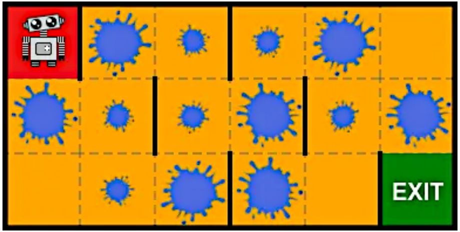
- Száraz kockák:
  - 1 időegység alatt megy végig rajta a robot. -1 jutalmat kap ha egy ilyen kockára lép.
  - A célállapotot mindig eléri, mert ilyenkor nem csúszik el.
- Kis tócsák:
  - 2 időegység rajta átjutni, tehát -2 jutalmat kap érte a robot.
  - A csúszás valószínűsége 0.4, ezért az idő 40%-ában nem éri el a célállapotot, hanem valamelyik másik lehetséges célállapotba csúszik át.
- Nagy tócsák:
  - 4 időegység alatt lehet rajta átjutni, ezért -4 jutalom jár érte.
  - A csúszás valószínűsége 0.6.





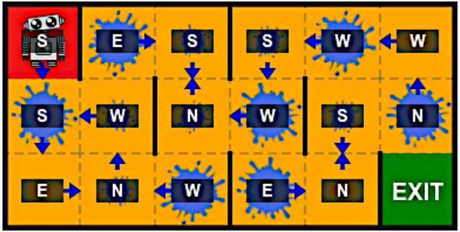
Példa politika iterációra

A robotnak a bal felső kockából kell a jobb alsóba eljutnia úgy, hogy a falakat megkerüli.



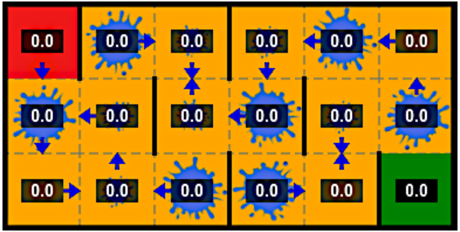
Példa politika iterációra

A kezdeti politika véletlenszerű és determinisztikus.



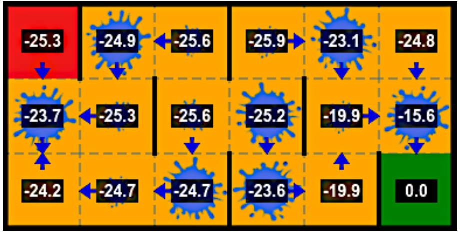
Példa politika iterációra

A $V(s)$ állapot értékek 0 értékkel indulnak.



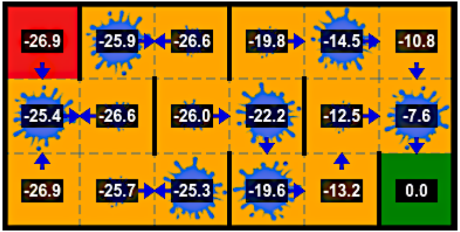
Példa politika iterációra

$\gamma = 0.9$ diszkont rátával a politika kiértékelés 75 iteráció alatt konvergál.



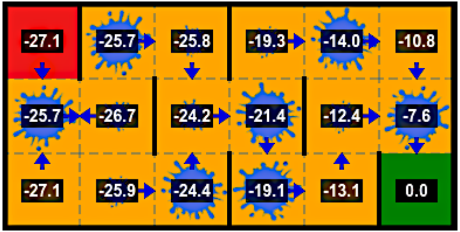
Példa politika iterációra

A következő iterációban a politika változik. A konvergálás 55 iteráció alatt megtörtént.



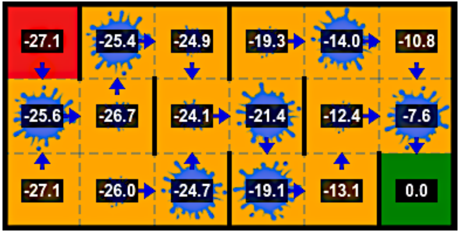
Példa politika iterációra

A következő futtatással 26 iteráció alatt konvergált.



Példa politika iterációra

A következő futtatással 21 iteráció alatt konvergált.



Példa politika iterációra

A következő futtatással 26 iteráció alatt konvergált.