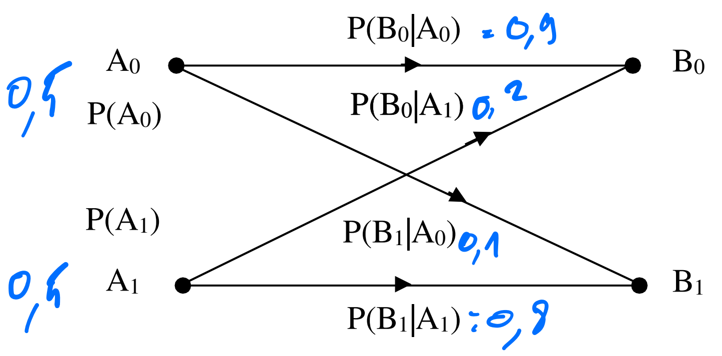
Théorie de l'information :

EX. 1 :

Une liaison numérique (voir figure ci-dessus) fonctionne en binaire, transmettant des 0 et des 1. Le bruit de cette liaison induit une confusion, ce qui conduit à interpréter un 1 comme un 0 et réciproquement. Soit respectivement A_0 et A_1 les événements "transmission d'un 0" et "transmission d'un 1" ; soit B_0 et B_1 les événements "réception d'un 0" et "réception d'un 1". En faisant l'hypothèse $P(A_0) = 0.5$, $P(B_1|A_0) = 0.1$ et $P(B_0|A_1) = 0.2$.



$P(A_1) + P(A_0) = 1$

$P(B_0) + P(B_1) = 1$

a) Evaluer $P(B_0)$ et $P(B_1)$
b) Si l'on reçoit un 0, quelle est la probabilité d'émission d'un 0 ?
c) Si l'on reçoit un 1, quelle est la probabilité d'émission d'un 1 ?
d) Calculer la probabilité d'erreur Pe.
e) Calculer la probabilité pour que le signal transmis soit correctement reçu par le récepteur.
f) On suppose maintenant que $P(A_0) = p$ et $P(A_1) = (1- p)$. Calculer la self-information moyenne de la source binaire et représenter son évolution en fonction de p. Conclure.

EX.2 :

Soit une source discrète sans mémoire. On donne r = 10 symboles/sec.

Symbole	P(xi)
A	1/2
B	¼
C	1/8
D	1/8

a) Calculer H(X)
b) Calculer R = r.H(X)
c) Que se passe-t-il si P(A) = P(B) = P(C) = P(D) ? Quelle est la valeur de R dans ce cas ?
d) On associe le code suivant aux symboles précédents :

Code	Li
0	1
01	2
011	3
0111	4

Exercice 1:

(a) $P(B_0|A_0) + P(B_1|A_0) = 1$

$P(B_0|A_1) + P(B_1|A_1) = 1$

$$P(B_0) = \left(P(B_0|A_0) + P(B_0|A_1)\right) \cdot \frac{P(A_0)+P(A_1)}{2}$$
$$= 1,1 \cdot 0,5 = 0,55$$

$$P(B_1) = \left(P(B_1|A_0) + P(B_1|A_1)\right) \cdot \frac{P(A_0)+P(A_1)}{2}$$
$$= 0,9 \cdot 0,5 = 0,45$$

(b) $$P(A_0|B_0) = \frac{P(B_0|A_0)\,P(A_0)}{P(B_0)}$$

$\frac{0,9}{1,1}$ plus simple

$$= \frac{0,9 \cdot 0,5}{0,55}$$

$$= \frac{9}{11} \simeq 0,818$$

(c) $$P(A_1|B_1) = \frac{P(B_1|A_1)\,P(A_1)}{P(B_1)}$$

$\frac{0,8}{0,9}$

$$= \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,45} = 8/9$$
$$\simeq 0,889$$

Théorème de Bayes:

$$P(A_x|B_x) \cdot P(B_x) = P(B_x|A_x) \cdot P(A_x)$$

$\Downarrow$

Conservation d'un flux

(d) $P_e = P(A_0) \cdot P(B_1 | A_0) + P(A_1) \cdot P(B_0 | A_1)$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}15$

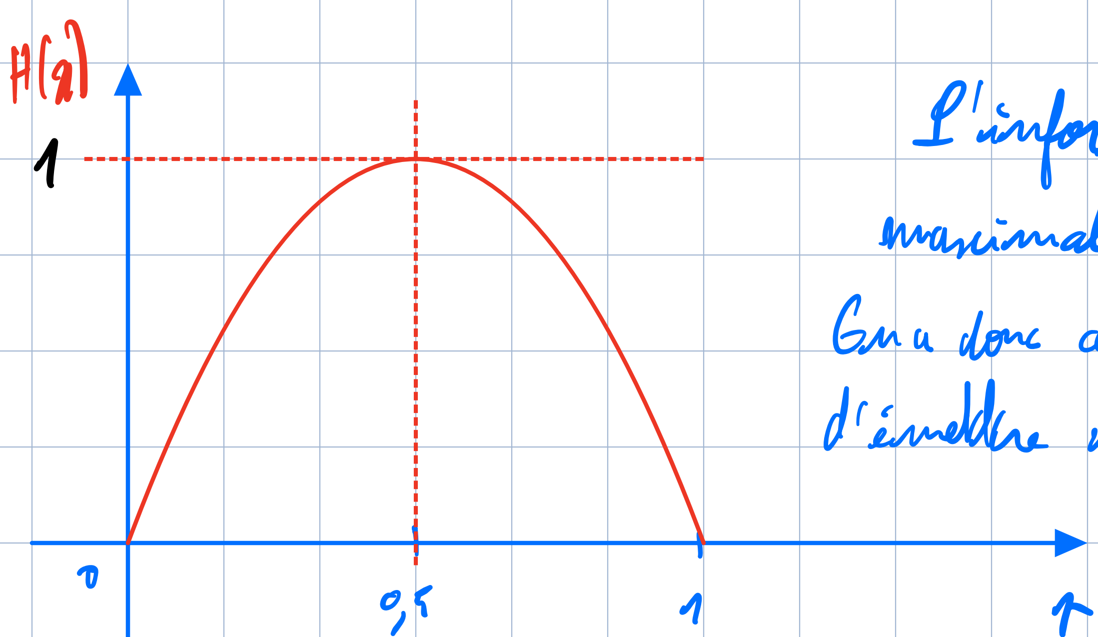
(e) $P_c = 1 - P_e = 0{,}85$

(f) $H(x) = \sum p_j \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_j}\right) = -\sum p_j \cdot \log_2(p_j)$

$= P(A_0) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P(A_0)}\right) + P(B_0) \cdot \log_2\left(\frac{1}{P(B_0)}\right)$

$= p \log_2\left(\frac{1}{p}\right) + (1-p) \log_2\left(\frac{1}{1-p}\right)$

$= 0{,}5 \log_2\left(\frac{1}{0{,}5}\right) + 0{,}5 \log_2\left(\frac{1}{0{,}5}\right) = 1$



L'information est maximale lorsque $p = 0{,}5$. On a donc autant de chance d'émettre des 0 que des 1.

Calculer $\overline{L}$ la longueur moyenne du code. Vérifier que $\overline{L} \geq H(X)$.

e) Calculer le rendement de ce code.

<u>EX. 3</u> :

Compression de données. Codage d'Huffmann.
Concevoir un code d'Huffmann pour la source χ = {x_1,x_2, … x_9} dont les probabilités respectives sont données par p = (0.2, 0.15, 0.13, 0.12, 0.1, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06).
Déterminer $\overline{L}$ et H(X) pour ce code.

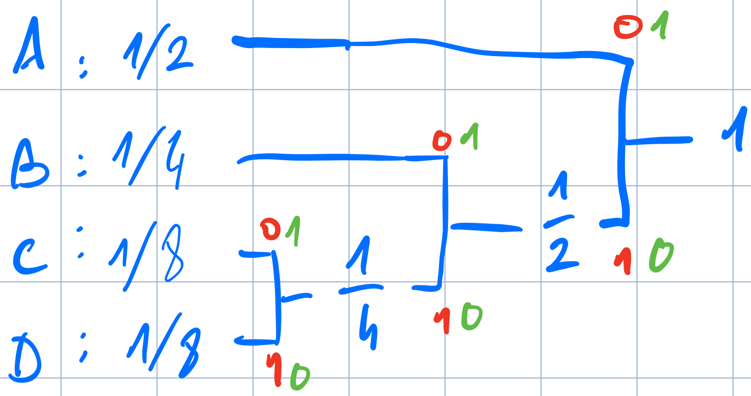
<u>EX. 4</u> :

Soit un canal téléphonique dont la bande passante est donnée par BP = [300, 3400] Hz. Tracer le graphe de C en fonction du SNR avec 0 < SNR < 60dB. En déduire le débit maximal sur une ligne téléphonique dont le SNR est de 30dB.

<u>EX. 5</u> :

A l'aide de Matlab, retracer le tracé du troisième théorème de Shannon (diapositive 21).

Exercice 2 :



	MSB	MSB
A :	0	1
B :	10	01
C :	110	001
D :	111	000

ⓐ $H(X) = -\sum p_j \log_2(p_j) = \frac{7}{4} = 1,75$

ⓑ $R = n H(x) = 10 \cdot 1,75 = 17,5$ bits/s

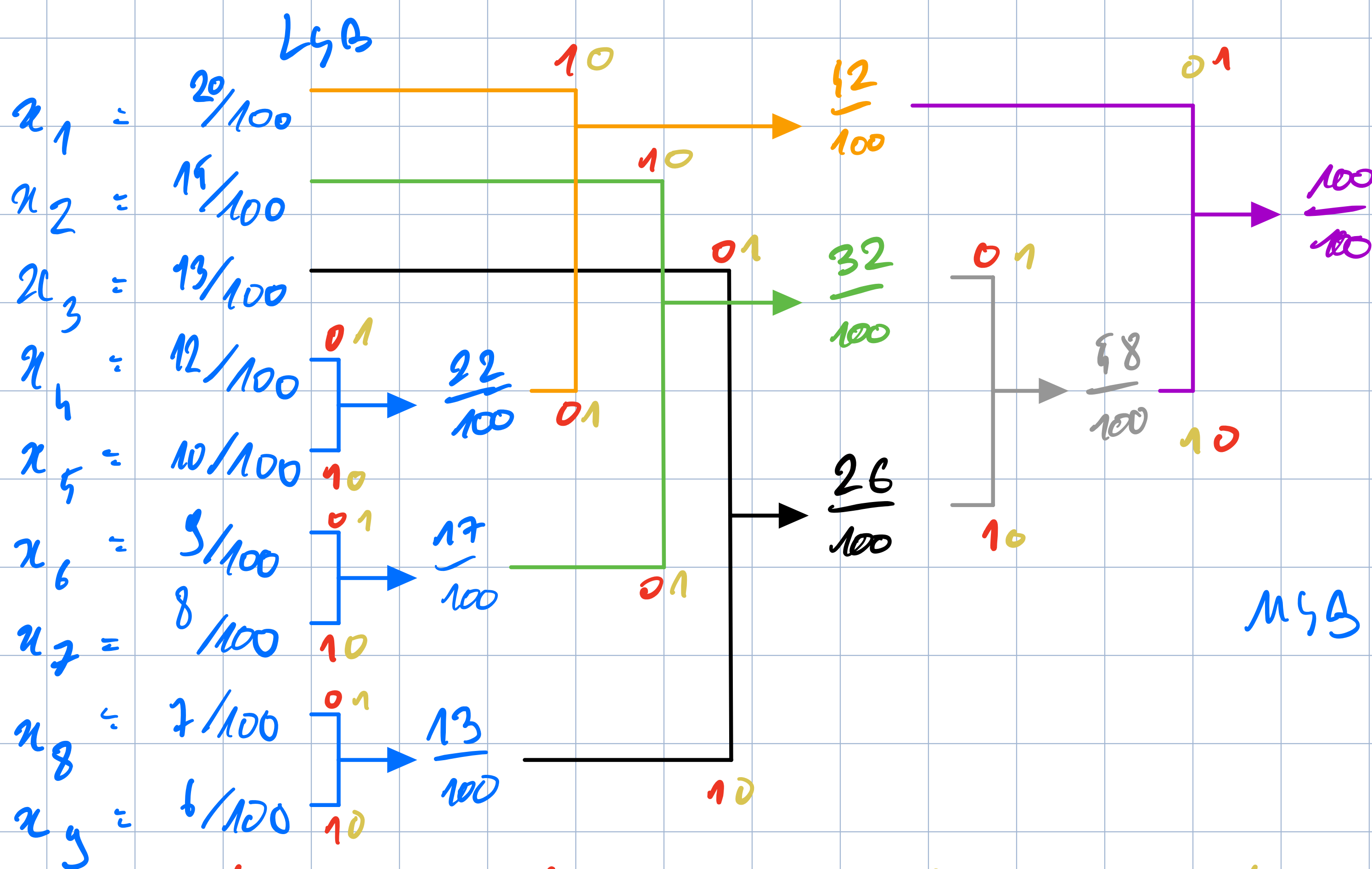
ⓒ $H(X) = -\left(\frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right)\right) \cdot 4 = 2$

$R = 10 \cdot 2 = 20$ bits/s

ⓓ $\bar{L} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 3 + \frac{1}{8} \times 4 = 1,875 \geq H(X) = 1,75$

ⓔ $\eta = \frac{H(X)}{\bar{L}} = \frac{14}{15} \simeq 93\overline{3} = 93,3\%$

Exercice 3 :



	LSB			MSB	LSB			MSB	
x_1 :			1	1			0	0	4
x_2 :		1	0	0		0	1	1	3
x_3 :		0	1	0		1	0	1	6
x_4 :		0	0	1		1	1	0	5
x_5 :		1	1	1		0	0	0	2
x_6 :	0	0	0	0	1	1	1	1	8
x_7 :	1	0	0	0	0	1	1	1	3
x_8 :	0	1	1	0	1	0	0	1	7
x_9 :	1	1	1	0	0	0	0	1	1

$$H(X) = -\sum^{j}\left[p_j \cdot \log_2(p_j)\right]$$

$$= -\left[0{,}2 \cdot \ln(0{,}2) + 0{,}15 \cdot \ln(0{,}15) + 0{,}13 \cdot \ln(0{,}13) + 0{,}12 \cdot \ln(0{,}12) + 0{,}1 \cdot \ln(0{,}1) + 0{,}09 \cdot \ln(0{,}09) + 0{,}08 \cdot \ln(0{,}08) + 0{,}07 \cdot \ln(0{,}07) + 0{,}06 \cdot \ln(0{,}06)\right] \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

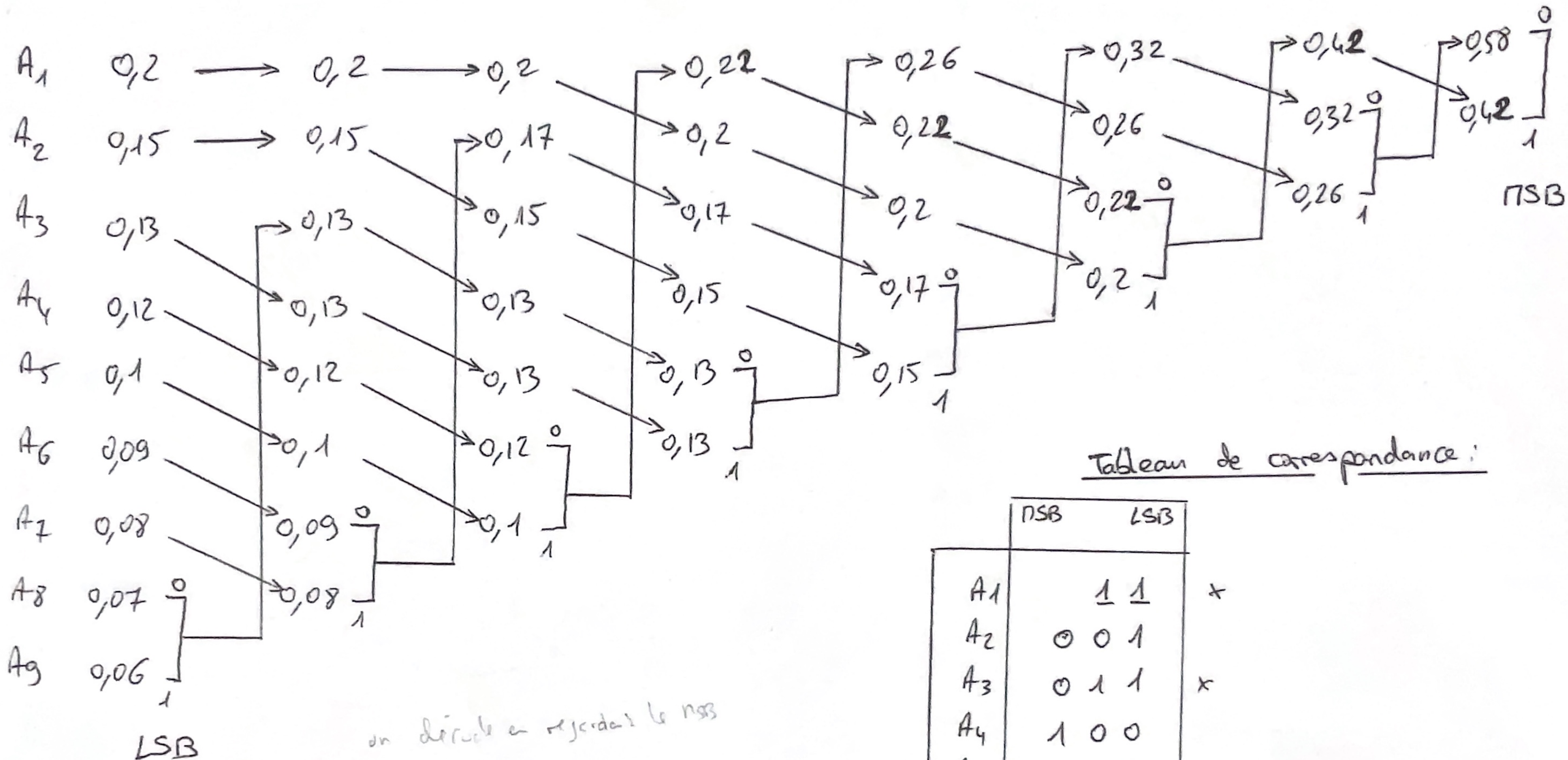
$$\simeq 3{,}073$$

$$\bar{L} = \sum^{j}\left[p_j \cdot l_j\right]$$

$$= \left[0{,}2 \cdot 2 + 0{,}15 \cdot 3 + 0{,}13 \cdot 3 + 0{,}12 \cdot 3 + 0{,}1 \cdot 3 + 0{,}09 \cdot 4 + 0{,}08 \cdot 4 + 0{,}07 \cdot 4 + 0{,}06 \cdot 4\right]$$

$$= 3{,}1$$

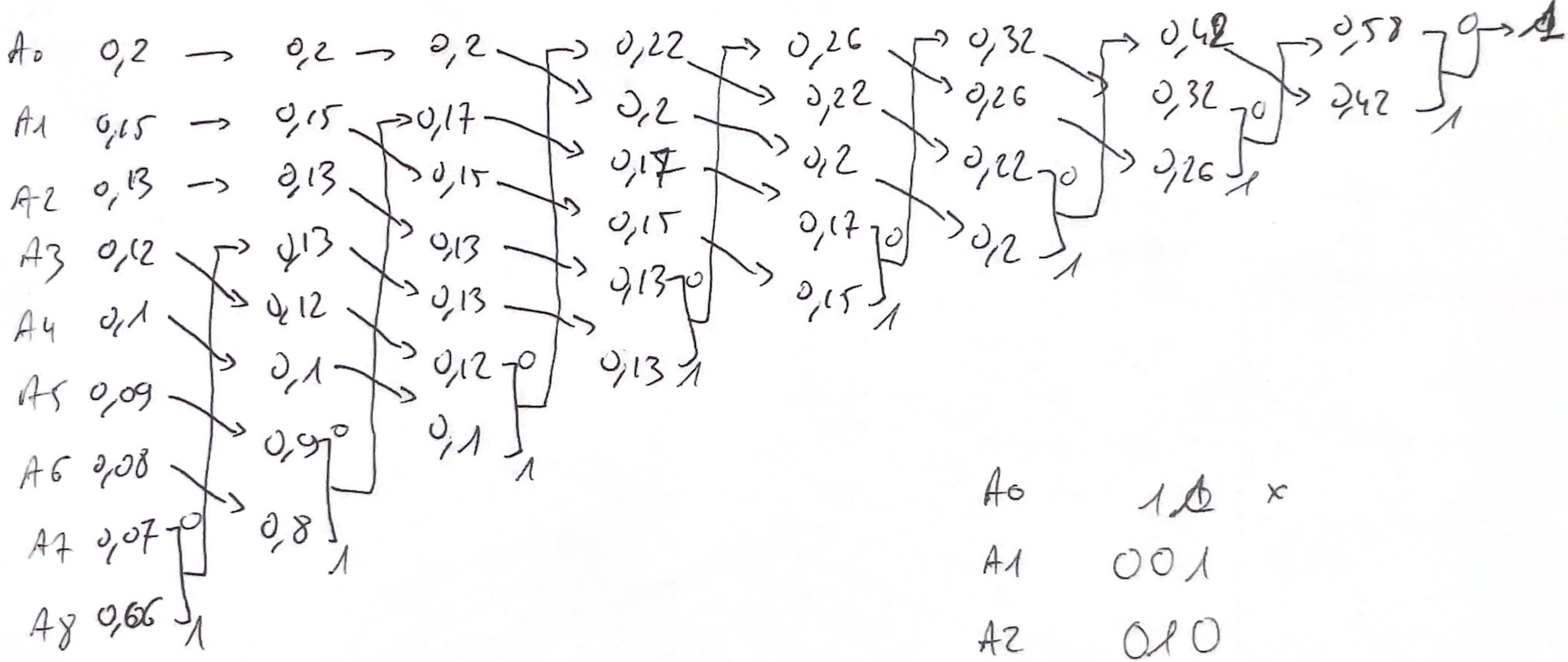
$$\eta = \frac{H(X)}{\bar{L}} = \frac{3{,}073}{3{,}1} \simeq 0{,}991 = 99{,}1\%$$



on déroule en regardant le MSB

Tableau de correspondance :

	MSB			LSB	
A1			1	1	x
A2		0	0	1	
A3		0	1	1	x
A4		1	0	0	
A5		1	0	1	
A6	0	0	0	0	
A7	0	0	0	1	
A8	0	1	0	0	
A9	0	1	0	1	



A0	1 0 ×
A1	0 0 1
A2	0 1 0
A3	1 0 0
A4	1 0 1
A5	0 0 0 0
A6	0 0 0 1
A7	0 1 1 0
A8	0 1 1 1 ×