

Phänomenologie der Teilchenphysik I-II

(Phenomenology of Particle Physics)

Vorlesung gehalten an der ETH Zürich und UniZ

HS 2007-SS 2008

Proff. Dr. André Rubbia, Ulrich Straumann und Daniel Wyler

24. September 2007

2

Teilchenphysik, HS 2007-SS 2008, Prof. A. Rubbia (ETH Zurich)

„Nothing can be more fatal than too confident reliance on mathematical symbols: for the student is only too apt to take the easier course, and consider the formula and not the fact to be the physical reality“,

William Thomson (Lord Kelvin).

Danksagung:

Dr. A. Badertscher hat durch die mit ihm geführten Diskussionen über Physik zum Inhalt der Vorlesung beigetragen, und ich möchte Ihm herzlich danken für das kritische Lesen des ganzen Vorlesungsskripts. ETH Zürich, September 2007.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Was ist die Teilchenphysik?	3
1.2	Die Teilchen	6
1.2.1	Klassifikation der Teilchen	6
1.2.2	Die Leptonen	6
1.2.3	Die Quarks	7
1.2.4	Die Hadronen	9
1.2.5	Eichbosonen	10
1.2.6	Weitere unbekannte Teilchen und Formen von Energie? .	13
1.3	Symmetrien	14
1.4	Die Theorie von Allem	17
2	Das Elektron und das Atom	21
2.1	Der Ursprung der Teilchenphysik	21
2.1.1	Die Kathodenstrahlröhre	21
2.1.2	Röntgenstrahlen (1895)	22
2.1.3	Drei Arten von Strahlen	22
2.2	Die Entdeckung des Elektrons	23
2.3	Die Entdeckung der Struktur der Atome	26
2.3.1	Das Streuexperiment von Rutherford	26
2.3.2	Der Rutherford-Streuung Wirkungsquerschnitt	28
2.4	Deutung des Wirkungsquerschnitts	30
2.4.1	Differentieller und totaler Querschnitt	30
2.4.2	Geometrische Interpretation	32
2.4.3	Die Luminosität	34
2.5	Die Entdeckung des Neutrons	35

3	Die nicht-relativistische Störungstheorie	39
3.1	Natürliche Einheiten	39
3.2	Die erste Quantisierung	40
3.2.1	Die Wellenfunktion	40
3.2.2	Die Operatoren	41
3.2.3	Die Schrödinger-Gleichung	42
3.2.4	Die Kontinuitätsgleichung	42
3.3	Störungstheorie	44
3.3.1	Fermis Goldene Regel	44
3.3.2	Anwendung: Elastische Streuung	47
3.4	Rutherford-Streuung	50
4	Die Lorentz-Transformationen	55
5	Relativistische Kinematik	57
6	Der Lagrange-Formalismus	59
7	Bosonfelder: Die Klein-Gordon Gleichung	61
8	Fermionfelder: Die Dirac Gleichung	63
9	Die Elektrodynamik und das Photon	65
10	Wechselwirkungen und die Propagatortheorie	67
11	Die Quantenelektrodynamik (QED)	69

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Was ist die Teilchenphysik?

Wenn man das Universum beobachtet, sieht es *a priori* sehr kompliziert und vielfältig aus. Trotz dieser grossen Komplexität gibt es eine grundlegende Einfachheit und eine genaue Gesetzmässigkeit in seiner inneren Struktur.

Historisch ist das Verständnis der fundamentalen Struktur der Materie immer ein wichtiger Aspekt der Naturphilosophie gewesen. Die Hauptfrage war:

Was sind die "letzten" Bausteine der Materie im Universum?

Hier heisst "letzte" die fundamentalsten, wesentlichen Teilchen, die in der Natur existieren. Die Antwort zu dieser Frage ist nicht so trivial. Wir nehmen heute an, dass es nicht-reduzierbare "letzte" Bausteine gibt, die sogenannten **Elementarteilchen**, die nicht weiter geteilt werden können. Alle Strukturen, die wir im Universum beobachten, sind aus diesen elementaren Bausteinen aufgebaut. In diesem Fall denkt man, dass man schliesslich die kleinsten Teile der Materie eventuell finden wird oder schon gefunden hat. Im Gegensatz dazu wäre es aber auch möglich, dass die Materie unendlich teilbar ist.

Die Entdeckung des Atoms und auch die des Elektrons und Protons haben eine wichtige Rolle gespielt in der Argumentation für die Existenz von nicht-reduzierbaren, unteilbaren Elementarteilchen. Wir bemerken:

Die Geschichte der Physik des infinitesimal Kleinen ist zum grössten Teil eine Geschichte der Entdeckung der aufeinanderfolgenden Schichten der Struktur der Materie.

Die Skalen der verschiedenen Schichten der Struktur der Materie sind in Abb. 1.1 gezeigt.

Das Konzept der Elementarteilchen ist daher nicht statisch, sondern hat sich mit der Zeit stark geändert. Durch Experimente mit grösserer Empfindlichkeit und Auflösung haben die experimentellen Physiker zuerst die Moleküle, dann

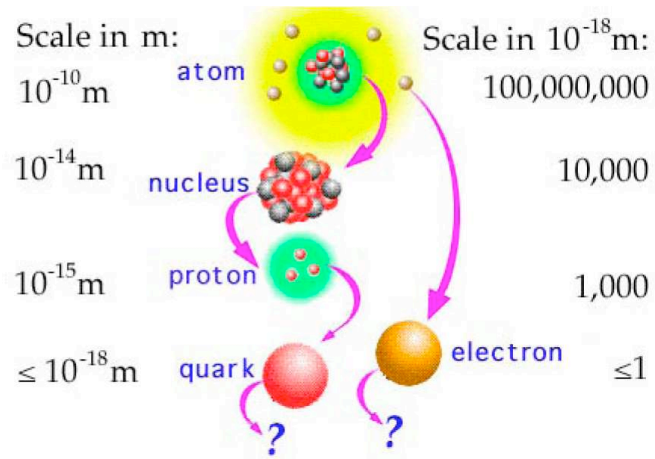


Abbildung 1.1: Die Skalen der verschiedenen Schichten der Struktur der Materie.

die Atome, nachher die **Elektronen** und Kerne und schliesslich die **Protonen** und **Neutronen**, die die Kerne aufbauen, entdeckt.

Heute werden die Protonen und die Neutronen nicht mehr als Elementarteilchen, sondern als ausgedehnte, aus **Quarks** bestehende Objekte betrachtet. Allgemein gehören die Protonen und Neutronen zu einer Familie von Teilchen, die als **Hadronen** bezeichnet werden. Alle Hadronen sind gebundene Quark-Systeme: sie können nur aus 3 Quarks (oder Antiquarks) oder aus einem Quark-Antiquark-Paar bestehen. Hadronen sind daher nicht strukturlose Elementarteilchen, obwohl sie eine wichtige Rolle in der Teilchenphysik spielen.

Das Elektron wird als ein **Lepton** klassifiziert. Heute denkt man, dass das Elektron elementar ist.

Bemerkenswert ist, dass die Elementarteilchen in *grossen Mengen* vorkommen. Diese grosse Zahl von Teilchen und ihre Wechselwirkungen bauen das Universum auf, wie wir es beobachten:

Die Elementarteilchen sind wie die "Schauspieler eines Theaterstücks". Die Raumzeit ist die Bühne des Schauspiels und jedes Teilchen spielt eine bestimmte Rolle.

Das Schauspiel ist nicht total zufällig. Es gibt kein Chaos im Universum: die fundamentalen Bausteine vereinigen sich nach einer Ordnung, die die von uns beobachteten makroskopischen Strukturen bewirkt. Wir bemerken:

Die Wechselwirkung der Elementarteilchen wird von einer kleinen Zahl von fundamentalen Kräften beherrscht.

Was sind die fundamentalen Kräfte? Diese Frage versucht die Teilchenphysik auch zu beantworten. Welchen fundamentalen Gesetzen oder Regeln folgen die fundamentalen Wechselwirkungen?

Heutzutage denkt man, dass die Zahl der fundamentalen Wechselwirkungen auf eine kleine Zahl gleich 3 reduziert werden kann: die **Gravitation**, die **elektroschwache Wechselwirkung**, und die **starke Wechselwirkung**. Die elektroschwache Kraft beschreibt die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung. Bei niedriger Energie sehen diese zwei Kräfte verschieden aus, aber wir wissen heute theoretisch und experimentell, dass die zwei Kräfte bei hohen Energien sehr ähnlich sind.

Historisch wurden verschiedene Kräfte durch unterschiedliche Theorien behandelt: Newton und Einstein haben die Gravitationstheorie entwickelt. Maxwell hat eine sehr wichtige Rolle im modernen Elektromagnetismus gespielt. Yukawa hat die Theorie der starken Kraft entwickelt und Fermi hat die erste Theorie der schwachen Wechselwirkung aufgeschrieben.

Durch Untersuchungen bezüglich der Vereinigung der Kräfte wurden grosse Fortschritte im Verständnis der grundlegenden Konzepte der Wechselwirkungen gemacht:

Heutzutage ist es gelungen, drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen (d.h. elektromagnetisch, stark, schwach) in ähnlicher mathematischer Form auszudrücken. Diese Theorie heisst das Standard-Modell der Teilchenphysik.

Die modernen Theorien sind sogenannte **Quantenfeld-Theorien** und basieren auf dem Prinzip der **Eichinvarianz**. Dieses Prinzip wird heute als fundamental betrachtet. Die modernen Theorien der elektromagnetischen, starken und schwachen Wechselwirkungen sind daher Eich-Quantenfeld-Theorien. Wir bemerken:

Quantenfeld-Theorien beschreiben Elementarteilchen als Anregungen von Quantenfeldern. Eichinvarianz heisst, dass die Theorie ungeändert bleiben muss, wenn man bestimmte Arten von Transformationen über alle Teilchenfelder in verschiedenen Punkten der Raumzeit unabhängig voneinander durchführt.

Wir werden dieses Konzept später in der Vorlesung weiter diskutieren.

1.2 Die Teilchen

1.2.1 Klassifikation der Teilchen

Die fundamentalen Bausteine der Materie werden als **Teilchen** bezeichnet. Die Leptonen und Quarks sind **Elementarteilchen**; die heutige obere Grenze für ihre Durchmesser ist 10^{-18} m. Sie werden daher als *punktförmig* betrachtet. Hadronen sind aus Quarks zusammengesetzte Objekte und besitzen einen Durchmesser von ungefähr 1 fm (oder 10^{-15} m).

Alle Teilchen (Quarks, Leptonen und Hadronen) werden durch spezifische Eigenschaften charakterisiert und klassifiziert, wie z.B. ihre **Ruhemasse**, ihre **elektrische Ladung**, und ihren **Spin** (Eigendrehimpuls) oder ihre spezifischen **Quantenzahlen** (*Parität*, *Isospin*, usw...). Man denkt, dass die wirklich elementaren Teilchen in drei Spin-Kategorien fallen:

- Spin 1/2: Fermionen wie die **Quarks** und **Leptonen**
- Spin 1: Bosonen wie die **Eichbosonen** ("Gauge-Bosons")
- Spin 0: Bosonen wie das **Higgs-Boson**. Das Higgs-Boson wird vom Standardmodell vorausgesagt, aber wurde bis jetzt nie beobachtet.

Obwohl die Theorie die Existenz von elementaren Spin-0-Teilchen voraussagt, wurden sie nie beobachtet:

Heute ist es experimentell gesichert, dass Elementarteilchen Spin-1/2 oder Spin-1 haben. Elementarteilchen mit Spin-0 werden gesucht (z.B. am LHC wird das Higgs-Boson nachgewiesen, wenn es existiert).

Zwei Teilchen mit denselben Eigenschaften (Ruhemasse, Ladung, Spin, andere Quantenzahlen) sind einander ganz gleich und *nicht unterscheidbar*. Teilchensysteme werden daher einer bestimmten Statistik folgen:

Gruppen von Fermionen folgen der Fermi-Dirac Statistik und Gruppen von Bosonen folgen der Bose-Einstein Statistik.

1.2.2 Die Leptonen

Leptonen sind unteilbare Teilchen und im Gegensatz zu Quarks spüren sie die starke Kraft nicht. Es gibt total 6 Leptonen (Siehe Tab. 1). Leptonen besitzen Spin-1/2 und sind daher Fermionen. Die geladenen Leptonen wie das Elektron, das Myon und das Tau spüren die elektrische und schwache Kraft. Die Neutrinos spüren nur die schwache Kraft.

Die Leptonen kommen in drei Familien vor. Das Elektron e und das Elektron-Neutrino ν_e gehören zur ersten Familie. Die Leptonen der drei Familien unterscheiden sich nur durch ihre Ruhemasse und sind sonst sehr ähnlich. Das Myon und das Tau sind ungefähr 200 mal resp. 3500 mal schwerer als das Elektron!

Die Ruhemassen der Neutrinos sind viel kleiner (verschwindend klein) als die der geladenen Leptonen. Die genauen Ruhemassen sind nicht bekannt und es gibt Grenzen dafür (Siehe Tabelle 1.1). Aber es gibt heute starke experimentelle Hinweise, dass sie nicht verschwinden. Neutrinos sind daher sehr leicht und viel leichter als die entsprechenden geladenen Leptonen. Wir bemerken z.B.:

$$\frac{m_{\nu_e}}{m_e} \leq \frac{3 \times 10^{-6} \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}} \approx 6 \times 10^{-6}$$

Die elektrische Ladung des Elektrons, Myons und Taus ist gleich -1 (in der Einheit der elementaren Ladung $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C). Die Neutrinos sind elektrisch neutral.

Zu jedem Lepton gibt es ein Antilepton (sein Antiteilchen). Das Teilchen und das Antiteilchen besitzen gleiche Ruhemassen, gleiche Spins und gleiche Lebensdauer. Die elektrischen Ladungen haben gleichen Betrag, besitzen aber umgekehrte Vorzeichen. Andere Quantenzahlen (oder sogenannte allgemeine Ladungen) sind auch entgegengesetzt, wie z.B. die **Lepton-Zahlen**. Wir definieren die **Elektron-Zahl** L_e :

$$L_e = \begin{cases} +1 & \text{für } e^- \text{ und } \nu_e \\ -1 & \text{für } e^+ \text{ und } \bar{\nu}_e \\ 0 & \text{alle anderen} \end{cases} \quad \text{Elektron-Zahl}$$

und in ähnlicher Weise werden die Myon-Zahl L_μ und die Tau-Zahl L_τ eingeführt. Diese Zahlen wurden eingeführt, weil, wie im Fall der elektrischen Ladung, die einzelnen Lepton-Zahlen in jeder Reaktion erhalten werden müssen.

Tabelle 1.1: **Die Leptonen**

Flavor	Symbol	Ruhemasse (MeV/c ²)	Lebensdauer τ (s)	Elektrische Ladung e
Elektron-Neutrino	ν_e	$< 3 \times 10^{-6}$	stabil (?)	0
Elektron	e^-	0.511	stabil	-1
Myon-Neutrino	ν_μ	< 0.170	stabil (?)	0
Myon	μ^-	105.7	$2,2 \times 10^{-6}$ $c\tau \approx 680$ m	-1
Tau-Neutrino	ν_τ	< 17	stabil (?)	0
Tau	τ^-	1776.9	$290,6 \times 10^{-15}$ $c\tau \approx 90$ μ m	-1

1.2.3 Die Quarks

Zurzeit sind 6 Quarks bekannt (Siehe Tab. 1.2). Die zwei leichten Quarks werden als u (up) und d (down) bezeichnet und gehören zur ersten **Familie** (oder **Generation**).

Die u - und d -Quarks (und das Elektron) bauen die erste Familie auf und stellen die grundlegenden Komponenten der stabilen Materie im Universum dar.

Die anderen Quarks werden als c (charm), s (strange), t (top) und b (bottom) bezeichnet. Die Quarks, wie die Leptonen, sind Spin-1/2 Teilchen. Im Gegensatz zu Leptonen besitzen Quarks nicht ganzzahlige elektrische Ladung: $+2/3$ für u, c, t und $-1/3$ für d, s, b (in der Einheit der elementaren Ladung e). Die Antiquarks besitzen entgegengesetzte Ladungen.

Der grosse Unterschied zwischen Leptonen und Quarks ist die Tatsache, dass die Quarks die starke Kraft spüren, während die Leptonen sie nicht spüren. D.h., dass die Quarks eine "starke Ladung" besitzen. Diese Art von Ladung wird als "Farbe" bezeichnet und kommt in drei Sorten vor: Rot, Blau und Grün. Jedes Quark kann in drei Farben existieren. Weil Leptonen "farblos" sind, spüren sie keine starke Kraft.

Teilchen mit nicht ganzzahliger Ladung wurden nie experimentell beobachtet. Diese Beobachtung kann mit dem Prinzip des "**Quark confinement**" erklärt werden. Die Quarks können nie frei sein. Sie existieren nur als Mitgeleid gebundener Systeme, d.h. nur in Hadronen. Hadronen müssen "farblos" sein (dies ist eine Annahme, die in Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen ist) und die Farben in einem Hadron müssen daher so sein, dass sie einander kompensieren: entweder eine Farbe-Antifarbe (wie z.B. Rot-Antirot) oder eine "farblose" Rot-Blau-Grün Kombination.

Tabelle 1.2: Die Quarks

Flavor	Symbol	Ruhemasse (MeV/c ²)	Elektrische Ladung e
up	u	1,5 bis 4,5	$+2/3$
down	d	5 bis 8,5	$-1/3$
charm	c	1000 bis 1400	$+2/3$
strange	s	80 bis 155	$-1/3$
top	t	$\approx 175'000$	$+2/3$
bottom	b	4000 bis 4500	$-1/3$

Weil Quarks nie frei beobachtet werden können, ist eine genaue Definition ihrer Ruhemasse nicht trivial. Fast freie Quarks können nur bei hoher Energie beobachtet werden, d.h. wenn die Auflösung des Experiments so gut ist, dass man mit einem einzelnen Quark wechselwirken kann. Die Ruhemasse des Quarks wird dann definiert als ein Parameter, den man in diesen Wechselwirkungen misst. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass für leichte Quarks die Ruhemasse eine kleine Rolle für die Gesamtmasse des Hadrons spielt, das durch sie aufgebaut wird.

1.2.4 Die Hadronen

Wir haben schon erwähnt, dass Hadronen als aus Quarks bestehende gebundene Systeme mit einer inneren Struktur betrachtet werden. Weil Quarks die starke Kraft spüren, werden sie durch sie und wegen ihrer Farbe gebunden. Trotzdem beobachtet man experimentell, dass die Hadronen immer "farblose" Kombinationen von Quarks sind. Diese Beobachtung stellt eines der fundamentalen Gesetze der Quantenfeldtheorie der starken Kraft (die **Quantenchromodynamik**) dar und wird als Hypothese des "**Quark confinement**" bezeichnet, nämlich, dass freie farbige Teilchen nicht existieren können. Als Folge können nur Kombinationen von 3 Quarks (oder Antiquarks) oder Quark-Antiquark-Paare existieren.

Ein Quark-Antiquark-Hadron wird als **Meson** bezeichnet und ein Hadron mit 3 Quarks wird als **Baryon** bezeichnet. Bis heute wurden ungefähr 100 Hadronarten in Experimenten erzeugt, nachgewiesen, identifiziert und klassifiziert und ihre Eigenschaften (Ruhemasse, Spin, Lebensdauer,...) bestimmt. Beispiele dafür mit den kleinsten Ruhemassen sind in Tabellen 1.3 und 1.4 aufgelistet. Der Name, der Isospin, der Spin, die Parität, die Ruhemasse, die Lebensdauer und der Hauptzerfallsmodus sind gezeigt.

Wir bemerken, dass Gruppen von Teilchen ähnliche Ruhemassen besitzen. Wir sehen auch, dass alle Teilchen mit gleichem Spin und gleicher Parität ähnliche Ruhemasse besitzen. Die Lebensdauern sind zwischen 10^{-8} und 10^{-20} Sekunden (ausser dem Proton, das vielleicht stabil ist, und dem Neutron, das eine Lebensdauer von ungefähr 1000 Sekunden hat). Man unterscheidet die elektromagnetischen Zerfälle mit Lebensdauern zwischen 10^{-20} und 10^{-16} Sekunden und die schwachen Zerfälle mit Lebensdauern grösser als 10^{-8} Sekunden.

Tabelle 1.3: Einige leichte Mesonen.

Meson	Isospin, Spin, Parität $I(J^{PC})$	Ruhemasse (MeV/c ²)	Lebensdauer τ (s)	Hauptzerfallsmodus
π^\pm	$1(0^-)$	139,6	26×10^{-9} $c\tau \approx 7,8$ m	$\mu\nu$
π^0	$1(0^-)$	135,0	$0,8 \times 10^{-16}$	$\gamma\gamma$
η	$0(0^-)$	547,3	$0,8 \times 10^{-18}$	$\gamma\gamma, 3\pi^0, \pi^+\pi^-\pi^0$
K^\pm	$1/2(0^-)$	493,7	12×10^{-9} $c\tau \approx 3,7$ m	$\mu\nu, \pi^\pm\pi^0$
K^0, \bar{K}^0	$1/2(0^-)$			$50\% K_S^0, 50\% K_L^0$
K_S^0		497,7	$0,9 \times 10^{-10}$ $c\tau \approx 2,7$ cm	$\pi^+\pi^-, 2\pi^0$
K_L^0		497,7	52×10^{-9} $c\tau \approx 15,3$ m	$\pi^+\pi^-\pi^0, 3\pi^0, \pi e \nu, \pi \mu \nu$

Wir haben schon gesagt, dass die Ruhemasse der leichten Quarks eine kleine Rolle für die Ruhemasse des Hadrons spielt. Wir erwähnen als Beispiel den Fall

Tabelle 1.4: **Einige leichte Baryonen.**

Baryon	Isospin, Spin, Parität $I(J^P)$	Ruhemasse (MeV/c ²)	Lebensdauer τ (s)	Hauptzerfalls- modus
p	1/2(1/2 ⁺)	938,3	$> 10^{33}$ a	unbekannt (stabil?)
n	1/2(1/2 ⁺)	939,6	885.7 ± 0.8	$p e^- \nu$
Λ^0	0(1/2 ⁺)	1115,6	$2,6 \times 10^{-10}$ $c\tau \approx 7,89$ cm	$p\pi^-, n\pi^0$
Σ^+	1(1/2 ⁺)	1189,4	$0,8 \times 10^{-10}$ $c\tau \approx 2,4$ cm	$p\pi^0, n\pi^-$
Σ^0	1(1/2 ⁺)	1192,6	7×10^{-20}	$\Lambda\gamma$
Σ^-	1(1/2 ⁺)	1197,4	$1,5 \times 10^{-10}$ $c\tau \approx 4,4$ cm	$n\pi^-$
Ξ^0	1/2(1/2 ⁺)	1314,9	$2,9 \times 10^{-10}$ $c\tau \approx 8,7$ cm	$\Lambda\pi^0$
Ξ^-	1/2(1/2 ⁺)	1321,7	$1,6 \times 10^{-10}$ $c\tau \approx 4,9$ cm	$\Lambda\pi^-$

des Protons: wir werden später sehen, dass ein Proton aus zwei u -Quarks und einem d -Quark besteht (d.h. ein uud -Baryon). Die u - und d -Quarks wurden in Tabelle 1.2 mit Ruhemassen kleiner als 10 MeV aufgelistet. Die Ruhemassen der Quarks tragen daher zur Masse des Protons ungefähr 20 MeV bei. Dieser Wert muss mit der gemessenen Ruhemasse des Protons von ungefähr 1000 MeV verglichen werden. Wir werden später sehen, dass die Differenz der Massen aus der Bindungsenergie der Quarks kommt. Eine ähnliche Situation findet man auch beim Neutron. Es folgt daraus, dass der grösste Teil der Masse der stabilen Materie, die wir im Universum sehen, aus der Bindungsenergie der starken Kraft zwischen Quarks kommt.

Wir werden die Hadronen später in Kap. 18 weiter diskutieren.

1.2.5 Eichbosonen

Die Tabelle 1.5 listet die vier fundamentalen Wechselwirkungen auf (wir unterscheiden elektromagnetische und schwache Wechselwirkung). Die effektive Kopplung ist ein Mass für die Stärke der Kraft. Man sieht, dass die Stärke der fundamentalen Kräfte einen grossen relativen Bereich umfassen: obwohl die Gravitationskraft sehr wichtig ist für die Bewegung von makroskopischen Körpern, ist sie bei Prozessen der Elementarteilchen so schwach, dass ihre Effekte auf die Teilchen bis jetzt nicht bemerkbar waren. Tatsächlich gibt es heute keine erfolgreiche Quantenfeldtheorie der Gravitation (Siehe Kap. 1.4) und die Gravitation wird daher in der Teilchenphysik vernachlässigt. Trotzdem denkt man, dass die Gravitation eine wichtige Rolle spielt (vielleicht die wichtigste

Rolle) bei der sogenannten Planck-Skala oder bei den extremen Distanzen kleiner als 10^{-35} m¹. Die typische Dauer der verschiedenen Wechselwirkungen sind in der Tabelle auch aufgelistet.

Tabelle 1.5: **Die fundamentalen Wechselwirkungen.**

Wechselwirkung	Effektive Kopplung	Eichboson	Ruhemasse GeV	Reichweite m	Typische Dauer (s)
Stark	1	Gluon	0	$< 10^{-15}$	10^{-23}
Elektromagnetisch	1/137	Photon	0	unendlich	10^{-20}
Schwach	10^{-5}	W^\pm, Z^0	80, 90	$< 10^{-18}$	10^{-10}
Gravitation	10^{-40}	Graviton ?	0	unendlich	

Wir bemerken, dass die Kräfte verschiedene Reichweite besitzen. Die Gravitation und die elektromagnetische Kraft haben unendliche Reichweite. Ihre Wirkung ist uns daher aus unserer täglichen Erfahrung bekannt. Die starken und schwachen Kräfte wirken nur, wenn die Distanz zwischen den Teilchen ziemlich klein ist: z.B. ist die Reichweite der starken Kraft ungefähr 1 fm (tatsächlich gleich dem Durchmesser eines Hadrons).

Wie erklärt man die Wirkung einer Kraft über eine Distanz im Raum? In der klassischen Theorie führt man ein Feld (z.B. elektrisches oder magnetisches Feld) ein. Ein Körper erzeugt ein Feld im ganzen Raum und die anderen spüren das Feld in einem bestimmten Punkt des Raums.

In der Quantenfeldtheorie werden Teilchen durch ein "Quantenfeld" dargestellt: in Übereinstimmung mit der Quantenmechanik kann ein Teilchen Wellennatur aufweisen. Ein Teilchen kann sich daher wie ein Feld verhalten, d.h. eine Wirkung über eine endliche Distanz ausüben.

Trotzdem kann dieses Bild eine plötzliche Wechselwirkung in bestimmten Punkten der Raumzeit zwischen zwei Teilchen nicht erklären. Betrachte z.B. die Kollision zwischen zwei Teilchen. Die Energien und Impulse der Teilchen können während der Wechselwirkung geändert werden. D.h., die Teilchen werden Energie und Impuls austauschen. Obwohl die Teilchen sich "hautnah" nähern, werden sie sich nicht im selben Punkt des Raums befinden. Weil die Relativitätstheorie voraussagt, dass es nicht möglich ist, Information schneller als mit Lichtgeschwindigkeit zu verbreiten, kann die Energie und der Impuls eines Teilchen nicht "direkt" zu dem anderen übertragen werden (noch einmal: die zwei Teilchen befinden sich nie im selben Punkt des Raums). Wir brauchen daher ein zusätzliches Feldquant, "ein Teilchen", das von einem Teilchen emittiert und vom anderen absorbiert wird:

¹Bei diesen Distanzen erwartet man, dass die Quanteneffekte der Gravitation sehr wichtig sind. Heutige Experimente können "nur" Distanzen grösser als 10^{-18} m testen und die Quantengravitation wird deshalb nicht so bald im Labor experimentell prüfbar!

In der Quantenfeldtheorie wird die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen durch den Austausch von einem Feldquant beschrieben, das Energie und Impuls überträgt. Das Feldquant ist ein Teilchen und besitzt alle Eigenschaften der gewöhnlichen Materie: Ruhemasse, Spin, Lebensdauer,... Die Austausch-Teilchen müssen Bosonen sein und werden als Eichbosonen bezeichnet.

Die Eichbosonen sind für die 3 Arten von Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen verantwortlich (*stark, elektromagnetisch, schwach*). In Abb. 1.2 sind die vier Wechselwirkungen zwischen zwei Teilchen in der Raumzeit-Darstellung gezeigt. Wir werden die Berechnung solcher Diagramme später in der Vorlesung diskutieren.

Weil es keine erfolgreiche Eich-Quantenfeld-Theorie der Gravitation gibt und weil die Quanteneffekte der Gravitation nur bei extremen Energien erwartet werden, wissen wir heute nicht, wie man die Beschreibung der Gravitationskraft mit Hilfe eines Eichbosons (das Graviton) überprüfen könnte.

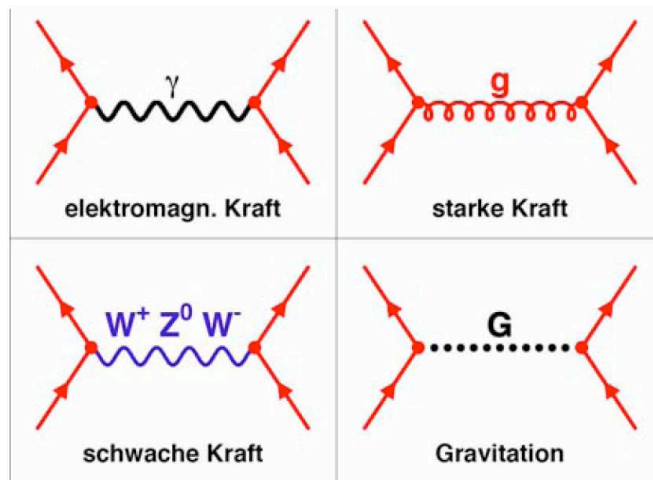


Abbildung 1.2: Die vier fundamentalen Kräfte, die zwischen den Teilchen wirken. Die Elementarteilchen sind als Pfeile dargestellt. Die elektromagnetische Kraft wird durch den Austausch von Photonen übertragen; die schwachen Kräfte durch W^+ , W^- und Z^0 Teilchen, die starke Kraft durch Gluonen g . Die Gravitationskraft wird vielleicht durch Gravitonen G übertragen.

Die starke Kraft wird durch Gluonen übertragen. Die Gluonen sind farbig und werden zwischen Quarks ausgetauscht. Die starke Wechselwirkung zwischen

Hadronen, die "farblos" sind, ist daher ein komplizierter Prozess: sie ist der resultierende Effekt der Wechselwirkungen zwischen den Quarks in den Hadronen, die nicht total abgeschirmt sind. Eine ähnliche Situation trifft man in Atomen an. Obwohl Atome elektrisch neutral sind, existiert eine resultierende Kraft von elektrischer Natur, die **van der Waals** Kraft, die das Resultat der Wechselwirkungen der einzelnen atomaren Elektronen und der Kerne ist. Die starke Kraft zwischen Hadronen entspricht daher keiner neuen fundamentalen Wechselwirkung.

1.2.6 Weitere unbekannte Teilchen und Formen von Energie?

In den letzten Jahren haben die Astrophysiker kosmologische Beobachtungen des Universums durchgeführt, die zum sogenannten "Concordance" Modell der Kosmologie führen. Das Modell stimmt gut mit den kosmologischen Beobachtungen auf allen Längenskalen des Universums überein. Die meisten Astronomen glauben heute an dieses Modell.

Das Modell sagt voraus, dass wir in einem Universum mit geringer Dichte von Materie leben. D.h., die Materie würde nur ungefähr 30% der kritischen Energie des Universums entsprechen. Stattdessen würde der grösste Teil der Gesamtenergie als sogenannte **Dunkle Energie** verbleiben, entsprechend ungefähr 70% heutigen Modellen zufolge (Siehe Abb. 1.3). Die Gesamtdichte ($30\%+70\%\approx 100\%$) führt zu einem flachen Universum.

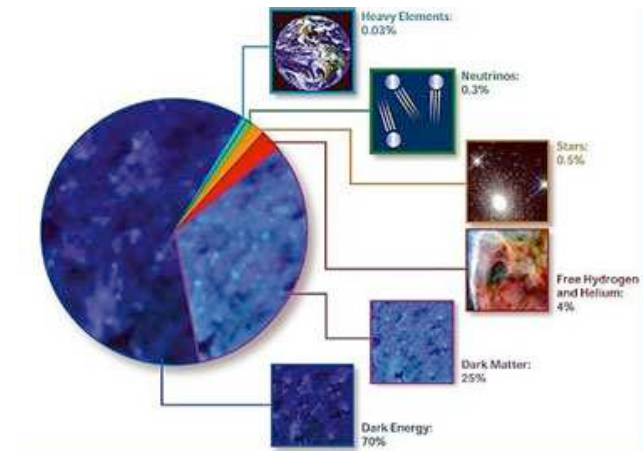


Abbildung 1.3: Concordance-Modell: Verteilung der Energie im Universum.

Die kosmologischen Beobachtungen zeigen auch, dass die meiste Materie nicht *sichtbar* ist. Die sichtbare Materie (Sterne, Planeten, Galaxien,...) entspricht nur ungefähr 4,5% der gesamten Energie. Neutrinos tragen ungefähr 0,3% bei. Aus was besteht die restliche **Dunkle Materie**, die ungefähr 25% der gesamten Energie ausmacht?

Bis heute ist es niemandem gelungen, eine eindeutige und erfolgreiche Interpretation der Dunklen Materie und Dunklen Energie in einer durch Experimente geprüften Teilchentheorie zu formulieren. Die genauen Bestandteile der Dunklen Materie sind noch unbekannt, es gibt jedoch mehrere potenzielle Kandidaten (z.B. *Weakly Interacting Massive Particle* oder WIMPs). Es gibt verschiedene Theorien jenseits des Standardmodells, die die Existenz solcher Teilchen voraussagen. Man kann z.B. die Supersymmetrische Erweiterung des SMs (SUSY) erwähnen. Hinweise für die Existenz dieser Teilchen wurden sehr aktiv untersucht. Man hofft z.B. solche SUSY-Teilchen beim LHC-Beschleuniger am CERN zu finden.

1.3 Symmetrien

Heutzutage scheint es, als ob man die **wesentlichen Symmetrien des Universums** und ihre **Verletzung** studieren muss, um das Verhalten von Elementarteilchen und den Unterschied in ihrem Verhalten zu verstehen.

Wenn wir z.B. die Periodizität der Atome im periodischen System der Elemente analysieren, können wir sie mit einer bestimmten räumlichen Anordnung der Elektronen um den Kern erklären. Diese räumliche Verteilung der Elektronen folgt aus fundamentalen Rotations-Symmetrien (z.B. von der Kugelsymmetrie). In ähnlicher Weise folgt die spezielle Relativitätstheorie aus der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit unter bestimmten Transformationen. In der Teilchenphysik spielen die Symmetrien eine extrem wichtige Rolle.

In der Tabelle 1.6 sind einige relevante Symmetrien, die wir in der Vorlesung diskutieren werden, aufgelistet. Wir unterscheiden:

- 1. Symmetrie unter einer **kontinuierlichen Transformation**
- 2. Symmetrie unter einer **diskreten Transformation**
- 3. Symmetrie unter einer **unitären (Phasen-)Transformation**

Hier versteht man unter diesen Transformationen *globale* Transformationen des Systems, d.h. Transformationen, die *nicht* von den Raumzeit-Koordinaten abhängen.

Eine *kontinuierliche* Transformation kann durch kontinuierliche (relle) Parameter beschrieben werden, und kann so nahe zur Identitäts-Transformation

gebracht werden, wie gewünscht. Die Identität wird definiert als die Transformation, die das System unverändert lässt. Man kann immer auch “*infinitesimale*” kontinuierliche Transformationen betrachten. Die Eigenschaften und die physikalischen Folgerungen der Transformation können im Fall der infinitesimalen Transformation studiert werden, und die Resultate werden für eine endliche Transformation auch gelten. Beispiele dafür sind Raumtranslation, Zeittranslation, Rotation oder Lorentz-Boost.

Im Gegensatz dazu sind diskrete Transformationen nicht kontinuierlich. Beispiele dafür sind Raumspiegelung, Zeitumkehr oder Ladungs-Konjugation. Eine diskrete Transformation kann nie als infinitesimal betrachtet werden.

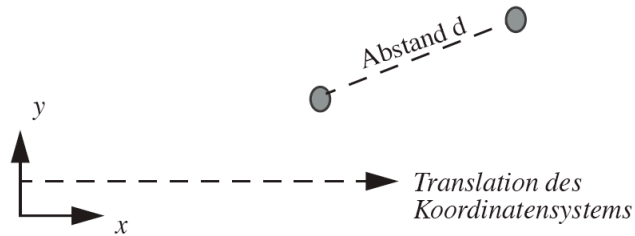
Tabelle 1.6: Beispiele von Symmetrien.

Transformation	Erhaltungsgesetz	Nicht-beobachtbarer Parameter
<i>Kontinuierliche Transformationen in Raumzeit</i>		
Raumtranslation	Impuls	Absoluter Ort
Zeittranslation	Energie	Absolute Zeit
Rotation	Drehimpuls	Absolute Richtung
Lorentz-Boost	Ruhemasse	Absolute Geschwindigkeit
<i>Diskrete Transformationen</i>		
Raumspiegelung	Parität	Links-Rechts-Unterscheidung
Zeitumkehr	Zeitumkehr-Invarianz	Absolute Richtung der Zeit
Ladungs-Konjugation	Ladungs-Parität	Absolutes Vorzeichen der elektrischen Ladung
<i>Phasen-Transformationen</i>		
$\Psi \longrightarrow e^{i\alpha Q} \Psi$	Allgemeine Ladung	Absolute Phase
Transformation im Nukleon-Raum	Isospin	Unterscheidung zwischen Proton und Neutron

Die (globalen) Phasentransformationen werden zur Beschreibung von “*inneren*” Symmetrien verwendet, bei denen die Raumzeit-Koordinaten (und damit die “*äusseren*” Teilcheneigenschaften wie Spin, Parität, Masse) unverändert bleiben. Sie wirken in einem Raum, in dem die Teilchenzustände durch innere Quantenzahlen (allg. Ladungen wie z.B. elektrische Ladung, Baryon-Zahl, Lepton-Zahl,...) charakterisiert sind.

Mit jeder Symmetrie-Transformation kann ein **Erhaltungsgesetz (und eine entsprechende erhaltene Grösse)** und ein **nicht-beobachtbarer Parameter** assoziiert werden. Dieses Resultat folgt aus dem berühmten Noether-Theorem und wird in der Vorlesung später diskutiert.

Wir können trotzdem ein einfaches Beispiel dazu erwähnen. Wir betrachten ein System mit zwei Teilchen, bei dem ihr Wechselwirkungs-Potential nur vom relativen Abstand der Teilchen abhängt. Es folgt daraus, dass eine beliebige Verschiebung des Ursprungs des Koordinatensystems keinen sichtbaren physikalischen Effekt erzeugt.



Der Gradient eines Potentials liefert die Kraft (mit negativem Vorzeichen). Der gesamte Gradient des Zweiteilchen-Systems muss verschwinden, weil das Potential nur vom Abstand abhängt, deshalb wird die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses des Systems auch verschwinden. Wenn im Allgemeinen absolute Koordinaten in einem System nicht beobachtet werden können, und eine räumliche Translation auf das Koordinatensystem angewendet wird, folgt daraus das Gesetz der Impulserhaltung.

In der Tabelle 1.6 sind die nicht-beobachtbaren Parameter und das entsprechende Erhaltungsgesetz aufgelistet. Wir bemerken:

Nicht alle Symmetrien sind genau erfüllt; trotzdem sind sie nützlich.

In diesem Fall sagt man, dass die Symmetrie verletzt wird, wenn der nicht-beobachtbare Parameter unter bestimmten Umständen beobachtbar ist. Man kann z.B. den Isospin erwähnen. Das Proton und das Neutron sehen sehr ähnlich aus. Vom Standpunkt der starken Kraft können sie nicht unterschieden werden: sie verhalten sich wie **Nukleonen**. D.h., dass Protonen und Neutronen dieselbe Kraft im Kern spüren. Die interne Symmetrie, die ein Proton in ein Neutron (und umgekehrt) umwandelt, entspricht einer Rotation im Isospin-Raum. Für die starke Kraft ist diese Symmetrie eine gute Symmetrie. Wäre diese Symmetrie exakt, wären die Protonen und Neutronen nicht unterscheidbar: ihre Massen müssten z.B. gleich sein, usw. In Wirklichkeit sind ihre Masse um 1/1000 verschieden. D.h., die Isospin-Symmetrie ist nicht exakt. Zusätzlich dazu verletzt die elektromagnetische Kraft die Isospin-Symmetrie. Die elektrische Ladung unterscheidet Neutronen (elektrisch neutral) von Protonen (elektrisch geladen). Wir werden andere Symmetrien später in der Vorlesung diskutieren, die nicht genau sind, und trotzdem sehr nützlich.

Bis jetzt haben wir von globalen Transformationen gesprochen. Wir bemerken:

Man kann auch lokale Symmetrien definieren, bei denen die Wirkung von den Koordinaten der Raumzeit abhängt.

Wir betrachten dieselben Transformationen, die wir früher als global definiert haben und wir nehmen an, dass ihre Parameter (z.B. die Phase der unitären Phasentransformation) von den Koordinaten der Raumzeit abhängen. Wir sagen dann, dass eine Symmetrie *lokal gemacht* wird. Die Bedingung der lokalen Symmetrie hat grosse Folgen für die dynamischen Eigenschaften des Systems. Es sieht so aus, als ob nur die Phasentransformationen lokal gemacht werden können. Tatsächlich ist diese Bedingung die wesentliche Annahme der Eich-Quantenfeld-Theorien (Eichinvarianz der Theorie).

Wir werden das in Kap. 22 weiter diskutieren.

1.4 Die Theorie von Allem

Die Standardmodell-Theorie ist eine sehr erfolgreiche Theorie. Sie wurde durch Experimente mit sehr grosser Genauigkeit überprüft. Trotzdem gibt es einige ungelöste Probleme mit dem Standardmodell:

1. Wie schon erwähnt, ist das Standardmodell eine Eich-Quantenfeld-Theorie. D.h., es basiert auf der Eichinvarianz. Das Problem ist, dass die Eichinvarianz Eichbosonen mit verschwindenden Ruhemassen erzwingt. Masselos sind jedoch nur das Photon und das Gluon, nicht aber die schwachen Eichbosonen W^\pm und Z^0 . Eine Lösung dieses Problems kann mit Hilfe des sogenannten **Higgs-Mechanismus** gewonnen werden. Der Higgs-Mechanismus sagt die Existenz eines elementaren Spin-0 Teilchens voraus: das Higgs-Boson. Das Higgs-Boson wurde gesucht aber bis jetzt nie beobachtet. Wir werden den Higgs-Mechanismus in Kap. 22 diskutieren.
2. Es gibt experimentelle Hinweise für eine kleine, aber nicht verschwindende Ruhemasse der Neutrinos. Die absolute Masse der Neutrinos ist heute nicht bekannt. Theoretisch kann das Standardmodell die Masse der (Dirac-)Neutrinos nicht erzeugen, ohne die Existenz einer neuen Art von Neutrinos (die sogenannten **rechtshändigen Neutrinos**) zu postulieren. Im Gegensatz dazu könnten Neutrinos sogenannten **Majorana-Teilchen** sein. In diesem Fall wären Neutrinos und Antineutrinos dieselben Teilchen. Die Entdeckung von Majorana Neutrinos wäre ein starker Hinweis auf Physik jenseits des Standardmodells. Wir werden Neutrinos in Kap. 21 diskutieren.
3. Aus was besteht die Dunkle Materie, für welche es indirekte experimentelle Hinweise aus der Beobachtung des Universums gibt? Besteht sie aus einer neuen Art von Elementarteilchen, die noch nicht entdeckt wurde?
4. Was ist die Dunkle Energie? Hat die Lösung dieser Frage etwas mit der Teilchenphysik zu tun?

5. Gilt die Standardmodell-Theorie bis zu "unendlich hoher" Energie oder gibt es "neue Physik" bei sehr hohen Energien? Es gibt mögliche Erweiterungen des Standardmodells, die auf grösseren Symmetrien als die des Standardmodells basieren (sogenannte **Grand-Unified-Theory** (GUT)). Solche Theorien sagen oft die Möglichkeit des Protonzerfalls voraus. Der **Protonzerfall** wurde gesucht, aber bis jetzt nie beobachtet.
6. Wie kann die Gravitation in die Teilchenphysik eingeführt werden? Gibt es zusätzliche Dimensionen (zusätzlich zur 4-dimensionalen Raumzeit) ?

Es gibt gute Hoffnungen, dass Fragen 1 bis 6 in den nächsten 20 Jahren experimentell besser verstanden und vielleicht geklärt werden können.

Theoretisch ist die Antwort zur Frage 6 die schwierigste. Bis heute sind die Versuche, eine Quantentheorie der Gravitation zu entwickeln, nicht erfolgreich gewesen. Eine Theorie, bei der alle diese Fragen 1 bis 6 gelöst sind, wäre die Theorie von Allem (sogenannte **Theory of Everything** (TOE)). Im Prinzip könnte diese Theorie alle Phänomene, die wir im Universum beobachten, im wesentlichen erklären. Siehe Abb. 1.4. Leider existiert diese Theorie heute nicht.

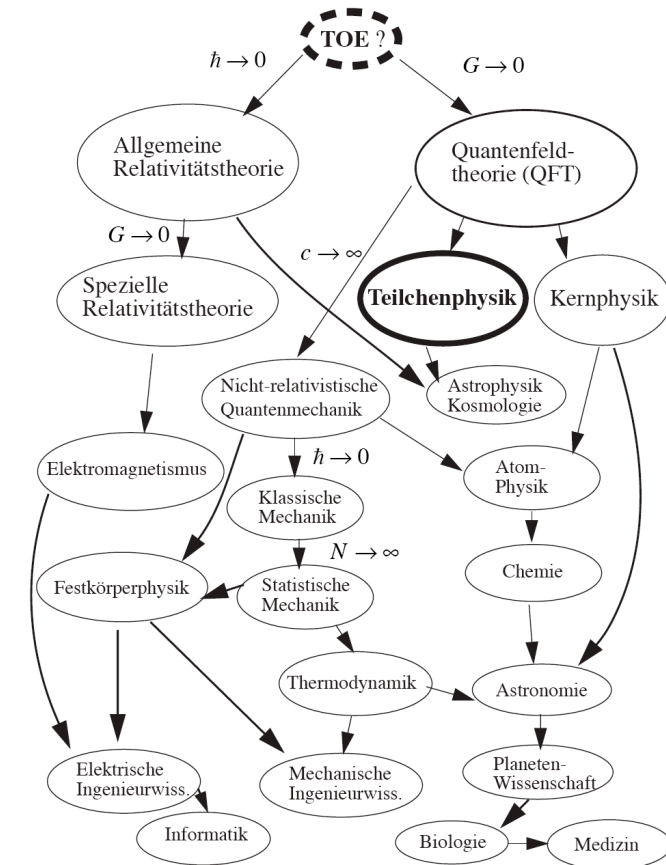


Abbildung 1.4: Die Theorie von Allem.

Kapitel 2

Das Elektron und das Atom

2.1 Der Ursprung der Teilchenphysik

Man sagt oft, dass die Entdeckung des Elektrons im Jahr 1897 der Geburt der Teilchenphysik entspricht. Vor 1897 existierte die **moderne atomare Beschreibung** der Materie nicht:

Man kannte die atomaren Absorptions- und Emissionspektren der Atome, aber es gab nur empirische Regeln dafür.

Eine wichtige Rolle am Anfang der Teilchenphysik spielte die **Kathodenstrahlröhre**.

2.1.1 Die Kathodenstrahlröhre

Bei der Kathodenstrahlröhre wird ein **Glasrohr** mit Hilfe einer **Vakuumpumpe** (solche Pumpen wurden am Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt) *evakuiert*. Siehe Abb. 2.1. Zwei elektrische Platten werden im Glasrohr eingebaut. Eine **elektrische Spannung** wird mit Hilfe von Batterien zwischen der **Kathode** und der **Anode** erzeugt. Man beobachtete experimentell:

ein elektrischer Strom durch den elektrischen Kreis kann erzeugt werden, wenn man das Rohr langsam mit Gas füllt.

Ein niedriger Druck genügt, um einen Strom zu beobachten. Man studierte die Eigenschaften der erzeugten Ströme als Funktion des Gasdrucks, der Art von Gas, der elektrischen Spannung, usw... Man weiss auch, dass bestimmte Arten von Gasen **Licht** erzeugen können, wenn ein elektrischer Strom fliesst. Schliesslich beobachtete man auch **Licht** am Ende des Rohrs, als man dort einen **Fluoreszenzschirm** aufstellte.

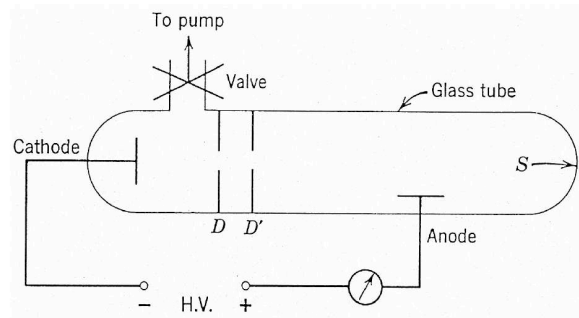


Abbildung 2.1: Die Kathodenstrahlröhre.

2.1.2 Röntgenstrahlen (1895)

Im Jahr 1895 entdeckte Röntgen "zufällig" die sogenannten **Röntgenstrahlen** ("X-rays"). Diese Strahlen werden in der Kathodenstrahlröhre erzeugt. Er beobachtete, dass sie durchdringend und unsichtbar waren. Sie konnten mit Hilfe von **photographischen Filmen** nachgewiesen werden, indem die Strahlen den Film schwärzten.

2.1.3 Drei Arten von Strahlen

Im Jahr 1896 entdeckte Becquerel die **natürliche Radioaktivität**, d.h., es gibt in der Natur ein **radioaktives Element**, das spontan Strahlen emittiert: das **Uran**. Uran schwärzte photographische Filme.

Im Jahr 1898 entdeckten Marie und Pierre Curie, dass verschiedene Elemente existieren, die auch radioaktiv sind: das **Polonium** und **Radium**. Diese Elemente schwärzten auch photographische Filme.

Am Ende des 19. Jahrhunderts wusste man, dass es in der Natur *drei Arten von radioaktiven Strahlen* gibt. Diese Formen von Strahlen wurden mit Hilfe eines magnetischen Feldes charakterisiert. Siehe Abb. 2.2. Die Strahlen von verschiedenen radioaktiven Elementen wurden in eine bestimmte Flugrichtung gezwungen. Man erzeugte ein zur Ebene senkrechtes magnetisches Feld in einem Gehäuse, das evakuiert wird. Die Strahlen werden mit Hilfe einer photographischen Platte nachgewiesen.

Man beobachtete experimentell:

Es gab drei unterschiedliche Zonen auf dem Film, die geschwärzt wurden. Diese drei Zonen entsprechen den drei Arten von Strahlen: die sogenannten Alpha-,

Gamma- und Beta-Strahlen.

Man schloss daraus, dass Alpha- und Beta-Strahlen elektrisch geladen sind, weil sie durch ein magnetisches Feld abgelenkt werden. Die Gamma-Strahlen sind elektrisch ungeladen.

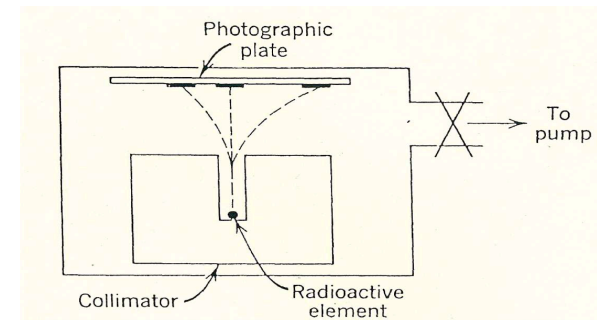


Abbildung 2.2: Ein Apparat, um die verschiedenen Arten von Strahlen zu studieren.

Man beobachtete auch, dass die Strahlen mehr oder weniger durchdringend durch Materie sind:

1. Die Alpha-Strahlen verschwinden wenn das Gehäuse nicht evakuiert ist. Die Alpha-Strahlen fliegen nur einige Zentimeter durch Luft mit normalem Druck.
2. Einige Millimeter von dichter Materie sind genügend, um die Beta-Strahlen zu stoppen.
3. Die Gamma-Strahlen, die mit Röntgen-Strahlen identifiziert wurden, sind die durchdringendsten: man braucht einige Zentimeter Blei, um die Intensität der Strahlen zu reduzieren.

2.2 Die Entdeckung des Elektrons

J.J. Thompson hat das Elektron 1897 entdeckt:

Er hat eine Kathodenstrahlröhre benutzt und hat eine genaue Messung des Verhältnisses e/m der Teilchen durchgeführt, die in der Kathodenstrahlröhre emittiert wurden, wobei e die elektrische Ladung und m die Masse der Teilchen bedeutet.

Seine experimentelle Anordnung ist in Abb. 2.3 gezeigt. Am Ende des Glasrohrs wurde ein Fluoreszenzschirm aufgestellt. Damit konnte man die Bahnkurve der Teilchen bestimmen. Um das Verhältnis e/m der von der Kathode emittierten Teilchen zu messen, hat J.J. Thompson ein elektrisches und ein magnetisches Feld im Rohr erzeugt. Das E - und B -Feld wurden senkrecht zu einander gerichtet.

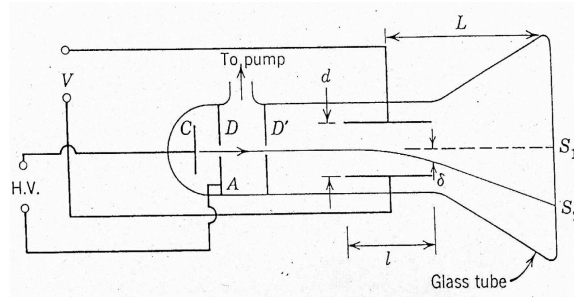


Abbildung 2.3: Die experimentelle Anordnung, um das Verhältnis e/m zu messen.

Er beobachtete die Lage des Flecks auf dem Fluoreszenz-Schirm und bemerkte:

1. Die emittierten Teilchen mussten elektrisch geladen sein, weil die Position des Flecks mit der Intensität des E - oder B -Feldes zusammenhängt.
2. Aus der Richtung der Krümmung sind die Strahlen negativ geladen.

Quantitativ können wir sagen:

E-Feld: zwei parallele metallische Platten der Länge ℓ und dem Abstand d mit Spannung V

$$|\vec{E}| = \frac{V}{d} \longrightarrow \text{Kraft } |\vec{F}_E| = | -e\vec{E}| = \frac{eV}{d} \quad (2.1)$$

B-Feld: senkrecht zum E -Feld und in guter Näherung auch zur Geschwindigkeit

$$\text{Kraft } |\vec{F}_B| = |q\vec{v} \times \vec{B}| = | -e\vec{v} \times \vec{B}| = evB \quad (2.2)$$

wobei \vec{v} die Geschwindigkeit des Teilchens ist.

Die Felder sind so gerichtet, dass die magnetischen und elektrischen Kräfte entgegengerichtet sind. Man kann die Stärke der Felder so wählen, dass die Teilchen nicht abgelenkt werden, d.h., beide Kräfte kompensieren einander

$$\frac{eV}{d} = evB \longrightarrow v = \frac{V}{dB} \quad (2.3)$$

und so wird die Geschwindigkeit des Teilchens gemessen.

Nun wird das magnetische Feld ausgeschaltet und die Ablenkung S_1S_2 des Lichtflecks auf dem Schirm gemessen. Es gilt (Siehe Abb. 2.3),

$$\delta(\ell) = \frac{1}{2}at^2 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{eV}{md} \right) \left(\frac{\ell}{v} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m} \right) \left(\frac{V}{d} \right) \left(\frac{\ell}{v} \right)^2 \quad (2.4)$$

und die Ablenkung auf dem Schirm ist gleich

$$S_1S_2 \approx \frac{d\delta(\ell)}{d\ell} L = \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m} \right) \left(\frac{V}{d} \right) \left(\frac{1}{v} \right)^2 2\ell L \propto \left(\frac{e}{m} \right) \frac{1}{v^2} \quad (2.5)$$

Weil die Geschwindigkeit v mit eingeschaltetem E - und B -Feld gemessen wurde, konnte J.J. Thompson das Verhältnis e/m berechnen.

J.J. Thompson beobachtete, dass das gemessene Verhältnis unabhängig von der Art des Gases ist. Er schloss daraus, dass das Verhältnis eine Eigenschaft der Strahlen, die von der Kathode emittiert wurden, darstellt. Wie konnte man sicher sein, dass er ein neues Teilchen entdeckt hatte?

Das Verhältnis $(e/m)_{\text{Ionen}}$ für Ionen war aus elektrolytischen Experimenten bekannt, wobei e die gesamte elektrische Ladung ($Q=I\Delta t$) und m die gesamte Masse bedeutet, die auf der Elektrode abgeschieden wird.

Experimentell wurde gefunden, dass gilt,

$$\left(\frac{e}{m} \right)_{J.J.Thompson} \gg \left(\frac{e}{m} \right)_{\text{Ionen}} \quad (2.6)$$

und deshalb

$$\text{entweder } e \gg e_{\text{Ionen}} \quad \text{oder } m \ll m_{\text{Ionen}} \quad (2.7)$$

J.J. Thompson nahm an, dass

$$|e| = |e_{\text{Ionen}}| \quad \text{und} \quad m \ll m_{\text{Ionen}} \quad (2.8)$$

d.h., die Masse des unbekannten Teilchens musste viel kleiner sein als die Masse eines Ions. Der grösste Wert für $(e/m)_{\text{Ionen}}$ erhält man für Wasserstoff. J.J. Thompson fand, dass

$$\left(\frac{e}{m} \right)_{J.J.Thompson} \approx 1836 \left(\frac{e}{m} \right)_{H^+} \quad (2.9)$$

Er schloss daraus, dass die Strahlen, die von der Kathode der Kathodenstrahlröhre emittiert wurden, Teilchen mit sehr niedriger Masse entsprechen. Er hatte das Elektron entdeckt!

2.3 Die Entdeckung der Struktur der Atome

J.J. Thompson verstand, dass das Elektron, das er entdeckt hatte, eine fundamentale Rolle in der Struktur der Materie spielen muss. Es gab trotzdem mindestens zwei Probleme:

1. das Elektron ist negativ geladen: was kompensiert diese Ladung?
2. das Elektron ist sehr leicht: woher kommt die Masse der Atome?

2.3.1 Das Streuexperiment von Rutherford

Im Jahr 1911 hat Rutherford die Resultate seines wichtigen **Streuexperiment¹** mit α -Teilchen veröffentlicht.

Streuexperiment: eine der wichtigsten experimentellen Entwicklungen der Teilchenphysik.

Rutherford hatte die Identität von α -Strahlen mit einer ähnlichen Messung wie J.J. Thompson gefunden: er hatte das Verhältnis (e/m) für α -Strahlen gemessen.

α -Teilchen: doppelt ionisiertes Heliumatom

Experimentelle Anordnung: Ein paralleler Strahl von α -Teilchen wurde senkrecht auf eine $0,4\mu\text{m}$ dünne Goldfolie gerichtet. Siehe Abb. 2.4.

Wegen der elektromagnetischen Wechselwirkung wird ein Stoss zwischen den α -Teilchen und den Goldatomen stattfinden.

Während des Stosses wird Impuls zwischen den α -Teilchen und den Atomen übertragen. Die α -Teilchen werden abgelenkt. Experimentell beobachtete man:

Die meisten α -Teilchen werden in Vorwärtsrichtung gestreut. Eine geringe Anzahl wird nach rückwärts gestreut.

Rutherford schloss aus seinen Experimenten, dass eine Rückwärtsstreuung von α -Teilchen nicht von den Elektronen verursacht werden kann, da die Masse der Elektronen viel zu gering ist, um die schweren α -Teilchen so stark ablenken zu können.

Nach der Impulserhaltung muss die Masse des Stosspartners viel grösser als die des α -Teilchens sein. Rutherford stellte daraufhin sein Atommodell vor, bei dem ein positiv geladener massereicher Kern von einer fast masselosen Hülle von negativ geladenen Elektronen umgeben ist.

Mit diesen Experimenten bewies Rutherford, dass ein Atom aus einem positiv geladenen Kern mit einer äusseren Elektronenhülle besteht. Der Kern des leichtesten bekannten Atoms (Wasserstoff) wurde von Rutherford als **Proton** bezeichnet.

¹H. Geiger (1882-1945), E. Marsden (1889-1970), E. Rutherford (1871-1937)

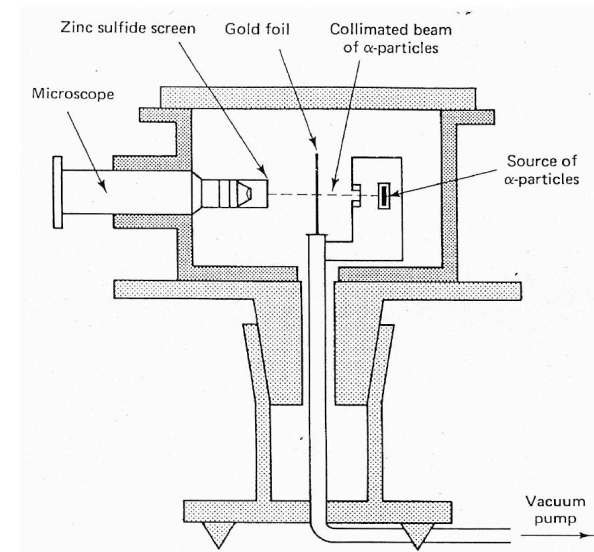


Abbildung 2.4: Die Anordnung des Streuexperiments von Rutherford *et al.*

2.3.2 Der Rutherford-Streuung Wirkungsquerschnitt

Um sein Modell mit der Theorie zu vergleichen, wurden der Streuwinkel und der Stossparameter eingeführt (Siehe Abb. 2.5)

Streuwinkel: θ

Stossparameter b : (vor dem Stoss)

und die Bahnkurve des α -Teilchens wurde mit Hilfe der klassischen Mechanik vorausgesagt.

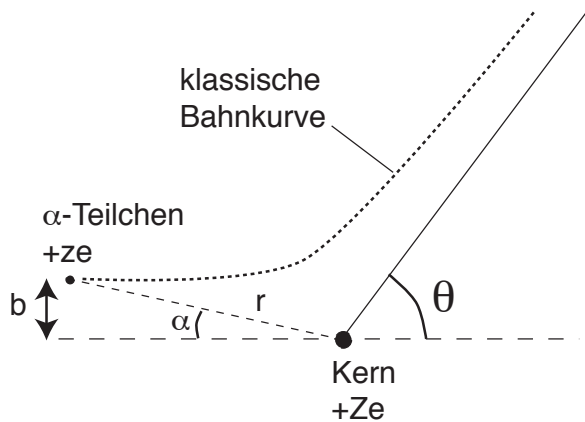


Abbildung 2.5: Die Definition der Größen für das Streuexperiment.

Die Coulombsche Kraft ist zentral (der gesamte Drehimpuls wird erhalten) und wir nehmen an, dass der Kern sich während des Stosses nicht bewegt. Durch die Lösung des Newtonschen Bewegungsgesetzes für eine Kraft der Form

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r^2} \quad (2.10)$$

findet man die folgende Bahnkurve

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \sin \alpha + \frac{D}{2b^2} (\cos \alpha - 1) \quad \text{wobei} \quad D \equiv \frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)E} \quad (2.11)$$

wobei $E = (1/2)mv^2$ die kinetische Energie ist. Wenn r nach unendlich geht, dann gilt

$$\sin \alpha + \frac{D}{2b} (\cos \alpha - 1) = 0 \longrightarrow \frac{2b}{D} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2} \quad (2.12)$$

Mit $\theta = \pi - \alpha$ erhalten wir eine Beziehung zwischen dem Streuwinkel θ und dem Stossparameter b :

$$\tan \frac{\pi - \theta}{2} = \cot \frac{\theta}{2} = \frac{2b}{D} \longrightarrow b(\theta) = \frac{zZe^2}{2(4\pi\epsilon_0)E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (2.13)$$

Wir definieren nun, dass

wenn das α -Teilchen mit einem Stossparameter zwischen b und $b+db$ auf den Kern trifft, wird es nach dem Stoss einen Streuwinkel zwischen θ und $\theta+d\theta$ besitzen.

Wenn wir die Fläche $d\sigma$ und den Raumwinkel $d\Omega$ betrachten (Siehe Abb. 2.6), erhalten wir

$$d\sigma \equiv b db d\phi \quad \text{und} \quad d\Omega \equiv d \cos \theta d\phi \quad (2.14)$$

d.h.

wenn das α -Teilchen durch die Fläche $d\sigma$ auf den Kern trifft, wird es nach dem Stoss in den Raumwinkel $d\Omega$ streuen.

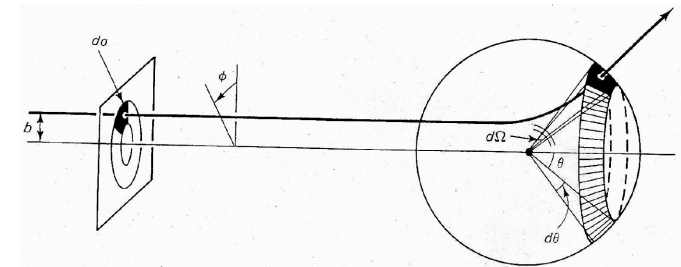


Abbildung 2.6: Ein Teilchen, das durch die Fläche $d\sigma$ auf den Kern trifft, wird nach dem Stoss in den Raumwinkel $d\Omega$ streuen.

Wir bestimmen das Verhältnis

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &\equiv b \frac{db}{d \cos \theta} = -\frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \\
 &= -\frac{b}{\sin \theta} \left(\frac{zZe^2}{2(4\pi\epsilon_0)E} \right) \frac{d}{d\theta} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right) \\
 &= -\left(\frac{zZe^2}{2(4\pi\epsilon_0)E} \right)^2 \frac{\cot \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right) \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{8} \left(\frac{zZe^2}{2(4\pi\epsilon_0)E} \right)^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \frac{1}{16} \left(\frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)E} \right)^2 \frac{1}{\sin \theta} \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \\
 &= \left(\frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Dieses Verhältnis wird als **differentieller Wirkungsquerschnitt** bezeichnet. Zusammenfassend haben wir folgende Beziehung fuer die Rutherford-Streuung hergeleitet:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{zZe^2}{(4\pi\epsilon_0)4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (2.16)$$

wobei θ der Streuwinkel und E die Energie des Teilchens ist.

Dieses Resultat wird in Abb. 2.7 als Funktion des Streuwinkels geplottet. Wir bemerken die charakteristische $1/\sin^4(\theta/2)$ Form des Wirkungsquerschnitts, die zu einer sehr starken Abhängigkeit von θ führt. Man spricht von einem vorwärts-“peaked” Wirkungsquerschnitt. Dass diese starke Abhängigkeit gilt, bewies Geiger 1911 experimentell in den Grenzen 5° und 150° . In diesem Bereich ändert sich der Wirkungsquerschnitt um einen Faktor $\approx 10^5$!

Falls θ nach Null geht, beobachten wir eine Divergenz. Ihr Ursprung liegt in der Form der Coulombschen Kraft, deren Reichweite unendlich ist. In Wirklichkeit werden die Elektronen um den Kern die Kernladung abschirmen.

2.4 Deutung des Wirkungsquerschnitts

2.4.1 Differentieller und totaler Querschnitt

Wir betrachten einen Strahl von parallelen Teilchen. Wir nehmen an, dass die Teilchen gleichförmig auf einer Fläche senkrecht zur Bewegungsrichtung verteilt sind. Wir definieren den Fluss ϕ der Teilchen als

ϕ =Anzahl der Teilchen pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit (z.B. Teilchen/m²/s)

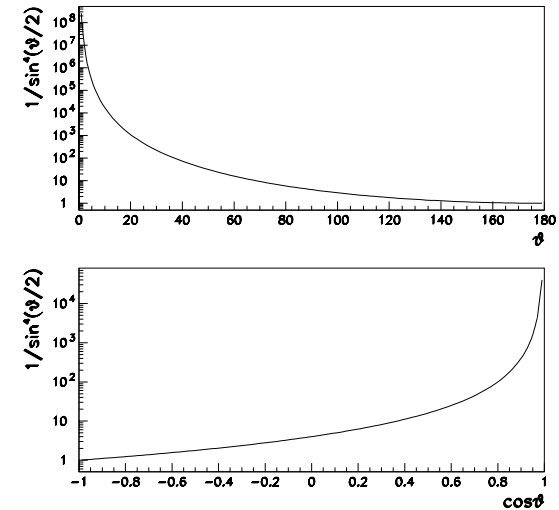


Abbildung 2.7: Der Rutherford-Wechselwirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels.

Wir betrachten die Anzahl der Teilchen dN , die eine Fläche $d\sigma$ pro Zeiteinheit durchqueren

$$dN \equiv \phi d\sigma \quad (2.17)$$

Diese Teilchen werden in dem Raumwinkel $d\Omega$ gestreut, d.h. die Anzahl der Teilchen, die in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden, ist gleich

$$dN \equiv \phi d\sigma = \phi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \right) = \phi \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (2.18)$$

und es folgt:

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist proportional zur Anzahl der Teilchen pro Zeiteinheit, die in den Raumwinkel $d\Omega$ gestreut werden:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \frac{1}{\phi} \frac{dN(\theta, \phi)}{d\Omega} \quad (2.19)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt wird definiert als:

$$\sigma_{tot} = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega \quad (2.20)$$

Im Fall des Rutherford-Wechselwirkungsquerschnitts ist der totale Wirkungsquerschnitt divergent, wegen des Verhältnisses wenn θ nach Null geht.

2.4.2 Geometrische Interpretation

Wir bemerken, dass der Wirkungsquerschnitt die Einheit einer Fläche besitzt. Man kann ihn daher geometrisch deuten. Wir betrachten ein dünnes Target der Fläche A und der Dicke dx (Siehe Abb. 2.8). Die schwarzen Punkte entsprechen den Streuzentren und jedes Streuzentrum hat eine Streufläche σ . Die Dichte der Streuzentren sei ρ (Anzahl der Streuzentren pro Volumeneinheit). Der Fluss der (senkrecht zur Fläche des Targets) einfallenden Teilchen wird als ϕ bezeichnet.

Wenn die einfallenden Teilchen gleichförmig verteilt sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen mit einem Streuzentrum des Targets wechselwirkt, gleich dem Verhältnis der Fläche der Streuzentren zur Targetfläche:

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = \frac{(\rho A dx) \sigma}{A} = \rho dx \sigma \quad (\text{Einheit : } L^{-3} L L^2 = 1) \quad (2.21)$$

Die Wechselwirkungsrate (Anzahl pro Zeiteinheit) ist daher

$$N_{WW} = \phi A \rho dx \sigma = (A dx) \rho \phi \sigma = (V \rho) \phi \sigma \quad (2.22)$$

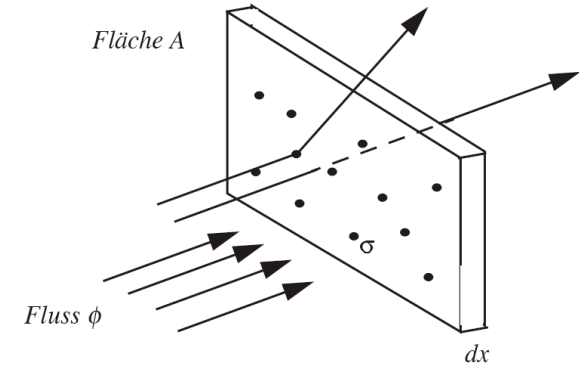


Abbildung 2.8: Skizze einer Reaktion eines Teilchenstrahls mit einem dünnen Target der Dicke dx .

wobei V das Volumen des Targets ist. Wenn wir z.B. Nukleonen als Streuzentren betrachten, wäre die Rate

$$N_{WW} = (V \rho) \phi \sigma = N_{Nukleon} \phi \sigma = (N_A M) \phi \sigma \quad (2.23)$$

wobei N_A die Avogadro-Zahl ist, und M ist die Gesamtmasse des Targets.

Dass der Wirkungsquerschnitt mit der geometrischen Fläche der Streuzentren verwandt ist, kann mit Hilfe der elastischen Streuung an einer harten Kugel veranschaulicht werden. Siehe Abb. 2.9. Der Radius der Kugel ist R . Die Bedingung für einen harten elastischen Aufprall ist:

$$2\alpha + \theta = \pi \quad \text{wobei} \quad R \sin \alpha = b \quad (2.24)$$

D.h.,

$$b = R \sin \alpha = R \sin ((\pi - \theta)/2) = R \cos \theta/2 \quad (2.25)$$

Wir berechnen nun (Siehe Kap. 2.3.2):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left| b \frac{db}{d \cos \theta} \right| = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \\ &= \frac{b}{\sin \theta} \frac{R}{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{R^2}{2 \sin \theta} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{R^2}{4} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Der totale Wechselwirkungsquerschnitt ist daher, wie erwartet, gleich:

$$\sigma_{tot} = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = \frac{R^2}{4} \int d\Omega = \pi R^2 \quad (2.27)$$

Er entspricht der Querschnittsfläche der Kugel. Teilchen innerhalb der Fläche werden gestreut. Die Teilchen ausserhalb der Fläche sind unbeeinflusst.

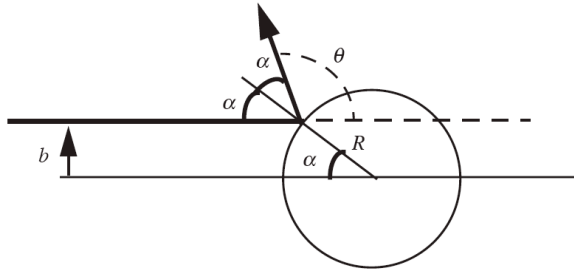


Abbildung 2.9: Streuung an einer harten Kugel.

2.4.3 Die Luminosität

Bei Kollidern kollidieren zwei Strahlen von Teilchen. Z.B. beim LEP am CERN wurden Elektronen-Antielektronen(Positronen)-Kollisionen studiert. Weil Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzte elektrische Ladungen besitzen, werden sie im gleichen Ring beschleunigt. Bei Kollidern kann offensichtlich nur die Wechselwirkung zwischen stabilen Teilchen wie Ionen, Protonen-Antiprotonen oder Elektronen-Positronen studiert werden.

Die Reaktionsrate R bei Kollidern wird als das Produkt des Wirkungsquerschnitts und der **Luminosität** L definiert:

$$R \equiv \mathcal{L}\sigma \quad (2.28)$$

Die Einheit der Luminosität ist eine inverse Fläche pro Zeiteinheit. Die geplante Luminosität beim CERN LHC ist z.B. $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Der gesamte Proton-Proton Wirkungsquerschnitt ist bei einer SP -Energie von 14 TeV ungefähr $\sigma \approx 0,1 \text{ barn} = 10^{-25} \text{ cm}^2$. Man erwartet somit $R = 10^9$ Ereignisse pro Sekunde.

Die Luminosität kann als Funktion der Parameter des Kolliders bestimmt werden:

$$\mathcal{L} = \frac{fnN_1N_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y} \quad (2.29)$$

wobei f die Umlauffrequenz ist, n ist die Anzahl der "Teilchenpakete" im Ring, N_1, N_2 sind die Anzahlen von Teilchen pro Paket für die Strahlen 1 und 2, und σ_x, σ_y sind die transversalen Dimensionen der Teilchenpakete am Kollisionspunkt (unter der Annahme einer Gaussverteilung im Raum).

2.5 Die Entdeckung des Neutrons

Nach der Entdeckung des Protons und des Elektrons war das Verständnis der Atomstruktur nicht vollständig. Man konnte die Masse und den Spin von Isotopen und von Elementen schwerer als Wasserstoff nicht erklären.

*Rutherford sagte die Existenz eines neuen Teilchens voraus, das ähnliche Eigenschaften wie das Proton hat, aber elektrisch ungeladen sein musste: das sogenannte **Neutron**.*

Im Jahr 1930 beobachteten Bothe und Becker neutrale durchdringende Strahlen, die erzeugt wurden, wenn α -Teilchen auf ein Beryllium-Target aufprallen:



Sie dachten zuerst, dass X elektromagnetische Strahlen (d.h. γ -Strahlen) waren. Im Jahr 1932 entdeckten Irène Curie-Joliot und Joliot, dass die X-Strahlen Protonen herausschlagen konnten.

Im Jahr 1932 schliesst Chadwick mit Hilfe einer **kinematischen Analyse**, dass die X-Strahlen *keine elektromagnetische Strahlung* sein konnten. D.h., er bewies, dass wenn die X-Strahlen Protonen durch einen Vorgang herausschlagen, der ähnlich zum Compton-Prozess ist, dann muss wegen der Erhaltung der Energie und des Impulses gelten (Siehe Abb. 2.10):

$$\begin{cases} M_p + E_\gamma = E'_p + E'_\gamma \\ \vec{p}_\gamma = \vec{p}'_p + \vec{p}'_\gamma \end{cases} \quad (2.31)$$

Wenn wir den Streuwinkel θ des Protons einführen, erhalten wir

$$\vec{p}_\gamma - \vec{p}'_p = \vec{p}'_\gamma \quad \rightarrow \quad p_\gamma^2 + (p'_p)^2 - 2p'_p p_\gamma \cos \theta = (p'_\gamma)^2 \quad (2.32)$$

oder

$$E_\gamma^2 + (p'_p)^2 - 2p'_p E_\gamma \cos \theta = (E'_\gamma)^2 \quad (2.33)$$

Mit der Gleichung für die Energie finden wir

$$(M_p + E_\gamma - E'_p)^2 = (E'_\gamma)^2 = E_\gamma^2 + (p'_p)^2 - 2p'_p E_\gamma \cos \theta \quad (2.34)$$

Es folgt,

$$E_\gamma = \frac{M_p (E'_p - M_p)}{M_p - E'_p + p'_p \cos \theta} \quad (2.35)$$

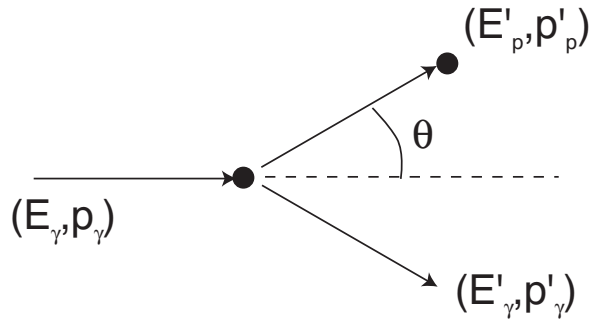


Abbildung 2.10: Entdeckung des Neutrons: Compton-Streuung an einem Proton.

Der minimale Wert der Photonenergie erhält man für $\cos\theta=1$. In diesem Fall gilt

$$E_{\gamma}^{\min} = \frac{M_p (E'_p - M_p)}{M_p - E'_p + p'_p} = \frac{M_p T'}{p'_p - T'} \quad (2.36)$$

wobei T' die kinetische Energie des herausgeschlagenen Protons ist.

Curie und Joliot hatten die Geschwindigkeit des herausgeschlagenen Protons gemessen:

$$v'_p \approx 3 \times 10^9 \text{ cm/s} \approx 0.1c \quad (2.37)$$

Numerisch findet man, dass für diesen Wert das einfallende Photon *mindestens eine Energie gleich 50 MeV besitzen muss*, um Protonen mit der beobachteten Geschwindigkeit herauszuschlagen, d.h.:

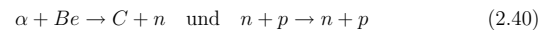
$$T' \approx \frac{1}{2} M_p (v'_p)^2 \approx 5 \text{ MeV} \quad \text{und} \quad p'_p c \approx M_p v'_p c \approx 100 \text{ MeV} \quad (2.38)$$

und deshalb

$$E_{\gamma}^{\min} \approx 50 \text{ MeV} \quad (2.39)$$

Chadwick schloss daraus, dass diese grosse Energie mit den bekannten radioaktiven Energien nicht kompatibel war.

Die X-Teilchen können nicht γ -Strahlen sein. Was beobachtet wurde, waren Protonen, die durch die Reaktionen



herausgeschlagen wurden. In diesem Fall ist die kinematische Situation ganz anders, weil das Neutron eine ähnliche Masse wie das Proton besitzt.

312	NATURE	[FEBRUARY 27, 1932]
Letters to the Editor		
<p><i>[The Editor does not hold himself responsible for opinions expressed by his correspondents. Neither can he undertake to return, nor to correspond with the writers of, rejected manuscripts intended for this or any other part of NATURE. No notice is taken of anonymous communications.]</i></p>		
Possible Existence of a Neutron		
<p>It has been shown by Bothe and others that beryllium when bombarded by α-particles of polonium emits a radiation of great penetrating power, which has an absorption coefficient in lead of about $0.2(\text{cm.})^{-1}$. Recently Mme. Curie-Joliot and M. Joliot found, when measuring the ionisation produced by this beryllium radiation in a vessel with a thin window, that the ionisation increased when matter containing hydrogen was placed in front of the window. The effect appeared to be due to the ejection of protons with velocities up to a maximum of nearly 3×10^9 cm. per sec. They suggested that the transference of energy to the proton was by a process similar to the Compton effect, and estimated that the beryllium radiation had a quantum energy of 50×10^6 electron volts.</p> <p>I have made some experiments using the valve counter to examine the properties of this radiation excited in beryllium. The valve counter consists of a small ionisation chamber connected to an amplifier, and the sudden production of ions by the entry of a particle, such as a proton or α-particle, is recorded by the deflexion of an oscillograph. These experiments have shown that the radiation ejects particles from hydrogen, helium, lithium, beryllium, carbon, air, and argon. The particles ejected from hydrogen behave, as regards range and ionising power, like protons with speeds up to about 3.2×10^9 cm. per sec. The particles from the other elements have a large ionising power, and appear to be in each case recoil atoms of the elements.</p> <p>If we ascribe the ejection of the proton to a Compton recoil from a quantum of 52×10^6 electron volts, then the nitrogen recoil atom arising by a similar process should have an energy not greater than about 400,000 volts, should produce not more than about 16,000 ions, and have a range in air at N.T.P. of about 1.3 mm. Actually, some of the recoil atoms in nitrogen produce at least 30,000 ions. In collaboration with Dr. Feather, I have observed the recoil atoms in an expansion chamber, and their range, estimated visually, was sometimes as much as 3 mm. at N.T.P.</p> <p>These results, and others I have obtained in the course of the work, are very difficult to explain on the assumption that the radiation from beryllium is a quantum radiation, if energy and momentum are to be conserved in the collisions. The difficulties disappear, however, if it be assumed that the radiation consists of particles of mass 1 and charge 0, or neutrons. The capture of the α-particle by the Be^9 nucleus may be supposed to result in the formation of a C^{12} nucleus and the emission of the neutron. From the energy relations of this process the velocity of the neutron emitted in the forward direction may well be about 3×10^9 cm. per sec. The collisions of this neutron with the atoms through which it passes give rise to the recoil atoms, and the observed energies of the recoil atoms are in fair agreement with this view. Moreover, I have observed that the protons ejected from hydrogen by the radiation emitted in the opposite direction to that of the exciting α-particle appear to have a much smaller range than those ejected by the forward radiation.</p> <p style="text-align: right;">J. CHADWICK.</p> <p style="text-align: right;">Cavendish Laboratory, Cambridge, Feb. 17.</p>		

Abbildung 2.11: Publikation von Chadwick.

Kapitel 3

Die nicht-relativistische Störungstheorie

3.1 Natürliche Einheiten

Im gewöhnlichen MKS (Meter-Kilogramm-Sekunde) Einheiten-System ist der Meter die Einheit der Länge, das Kilogramm die Einheit der Masse und die Sekunde die Einheit der Zeit. In diesem System nehmen die zwei fundamentalen Konstanten, die Plancksche-Konstante und die Lichtgeschwindigkeit, die folgenden Werte an:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,055 \times 10^{-34} \text{ J.s} \quad \text{und} \quad c = 2,998 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (3.1)$$

In der Praxis sind diese Einheiten nicht geeignet, um das infinitesimal Kleine zu beschreiben. Man verwendet oft praktischere Einheiten, z.B. das MeV ($=10^6 \text{ eV}$) oder das GeV ($=10^9 \text{ eV}$) für die Energie und den Femtometer ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$) für die Länge. In diesem Fall erhalten wir:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 6,582 \times 10^{-22} \text{ MeV.s} \quad \text{und} \quad c = 2,998 \times 10^{23} \text{ fm/s} \quad (3.2)$$

Es gilt:

$$\hbar c = 197,33 \text{ MeV.fm} \approx 200 \text{ MeV.fm} \quad (3.3)$$

Die Formeln in der Teilchenphysik enthalten oft diese Konstanten. Man führt daher die **natürlichen Einheiten** ein. Man wählt die fundamentalen Einheiten so, dass die fundamentalen Konstanten die folgenden Werte besitzen

$$\hbar \equiv 1 \quad \text{und} \quad c \equiv 1 \quad (3.4)$$

Es ist dann nicht mehr nötig die Plancksche Konstante und die Lichtgeschwindigkeit in den Gleichungen zu schreiben. Natürlich wird man am Ende der

Berechnung oft die Konstanten mit Hilfe einer Dimensionsbetrachtung wieder einfügen.

Wir bemerken: Weil $c=1$ gilt:

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \longrightarrow E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (3.5)$$

und die Einheiten der Energie, des Impulses und der Masse sind dieselben: die Einheit der Energie. Die Ruhemasse des Elektrons ist z.B. gleich $m_e = 0,511 \text{ MeV}$ anstatt MeV/c^2 .

Wenn wir zusätzlich dazu $\hbar/2\pi = 1$ betrachten, ist die Einheit der Länge gleich:

$$1 \text{ m} = \frac{10^{15} \text{ fm}}{\hbar c} \approx \frac{10^{15} \text{ fm}}{197,33 \text{ MeV.s}} \approx 0,507 \times 10^{16} \text{ GeV}^{-1} \quad (3.6)$$

Damit:

In den natürlichen Einheiten gibt es eine Äquivalenz zwischen Energie und inverser Länge.

Daher ist es möglich nur eine Einheit zu verwenden. Tatsächlich gilt:

$$1 \text{ s} = \frac{2,998 \times 10^8 \text{ m}}{c} \approx 3 \times 10^{23} \text{ fm} \quad (3.7)$$

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \approx 5,07 \times 10^{-3} \text{ MeV}^{-1} \quad (3.8)$$

$$1 \text{ MeV} \approx \frac{5,07 \times 10^{-3}}{1 \text{ fm}} \approx \frac{5,07 \times 10^{-3}}{(3 \times 10^{23})^{-1} \text{ s}} \approx 1,52 \times 10^{21} \text{ s}^{-1} \quad (3.9)$$

Wir werden oft die natürlichen Einheiten verwenden.

3.2 Die erste Quantisierung

3.2.1 Die Wellenfunktion

Im Jahr 1928 hat G.P. Thompson beobachtet, dass sich ein Elektron wie eine Welle verhalten kann: die **Elektronbeugung**, das Analogon der Lichtbeugung, wurde experimentell beobachtet. In der Quantenmechanik wird daher ein Teilchen (z.B. das Elektron) mit Hilfe einer **Wellenfunktion** ψ beschrieben:

$$\Psi \equiv \text{komplexe Wellenfunktion} \quad (3.10)$$

Diese Funktion stellt den Zustand des Teilchens dar und beschreibt die **Wellennatur des Teilchens** (Interferenz, Beugungseffekte, usw...). Die Wellennatur beobachtet man z.B. in **Doppelspaltexperimenten**.

Die übliche Interpretation der Wellenfunktion ist die folgende:

$$|\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3\vec{x} \equiv \text{Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit } t \text{ im Volumenelement } d^3\vec{x} \text{ zu finden.}$$

Die Normierung wird als

$$\int_V |\Psi(\vec{x}, t)|^2 d^3\vec{x} = \int_V (\Psi^* \Psi) d^3\vec{x} \equiv 1 \quad (3.11)$$

ausgedrückt. Eine wichtige Bemerkung ist, dass diese so normierte Wellenfunktion den Zustand *eines* Teilchens beschreibt. Die **Wahrscheinlichkeitsdichte** wird definiert als

$$\rho(\vec{x}, t) \equiv \Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) = |\Psi(\vec{x}, t)|^2 \quad (3.12)$$

Man kann die Wellenfunktion eines Teilchensystems mit N Teilchen betrachten mit Hilfe einer Wellenfunktion mit $3N$ Raumkoordinaten:

$$\Psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, t) \quad (3.13)$$

Trotzdem bemerken wir, dass die Gesamtanzahl der Teilchen im System konstant bleiben muss: die Anzahl kann sich mit der Zeit nicht ändern: d.h., Teilchen können in diesem Formalismus nicht erzeugt oder vernichtet werden. Wir werden sehen, dass diese Tatsache ein Problem darstellt, wenn man eine relativistische Erweiterung der Quantenmechanik sucht.

3.2.2 Die Operatoren

Die Wellenfunktion ist nicht beobachtbar, sondern entspricht der ganzen Information, die man über das Teilchen hat. Die beobachtbaren Grössen (Observablen) werden durch **hermitesche Operatoren** dargestellt, die auf die Wellenfunktion wirken (Erste Quantisierung). Man hat z.B.:

$$\text{Impuls - Operator : } \vec{p} \longrightarrow -i\hbar \vec{\nabla} = -i\vec{\nabla} \quad (3.14)$$

$$\text{Energie - Operator : } E \longrightarrow +i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = i\frac{\partial}{\partial t} \quad (3.15)$$

wobei wir in den zweiten Termen die natürlichen Einheiten (Siehe Kap. 3.1) benutzt haben.

3.2.3 Die Schrödinger-Gleichung

Die Schrödinger-Gleichung wird mit Hilfe der klassischen Beziehung zwischen Energie und Impuls "hergeleitet". Die gesamte Energie eines klassischen Teilchens ist gleich

$$E = T + V \quad (3.16)$$

wobei T die *kinetische* und V die *potentielle Energie* des Teilchens ist. Es gilt,

$$T = \frac{p^2}{2m} \quad \text{wobei } m = \text{Masse des Teilchens} \quad (3.17)$$

Der Operator der gesamten Energie (der **Hamilton-Operator**) ist deshalb gleich

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V = E \quad (3.18)$$

Es folgt,

$$H\Psi(\vec{x}, t) = \left(\frac{p^2}{2m} + V \right) \Psi(\vec{x}, t) = E\Psi(\vec{x}, t) \quad (3.19)$$

oder

$$\left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{x}, t) \right) \Psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \quad (3.20)$$

Diese Gleichung wurde 1926 von Schrödinger hergeleitet. Sie entspricht der *Bewegungsgleichung (Wellengleichung) eines einzigen Teilchens der Masse m in einem externen Potential V .*

3.2.4 Die Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) &\equiv \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^*(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(\vec{x}, t) \right) \Psi(\vec{x}, t) + \Psi^*(\vec{x}, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{x}, t) \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aus der Schrödinger-Gleichung folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi = -i \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \Psi \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* = +i \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \Psi^* \quad (3.22)$$

Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho &= \left(+i \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \Psi^* \right) \Psi + \Psi^* \left(-i \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 + V \right) \Psi \right) \\ &= \left(-\frac{i}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi^* \right) \Psi + \Psi^* \left(i \frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi \right) \\ &= \frac{-i}{2m} \left[\left(\vec{\nabla}^2 \Psi^* \right) \Psi - \left(\vec{\nabla}^2 \Psi \right) \Psi^* \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Das Gauss'sche Theorem sagt voraus, dass

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d^3\vec{x} = - \int_{A=\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{A} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3\vec{x} \quad (3.24)$$

wobei A die Fläche ist, die das Volumen V umschliesst, und \vec{j} ist der **Wahrscheinlichkeitsstromvektor**.

Wir können deshalb einen **Stromdichtevektor** (eine **Vektorgrösse**) definieren, die die Gleichung der Kontinuität erfüllt:

$$\vec{j} \equiv \frac{i}{2m} \left((\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi - (\vec{\nabla} \Psi) \Psi^* \right) \quad (3.25)$$

Diese Grösse beschreibt, wie die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ "fließt". Wir bemerken, dass wie erwartet, gilt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \frac{i}{2m} \left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi) \Psi^* \right) \\ &= \frac{i}{2m} \left((\vec{\nabla}^2 \Psi^*) \Psi + \vec{\nabla} \Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \vec{\nabla} \Psi \vec{\nabla} \Psi^* - (\vec{\nabla}^2 \Psi) \Psi^* \right) \\ &= \frac{i}{2m} \left((\vec{\nabla}^2 \Psi^*) \Psi - (\vec{\nabla}^2 \Psi) \Psi^* \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho \end{aligned} \quad (3.26)$$

Freies Teilchen: Wir betrachten ein freies Teilchen.

$$V(\vec{x}, t) \equiv 0 \quad \longrightarrow \quad i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi \quad \longrightarrow \quad \Psi(\vec{x}, t) = N e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (3.27)$$

Die Wellenfunktion ist eine ebene Welle. Es folgt daraus, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte eine Konstante ist:

$$\rho = \Psi^* \Psi = |N|^2 \quad \text{Einheit : } 1/L^3 \quad (3.28)$$

Das Teilchen hat überall im Raum dieselbe Wahrscheinlichkeit sich zu befinden und die Stromdichte entspricht in diesem Fall einem konstanten Fluss von Teilchen, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen. Die Stromdichte ist daher nur durch das Produkt der Normierung im Quadrat (d.h. die überall im Raum geltende konstante Wahrscheinlichkeitsdichte) und der Geschwindigkeit der Teilchen gegeben. Tatsächlich:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{x}, t) &\equiv \frac{i}{2m} \left((\vec{\nabla} \Psi^*) \Psi - (\vec{\nabla} \Psi) \Psi^* \right) \\ &= \frac{i}{2m} \left((-i\vec{p}) \Psi^* \Psi - (i\vec{p}) \Psi \Psi^* \right) \\ &= \frac{i}{2m} (-i\vec{p}) 2|N|^2 = |N|^2 \frac{\vec{p}}{m} = |N|^2 \vec{v} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die Einheit der Stromdichte entspricht wie erwartet einer Anzahl pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit

$$\text{Einheit : } [1/L^3] [L/Z] = [1/(ZL^2)] \quad (3.30)$$

3.3 Störungstheorie

Wir beginnen mit einer ersten wichtigen Komponente der Theorie der Elementarteilchen: die sogenannte **Goldene Regel von Fermi**.

3.3.1 Fermis Goldene Regel

Oft kann man Probleme in der Quantenmechanik nicht exakt lösen. Man braucht Näherungsmethoden. Wir betrachten z.B. den folgenden Hamilton-Operator

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{zeitunabhängiger ungestörter Hamilton-Operator}} + \underbrace{V}_{\text{zeitabhängige Störung}} \quad (3.31)$$

H_0 entspricht dem *ungestörten* Hamilton-Operator und ist *zeitunabhängig*. Die Störung V ist im Allgemeinen *zeitabhängig*. Wir nehmen an, dass die Eigenwerte und Eigenfunktionen des ungestörten Hamilton-Operators die folgenden sind

$$H_0 |u_n\rangle = E_n |u_n\rangle \quad \text{wobei } |u_n\rangle = \text{Eigenzustand} \quad (3.32)$$

Diese Menge von Eigenfunktionen bilden ein (orthonormiertes) vollständiges System des ungestörten Hamiltonians H_0 . Jede Eigenfunktion besitzt eine bestimmte Energie E_n . Eine *stationäre Lösung* ist deshalb zu

$$e^{-iE_n t} u_n(\vec{x}) \quad (3.33)$$

proportional, weil die Zeitabhängigkeit die triviale Phase $-iE_n t$ sein muss. Die räumliche und die zeitliche Abhängigkeiten können daher faktorisiert werden.

Falls die $|u_n\rangle$ ein vollständiges System bilden, können wir annehmen, dass eine Lösung von H als Linearkombination der Eigenfunktionen von H_0 ausgedrückt werden kann:

$$\Psi(\vec{x}, t) = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} u_n(\vec{x}) \quad (3.34)$$

Aus der Schrödinger-Gleichung folgt,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = H \Psi \quad \longrightarrow \quad \sum_n \left(i \frac{da_n}{dt} + a_n E_n \right) e^{-iE_n t} u_n = (H_0 + V) \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} u_n \quad (3.35)$$

Mit $H_0 |u_n\rangle = E_n |u_n\rangle$ erhalten wir

$$\sum_n \left(i \frac{da_n}{dt} \right) e^{-iE_n t} u_n = \sum_n a_n(t) V e^{-iE_n t} u_n \quad (3.36)$$

Wir multiplizieren die Gleichung mit u_f^* und führen eine räumliche Integration durch:

$$i \int \sum_n \frac{da_n}{dt} u_f^* e^{-iE_n t} u_n d^3\vec{x} = \int \sum_n a_n(t) u_f^* V e^{-iE_n t} u_n d^3\vec{x} \quad (3.37)$$

oder

$$i \sum_n \frac{da_n}{dt} \underbrace{\left(\int d^3\vec{x} u_f^* u_n \right)}_{\equiv \delta_{fn}} e^{-iE_n t} = \sum_n a_n(t) \left(\int d^3\vec{x} u_f^* V u_n \right) e^{-iE_n t} \quad (3.38)$$

wobei wir die Tatsache verwendet haben, dass die Zustände zueinander senkrecht sind (die Eigenfunktionen u_n bauen eine orthonormierte Basis auf). Die Zeitabhängigkeit des Koeffizienten a_f ist gegeben durch

$$i \frac{da_f}{dt} e^{-iE_f t} = \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} \underbrace{\left(\int d^3\vec{x} u_f^* V(\vec{x}, t) u_n \right)}_{\equiv V_{fn}(t)} \quad (3.39)$$

oder

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) e^{i(E_f - E_n)t} V_{fn}(t) \quad (3.40)$$

Die Funktion $V_{fn}(t) \equiv \int d^3\vec{x} u_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t) u_n(\vec{x})$ wird als das **Matrix-Element** bezeichnet. Wie wird diese Gleichung benutzt? Wir betrachten eine bestimmte Anordnung: ein freies Teilchen bewegt sich im Raum. Zur Zeit $t \simeq 0$ wirkt ein zeitabhängiges Potential V während eines kurzen Zeitintervalls.

Wir sind am Zustand des Teilchens nach der Potentialwirkung interessiert.

Der **Anfangszustand** (zur Zeit $-T/2$) ist gleich

$$t = -\frac{T}{2} : \quad \begin{cases} a_i(-\frac{T}{2}) = 1 \\ a_n(-\frac{T}{2}) = 0 \end{cases} \quad n \neq i \quad (3.41)$$

d.h., das Teilchen befindet sich am Anfang im Zustand $|u_i\rangle$.

Annahme: wenn die Störung klein ist, bleibt der Zustand ungefähr im Anfangszustand:

$$\begin{cases} a_i(t) \approx 1 \\ a_n(t) = 0 \end{cases} \quad n \neq i \quad \text{in 1. Ordnung} \quad (3.42)$$

Es folgt,

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) e^{i(E_f - E_n)t} V_{fn}(t) \approx -i \underbrace{a_i(t)}_{\approx 1} e^{i(E_f - E_i)t} V_{fi}(t) \quad (3.43)$$

Diese Näherung wird als **erste (oder Born'sche) Ordnung** bezeichnet. Durch Zeit-Integration erhalten wir

$$a_f(t) \approx -i \int_{-T/2}^t dt' V_{fi}(t') e^{i(E_f - E_i)t'} \quad (3.44)$$

Zur Zeit $+T/2$ wird der **Endzustand** durch den Koeffizient $a_f(T/2)$ definiert

$$a_f(+\frac{T}{2}) \approx -i \int_{-T/2}^{+T/2} dt' \int d^3\vec{x} u_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}, t') u_n(\vec{x}) e^{i(E_f - E_i)t'} \quad (3.45)$$

Zeitunabhängiges Potential: Wir betrachten nun den Fall, in dem die Störung zeitunabhängig ist und lassen T nach unendlich gehen:

$$V(\vec{x}, t) = V(\vec{x}) \quad \text{und} \quad T \rightarrow \infty \quad (3.46)$$

Die Übergangs-Amplitude vom Anfangszustand i in den Endzustand f wird definiert als

$$T_{fi} \equiv -i \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i(E_f - E_i)t'} \underbrace{\int d^3\vec{x} u_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}) u_i(\vec{x})}_{\text{Matrizelement} \equiv V_{fi}} \quad (3.47)$$

wobei wir bemerken, dass die räumliche und die zeitliche Integrationen getrennt werden. Die zweite Integration liefert natürlich das Matrix-Element zwischen dem Anfangszustand i und dem Endzustand f . Wir zeigen nun, dass die zeitliche Integration zu einer **Dirac δ -Funktion** führt.

Dirac δ -Funktion Wir betrachten die Fouriertransformierte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikx} dk \quad \text{wobei} \quad A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (3.48)$$

Es gilt,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-iky} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{+ik(x-y)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(x-y) \quad (3.50)$$

und deshalb

$$\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{+ik(x-y)} \quad (3.51)$$

Mit der Dirac δ -Funktion erhalten wir für die Übergangsamplitude

$$T_{fi} = -iV_{fi}(2\pi\delta(E_f - E_i)) \quad (3.52)$$

Wir bemerken, dass die Übergangs-Amplitude *verschwindet*, wenn die Anfangs- und Endzustandsenergien nicht gleich sind:

$$T_{fi} = 0 \quad \text{wenn } E_i \neq E_f \quad (3.53)$$

d.h., eine zeitunabhängige Störung kann die Energie des Teilchens nicht ändern.

Die **Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit** wird definiert als

$$W \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} \quad (3.54)$$

wobei wir den *Betrag im Quadrat* der Amplitude verwendet haben. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} W &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|-iV_{fi}(2\pi\delta(E_f - E_i))|^2}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}|^2 (2\pi)^2 \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dt}{2\pi} e^{+i(E_f - E_i)t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |V_{fi}|^2 (2\pi) \delta(E_f - E_i) \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} dt}_{=T} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist deshalb gleich

$$W = (2\pi) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \quad \text{1. Ordnung} \quad (3.56)$$

Wir können nun annehmen, dass das Teilchen einen Übergang in viele Endzustände mit der Energie E_f machen kann. Wir führen die **Dichte der Endzustände** ρ ein als:

$$\rho(E_f) dE_f = \text{Anzahl der Endzustände im Energieintervall } E_f \text{ und } E_f + dE_f \quad (3.57)$$

Die *gesamte Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit* vom Zustand i zu Zuständen f wird durch Intergration über die möglichen Endzustände gewonnen:

$$\begin{aligned} W_{fi} &= (2\pi) \int dE_f |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \rho(E_f) \\ &= (2\pi) |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad \text{Fermis Goldene Regel} \end{aligned} \quad (3.58)$$

wobei $E_i = E_f$ verwendet wurde.

3.3.2 Anwendung: Elastische Streuung

Wir versuchen nun ein Streuexperiment mit Hilfe der quantenmechanischen Beschreibung zu analysieren. Wir vereinfachen das Problem und betrachten nur elastische Stöße an einem festen Potential.

In dieser Beschreibung ist ein Potential V für die Streuung des Teilchens verantwortlich. Als Folge wird das Teilchen seinen Impuls ändern. Im elastischen Stoss wird der Betrag des Impulses nicht geändert, nur die Richtung:

$$|\vec{p}_i| = |\vec{p}_f| = |\vec{p}| = p \quad (3.59)$$

Die Streuung wird als ein Übergang vom Anfangszustand mit Impuls \mathbf{p}_i zum Endzustand mit Impuls \mathbf{p}_f dargestellt.

Siehe Abb. 3.1 und vergleiche mit Abb. 2.5.

In der quantenmechanischen Beschreibung spricht man nicht mehr von der Bahnkurve des Teilchens, wir sind an der **Übergangswahrscheinlichkeit zwischen Zuständen mit bestimmten Impulsen** $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_f$ interessiert.

Einfallendes Teilchen: das einfallende Teilchen wird durch eine ebene Welle mit bestimmtem Impuls \mathbf{p}_i , und mit Normierung in einem Kasten des Volumens L^3 dargestellt:

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}} \quad \text{Impuls } \vec{p}_i \quad (3.60)$$

Auslaufendes Teilchen: in ähnlicher Weise

$$u_f(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} \quad \text{Impuls } \vec{p}_f \quad (3.61)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für den **Übergang zwischen Zuständen** \mathbf{p}_i und \mathbf{p}_f wird definiert als

$$d\sigma_{fi} \equiv \frac{W_{fi}}{j} \quad \text{wobei } j = \text{Fluss des einfallendes Teilchens} \quad (3.62)$$

Einheit: $W_{fi} = \text{Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit}$

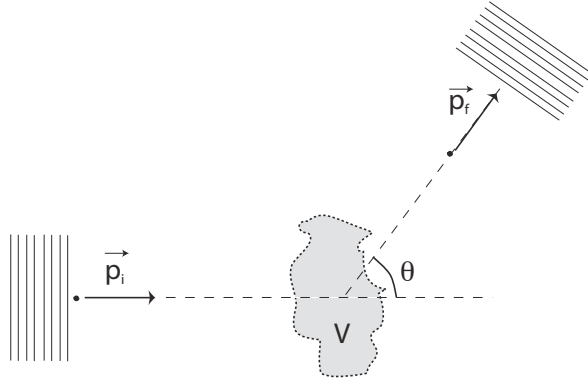


Abbildung 3.1: Streuexperiment in der quantenmechanischen Beschreibung.

j =Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und Flächeneinheit

d.h. der Wirkungsquerschnitt hat, wie erwartet, die Einheit *einer Fläche*. Für ein freies einfallendes Teilchen ist der Fluss gleich (Siehe Kap. 3.2.4)

$$\vec{j} = |N|^2 \frac{\vec{p}}{m} \longrightarrow j = \frac{1}{L^3} \frac{p}{m} \quad (3.63)$$

Es folgt daraus mit Fermis Goldener Regel:

$$d\sigma_{fi} \equiv \frac{W_{fi}}{j} = \frac{(2\pi)|V_{fi}|^2 \rho(E_f)}{\frac{1}{L^3} \frac{p}{m}} = (2\pi) \frac{mL^3}{p} |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \quad (3.64)$$

Wir bestimmen *die Dichte der Endzustände*. Wie kann man eine ebene (d.h. unendlich ausgedehnte) Welle in einem endlichen Kasten umschliessen. Eine praktische Lösung ist die folgende: wir betrachten als Randbedingung die Periodizität der ebenen Welle. Am Ende der Berechnung kann im Prinzip der Kasten unendlich gross gemacht werden. Für eine ein-dimensionale Anordnung, erhalten wir daher

$$\begin{aligned} u_f(x) = N e^{ip_f x} &\longrightarrow u_f(x) = u_f(x+L) \longrightarrow p_f = \frac{2\pi n}{L} \\ &\longrightarrow dp_f = \frac{2\pi}{L} dn \end{aligned} \quad (3.65)$$

und in 3 Dimensionen

$$dn = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dp_x dp_y dp_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 p^2 dp d\Omega \quad (3.66)$$

Die Dichte der Zustände ist

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} \quad \text{wenn} \quad E_f = \frac{p^2}{2m} \longrightarrow dE_f = \frac{1}{2m} 2p dp = \frac{p dp}{m} \quad (3.67)$$

oder

$$\rho(E_f) = \frac{dn}{dE_f} = \frac{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 p^2 dp d\Omega}{\frac{p dp}{m}} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 m p d\Omega \quad (3.68)$$

Der *differentielle Wirkungsquerschnitt* wird dann gegeben durch (wir schreiben die Indizes fi im Wirkungsquerschnitt nicht mehr)

$$d\sigma = (2\pi) \frac{mL^3}{p} |V_{fi}|^2 \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 m p d\Omega = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 L^6 |V_{fi}|^2 d\Omega \quad (3.69)$$

oder

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 L^6 |V_{fi}|^2 \quad (3.70)$$

Das Matrix-Element V_{fi} wird bestimmt:

$$V_{fi} = \int d^3\vec{x} u_f^*(\vec{x}) V(\vec{x}) u_i(\vec{x}) = \frac{1}{L^3} \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{p}_f \cdot \vec{x}} V(\vec{x}) e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}} \equiv \frac{1}{L^3} \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \quad (3.71)$$

wobei

$$\vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f = \text{Änderung des Impulses} \quad (3.72)$$

Man spricht vom **Impulsübertrag** q . Schliesslich wird der Wirkungsquerschnitt geschrieben als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^2 \left| \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \right|^2 \quad \text{1. Ordnung} \quad (3.73)$$

Der Parameter L des Kastens ist verschwunden. Diese Gleichung entspricht dem differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Potential V . Diese Gleichung gilt in erster Näherung (der sogenannten **Born'schen Näherung**).

3.4 Rutherford-Streuung

Wir betrachten nun die Anordnung des Rutherford-Streuexperimentes. In der Störungstheorie muss das Potential *schwach* sein. Wir können kein Potential verwenden, das eine *unendliche Reichweite* wie die Coulomb-Kraft besitzt. Wir nehmen deshalb an, dass die Ladung des punktförmigen Kerns von einer Elektronenwolke abgeschirmt wird. D.h., für das Potential verwenden wir

ein Coulomb-Potential für eine punktförmige Ladung $+Ze$, korrigiert für eine Elektronenwolke der Ladung $-Ze$:

$$V(\vec{x}) = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Z}{|\vec{x}|} - \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \right) \quad (3.74)$$

wobei

$$\int \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' = Z \quad (3.75)$$

der gesamten Ladung der Elektronen entspricht. In der letzten Gleichung haben wir angenommen, dass das Atom elektrisch neutral ist.

Die Ladung des gestreuten Teilchens ist gleich ze .

In erster Born'scher Näherung müssen wir das folgende Integral berechnen, um das Matrix-Element zu bestimmen:

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\vec{x} \left(\frac{Z}{|\vec{x}|} - \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \right) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \quad (3.76)$$

Wir bemerken, dass

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) (\nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = (iq)^2 \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \quad (3.77)$$

Es folgt,

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = -\frac{1}{q^2} \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) (\nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) \quad (3.78)$$

Mit Hilfe des **Satzes von Green** (Siehe Übungen) erhalten wir

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) (\nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) = \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (\nabla^2 V(\vec{x})) + \int_{A=\partial V} \left(V(\vec{\nabla} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) - e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (\vec{\nabla} V) \right) \cdot d\vec{A} \quad (3.79)$$

Das Integral über die Fläche A , die das Volumen V umschliesst, verschwindet, wenn das Volumen nach unendlich geht, da gilt

$$\begin{cases} V(\vec{x}) \rightarrow 0 & \text{wenn } |\vec{x}| \rightarrow \infty \\ \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rightarrow 0 & \text{wenn } |\vec{x}| \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.80)$$

Durch Einsetzen von V können wir den Laplace-Operator, angewendet auf das Potential, berechnen

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(Z \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) - \int \nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' \right) \quad (3.81)$$

Aus dem Elektromagnetismus (Siehe z.B. Jackson) kennen wir die Beziehung

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = -4\pi\delta(|\vec{x} - \vec{x}'|) \quad (3.82)$$

Deshalb ist

$$\nabla^2 V(\vec{x}) = -\frac{ze^2}{\epsilon_0} (Z\delta(|\vec{x}|) - \rho(\vec{x})) \quad (3.83)$$

Das Integral des Potentials ist deshalb gleich

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} &= -\frac{1}{q^2} \int d^3\vec{x} V(\vec{x}) (\nabla^2 e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}) \\ &= -\frac{1}{q^2} \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (\nabla^2 V(\vec{x})) \\ &= \frac{ze^2}{\epsilon_0} \frac{1}{q^2} \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} (Z\delta(|\vec{x}|) - \rho(\vec{x})) \end{aligned} \quad (3.84)$$

Dieses Integral besitzt zwei Teile, die wir in folgender Weise ausdrücken werden:

$$\int d^3\vec{x} V(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \frac{ze^2}{\epsilon_0} \frac{1}{q^2} [Z - F(\vec{q})] \quad (3.85)$$

wobei $F(\vec{q})$ die **Fouriertransformierte der Elektronenladungsverteilung** ist:

$$F(\vec{q}) \equiv \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(\vec{x}) \quad (3.86)$$

Schliesslich ist der Wirkungsquerschnitt gleich

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^4} \right) [Z - F(\vec{q})]^2 \quad (3.87)$$

wobei der Impulsübertrag (Siehe Gl. 3.72) gleich $\vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f = \text{Änderung des Impulses}$ ist.

Wir können den *übertragenen Impuls* \vec{q} als Funktion des *Streuwinkels* ausdrücken:

$$\begin{aligned} \vec{q} \equiv \vec{p}_i - \vec{p}_f \quad \longrightarrow \quad q^2 &\equiv (\vec{p}_i - \vec{p}_f)^2 = \vec{p}_i^2 + \vec{p}_f^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f \\ &= 2p^2(1 - \cos\theta) = 4p^2 \sin^2(\theta/2) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Es folgt, wie erwartet

$$q^2 \rightarrow 0 \quad \text{wenn} \quad \theta \rightarrow 0 \quad (3.89)$$

In diesem Fall kann man die Fouriertransformierte durch die ersten Glieder ihrer Taylor-Reihe approximieren:

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \approx 1 + i\vec{q} \cdot \vec{x} + \frac{1}{2}(i\vec{q} \cdot \vec{x})^2 + \dots \quad (3.90)$$

D.h.,

$$\begin{aligned}
 Z - F(\vec{q}) &= Z - \int d^3\vec{x} e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} \rho(\vec{x}) \\
 &= \underbrace{Z - \int d^3\vec{x} \rho(\vec{x})}_{=0} - i \underbrace{\int d^3\vec{x} (\vec{q} \cdot \vec{x}) \rho(\vec{x})}_{=0 \text{ wenn } \rho(\vec{x})=\rho(-\vec{x})} + \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\vec{q} \cdot \vec{x})^2 \rho(\vec{x}) + \dots
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Das Ergebnis hängt von der Verteilung der Ladung ab. Im Allgemeinen gilt

$$Z - F(\vec{q}) \approx \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} (\vec{q} \cdot \vec{x})^2 \rho(\vec{x}) \equiv \frac{q^2 I}{2} \tag{3.92}$$

wobei I dem Integral entspricht, das von der Ladungsverteilung abhängt. D.h., für kleine Streuwinkel gilt

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\theta \rightarrow 0} &= \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^4} \right) [Z - F(\vec{q})]^2 \\
 &\approx \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^4} \right) \left(\frac{q^2 I}{2} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{I}{2} \right)^2 \approx konst.
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

Dank der Verteilung der Elektronenwolke gibt es keine Divergenz, wenn der Streuwinkel nach null geht. Wenn der Streuwinkel nach null geht, ist der Grenzwert des Wirkungsquerschnitt gleich einer Konstanten.

Was passiert, wenn der Betrag des übertragenen Impulses q gross ist? Wir erwarten, dass gilt

$$F(\vec{q}) \rightarrow 0 \text{ wenn } |\vec{q}| \rightarrow \infty \tag{3.94}$$

weil die Elektronenwolke nicht in einem Punkt konzentriert ist. Die Elektronenwolke ist keine Punktladung, und deshalb wird die Fouriertransformierte Funktion verschwinden, wenn der Betrag des "Wellenvektors" q nach unendlich geht.

Für einen genügend grossen Betrag des übertragenen Impulses wird es möglich sein, $F(\vec{q})$ im Vergleich zu Z zu vernachlässigen. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{|\vec{q}| \rightarrow \infty} &= \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^4} \right) [Z - F(\vec{q})]^2 \\
 &\approx \left(\frac{m}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{ze^2}{\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{q^4} \right) \\
 &= \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{2m}{4p^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Rutherford}
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

Dieses Ergebnis ist gleich dem der klassischen Herleitung! Vergleiche mit Gl. 2.15. Der Rutherford-Wirkungsquerschnitt stellt deshalb die Born'sche Näherung dar, wenn der übertragene Impuls oder der Streuwinkel nicht zu klein ist, und wir in diesem Fall den Effekt der Elektronenwolke vernachlässigen können.

Kapitel 4

Die Lorentz-Transformationen

4.1 Warum?

Die Gleichungen einer modernen Theorie müssen mit dem Einsteinschen Prinzip der Relativität übereinstimmen. D.h., die Naturgesetze müssen in jedem Inertialbezugssystem dieselbe Form haben.

Inertialbezugssystem: ein Bezugssystem, relativ zu welchem ein freier Körper sich ohne Beschleunigung bewegt (erstes Newtonsches Gesetz)

Es kann kein bevorzugtes Inertialbezugssystem geben. Alle Inertialbezugssysteme sind einander gleich. D.h., unsere Theorie der Elementarteilchen muss in jedem Inertialbezugssystem dieselbe Form annehmen. Man spricht von der **Kovarianz** der Theorie.

4.2 Die Notation

Wir führen nun die Notation ein, die wir zur Beschreibung eines Punkts in der Raumzeit benutzen werden.

Ein bestimmter Punkt im 3-dimensionalen Raum: Wir definieren diesen Punkt mit Hilfe eines **Ortsvektors**

$$\vec{x} \equiv (x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3) \quad (4.1)$$

Ein bestimmter Punkt in der 4-dimensionalen Raumzeit: wir definieren die Koordinaten eines **Ereignisses**:

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (4.2)$$

wobei c die **Lichtgeschwindigkeit** ist. Wir bemerken, dass die Einheiten der vier Koordinaten dieselben sind, nämlich die Einheit einer Länge ("homogene

Einheiten"). Um die Koordinaten des Punktes in der 4-dimensionalen Raumzeit zu definieren, haben wir die Notation mit dem griechischen Index μ eingeführt:

$$x^\mu \quad \text{wobei } \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

4.3 Eigentliche Lorentz-Transformation

Die Lorentz-Transformation setzt die Zeit- und Raumkoordinaten eines bestimmten Ereignisses, gemessen relativ zu verschiedenen Inertialbezugssystemen, in Beziehung zu einander.

Rotation Wir betrachten z.B. eine Rotation um die z-Achse.

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' = z \end{cases} \quad (4.4)$$

Es folgt daraus, (x^μ wird bezüglich einem Beobachter O gemessen; x'^μ wird bezüglich einem Beobachter O' gemessen)

$$x^\mu \equiv (ct, x, y, z) \quad (4.5)$$

$$x'^\mu \equiv (ct', x', y', z') = (ct, x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta, z) \quad (4.6)$$

Boost Wir betrachten zwei Inertialbezugssysteme, die sich relativ zueinander mit einer **konstanten** Geschwindigkeit v bewegen. Wir nehmen an, dass zur Zeit $t=t'=0$ beide Bezugssysteme zusammenfallen und die Koordinatenachsen parallel sind. Siehe Abb. 4.1.

Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit entlang der x -Achse gerichtet ist (Wahl des Koordinatensystems, d.h. die relative Bewegung geht entlang der x -Richtung):

$$\vec{v} = (v, 0, 0) \quad (4.7)$$

Die Boost-Transformation ist

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \quad \text{wobei } \beta \equiv v/c \text{ und } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.8)$$

Wir erinnern uns an einige Folgerungen der Lorentz-Transformationen:

1. Relativität der Gleichzeitigkeit: wir betrachten zwei Ereignisse A(t_A, x_A, y_A, z_A) und B(t_B, x_B, y_B, z_B)

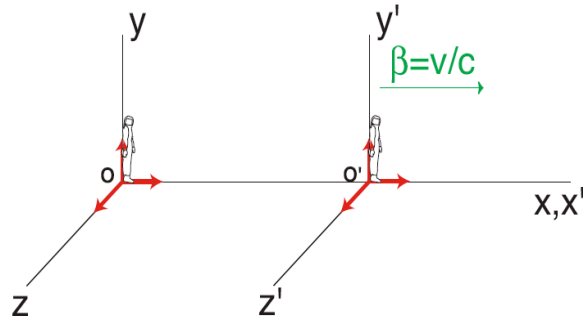


Abbildung 4.1: Koordinatenachsen für den Lorentz-Boost.

Bezüglich System S: $t_A = t_B$

Bezüglich System S':

$$t'_A = t'_B + \frac{\beta\gamma}{c}(x_B - x_A) \quad (4.9)$$

d.h.

$$t'_A \neq t'_B \text{ wenn } x_B \neq x_A \quad (4.10)$$

2. Längenkontraktion (Relativität der Länge)

$$L = L'/\gamma \quad (4.11)$$

3. Zeitdilatation (Relativität der Zeit)

$$t = \gamma t' \quad (4.12)$$

4. Addition der Geschwindigkeit Wegen der Linearität der Lorentz-Transformation

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x) \quad (4.13)$$

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t) \quad (4.14)$$

folgt mit $u = \Delta x/\Delta t$ und $u' = \Delta x'/\Delta t'$:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v\right)}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}} \longrightarrow u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'} \quad (4.15)$$

ähnliche Beziehungen gelten für die anderen Komponenten.

5. Invarianz des Raumzeitintervalls. Die Grösse

$$\Delta s^2 \equiv c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (4.16)$$

besitzt denselben Wert in jedem Bezugssystem, d.h.

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 \quad (4.17)$$

Wir sagen, dass es eine Invariante der Lorentz-Transformation ist. Dass diese Beziehung gilt, kann mit Hilfe von expliziten Boosts oder Rotationen bewiesen werden.

4.3.1 Die Λ -Matrix und die Notation

Wir werden eine eigentliche Lorentz-Transformation (eine Kombination von Rotationen und Boosts) als die folgende (lineare) Beziehung zwischen 4-dimensionalen Vektoren darstellen

$$(x^\mu)' = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.18)$$

wobei Λ^μ_{ν} die Komponenten der 4×4 -Matrix ist. Diese Matrix stellt eine Lorentz-Transformation zwischen zwei Bezugssystemen dar, deren Ursprünge zur Zeit $t=t'=0$ zusammenfallen. Die Komponenten der Λ Matrix sind alle reell und dimensionslos, sie hängen nur von den Parametern der Transformation ab und nicht von den Koordinaten x^μ .

Beispiel: Boost entlang der x -Achse

$$\Lambda^\mu_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Einsteinsche Summen-Konvention: Ueber doppelt vorkommende Indizes wird von 0 bis 3 summiert

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu \quad (4.20)$$

Wir werden diese Konvention immer verwenden.

4.3.2 Vierer-Vektoren

Wir betrachten eine physikalische Grösse a^μ , die 4 Komponenten besitzt.

Wenn sich die Komponenten der physikalischen Grösse a^μ wie die Komponenten des Raumzeitvektors x^μ transformieren, wird a^μ als 4-Vektor bezeichnet.

Es folgt,

$$a^\mu \text{ ist 4-Vektor} \iff (a^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad (4.21)$$

Die 4-Komponenten werden so bezeichnet

$$a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a}) \quad (4.22)$$

4.3.3 Kovarianter und Kontravarianter 4-Vektor

Im Allgemeinen werden zwei Arten von Komponenten von 4-Vektoren definiert. Man spricht von kontravarianten oder kovarianten Komponenten:

$$\begin{aligned} \text{Kontravarianter 4-Vektor : } a^\mu &\equiv (a^0, \vec{a}) \\ (a^\mu)' &= \Lambda^\mu_\nu a^\nu \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \text{Kovarianter 4-Vektor : } a_\mu &\equiv (a^0, -\vec{a}) \\ (a_\mu)' &= \Lambda_\mu^\nu a_\nu \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Transformation zwischen kontravarianten und kovarianten 4-Vektoren wird mit Hilfe des **metrischen Tensors** durchgeführt

$$a_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\nu \quad (4.25)$$

wobei

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

d.h.

$$g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, g_{\mu\nu} = 0 \quad \mu \neq \nu \quad (4.27)$$

4.3.4 Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zwischen zwei 4-Vektoren a^μ und b^μ wird definiert als

$$a \cdot b \equiv a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (4.28)$$

Wir bemerken, dass gilt

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^\mu b_\mu \quad (4.29)$$

Beispiel: Das Raumzeitintervall

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \implies x \cdot x = (x^\mu)^2 = c^2 t^2 - (\vec{x})^2 \quad (4.30)$$

Wir wissen, dass diese Grösse eine Invariante der Lorentz-Transformation ist. Im Allgemeinen ist eine Grösse, die als das Skalarprodukt von zwei 4-Vektoren definiert wird, eine Invariante. Man spricht von einem **Skalar**.

Ein Skalar besitzt denselben Wert bezüglich allen Inertialsystemen. Ein Skalar ist eine Invariante.

$$a \cdot b \text{ ist ein Skalar} \quad (4.31)$$

Skalargrössen sind sehr nützliche Grössen, um Eigenschaften von physikalischen Systemen auszudrücken, weil sie für jeden Beobachter denselben Wert besitzen! Man sagt deshalb, dass sie etwas "fundamentales" über das System, das wir beschreiben wollen, darstellen (und nicht vom Beobachter abhängig sind). Wir werden z.B. Wirkungsquerschnitte mit Hilfe von Skalaren ausdrücken.

Was ist die Bedingung, damit die Skalarprodukte invariant sind? Wir betrachten:

$$(a \cdot b)' = (a^\mu)' (b_\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \Lambda_\mu^\rho b_\rho = \Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\rho a^\nu b_\rho \quad (4.32)$$

Wir erhalten die **Orthogonalitätsbeziehung**:

$$\Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\rho = \delta_\nu^\rho \equiv \begin{cases} 1 & \text{wenn } \nu = \rho \\ 0 & \text{wenn } \nu \neq \rho \end{cases} \quad (4.33)$$

wobei δ das Kronecker-Symbol ist. Es folgt damit

$$(a \cdot b)' = (a^\mu)' (b_\mu)' = \Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\rho a^\nu b_\rho = \delta_\nu^\rho a^\nu b_\rho = a^\nu b_\nu = a \cdot b \quad (4.34)$$

d.h. das Skalarprodukt ist eine Invariante. In den Übungen wird bewiesen, dass die Orthogonalitätsbeziehung für eine beliebige Lorentz-Transformation gilt.

Wir bemerken, dass das Skalarprodukt nicht immer einen positiven Wert haben muss. Man klassifiziert 4-Vektoren nach dem Wert des Skalarprodukts mit sich selber

$$\begin{cases} a^\mu \text{ ist zeitartig} & \Leftrightarrow a^2 > 0 \\ a^\mu \text{ ist raumartig} & \Leftrightarrow a^2 < 0 \\ a^\mu \text{ ist lichtartig} & \Leftrightarrow a^2 = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

4.3.5 Tensoren

In der Physik werden im Allgemeinen Grössen eingeführt, die physikalische Eigenschaften der Realität beschreiben. Um ein physikalisches Verständnis dieser Grössen zu gewinnen, ist es wichtig, die Transformationseigenschaften dieser Grössen zu verstehen.

Im Allgemeinen nennen wir **Tensoren** Objekte, die bestimmte Transformationseigenschaften unter Lorentz-Transformationen besitzen.

1. ein Skalar ist ein Tensor der Stufe 0, es ist eine Invariante

2. ein 4-Vektor ist ein Tensor der 1. Stufe, der 4 Komponenten besitzt. Seine Transformationsregel ist

$$(a^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \quad (4.36)$$

(nur ein Summations-Index ν)

3. ein Tensor der 2. Stufe ist eine Grösse mit $4^2=16$ Komponenten, die die folgende Transformationsregel besitzt

$$(s^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma s^{\rho\sigma} \quad (4.37)$$

(mit zwei Summations-Indizes)

4. usw...

4.3.6 Inverse Lorentz-Transformation

Es folgt aus der Definition der Lorentz-Transformation, dass

$$(a^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu a^\nu \implies \Lambda_\mu^\rho (a^\mu)' = \Lambda_\mu^\rho \Lambda^\mu_\nu a^\nu = \delta_\nu^\rho a^\nu = a^\rho \quad (4.38)$$

Deshalb ist die inverse Lorentz-Transformation gleich

$$a^\mu = \Lambda^\mu_\nu (a^\nu)' \quad \text{Kontravariant} \quad (4.39)$$

und in ähnlicher Weise

$$a_\mu = \Lambda^\nu_\mu (a_\nu)' \quad \text{Kovariant} \quad (4.40)$$

4.4 Diskrete (uneigentliche) Lorentz-Transformation

Wir betrachten nun diskrete Transformationen der Raumzeit. Diese Transformationen werden als diskret bezeichnet, weil sie nicht durch eine Reihe von infinitesimalen Transformationen gewonnen werden können.

Raumspiegelung (Parität)

$$\begin{cases} x^{0'} = x^0 \\ x^{i'} = -x^i \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4.41)$$

Zeitumkehr

$$\begin{cases} x^{0'} = -x^0 \\ x^{i'} = x^i \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (4.42)$$

Wie erwartet, ist das Raumzeitintervall eine Invariante dieser Transformationen.

Axiale Grösse: Wenn wir einen Vektor im Raum betrachten, bemerken wir, dass er sein Vorzeichen unter der Parität ändert:

$$P(\vec{x}) = -\vec{x} \quad (\text{P Paritaetstransformation}) \quad (4.43)$$

d.h. die Grösse \vec{x} entspricht einer physikalischen Grösse, die sich wie ein Raumvektor verhält.

Wenn wir z.B. eine neue Grösse \vec{a} definieren, die als das Vektorprodukt von zwei Vektoren definiert wird, dann gilt:

$$P(\vec{a}) = -\vec{x}_1 \times (-\vec{x}_2) = +\vec{a} \quad (4.44)$$

Man sagt, dass die Grösse \vec{a} ein Axialvektor ist. In ähnlicher Weise definiert man die Skalargrösse oder Pseudoskalargrösse:

$$s \text{ Skalar} \iff P(s) = +s \quad (4.45)$$

$$p \text{ Pseudoskalar} \iff P(p) = -p \quad (4.46)$$

4.5 Drehimpuls, Spin und Rotationen

Wir werden Spin-Effekte in den Wirkungsquerschnitten von verschiedenen Prozessen betrachten. Deshalb folgt eine kurze Wiederholung der Eigenschaften dieser Operatoren. Wir diskutieren hier auch die Beziehung zwischen Drehimpuls und Rotationen.

4.5.1 Drehimpuls-Operator

Der Drehimpuls-Operator ist gleich

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = -i\vec{r} \times \vec{\nabla} \quad (4.47)$$

mit den Komponenten:

$$L_x = yp_z - zp_y = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (4.48)$$

$$L_y = zp_x - xp_z = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.49)$$

$$L_z = xp_y - yp_x = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (4.50)$$

Mit der Kommutationsregel für die Raumkoordinaten und die Impulskomponenten

$$[x, p_x] = i, \quad [y, p_y] = i, \quad \text{und} \quad [z, p_z] = i \quad (4.51)$$

kann man beweisen, dass die Kommutationsregel des Drehimpulses gleich

$$[L_x, L_y] = iL_z, [L_y, L_z] = iL_x, \text{ und } [L_z, L_x] = iL_y \quad (4.52)$$

ist, oder (Im Allgemeinen schreibt man die Indizes x, y, z als $1, 2, 3$)

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k, \text{ wobei } \vec{L} = (L_1, L_2, L_3) \quad (4.53)$$

Diese Gleichung beschreibt die **Lie-Algebra** des Drehimpuls-Operators. Der total **antisymmetrische Levi-Civita Tensor** ϵ_{ijk} ist definiert als

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{gerade Zahl von Permutationen von } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{ungerade Zahl von Permutationen von } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (4.54)$$

d.h., z.B.

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1 \text{ und } \epsilon_{321} = \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = -1 \quad (4.55)$$

4.5.2 Spin-Operator

Es gibt kein klassisches Analogon zum Spin. Er entspricht einem internen Freiheitsgrad eines Teilchens.

z.B. für Spin 1/2: zwei mögliche Zustände

$$|\uparrow\rangle = |s, s_3\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Die “Spin-up” und “Spin-down” Zustände sind die Eigenzustände des Operators

$$S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

Die drei Komponenten können mit Hilfe der **Pauli-Matrizen** σ definiert werden

$$\vec{S} = (S_1, S_2, S_3) = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad (4.58)$$

wobei

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

Die Eigenschaften dieser Matrizen sind die folgenden:

$$\sigma^2 = 1, \quad \sigma^+ = \sigma \quad \text{Hermitesch} \quad (4.60)$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \text{Lie - Algebra} \quad (4.61)$$

d.h. die Kommutationsregeln sind dieselben wie die des Drehimpuls-Operators. Die Lie-Algebra entspricht einem direkten Beweis der Natur des Spins: der Spin folgt der Algebra eines Drehimpulses, ist aber ein interner Freiheitsgrad des Teilchens.

Weitere nützliche Beziehungen sind:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}^i + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (4.62)$$

und

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})I + i\vec{\sigma} \cdot \vec{A} \times \vec{B} \quad (4.63)$$

wobei \vec{A} und \vec{B} beliebige 3-Vektoren sind und

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (4.64)$$

Die Pauli-Matrizen werden wir oft brauchen, z.B. wenn wir die Dirac-Gleichung diskutieren werden (Siehe Kap. 8).

4.5.3 Rotation und Generator (Erzeugende)

Der Drehimpuls ist mit Rotationen verknüpft. Wir betrachten eine Rotation um einen Winkel α um die z -Achse im Uhrzeigersinn. Wir stellen diese Rotation mit Hilfe einer (unitären) **Matrix** R dar:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Wir betrachten dann die Wellenfunktion eines Teilchens und nehmen an, dass sie von der Rotation nicht beeinflusst wird (die Wellenfunktion besitzt eine bestimmte Symmetrie):

$$\Psi(x', y', z') = \Psi(x, y, z) \implies \Psi'(x, y, z) = \Psi(R^{-1}(x, y, z)) \quad (4.66)$$

Wir bemerken:

Die Beziehung zwischen ψ und ψ' muss durch eine unitäre Matrix $U(\alpha)$ dargestellt werden. Die Unitarität erzwingt die Erhaltung der Normierung $\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi' | \psi' \rangle$.

D.h.,

$$\Psi'(x, y, z) = U(\alpha)\Psi(x, y, z) \quad (4.67)$$

Wir betonen, dass R auf die Raumkoordinaten wirkt, während U auf die Wellenfunktion wirkt. Sie sind daher verschiedene Darstellungen der physikalischen Rotation, die wir betrachten.

Für eine kontinuierliche Transformation kann immer eine infinitesimale Transformation betrachtet werden. Für eine solche Rotation um einen Winkel $\delta\alpha$ gilt:

$$\begin{aligned}\Psi'(x, y, z) &= \Psi(R^{-1}(x, y, z)) \\ &= \Psi(x + y\delta\alpha, y - x\delta\alpha, z) \\ &\approx \Psi(x, y, z) + y\delta\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x} - x\delta\alpha \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ &= \Psi(x, y, z) - i\delta\alpha L_z \Psi(x, y, z)\end{aligned}\quad (4.68)$$

(Siehe Kap. 4.5.1). Wir erhalten:

$$U(\delta\alpha) = 1 - i\delta\alpha L_z \quad (4.69)$$

Im Allgemeinen kann eine unitäre infinitesimale Transformation der Wellenfunktion mit (infinitesimalem) Parameter ϵ so geschrieben werden:

$$U(\epsilon) \equiv 1 - i\epsilon G \quad (4.70)$$

wobei G als **Generator** (oder **Erzeugende**) der Transformation bezeichnet wird. Weil

$$U^+(\epsilon)U(\epsilon) = (1 + i\epsilon G^+)(1 - i\epsilon G) = 1 + i\epsilon(G^+ - G) + \dots \quad (4.71)$$

die Invarianz der Normierung unter der Rotation liefert, gilt:

$$U^+(\epsilon)U(\epsilon) \equiv 1 \implies G^+ = G \quad (4.72)$$

d.h., der Generator muss hermitesch sein. Wir erinnern uns daran, dass hermitesche Operatoren reellen (d.h. physikalischen, beobachtbaren) Größen entsprechen. Es folgt:

Der Drehimpuls-Operator ist der Generator der Rotation. Er ist hermitesch und deshalb eine Observable.

Eine endliche Transformation kann durch sukzessive infinitesimale Transformationen erhalten werden:

$$U(\alpha) = (U(\epsilon))^n = \left(1 - i\frac{\alpha}{n}G\right)^n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \exp(-i\alpha G) \quad (4.73)$$

Wenn G hermitesch ist, ist $\exp(-iG)$ unitär. Eine endliche Rotation um einen Winkel α um eine beliebige Achse \vec{n} kann daher so ausgedrückt werden:

$$U(\alpha) = \exp(-i\alpha \vec{n} \cdot \vec{L}) \quad (4.74)$$

Für eine infinitesimale Transformation erhalten wir:

$$U(\delta\alpha) = \exp(-i\delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{L}) \approx 1 - i\delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{L} + \dots \quad (4.75)$$

Wenn der Hamilton-Operator invariant unter der Transformation ist, gilt die Kommutationsregel:

$$[H, U] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad HU = UH \quad (4.76)$$

oder

$$\begin{aligned}H(1 - i\delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{L} + \dots) &= (1 - i\delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{L} + \dots)H \\ \Rightarrow H(i\delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{L} + \dots) &= (i\delta\alpha \vec{n} \cdot \vec{L} + \dots)H \\ \Rightarrow H\vec{L} &= \vec{L}H \\ \Rightarrow [H, \vec{L}] &= 0\end{aligned}\quad (4.77)$$

d.h. Drehimpulserhaltung ist eine Folge der Invarianz unter der Rotation.

4.6 Gruppen-Theorie

4.6.1 Definition einer Gruppe

Symmetrie-Transformationen von physikalischen Systemen besitzen die mathematischen Eigenschaften einer Gruppe. Eine Gruppe ist eine Menge von Elementen mit einer Verknüpfung, die die folgenden Regeln befolgen:

1. Das Produkt ab von zwei Elementen der Gruppe a und b ist auch ein Element der Gruppe.
2. Assoziativität: $(ab)c = a(bc)$, wobei a, b und c Elemente der Gruppe sind.
3. Ein Element der Gruppe ist die Identität I , für welches gilt: $aI = Ia = a$ für beliebiges a .
4. Für jedes Element a der Gruppe gibt es ein Inverses a^{-1} , für welches gilt: $aa^{-1} = a^{-1}a = I$ ($I^{-1} = I$)

Eine Gruppe ist eine **Abelsche Gruppe**, wenn alle Elemente der Gruppe kommutieren, d.h. $ab = ba$ für jedes a, b .

Eine Gruppe kann eine endliche oder eine unendliche Anzahl von Elementen haben. Die Elemente einer kontinuierlichen unendlichen Gruppe können durch einen kontinuierlichen Parameter definiert werden. Die Gruppe der Rotationen ist z.B. eine kontinuierliche Gruppe. In einer (kontinuierlichen) **Lie-Gruppe** kann jedes Element als Produkt von infinitesimalen Transformationen dargestellt werden. Die Rotationen bauen z.B. eine solche Lie-Gruppe auf.

4.6.2 Translation

Die **Translationen** im Raum bauen eine *Abelsche Lie-Gruppe* auf. Die Elemente der Gruppe werden durch einen Vektorparameter \vec{a} definiert:

$$\vec{x}' = (x', y', z') = \vec{x} + \vec{a} \quad (4.78)$$

Der Effekt der Translation auf die Wellenfunktion kann so ausgedrückt werden:

$$\Psi'(x, y, z) = \Psi(R^{-1}(x, y, z)) = \Psi(\vec{x} - \vec{a}) \quad (4.79)$$

Für eine infinitesimale Translation erhalten wir:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x} - \delta\vec{a}) &\approx \Psi(\vec{x}) - \delta a_x \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \delta a_y \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \delta a_z \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \dots \\ &= \Psi(\vec{x}) - i\delta a_x p_x \Psi - i\delta a_y p_y \Psi - i\delta a_z p_z \Psi + \dots \\ &= \Psi(\vec{x}) - i\delta\vec{a} \cdot \vec{p} \Psi + \dots \end{aligned} \quad (4.80)$$

Für eine endliche Translation erwarten wir daher:

$$\Psi' \equiv U\Psi = e^{-i\vec{a} \cdot \vec{p}} \Psi \quad (4.81)$$

Damit die Wahrscheinlichkeit $\langle \psi | \psi \rangle$ erhalten wird, muss der Impuls-Operator hermitesch sein. Der Impuls ist daher eine beobachtbare Grösse. Der Impuls-Operator ist der Generator der räumlichen Translation. Schliesslich finden wir:

Aus der Invarianz des Quantensystems unter der Translation folgt die Impulserhaltung.

4.6.3 Rotationen

In Kap. 4.5.3 haben wir ähnliche Resultate für Rotationen im Raum hergeleitet. Wir fassen hier zusammen: Eine endliche Rotation um einen Winkel α um eine beliebige Achse \vec{n} kann so ausgedrückt werden ($|\vec{n}| = 1$):

$$U(\alpha) = \exp(-i\alpha \vec{n} \cdot \vec{L}) \quad (4.82)$$

wobei \vec{L} der Drehimpuls-Operator ist. Es gilt:

Der Drehimpuls-Operator ist der Generator der räumlichen Rotation. Drehimpulserhaltung ist eine Folge der Invarianz unter der Rotation.

4.6.4 Diskrete Transformationen

Diskrete Transformationen können nicht als Produkt infinitesimaler Transformationen gewonnen werden. Die Raumspiegelung ist ein Beispiel dafür:

$$P : \begin{cases} \vec{x} \rightarrow -\vec{x} \\ t \rightarrow t \end{cases} \longrightarrow \text{System } \Psi : \quad \Psi' = P\Psi(\vec{x}) = \Psi(-\vec{x}) \quad (4.83)$$

Sie kann z.B. nicht als Produkt von Rotationen erhalten werden. Man spricht auch von uneigentlichen Rotationen.

Wir bemerken, dass zwei aufeinanderfolgende Raumspiegelungen das ursprüngliche System liefern. D.h.,:

$$\Psi'(\vec{x}') = P\Psi(\vec{x}) = P^2\Psi'(\vec{x}') \quad (4.84)$$

oder

$$P^2 = 1 \quad (4.85)$$

Wir bemerken noch einmal, dass die Parität ein hermitescher Operator ist, und daher einer beobachtbaren (physikalischen) Grösse entspricht. Die Eigenwerte der Paritäts-Transformation sind +1 oder -1.

Die **Kugelfunktionen** Y_{lm} sind Eigenfunktionen des Drehimpulses und besitzen eine bestimmte Parität. Im Kugelkoordinatensystem gilt z.B.:

$$\begin{aligned} Y_{0,0}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sin \theta \frac{e^{\pm i\phi}}{\sqrt{2}}, \quad Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \end{aligned} \quad (4.86)$$

Im Allgemeinen gilt

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} P_{\ell,m}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (4.87)$$

wobei die assoziierten Legendre-Polynome gleich

$$P_{\ell,m}(x) = \frac{(-1)^m}{2^\ell} \frac{1}{\ell!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell \quad (4.88)$$

sind. Die Parität wirkt in Kugelkoordinaten so:

$$\theta \rightarrow \pi - \theta \quad \text{und} \quad \phi \rightarrow \phi + \pi \quad (4.89)$$

und es gilt

$$\begin{aligned} P_{\ell,m}(\cos \theta) &\rightarrow P_{\ell,m}(\cos(\pi - \theta)) = (-1)^{\ell+m} P_{\ell,m}(\cos \theta) \\ e^{im\phi} &\rightarrow e^{im(\phi+\pi)} = (-1)^m e^{im\phi} \end{aligned} \quad (4.90)$$

daher

$$PY_{l,m}(\theta, \phi) = (-1)^l Y_{l,m}(\theta, \phi) \longrightarrow \text{Parität } Y_{l,m} = (-1)^l \quad (4.91)$$

Die Eigenwerte sind multiplikativ. Wenn wir z.B. ein System mit zwei Teilchen betrachten, wird die Parität des Systems:

$$P = P_a P_b (-1)^l \quad (4.92)$$

wobei l der relative Drehimpuls der Teilchen ist, und P_a, P_b sind die **intrinsischen Paritäten** der Teilchen. Intrinsische Paritäten werden in Kap. 18 und 19 weiter diskutiert.

4.6.5 Die Poincaré-Gruppe

Wir diskutieren nun die Poincaré-Gruppe. Diese Gruppe besteht aus den folgenden linearen Transformationen der Raumzeit:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + b^\mu \quad (4.93)$$

wobei Λ die **Orthogonalitätsbeziehung (oder Lorentz-Bedingung)** erfüllt:

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (4.94)$$

Der 4-Vektor b^μ definiert den relativen Ursprung der Koordinatensysteme. Wenn $b^\mu = 0$ spricht man von der homogenen Transformation.

Diese Orthogonalitätsbeziehung ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Erhaltung des Skalarprodukts zweier 4-Vektoren unter einer homogenen Transformation (d.h. wenn $b^\mu = 0$).

Tatsächlich gilt:

$$x' \cdot y' = g_{\mu\nu} x'^\mu y'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta x^\alpha y^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta = x \cdot y \quad (4.95)$$

Diese Bedingung beschreibt im Fall $x^\mu = y^\mu = (ct, x, y, z)$ die Invarianz des Raumzeit-Intervalls (Siehe Kap. 4.3).

Wir zeigen, dass diese Transformationen eine Gruppe aufbauen. Wir betrachten zwei aufeinanderfolgende Transformationen:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \Lambda x + b \\ x'' &= \Lambda' x' + b' \end{aligned} \right\} \rightarrow x'' = \Lambda' \Lambda x + \Lambda' b + b' = \Lambda'' + b'' \quad (4.96)$$

Zwei aufeinanderfolgende Transformationen sind gleich der einzelnen Transformation:

$$x'' = \Lambda'' x + b'' \quad \text{mit} \quad \Lambda'' = \Lambda' \Lambda \quad \text{und} \quad b'' = \Lambda' b + b' \quad (4.97)$$

Die Identität ist:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \quad \text{und} \quad b = (0, 0, 0, 0) \quad (4.98)$$

Die umgekehrte Transformation ist:

$$x' = \Lambda x + b \rightarrow \Lambda^{-1} x' - \Lambda^{-1} b = x = \Lambda' x' + b' \quad (4.99)$$

Es folgt:

$$\Lambda' = \Lambda^{-1} \quad \text{und} \quad b' = -\Lambda^{-1} b \quad (4.100)$$

Schliesslich zeigt man die Assoziativität:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \Lambda x + b \\ x'' &= \Lambda' x' + b' \\ x''' &= \Lambda'' x'' + b'' \end{aligned} \right\} \rightarrow x''' = \Lambda'' (\Lambda' (\Lambda x + b) + b') + b''$$

$$= \underbrace{\Lambda'' \Lambda'}_{=\Lambda'''} x + \underbrace{\Lambda'' \Lambda' b + \Lambda'' b' + b''}_{=b'''} \quad (4.101)$$

Man kann das Produkt in beliebiger Reihenfolge durchführen und findet immer dasselbe Resultat. Die Assoziativität gilt.

Aus der *Orthogonalitätsbeziehung* $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta}$ (Gl. 4.94) folgt (für $\alpha = \beta = 0$):

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = g_{00} = 1 \implies \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 - \sum_i \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \sum_i (\Lambda^i_0)^2 = 1$$

$$\implies (\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_i (\Lambda^i_0)^2 \quad (4.102)$$

und

$$\det(\Lambda^T g \Lambda) = \det(g \Lambda \Lambda) = \det(g) (\det(\Lambda))^2 = \det(g)$$

$$\implies (\det \Lambda)^2 = 1 \quad (4.103)$$

Diese zwei Bedingungen unterteilen die Transformationen in vier Klassen, die getrennt sind:

$$\begin{array}{llll} \det \Lambda = +1 & \Lambda^0_0 \geq 1 & \text{eigentlich orthochron} & (1) \\ \det \Lambda = +1 & \Lambda^0_0 \leq -1 & \text{eigentlich nicht-orthochron} & (PT) \\ \det \Lambda = -1 & \Lambda^0_0 \geq 1 & \text{uneigentlich orthochron} & (P) \\ \det \Lambda = -1 & \Lambda^0_0 \leq -1 & \text{uneigentlich nicht-orthochron} & (T) \end{array} \quad (4.104)$$

Die vier Klassen sind getrennt, weil die Determinante und Λ^0_0 nicht kontinuierlich von einem Wert kleiner als 1 bis zu einem Wert grösser als 1 geändert werden können. In jeder Klasse gibt es eine "charakteristische Transformation": die Identität (1), die Raumspiegelung (P) und die Zeitumkehr (T) oder Raumspiegelung-Zeitumkehr (PT).

Die erste Klasse baut eine Untergruppe auf. Andere Untergruppen können gewonnen werden, wenn man die anderen Klassen (P, T oder PT) mit der ersten Klasse kombiniert: $(1), (1 \bullet PT), (1 \bullet P)$ und $(1 \bullet T)$. Tatsächlich kann jede Transformation in jeder Untergruppe kontinuierlich in eine andere Transformation derselben Untergruppe umgewandelt werden. Im Besonderen kann eine beliebige Transformation beliebig nah zur charakteristischen Transformation ($1, P, T$, oder PT) gebracht werden.

Wir diskutieren nun die Generatoren der eigentlichen orthochronen Untergruppe. Wir betrachten dafür eine infinitesimale Transformation. Die Identität ist gleich

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \quad \text{und} \quad b = (0, 0, 0, 0) \quad (4.105)$$

und daher ist eine infinitesimale Transformation gleich:

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu \quad \text{und} \quad b^\mu = \epsilon^\mu \quad (4.106)$$

wobei ω und ϵ infinitesimal sind. Wir bemerken, dass eine Folgerung der Orthogonalitätsbedingung die folgende ist:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = g_{\mu\nu} (\delta^\mu_\alpha + \omega^\mu_\alpha) (\delta^\nu_\beta + \omega^\nu_\beta) \\ &= g_{\mu\nu} \delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + g_{\mu\nu} \delta^\mu_\alpha \omega^\nu_\beta + g_{\mu\nu} \omega^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta + \dots \\ &= g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\nu} \omega^\nu_\beta + g_{\mu\beta} \omega^\mu_\alpha \\ &= g_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (4.107)$$

d.h.,

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \quad (4.108)$$

Ein solcher antisymmetrischer Tensor der 2. Stufe ist eine Grösse mit $4^2 - 10 = 6$ unabhängigen Parametern. Mit den 4-Komponenten von ϵ besitzt eine inhomogene Lorentz-Transformation $6 + 4 = 10$ Parameter.

Die Generatoren können so gefunden werden. Die infinitesimale Transformation eines 4-Vektors ist die folgende:

$$x'^\mu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) x^\nu + \epsilon^\mu \quad (4.109)$$

Die entsprechende unitäre Transformation der Wellenfunktion muss nah der Identität sein. Wir schreiben sie so (Siehe Kap. 4.5.3 und 4.6.2):

$$U(\omega, \epsilon) = 1 - i\epsilon_\alpha P^\alpha + \frac{i}{2} \omega_{\beta\delta} J^{\beta\delta} + \dots \quad (4.110)$$

J und P müssen hermitesch sein, so dass U unitär ist, und sind die **Generatoren** der Poincaré-Gruppe. Wir bemerken auch, dass (sonst würde der entsprechende Teil verschwinden)

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \implies J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha} \quad (4.111)$$

Weil ϵ einer Zeit- und Raum-Translation entspricht, beschreibt der P -Operator die Energie- und Impuls-Operatoren. Die Lorentz-Transformation enthält die Rotationen, daher muss der J -Operator den Drehimpuls auch enthalten.

Man kann zeigen, dass die Generatoren der folgenden **Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe** folgen müssen:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [J_{\mu\nu}, P_\rho] &= i(g_{\nu\rho} P_\mu - g_{\mu\rho} P_\nu) \\ [J_{\mu\nu}, J_{\rho\lambda}] &= i(g_{\nu\lambda} J_{\mu\rho} + g_{\nu\rho} J_{\mu\lambda} - g_{\mu\rho} J_{\nu\lambda} - g_{\nu\lambda} J_{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (4.112)$$

Wir fassen nun zusammen: die Energie ist durch P^0 gegeben. Wir bemerken, dass P^1, P^2 und P^3 mit P^0 kommutieren. In der Quantenmechanik entsprechen die Operatoren, die mit dem Hamilton-Operator $H = P^0$ kommutieren, guten Quantenzahlen, d.h. sie haben erhaltene Eigenwerte. Wir schliessen daraus, dass der Impuls durch die folgenden Komponenten gegeben wird:

$$\vec{p} = (P^1, P^2, P^3) \quad (4.113)$$

In ähnlicher Weise kommutiert der totale Drehimpuls (Spin plus Bahndrehimpuls) mit H und ist durch die folgenden Komponenten gegeben:

$$\vec{J} = (J^{23}, J^{31}, J^{12}) \quad (4.114)$$

Die restlichen Generatoren werden als "Boost"-Vektor bezeichnet:

$$\vec{K} = (J^{01}, J^{02}, J^{03}) \quad (4.115)$$

Sie werden oft nicht erwähnt, weil sie *nicht* mit dem Hamilton-Operator kommutieren. Sie werden nicht erhalten und sind daher nicht nützlich, um den Quantenzustand des Systems zu charakterisieren.

Kapitel 5

Relativistische Kinematik

5.1 Der Energie-Impuls 4-Vektor

In der speziellen Relativitätstheorie haben wir die Zeitdilatation kennengelernt. Die **Eigenzeit** eines Teilchens wird definiert als

$$\tau \equiv \frac{t}{\gamma} \implies \Delta\tau \equiv \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{\Delta s}{c} \quad (5.1)$$

wobei γ der Lorentz-Faktor ist. Wir führen nun die **Eigengeschwindigkeit** eines Teilchens ein:

$$\vec{\eta} \equiv \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = \gamma \vec{v} \quad (5.2)$$

und auch die erweiterte Definition des **Eigengeschwindigkeits 4-Vektors** oder kürzer **4-Geschwindigkeit**

$$\eta^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (5.3)$$

Wir bemerken, dass die zeitliche Komponente dieses 4-Vektors gleich

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = \gamma \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c \quad (5.4)$$

ist. Damit erhalten wir für die 4-Geschwindigkeit:

$$\eta^\mu = \gamma(c, \vec{v}) \quad (5.5)$$

Das Skalarprodukt η^2 ist natürlich eine Invariante

$$\eta^\mu \eta_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = c^2 \quad (5.6)$$

Mit Hilfe der 4-Geschwindigkeit definieren wir nun den **Energie-Impuls 4-Vektor** als

$$p^\mu \equiv m\eta^\mu = m\gamma(c, \vec{v}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad (5.7)$$

wobei m die **Ruhemasse** des Teilchens ist, und $E = \gamma mc^2$ die gesamte Energie des Teilchens und $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ der Impuls des Teilchens.

Mit den natürlichen Einheiten erhalten wir:

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}) \text{ wobei } E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (5.8)$$

Das Skalarprodukt des Energie-Impuls 4-Vektors muss eine Invariante sein. Tatsächlich:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 \quad (5.9)$$

Es folgt daraus, dass die Ruhemasse eines Teilchens eine Invariante ist, wie schon bekannt ist. D.h., *alle Inertialbeobachter messen dieselbe Ruhemasse eines Teilchens.*

Wir sehen nun diese Definition von einem neuen Standpunkt aus. Die Ruhemasse eines Teilchens ist eine wichtige und nützliche Grösse, um die Eigenschaften von Elementarteilchen zu definieren, *weil sie eine Invariante der Lorentz-Transformation ist.* Sie ist wirklich vom Beobachter unabhängig und entspricht deshalb einer Eigenschaft des Teilchens.

Wir haben die "Kovarianz" der Theorie schon erwähnt (Siehe Kap. 4.1). Wir suchen eine Theorie der Elementarteilchen, die übereinstimmend mit den Prinzipien der Relativitätstheorie ist. D.h., sie muss dieselbe Form relativ zu allen Inertialbeobachtern besitzen. In diesem Fall spielt die Ruhemasse eine spezielle Rolle: sie besitzt denselben Wert für jeden Inertialbeobachter.

5.2 Relativistische Kinematik

Wir haben schon gesagt, dass alle Inertialbezugssysteme gleichwertig sind. Man kann ein beliebiges Inertialbezugssystem wählen, um die Kinematik eines Prozesses zu beschreiben. Oft ist es aber sehr wichtig ein "bestes" Bezugssystem zu wählen. Obwohl die Form der Gleichung in jedem Bezugssystem dieselbe ist, können die Gleichungen in einem spezifischen Bezugssystem oft vereinfacht werden.

Die Symmetrie des Universums unter einer Translation der Raumzeit führt zur Erhaltung der Energie und des Impulses. Der Grund ihrer Einführung ist, dass diese Grössen während einem beliebigen physikalischen Prozess erhalten werden, wie z.B. während Stössen oder Zerfällen von Teilchen.

Relativistischer Stoss: $A+B \rightarrow C+D$.

Energie-Impuls-Erhaltung

$$p_A^\mu + p_B^\mu = p_C^\mu + p_D^\mu \quad (5.10)$$

Die gesamte *kinetische* Energie kann, muss aber nicht erhalten werden: die Ruhemasse des Systems kann zu oder abnehmen. Während eines **elastischen Stosses** ist die Ruhemasse erhalten.

5.2.1 “Fixed-target” Kinematik

Ein Teilchen A stösst ein Teilchen B , das sich bezüglich des Labors in Ruhe befindet. Wir nehmen an, dass die Impulse der Teilchen bezüglich des Laborsystems gleich

$$p_A^\mu = (E_A, \vec{p}_A) \quad \text{und} \quad p_B^\mu = (M_B, 0) \quad (5.11)$$

sind. Es folgt,

$$\begin{aligned} (p_A^\mu + p_B^\mu)^2 &= (E_A + M_B)^2 - (\vec{p}_A + \vec{0})^2 \\ &= E_A^2 + 2M_B E_A + M_B^2 - \vec{p}_A^2 \\ &= M_A^2 + M_B^2 + 2M_B E_A \end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem (SP) ist der gesamte Energie-Impuls 4-Vektor gleich

$$p_{SP}^\mu \equiv (p_{A,SP}^\mu + p_{B,SP}^\mu) = (E_{SP}, \vec{p}_{SP}) = (E_{SP}, \vec{0}) \quad (5.12)$$

wobei “SP” relativ zum Schwerpunktsystem heisst. Das Skalarprodukt eines 4-Vektors ist eine Invariante. Es folgt,

$$(p_A^\mu + p_B^\mu)^2 = (p_{A,SP}^\mu + p_{B,SP}^\mu)^2 = M_A^2 + M_B^2 + 2M_B E_A = E_{SP}^2 \quad (5.13)$$

Die Energie im SP ist deshalb gleich

$$E_{SP} = \sqrt{M_A^2 + M_B^2 + 2M_B E_A} \approx \sqrt{2M_B E_A} \quad (5.14)$$

wenn $E_A \gg M_A$ und $E_A \gg M_B$.

Was ist die physikalische Bedeutung dieser Gleichung? Wegen der Bewegung des SPs ist die Energie, die im SP vorhanden ist, kleiner als die gesamte Laborenergie. Ein Teil der Energie entspricht der Bewegung des SPs und diese Energie muss erhalten werden. Diese Energie ist im SP nicht vorhanden.

Experimentell grenzt diese Beziehung den Wert der Masse von Teilchen ein, die während eines Stosses erzeugt werden können. Um ein schweres Teilchen der Masse M zu erzeugen, muss gelten

$$E_{SP} \geq M \quad (5.15)$$

Z.B. für ein schweres Teilchen der Masse $M=90 \text{ GeV}$, wie im Fall des LEP Beschleunigers am CERN, wo Elektron-Positron-Kollisionen durchgeführt werden. Wir nehmen an, dass das Target ein Elektron ist:

$$E_{SP} \geq M \implies E_A \geq \frac{M^2}{2M_B} \approx \frac{(90 \text{ GeV})^2}{2(0,511 \times 10^{-3} \text{ GeV})} \approx 8 \times 10^6 \text{ GeV} \gg M \quad (5.16)$$

Im LEP stossen die zwei Teilchen frontal aufeinander (d.h. das SP ist gleich dem Laborsystem). In diesem Fall braucht man, um ein Teilchen der Masse $M=90 \text{ GeV}$ zu erzeugen, “nur”

$$E_{SP} \geq M \implies E_A + E_B = 2E_A \geq M \implies E_A \geq \frac{M}{2} \quad (5.17)$$

Im LEP-Beschleuniger (Kollider) kann die ganze Energie der Teilchen dazu benutzt werden, das Teilchen M zu erzeugen.

5.2.2 Übergang vom SP- zum Laborsystem

Wir betrachten nun ein Beispiel, in dem zwei Teilchen z.B. als Folge eines Zerfalls, erzeugt werden. Wir betrachten eines der Teilchen. Siehe Abb. 5.1. Wir nehmen an, dass die Geschwindigkeit des SPs bezüglich des Laborsystems gleich β_L ist.

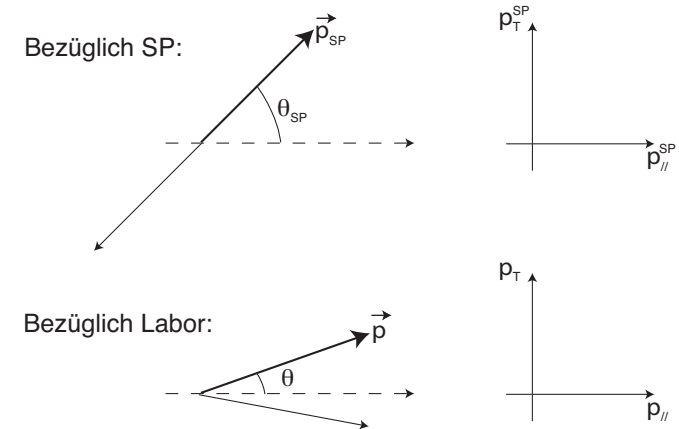


Abbildung 5.1: Kinematik eines Teilchens bezüglich des SPs und des Labors.

Die Transformation der parallelen und senkrechten Komponenten des Impulses kann man als ($\gamma_L = 1/\sqrt{1-\beta_L^2}$):

$$\begin{pmatrix} E \\ p_{||} \\ p_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_L & \gamma_L \beta_L & 0 \\ \gamma_L \beta_L & \gamma_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^{SP} \\ p_{||}^{SP} \\ p_T^{SP} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

ausdrücken. Es folgt daraus,

$$\begin{cases} E = \gamma_L E^{SP} + \gamma_L \beta_L p_{||}^{SP} \\ p_{||} = \gamma_L (\beta_L E^{SP} + p_{||}^{SP}) = \gamma_L p^{SP} (\beta_L E^{SP}/p^{SP} + p_{||}^{SP}/p^{SP}) = \\ \gamma_L p_T^{SP} (\beta_L/\beta + \cos \theta_{SP}) \\ p_T = p_T^{SP} \end{cases} \quad (5.19)$$

wobei β die Geschwindigkeit des Teilchens im SP ist. Wie erwartet, können Teilchen im Labor rückwärts fliegen, wenn $\beta > \beta_L$. Wenn $\beta < \beta_L$ wird das Teilchen vorwärts-“geboosted”.

Sein Zerfallswinkel θ im Laborsystem ist gleich

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{p_T}{p_{||}} = \frac{p_T^{SP}}{(\gamma_L \beta_L E^{SP} + \gamma_L p_{||}^{SP})} = \frac{1}{\gamma_L} \left(\frac{p_T^{SP}/p^{SP}}{\beta_L E^{SP}/p^{SP} + p_{||}^{SP}/p^{SP}} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma_L} \left(\frac{\sin \theta_{SP}}{\beta_L/\beta + \cos \theta_{SP}} \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

5.2.3 Der $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ Zerfall

Als nächstes Beispiel diskutieren wir den π^0 -Zerfall in 2γ . Das π^0 (Ruhemasse m) bewege sich im Laborsystem mit der Geschwindigkeit β in $+x$ Richtung (Siehe Abb. 5.2). Im Ruhesystem (Schwerpunktsystem SP) des π^0 werden die zwei Photonen entgegengesetzt emittiert, jedes mit der Energie

$$E^{SP} = \frac{m}{2} \quad (5.21)$$

und mit dem Impuls $p^{SP} = E^{SP}$ da Photonen masselos sind.

Wir bezeichnen mit θ_{SP} den Emissionswinkel eines der zwei Photonen. Das zweite Photon wird dann unter dem Winkel $\theta_{SP} + \pi$ emittiert. Die Energien der Photonen im Laborsystem sind:

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma \frac{m}{2} + \gamma \beta p_{1,||} = \gamma \frac{m}{2} + \gamma \beta \frac{m}{2} \cos \theta_{SP} = \gamma \frac{m}{2} (1 + \beta \cos \theta_{SP}) \\ E_2 &= \gamma \frac{m}{2} + \gamma \beta p_{2,||} = \gamma \frac{m}{2} - \gamma \beta \frac{m}{2} \cos \theta_{SP} = \gamma \frac{m}{2} (1 - \beta \cos \theta_{SP}) \end{aligned} \quad (5.22)$$

und somit ist

$$E_1 + E_2 = \gamma m \quad (5.23)$$

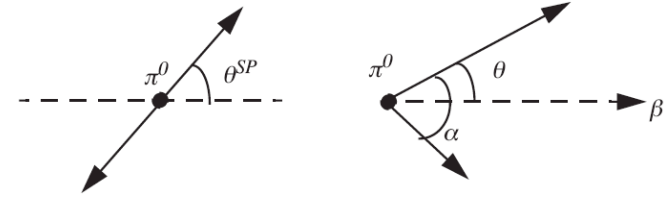


Abbildung 5.2: Lorentztransformation des π^0 -Zerfalls in 2γ vom SP (links) ins Labor (rechts).

die totale Energie des π^0 im Labor. Wir suchen nun die Komponenten des Impulses:

$$\begin{cases} p_{1,T} = p_{1,T}^{SP} = \frac{m}{2} \sin \theta_{SP} \\ p_{1,||} = \gamma(\beta E + p_{1,||}^{SP}) = \gamma \left(\beta \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \cos \theta_{SP} \right) = \gamma \frac{m}{2} (\beta + \cos \theta_{SP}) \end{cases} \quad (5.24)$$

und entsprechend für das zweite Photon. Es folgt daher:

$$\tan \theta = \frac{p_{1,T}}{p_{1,||}} = \frac{\frac{m}{2} \sin \theta_{SP}}{\gamma \frac{m}{2} (\beta + \cos \theta_{SP})} = \frac{\sin \theta_{SP}}{\gamma (\beta + \cos \theta_{SP})} \quad (5.25)$$

Diese Beziehung beschreibt die Winkel-Transformation. Für $\theta_{SP} \rightarrow 0$ geht $\theta \rightarrow 0$ und für $\theta_{SP} \rightarrow \pi$ geht auch $\theta \rightarrow \pi$:

Im Schwerpunktsystem rückwärts (unter 180°) emittierte Photonen werden auch im Labor rückwärts emittiert, auch für $\beta \rightarrow 1$. Dies gilt, weil das Photon masselos ist und sich immer mit Lichtgeschwindigkeit bewegt. Ein vorwärtsgerichteter Boost kann die Bewegungsrichtung von rückwärts emittierten Photonen nicht nach vorwärts ändern.

Wir betrachten nun das Skalarprodukt der Energie-Impuls-4-Vektoren der Photonen im Laborsystem:

$$p_1^\mu p_{2\mu} = E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos \alpha = E_1 E_2 (1 - \cos \alpha) \quad (5.26)$$

wobei der Öffnungswinkel zwischen den Impulsen als α bezeichnet wird (Siehe Abb. 5.2). Im Schwerpunktsystem ist dieser Winkel 180 Grad und somit gilt:

$$p_1^\mu p_{2\mu} = E_1^{SP} E_2^{SP} + p_1^{SP} p_2^{SP} = 2 \left(\frac{m}{2} \right)^2 \quad (5.27)$$

Da das Skalarprodukt von zwei 4-Vektoren Lorentzinvariant ist, sind die rechten Terme in den letzten beiden Gleichungen äquivalent und wir erhalten:

$$E_1 E_2 (1 - \cos \alpha) = 2 \left(\frac{m}{2} \right)^2 \implies 1 - \cos \alpha = \frac{m^2}{2E_1 E_2} \quad (5.28)$$

Als Funktion des Emissionswinkels im SP findet man:

$$1 - \cos \alpha = \frac{m^2}{2E_1 E_2} = \frac{m^2}{2 \left(\gamma \frac{m}{2} (1 + \beta \cos \theta^{SP}) \right) \left(\gamma \frac{m}{2} (1 - \beta \cos \theta^{SP}) \right)} = \frac{2}{\gamma^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta^{SP})} \quad (5.29)$$

Wir bemerken:

Der Öffnungswinkel im Laborsystem erreicht einen minimalen Wert α_m , wenn $\cos \theta_{SP} = 0$.

Es gilt:

$$1 - \cos \alpha_m = 2 \sin^2 \left(\frac{\alpha_m}{2} \right) = \frac{2}{\gamma^2} \implies \sin \left(\frac{\alpha_m}{2} \right) = \frac{1}{\gamma} \quad (5.30)$$

Im Laborsystem existiert ein minimaler Öffnungswinkel zwischen den Richtungen der zwei Photonen. Dieser Winkel hängt von der Energie des π^0 ab und nimmt mit dem Inversen des Lorentzfaktors ab. Für eine Energie des π^0 von 1 GeV ist der Winkel ungefähr 15° . Der minimale Öffnungswinkel entspricht der kinematischen Situation, in der die Photonen im Schwerpunktsystem senkrecht zur Flugrichtung des π^0 emittiert werden (d.h. $\theta_{SP} = 90^\circ$).

Der **minimale und maximale Wert der Energie** der Photonen im Laborsystem sind:

$$E = \gamma \frac{m}{2} (1 + \beta \cos \theta^{SP}) \implies \begin{cases} E_+ = \gamma \frac{m}{2} (1 + \beta) \\ E_- = \gamma \frac{m}{2} (1 - \beta) \end{cases} \quad (5.31)$$

für $\theta_{SP} = 0^\circ$ und $\theta_{SP} = 180^\circ$.

Wir berechnen nun die **Energieverteilung** der Photonen im Laborsystem.

Wir bemerken:

Da das π^0 spinlos ist, ist die Winkelverteilung im Schwerpunktsystem isotrop.

Isotropie bedeutet, dass die Emissionswahrscheinlichkeit in ein Raumwinkel-element konstant ist:

$$\frac{dn(\Omega^{SP})}{d\Omega^{SP}} = \frac{d^2 n(\cos \theta^{SP}, \phi^{SP})}{d \cos \theta^{SP} d\phi^{SP}} = \text{Konst.} \implies \frac{dn(\cos \theta^{SP})}{d \cos \theta^{SP}} = \text{Konst.} \quad (5.32)$$

(Beachte, dass wir $d \cos \theta$ und nicht $d\theta$ verwendet haben und die triviale ϕ -Abhängigkeit wurde weggelassen). Durch die folgende Variablentransformation erhalten wir die Energieverteilung (wir schreiben die Energie des Photons (1) als E):

$$\frac{dn(E)}{dE} = \frac{dn(\cos \theta^{SP})}{d \cos \theta^{SP}} \frac{d \cos \theta^{SP}}{dE} = \text{Konst.} \times \frac{d \cos \theta^{SP}}{dE} \quad (5.33)$$

Weil

$$E = \gamma \frac{m}{2} (1 + \beta \cos \theta^{SP}) \implies \cos \theta^{SP} = \frac{1}{\beta} \left(\frac{2E}{\gamma m} - 1 \right) \quad (5.34)$$

bekommen wir mit der Ableitung:

$$\frac{dn(E)}{dE} = \text{Konst.} \times \frac{2}{\beta \gamma m} = \text{Konst.}' \quad (5.35)$$

Wir bemerken damit:

Die Energieverteilung der Photonen im Laborsystem ist konstant zwischen dem maximalen Wert E_+ und dem minimalen Wert E_- (Siehe Abb. 5.3)

Werden also monoenergetische Teilchen in einem bestimmten Bezugssystem isotrop emittiert, dann ist ihr Energiespektrum in einem Bezugssystem, das sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt, konstant.

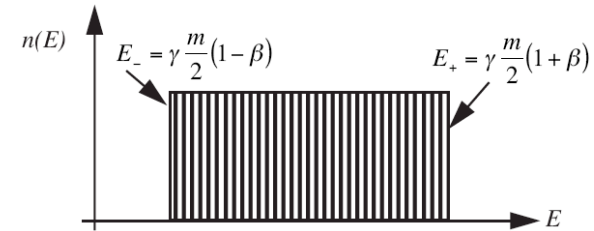


Abbildung 5.3: Verteilung ("Boxverteilung") der Energie des Photons im Laborsystem.

5.3 Relativistische Stöße und Zerfälle

Wir haben im Kap. 3 eine nicht-relativistische Beziehung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den Übergang zwischen Zuständen i und f mit Hilfe der Störungstheorie hergeleitet (Siehe Gl. 3.58 und 3.62):

$$d\sigma_{fi} \equiv \frac{W_{fi}}{j} = \frac{(2\pi) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \rho(E_f) dE_f}{j} \quad (5.36)$$

wobei j der Fluss der einfallenden Teilchen ist, und W_{fi} ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, gegeben durch Fermis Goldene Regel. Diese

Beziehung kann in folgende Faktoren zerlegt werden:

$$d\sigma_{fi} \equiv \frac{W_{fi}}{j} = \underbrace{|V_{fi}|^2}_{\text{Dynamik}} \times \underbrace{\frac{1}{j}}_{\text{Fluss}} \times \underbrace{\rho(E_f)dE_f}_{\text{Phasenraum}} \times \underbrace{(2\pi)\delta(E_f - E_i)}_{\text{Energie-Erhaltung}} \quad (5.37)$$

Das Matricelement V_{fi} enthält die Dynamik (d.h. die “Physik” oder die Wechselwirkung) des Prozesses. Wir bemerken, dass man dem Matricelement kinematische Faktoren (d.h. Fluss der einfallenden Teilchen, Phasenraum, Energieerhaltung,...) anfügen muss, um den Wirkungsquerschnitt der Reaktion zu berechnen.

Wir schreiben nun eine relativistisch-kovariante Erweiterung der letzten Beziehung, um den Wirkungsquerschnitt relativistischer Prozesse zu bestimmen.

Stossprozess: Für den allgemeinen Prozess $A+B \rightarrow 1+2+3+\dots+n$ (Siehe Abb. 5.4) ist der differentielle Wirkungsquerschnitt gleich ($i=1,\dots,n$)

$$d\sigma = \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{\text{Dynamik}} \times \underbrace{\frac{1}{F}}_{\text{Fluss}} \times \underbrace{S}_{\text{Statistik}} \times \underbrace{\left(\prod_i \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}\right)}_{\text{Phasenraum}} \times \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4\left(p_A + p_B - \sum_i p_i\right)}_{\text{Energie-Impuls-Erhaltung}} \quad (5.38)$$

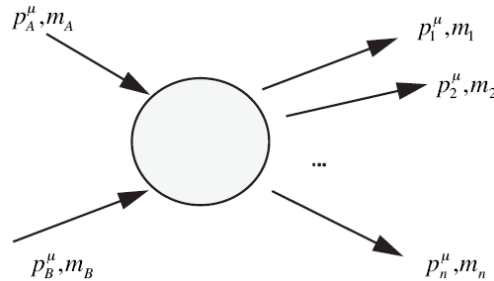


Abbildung 5.4: Allgemeiner Prozess $A + B \rightarrow 1 + 2 + \dots + n$.

Diese Beziehung ist so geschrieben, dass jeder Term Lorentz-invariant ist, d.h., jeder Beobachter wird gleiche Werte für jeden Term berechnen (obwohl die 4-Vektoren nicht für jeden Beobachter dieselben sind, sie sind durch eine Lorentz-Transformation korreliert). Das Produkt, d.h. der Wirkungsquerschnitt, muss natürlich denselben Wert bezüglich einem beliebigen Beobachter besitzen.

1. Das **Matricelement** enthält die Dynamik des Prozesses und wird im Allgemeinen von den 4-Vektoren p_i^μ abhängen. Wir werden im Kap. 10 diskutieren, wie man es berechnet.

2. Der **Phasenraum-Faktor** ist zur Endzustandsdichte in einem Volumenelement $d^3\vec{p}_1 \dots d^3\vec{p}_n$ proportional. Der Faktor $1/2E_i$ kommt aus der Normierung der Teilchenzustände (Siehe Kap. 7 und 8). Wir bemerken, dass mit dieser Normierung das Verhältnis $d^3\vec{p}_i / ((2\pi)^3 2E_i)$ Lorentz-invariant ist.

3. Der **Flussfaktor** ist gleich

$$F \equiv 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2} \quad (5.39)$$

Er beschreibt in kovarianter Form den Fluss der Teilchen des Anfangszustands:

$$\begin{aligned} F &= 4\sqrt{(p_A \cdot p_B)^2 - m_A^2 m_B^2} \\ &= 4(|\vec{p}_A|E_B + |\vec{p}_B|E_A) \\ &= 4E_A E_B \left(\frac{|\vec{p}_A|}{E_A} + \frac{|\vec{p}_B|}{E_B} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

Wenn die zwei Teilchen frontal aufeinander stossen, kann der kovariante Fluss als

$$F = \underbrace{(2E_A)(2E_B)}_{\text{Normierung}} \underbrace{|\vec{\beta}_A - \vec{\beta}_B|}_{\text{relative Geschwindigkeit}} \quad (5.41)$$

ausgedrückt werden. Mit dieser Form ist die Interpretation klarer. Der Fluss beschreibt die Anzahl von einfallenden Teilchen pro Flächeneinheit und pro Zeiteinheit.

4. Der **statistische Faktor** ist gleich

$$S \equiv \frac{1}{j_1!} \frac{1}{j_2!} \dots \quad (5.42)$$

für jede Gruppe von j_i ununterschiedbaren Teilchen im Endzustand. Dieser Term vermeidet das “Double-Counting” von identischen Konfigurationen mit ununterscheidbaren Teilchen im Endzustand.

Zerfall: Für den Zerfall eines Teilchens der Masse M_A und mit Energie E_A in n Teilchen bekommt man für die Partialbreite:

$$d\Gamma = \underbrace{|\mathcal{M}|^2}_{\text{Dynamik}} \underbrace{\frac{1}{2E_A}}_{\text{Normierung}} \underbrace{S}_{\text{Statistik}} \times \underbrace{\left(\prod_i \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}\right)}_{\text{Phasenraum}} \times \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4\left(p_A - \sum_i p_i\right)}_{\text{Energie-Impuls-Erhaltung}} \quad (5.43)$$

Die Partialbreite hat die Einheit der Energie. Die Gesamtbreite des Teilchens wird durch Integration über den Endzustandsphasenraum gewonnen:

$$\Gamma = \int d\Gamma \quad (5.44)$$

Wenn ein Teilchen verschiedene Zerfallskanäle besitzt, ist die Gesamtbreite gleich der Summe der Breiten für jeden Kanal (auch mit verschiedener Anzahl von Teilchen im Endzustand):

$$\Gamma = \sum_n \Gamma_n(M_A \rightarrow 1 + 2 + \dots) \quad (5.45)$$

Die inverse Gesamtbreite liefert die Lebensdauer ($1 \text{ MeV} \approx 1,52 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$, Siehe Kap. 3.1):

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (5.46)$$

5.3.1 Zweikörper-Streuung im SP

Wir betrachten in Einzelheiten den folgenden Fall: $\mathbf{A} + \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{1} + \mathbf{2}$

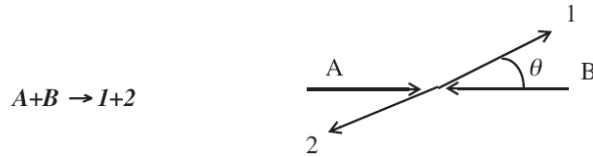


Abbildung 5.5: Zweikörper-Streuung im SP.

Wir beginnen mit dem Phasenraum-Faktor. Wir nehmen den allgemeinen Ausdruck und vereinfachen ihn durch die Berechnung der Integrale über die Impulse im Schwerpunkssystem:

$$\begin{aligned} \Pi_2 &\equiv \int \left(\Pi_{i=1}^2 \frac{d^3 \vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^4 \left(p_A + p_B - \sum_i p_i \right) = \\ &\int \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4 (p_A + p_B - p_1 - p_2) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Wir integrieren über \vec{p}_2 mit der Bedingung

$$\delta^3 \left(\underbrace{\vec{p}_A + \vec{p}_B}_{=0} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \right) \implies \vec{p}_2 = -\vec{p}_1 \quad (5.48)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1 2E_2} (2\pi) \delta \left(\underbrace{E_A + E_B}_{=E_{SP}} - E_1 - E_2 \right) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1 2E_2} (2\pi) \delta (E_{SP} - E_1 - E_2) \end{aligned} \quad (5.49)$$

wobei

$$\begin{aligned} E_{SP} &= E_A + E_B = E_1 + E_2 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2} \\ &= \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2} \quad \text{mit} \quad \vec{p} \equiv \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Um die Integration über $dp = dp_1$ durchzuführen, verwenden wir

$$\begin{aligned} \frac{dE_{SP}}{dp} &= \frac{1}{2} (\vec{p}^2 + m_1^2)^{-1/2} 2p + \frac{1}{2} (\vec{p}^2 + m_2^2)^{-1/2} 2p \\ &= p \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right) \end{aligned} \quad (5.51)$$

und

$$dp = dE_{SP} \left(\frac{p}{E_1} + \frac{p}{E_2} \right)^{-1} \quad (5.52)$$

Es folgt,

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \int d\Omega dE_{SP} \frac{\vec{p}_1^2}{16\pi^2 E_1 E_2} \left(\frac{p_1}{E_1} + \frac{p_1}{E_2} \right)^{-1} \delta(E_{SP} - E_1 - E_2) \\ &= \int d\Omega dE_{SP} \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_1}{E_1 E_2} \frac{1}{\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)} \delta(E_{SP} - E_1 - E_2) \\ &= \int d\Omega dE_{SP} \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_1}{E_1 + E_2} \delta(E_{SP} - E_1 - E_2) \\ &= \int d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_1}{E_{SP}} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Wir berechnen nun den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma_{SP} = \frac{1}{(2E_A)(2E_B)|\vec{\beta}_A - \vec{\beta}_B|} \frac{d\Omega}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_1|}{E_{SP}} |\mathcal{M}(AB \rightarrow 12)|^2 \quad (5.54)$$

und schliesslich

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{SP} = \frac{1}{(2E_A)(2E_B)|\vec{\beta}_A - \vec{\beta}_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{SP}} |\mathcal{M}(AB \rightarrow 12)|^2 \quad (5.55)$$

Falls die Teilchen gleiche Ruhemasse besitzen oder wir den ultra-relativistischen Grenzfall betrachten (d.h. $E \gg m_i$, oder $m_i \rightarrow 0$), erhalten wir

$$(2E_A)(2E_B)|\vec{\beta}_A - \vec{\beta}_B| = 4(p_A E_B + p_B E_A) = 4p(E_A + E_B) \approx 4p_1 E_{SP} \quad (5.56)$$

und damit

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} = \frac{1}{4p_1 E_{SP}} \frac{|\vec{p}_1|}{(2\pi)^2 4E_{SP}} |\mathcal{M}(AB \rightarrow 12)|^2 \quad (5.57)$$

oder

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} = \left(\frac{1}{64\pi^2}\right) \left(\frac{1}{E_{SP}^2}\right) |\mathcal{M}(AB \rightarrow 12)|^2 \quad (5.58)$$

(alle vier Ruhemassen identisch oder ultra-relativistischer Grenzfall)

5.3.2 Zerfall in 2 Teilchen

Wir betrachten den Zerfall eines Zustandes R der Masse M in zwei unterschiedliche Tochterteilchen der Massen m_j ($j=1,2$):

$$R \rightarrow 1 + 2 \quad (5.59)$$

Wir berechnen den 2-Körper-Phasenraum im Schwerpunktsystem des Teilchens M :

$$\begin{aligned} d^6 R &= \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - P) \\ &= \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \delta(E_1 + E_2 - M) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Integration über den Impuls eines der Teilchen liefert die Bedingung:

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0} \implies \vec{p} = \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad (5.61)$$

und den Phasenraum:

$$\begin{aligned} d^3 R &= \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_1 (2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta(E_1 + E_2 - M) \\ &= \frac{p^2 dp d\cos\theta d\phi}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E_1 + E_2 - M) \end{aligned} \quad (5.62)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E &\equiv E_1 + E_2 = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2} \\ &= \sqrt{\vec{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\vec{p}^2 + m_2^2} \end{aligned} \quad (5.63)$$

und (Siehe Kap. 5.3.1)

$$dp = dE \left(\frac{p}{E_1} + \frac{p}{E_2} \right)^{-1} = dE \left(\frac{pE_1 + pE_2}{E_1 E_2} \right)^{-1} = \frac{E_1 E_2 dE}{pE} \quad (5.64)$$

Wir erhalten für den Phasenraum:

$$\begin{aligned} d^3 R &= \frac{p^2 \frac{E_1 E_2 dE}{pE} d\cos\theta d\phi}{(2\pi)^2 4E_1 E_2} \delta(E - M) \\ &= \frac{p dE d\cos\theta d\phi}{4\pi^2 4E} \delta(E - M) \end{aligned} \quad (5.65)$$

Mit der Integration über die Energie bekommen wir den folgenden Phasenraum:

$$d^2 R = \frac{p}{16\pi^2 M} d\cos\theta d\phi \quad (5.66)$$

Die Zerfallsbreite ist damit:

$$d\Gamma(M \rightarrow 1 + 2) = |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{2M} \frac{p}{16\pi^2 M} d\cos\theta d\phi = \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi^2} \frac{p}{M^2} d\Omega \quad (5.67)$$

5.3.3 Zerfall in 3 Teilchen

Wir berechnen die Partialbreite für den Zerfall eines Zustandes R der Masse M in drei unterschiedliche Tochterteilchen der Massen m_j ($j=1,2,3$):

$$R \rightarrow 1 + 2 + 3 \quad (5.68)$$

Wir bemerken, dass die Kinematik des 3-Körperzustandes durch zwei Parameter im Schwerpunktsystem des Mutterzustands R vollständig festgelegt wird. Man kann z.B. die kinetischen Energien T_1 und T_2 wählen. Wir beweisen diese Beobachtung: im Endzustand werden 3 Teilchen emittiert. Die Anzahl der benötigten Koordinaten, um die 3 Impulse zu definieren, ist 9. Wegen der Impuls- und der Energie-Erhaltung (4 Gleichungen) können aber nur $9-4=5$ Parameter frei gewählt werden. Ausserdem können die Achsen des Koordinatensystems beliebig gewählt werden, d.h. 3 weitere Parameter sind willkürlich. Schliesslich genügen nur 2 Parameter, um die Konfiguration des Endzustands vollständig zu beschreiben.

Wir berechnen nun den 3-Körper-Phasenraum:

$$\begin{aligned} d^9 R &= \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 - P) \\ &\propto \frac{d^3 \vec{p}_1}{2E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{2E_2} \frac{d^3 \vec{p}_3}{2E_3} \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) \delta(E_1 + E_2 + E_3 - M) \end{aligned} \quad (5.69)$$

Wir integrieren über den Impuls des dritten Teilchens:

$$d^6 R \propto \frac{1}{8} \frac{d^3 \vec{p}_1}{E_1} \frac{d^3 \vec{p}_2}{E_2} \frac{1}{E_3} \delta(E_1 + E_2 + E_3 - M) \quad (5.70)$$

mit der Bedingung

$$E_3 = \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 + m_3^2} \quad (5.71)$$

Nun wählen wir ein Koordinatensystem mit der z -Achse entlang dem Impuls des ersten Teilchens und daher folgt für den zweiten Impuls:

$$d^3 \vec{p}_2 = p_2^2 dp_2 d\cos\theta d\phi \quad (5.72)$$

wobei θ und ϕ die Polarwinkel von \vec{p}_2 sind bezüglich dem Koordinatensystem, dessen z -Achse in Richtung von \vec{p}_1 zeigt.

Wir verwenden die Beziehung zwischen E_3 und den zwei Impulsen \vec{p}_1 und \vec{p}_2 :

$$E_3^2 = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 + m_3^2 = m_3^2 + \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + 2p_1 p_2 \cos\theta \quad (5.73)$$

Daher gilt (für feste Impulsbeträge p_1 und p_2):

$$\frac{d\cos\theta}{dE_3} = \frac{d}{dE_3} \frac{(E_3^2 - m_3^2 - \vec{p}_1^2 - \vec{p}_2^2)}{2p_1 p_2} = \frac{E_3}{p_1 p_2} \implies d\cos\theta = \frac{E_3 dE_3}{p_1 p_2} \quad (5.74)$$

Nun können wir über die Richtung von \vec{p}_2 integrieren:

$$\begin{aligned} d^4 R &\propto \frac{1}{8} \int d\phi \int d\cos\theta \frac{d^3 \vec{p}_1}{E_1} \frac{p_2^2 dp_2}{E_2} \frac{1}{E_3} \delta(E_1 + E_2 + E_3 - M) \\ &= \frac{2\pi}{8} \int_{E_{3,\min}}^{E_{3,\max}} \frac{E_3 dE_3}{p_1 p_2} \frac{d^3 \vec{p}_1}{E_1} \frac{p_2^2 dp_2}{E_2} \frac{1}{E_3} \delta(E_1 + E_2 + E_3 - M) \\ &= \frac{\pi}{4} \int_{E_{3,\min}}^{E_{3,\max}} dE_3 \frac{d^3 \vec{p}_1}{p_1 E_1} \frac{p_2 dp_2}{E_2} \delta(E_1 + E_2 + E_3 - M) \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{d^3 \vec{p}_1}{p_1 E_1} \frac{p_2 dp_2}{E_2} \int_{E_{3,\min}}^{E_{3,\max}} dE_3 \delta(E_1 + E_2 + E_3 - M) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Die Integration über E_3 liefert die folgende Beziehung:

$$E_3 = M - E_1 - E_2 \quad (5.76)$$

und der verbleibende Phasenraum ist gleich:

$$\begin{aligned} d^4 R &= \frac{\pi}{4} \frac{d^3 \vec{p}_1}{p_1 E_1} \frac{p_2 dp_2}{E_2} \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{p_1 p_2 dp_1 dp_2}{E_1 E_2} d\phi_z d\cos\theta_z \end{aligned} \quad (5.77)$$

wobei θ_z und ϕ_z die Richtung der z -Achse definieren. Integration über die Richtung liefert den zweidimensionalen Phasenraum:

$$d^2 R = 4\pi \frac{\pi}{4} \frac{p_1 dp_1}{E_1} \frac{p_2 dp_2}{E_2} = \pi^2 \frac{p_1 p_2 dp_1 dp_2}{E_1 E_2} \quad (5.78)$$

Mit

$$p_i = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} \implies dp_i = \frac{1}{2} \frac{2E_i dE_i}{\sqrt{E_i^2 - m_i^2}} = \frac{E_i dE_i}{p_i} \quad (5.79)$$

erhalten wir:

$$d^2 R = \pi^2 \frac{p_1 p_2 dp_1 dp_2}{E_1 E_2} = \pi^2 dE_1 dE_2 = \pi^2 dT_1 dT_2 \quad (5.80)$$

wobei T_i die kinetische Energie des Teilchens i ist. Wir bemerken:

*Die Wahrscheinlichkeit, dass die kinetischen Energien der Teilchen 1 und 2 zwischen T_1 und $T_1 + dT_1$ und zwischen T_2 und $T_2 + dT_2$ liegen, ist konstant. In einer zweidimensionalen Darstellung T_1 gegen T_2 (sogenannter **Da-litzplot**) sind die Ereignisse gleichmässig über den erlaubten physikalischen Bereich verteilt.*

Man definiert den Q -Wert der Reaktion:

$$Q = M - m_1 - m_2 - m_3 = T_1 + T_2 + T_3 \quad (5.81)$$

Man kann daher die Ereignisse in einem gleichseitigen Dreieck der Höhe Q eintragen (Siehe Abb. 5.6). Für phasenraumverteilte Ereignisse ist das graue Gebiet (kinematisch erlaubter Bereich) innerhalb des gleichseitigen Dreiecks gleichmässig bevölkert. Wir betonen:

Phasenraumverteilte Ereignisse sind im kinematisch erlaubten Bereich im Dreieck gleichmässig verteilt.

Aus der beobachteten Ungleichmässigkeit der Verteilung bekommt man Informationen über die Dynamik des Prozesses (d.h. das Matrixelement).

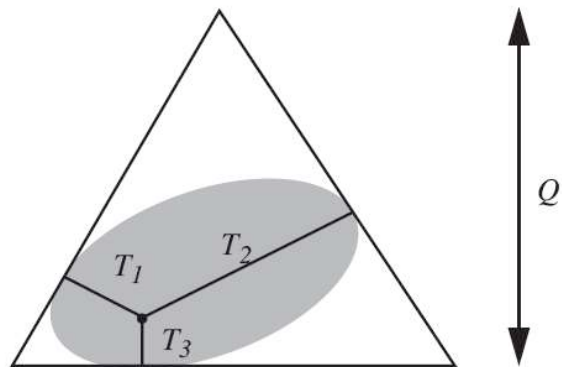


Abbildung 5.6: Dalitzplot des 3-Körperzerfalls. Für phasenraumverteilte Ereignisse ist das graue Gebiet (kinematisch erlaubter Bereich) innerhalb des gleichseitigen Dreiecks gleichmässig bevölkert.

Kapitel 6

Der Lagrange-Formalismus

6.1 Euler-Lagrange-Gleichung

In der Quantenmechanik benutzt man oft den Hamilton-Operator, um ein System zu beschreiben. Es ist aber auch möglich den Lagrange-Formalismus zu verwenden: in der klassischen Mechanik kann das Bewegungsgesetz einer Masse m im Potential V so ausgedrückt werden:

$$\vec{F} = m\vec{a} \implies m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} V \quad (6.1)$$

Die Lagrange-Funktion wird definiert als

$$L = \underbrace{T}_{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{V}_{\text{potentielle Energie}} = L(q_i, \frac{dq_i}{dt}) \quad i = 1, \dots, n \quad (6.2)$$

wobei q_i die **verallgemeinerten Koordinaten** sind und dq_i/dt deren zeitliche Ableitungen.

Das Prinzip der kleinsten Wirkung: das System breitet sich zwischen der Zeit t_1 und t_2 entlang jenes Weges aus, für welchen die Wirkung S minimal wird

$$\delta S = 0 \quad (6.3)$$

wobei die Wirkung als

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (6.4)$$

definiert wird.

Diese Bedingung führt zur **Euler-Lagrange-Gleichung**:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dq_i}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (6.5)$$

6.2 Lagrange-Funktion in der relativistischen Feldtheorie

6.2.1 Variablen des Feldes

Wir sind an der Bewegungsgleichung von Feldern interessiert. Ein Feld beschreibt ein kontinuierliches System mit unendlich vielen Freiheitsgraden, z.B. die Auslenkung einer klassischen Saite. Das System wird daher durch das **Feld** ϕ beschrieben, das eine Funktion des Ortsvektors und der Zeit ist:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(x^\mu) \quad (6.6)$$

Das Feld besitzt unendlich viele Freiheitsgrade, die mit Hilfe des Ortsvektors \mathbf{x} indiziert werden. D.h., wir ersetzen die Koordinaten (diskrete Punkte q_i) und deren zeitlichen Ableitungen durch die kontinuierlichen Funktionen $\phi(x^\mu)$ und $\partial\phi(x^\mu)/\partial x^\mu$

$$\begin{cases} q_i \longrightarrow \phi(x^\mu) \\ \frac{dq_i}{dt} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi(x) \end{cases} \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (6.7)$$

Beachte, dass wir nicht nur die zeitliche Ableitung des Feldes, sondern die vier unabhängigen Ableitungen ∂_μ betrachten. Dies folgt aus der Bedingung der Symmetrie der Raum- und Zeit-Koordinaten.

6.2.2 Der 4-Gradient

Um die Gleichungen zu verkürzen, definieren wir den **4-Gradient**

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \quad (6.8)$$

Wir bestimmen die Transformationseigenschaften des 4-Gradienten unter einer Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Lambda^\nu{}_\alpha x^\alpha \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) \\ &= \Lambda^\nu{}_\alpha \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) = \Lambda^\nu{}_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}} \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Wir vergleichen diese Transformation mit der inversen Lorentz-Transformation eines *kovarianten* 4-Vektors (Siehe Kap. 4.40):

$$a_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu (a_{\nu'})' \quad \text{Kovariant} \quad (6.10)$$

Es folgt daraus, dass der Operator

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad (6.11)$$

sich wie ein *kovarianter 4-Vektor* verhält. Wir schreiben:

$$\begin{cases} \partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) & \text{kovariant} \\ \partial^\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) & \text{kontravariant} \end{cases}$$

Vergleiche mit

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \quad \text{und} \quad x_\mu = (t, -\vec{x}) \quad (6.13)$$

6.2.3 Die Lagrange-Dichte

Wir führen nun die **Lagrange-Dichte** L ein als eine Funktion des Feldes und dessen Ableitungen:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (6.14)$$

Die Wirkung wird

$$S \equiv \int L dt = \int dt \int d^3 \vec{x} \mathcal{L} = \int d^4 x \mathcal{L} \quad (6.15)$$

wobei wir bemerken, dass der letzte Term als ein “kovariantes” Integral ausgedrückt wird. Weil das 4-dimensionale Volumenelement $d^4 x$ eine Invariante der Lorentz-Transformation ist, suchen wir eine Lagrange-Dichte, die auch eine Invariante ist. Es gilt, dass

die Invarianz der Lagrange-Dichte eine hinreichende Bedingung für die Kovarianz der Theorie ist.

(Andere Symmetrien können auch in die Lagrange-Funktion eingebaut werden, wie z.B. eine Eichinvarianz)

Das Prinzip der kleinsten Wirkung besagt:

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S = \\ &= \int d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right\} \\ &= \int d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

wobei das 4-dimensionale Integral über ein **Raumzeitvolumen** Ω läuft und

$$\partial_\mu \delta \phi = \delta (\partial_\mu \phi) \quad (6.17)$$

angenommen wurde. Wir bemerken, dass

$$\int_\Omega d^4 x \partial_\mu (...) = \int_{\partial \Omega} (...) \cdot d^3 S_\mu \quad (6.18)$$

wobei $\partial \Omega$ die **Raumzeitfläche** ist, die das Raumzeitvolumen Ω umschliesst. Die $d^3 S_\mu$ stehen senkrecht zum dreidimensionalen “Flächenelement”. Wir nehmen an, dass das Feld bestimmte Randbedingungen über die **Raumzeitfläche** $\partial \Omega$ erfüllt, so dass

$$\delta(\phi)|_{\partial \Omega} = 0 \quad (6.19)$$

über die Raumzeitfläche $\partial \Omega$. Es folgt daraus, dass für eine beliebige Änderung des Feldes $\delta \phi$ gilt

$$\int d^4 x \delta \phi \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right\} = 0 \quad (6.20)$$

oder

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right\} = 0 \quad \text{relativistische Euler – Lagrange – Gleichung} \quad (6.21)$$

Im Allgemeinen kann man mehr als ein Feld betrachten. Wenn wir n Felder ϕ_i betrachten, wird die Lagrange-Funktion so ausgedrückt

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) \quad (6.22)$$

und wir erhalten n Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) \right\} = 0 \quad (6.23)$$

6.3 Invarianzeigenschaft der Lagrange-Funktion

Wir erinnern uns an das **Theorem von Noether**¹:

Wenn die Lagrange-Funktion invariant ist unter einer kontinuierlichen Transformationsgruppe, dann gibt es einen erhaltenen Strom des Feldes. Man spricht von Invarianz der Lagrange-Funktion unter der Gruppe.

Die Invarianzeigenschaften der Lagrange-Funktion einer Theorie sind fundamental.

6.3.1 Invarianz unter Raumzeit-Translation

Wir betrachten als erstes Beispiel die Invarianz unter einer Translation. Bei einer infinitesimalen Translation ändert sich der Raumzeitvektor so

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \delta a^\mu \quad (6.24)$$

¹Emmy Noether (1917)

Die Änderung der Lagrange-Funktion ist gleich

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \quad (6.25)$$

Wir bemerken, dass wir nur die Änderung des Feldes betrachten, weil wir annehmen, dass die Lagrange-Funktion *nicht explizit* von x^μ abhängt. Es gilt

$$\delta\phi = (\partial_\nu\phi)\delta a^\nu = \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}\delta a^\nu \quad \text{und} \quad \delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu(\delta\phi) \quad (6.26)$$

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \quad (6.27)$$

folgt

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \\ &= \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \right) = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) \right) \delta a^\nu \end{aligned} \quad (6.28)$$

Wir können die Änderung der Lagrange-Funktion auch bezüglich der Raumzeitkoordinaten ausdrücken:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\delta a^\mu = (\partial_\mu\mathcal{L})\delta a^\mu \delta_\nu^\mu \quad (6.29)$$

Wenn wir die zwei Gleichungen vergleichen, erhalten wir

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \right) \delta a^\nu = 0 \quad (6.30)$$

d.h., wir haben **erhaltene Ströme** gefunden ($\nu = 0, 1, 2, 3$):

$$\partial_\mu T_\nu{}^\mu = 0 \quad \text{wobei} \quad T_\nu{}^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \quad (6.31)$$

wobei \mathbf{T} der **Energie-Impuls-Tensor des Feldes** ist.

Energie des Feldes: Die $T_0{}^0$ Komponente entspricht der Hamilton-Dichte \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} \equiv T_0{}^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}(\partial_0\phi) - \mathcal{L} \quad (6.32)$$

Der Hamilton-Operator ist gleich

$$H = \int d^3\vec{x}\mathcal{H} = \int d^3\vec{x}T_0{}^0 \quad (6.33)$$

Wenn wir diese Gleichungen mit dem klassischen Analogon vergleichen,

$$H(p, q) = p \frac{dq}{dt} - L \quad (6.34)$$

können wir die kanonische **Impuls-Dichte des Feldes** definieren

$$\Pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \quad (6.35)$$

Mit dieser Definition gilt

$$\mathcal{H} \equiv T_0{}^0 = \Pi(\partial_0\phi) - \mathcal{L} \quad (6.36)$$

Impuls des Feldes: Die $T_i{}^0$ Komponenten entsprechen dem vom Feld getragenen Impuls:

$$\begin{aligned} P_i &\equiv \int d^3\vec{x}T_i{}^0 = \int d^3\vec{x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}(\partial_i\phi) \quad i = 1, 2, 3 \\ &= \int d^3\vec{x}\Pi(\partial_i\phi) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Mit dem Konzept der Invarianz unter Translationen der Raumzeit, haben wir allgemeine Definitionen für Energie und Impuls der Felder gewonnen.

6.3.2 Allgemeine Transformation

Wir betrachten als zweites Beispiel die Invarianz unter einer allgemeinen Transformation der Raumzeitkoordinaten und des Feldes. Wir betrachten die folgenden infinitesimale Transformation

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x) \end{aligned} \quad (6.38)$$

D.h., eine reine Translation wäre durch folgende Änderungen gegeben:

$$\delta x^\mu = \delta a^\mu \quad \text{und} \quad \delta\phi(x) = 0 \quad (6.39)$$

oder eine reine infinitesimale Lorentz-Transformation durch (Siehe Kap. 4.6.5):

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad \delta\phi(x) = 0 \quad (6.40)$$

Die gesamte Änderung des Felds kann mit einer Reihenentwicklung gefunden werden

$$\begin{aligned}\delta\phi(x) &= \phi'(x') - \phi(x) \\ &= \phi'(x') - \phi'(x) + \phi'(x) - \phi(x) \\ &\approx \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) + \delta_\phi \phi(x)\end{aligned}\quad (6.41)$$

wobei der erste Term die Änderung des Felds wegen der Änderung der Raumzeitkoordinaten beschreibt, und der zweite der internen Änderung des Felds während der Transformation entspricht.

Die Änderung der Wirkung ist daher:

$$\delta S = \int \delta(d^4x) \mathcal{L} + \int d^4x \delta \mathcal{L} \quad (6.42)$$

wobei die zwei Terme aus der Änderung des Volumenelements und aus der Änderung der Lagrange-Funktion selbst kommen. Es gilt:

$$\begin{aligned}d^4x' &= \left| \det \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4x = \left| \det \left(\frac{\partial x^\mu + \delta x^\mu}{\partial x^\nu} \right) \right| d^4x \\ &= |\det(\delta^\mu_\nu + \partial_\nu \delta x^\mu)| d^4x \\ &\approx (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4x\end{aligned}\quad (6.43)$$

und daher:

$$\delta(d^4x) \approx \partial_\mu \delta x^\mu d^4x \quad (6.44)$$

Die Variation der Wirkung ist demnach (wobei hier angenommen wird, dass \mathcal{L} explizit von x^μ abhängt, d.h. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, \phi, \delta^\mu \phi)$):

$$\begin{aligned}\delta S &= \int \partial_\mu \delta x^\mu d^4x \mathcal{L} + \int d^4x \delta \mathcal{L} \\ &= \int \partial_\mu \delta x^\mu d^4x \mathcal{L} + \int d^4x \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) \delta_\phi \phi + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta_\phi (\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) \delta_\phi \phi + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta_\phi (\partial_\mu \phi) \right] \quad (6.45)\end{aligned}$$

Wie früher kann der letzte Term so geschrieben werden:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta_\phi (\partial_\mu \phi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_\phi \phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta_\phi \phi \quad (6.46)$$

Nun nehmen wir an, dass das Feld die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt (Gl. 6.21):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \quad (6.47)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[\partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \right) \delta_\phi \phi + \right. \\ &\quad \left. \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_\phi \phi \right) - \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta_\phi \phi \right] \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta_\phi \phi + \right. \\ &\quad \left. \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_\phi \phi \right) - \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta_\phi \phi \right] \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_\phi \phi \right) \right] \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_\phi \phi \right) \right] \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left[\delta x^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta_\phi \phi \right] = 0 \quad (6.48)\end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine beliebige Transformation des Systems. Diese Transformation kann durch Parameter beschrieben werden. Wir nehmen an, dass eine solche infinitesimale Transformation durch n Parameter $\delta\alpha_i$ ($i=1,2,\dots,n$) dargestellt werden kann. Daher bedeutet die Invarianz des Systems, dass gilt:

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.49)$$

Diese Bedingung ergibt die Gleichung:

$$\frac{\delta S}{\delta \alpha_i} = \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\delta x^\mu}{\delta \alpha_i} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\delta_\phi \phi}{\delta \alpha_i} \right] = \int d^4x \partial_\mu j_i^\mu = 0 \quad (6.50)$$

Weil das Integrationsvolumen beliebig ist, muss gelten:

$$\partial_\mu j_i^\mu = 0 \quad \text{wobei} \quad j_i^\mu \equiv \left(\frac{\delta x^\mu}{\delta \alpha_i} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\delta_\phi \phi}{\delta \alpha_i} \right) \quad (6.51)$$

d.h., aus der Invarianz des Systems unter einer Transformation folgt die Existenz von erhaltenen Strömen. Ihre zeitliche Komponente definieren **erhaltene Ladungen**:

$$Q_i \equiv \int d^3\vec{x} j_i^0 = \int d^3\vec{x} \left(\frac{\delta x^0}{\delta \alpha_i} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \frac{\delta_\phi \phi}{\delta \alpha_i} \right) \quad (6.52)$$

wobei

$$\frac{dQ_i}{dt} = \int d^3\vec{x} \partial_0 j_i^0 = \int d^3\vec{x} (\partial_\mu j_i^\mu - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_i) = - \int d^3\vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_i) = 0 \quad (6.53)$$

wobei wir angenommen haben, dass der Strom auf der Oberfläche des Integrationsvolumens verschwindet.

6.3.3 Allgemeine Translation

Wir haben im Kap. 6.3.1 die Invarianz unter einer Raumzeit-Translation betrachtet. Wir illustrieren hier die Verwendung der allgemeinen Gleichungen, die wir im Kap. 6.3.2 hergeleitet haben im Fall einer Raumzeit-Translation:

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu - \delta a^\mu \quad (6.54)$$

d.h.

$$\delta x^\mu = -\delta a^\mu \quad \text{und} \quad \delta \phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) = 0 \quad (6.55)$$

und

$$\begin{aligned} \delta \phi(x) &\approx \delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) + \delta_\phi \phi(x) = 0 \\ \implies \delta_\phi \phi(x) &= -\delta x^\mu \partial_\mu \phi(x) = \delta a^\mu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \quad (6.56)$$

Wir definieren den Parameter: $\delta\alpha \equiv \delta a^\mu$ (Siehe Gl. 6.49). Die relevanten Ableitungen sind:

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta a^\nu} = -\delta_\nu^\mu \quad \text{und} \quad \frac{\delta_\phi \phi}{\delta a^\nu} = \frac{\partial a^\mu}{\partial a^\nu} \partial_\mu \phi(x) = \partial_\nu \phi(x) \quad (6.57)$$

Durch Anwendung der allgemeinen Gleichung erhalten wir den Strom:

$$j_\nu^\mu \equiv \left(-\delta_\nu^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi \right) = T_\nu^\mu \quad (6.58)$$

Wie erwartet, erhalten wir den **Energie-Impuls-Tensor**, den wir im Kap. 6.3.1 schon gefunden haben. Der Tensor wird erhalten, wenn die Wirkung eines beliebigen Systems auf das Feld ϕ invariant unter der Raumzeit-Translation ist.

6.3.4 Interne (Phasen-)Transformation

Wir betrachten nun eine Transformation im internen Raum des Feldes. Von einer solchen Transformation sind die Raumzeit-Koordinaten unbeeinflusst. Nur das Feld ändert sich:

$$\delta x^\mu = 0 \quad \text{und} \quad \delta \phi(x) = \delta_\phi \phi(x) \neq 0 \quad (6.59)$$

Wir nehmen an, dass das Feld komplexwertig ist. Wir betrachten die (infinitesimale) Phasen-Transformation:

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = e^{-i\alpha} \phi(x) \approx \phi - i\alpha \phi \quad (6.60)$$

Damit

$$j^\mu \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta_\phi \phi}{\delta \alpha} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (-i\phi) \right) = (-i\phi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \quad (6.61)$$

Wir werden die Interpretation dieses Stroms im Kap. 7 diskutieren.

Kapitel 7

Bosonfelder: Die Klein-Gordon Gleichung

7.1 Einleitung

Im Kap. 3 haben wir die Störungstheorie verwendet, um eine Gleichung für die Rutherford-Streuung herzuleiten. Diese Formel ist ein sehr nützlicher "Ansatz", um die Streuung von geladenen Teilchen zu studieren. Viele Aspekte sind aber in dieser Formel nicht berücksichtigt, wie z.B.

1. relativistische Effekte in der Dynamik
2. die Spins des Projektils und des Targets

Ein Problem ist, dass die Störungstheorie aus der Schrödinger-Gleichung hergeleitet wurde. Die Schrödinger-Gleichung ist nicht kovariant unter Lorentz-Transformationen

$$E = \frac{p^2}{2m} \implies i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi \quad (7.1)$$

Wir bemerken:

Die Zeit und der Raum werden in dieser Schrödinger-Gleichung nicht gleichberechtigt behandelt, d.h., die Gleichung enthält die erste zeitliche Ableitung der Wellenfunktion und die zweite Ableitung bezüglich den räumlichen Koordinaten.

Die Schrödinger-Gleichung wird deshalb als nicht angemessen betrachtet, um relativistische Prozesse zu beschreiben.

7.2 Die Klein-Gordon-Gleichung

Wir können im Prinzip die Schrödinger-Gleichung einfach erweitern. Um eine "relativistische" Schrödinger-Gleichung herzuleiten, beginnen wir mit der relativistischen Beziehung zwischen Energie und Impuls:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (7.2)$$

Wir vernachlässigen zuerst das Potential V und betrachten ein freies Teilchen. Wir benutzen den kanonischen Ansatz für die Energie- und Impuls-Operatoren: (Siehe Kap. 3.2.2)

$$\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} \quad \text{und} \quad E \rightarrow +i\frac{\partial}{\partial t} \quad (7.3)$$

Diese Operatoren wirken auf eine Wellenfunktion $\phi(\vec{x}, t)$:

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \implies i^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = i^2 \vec{\nabla}^2 \phi + m^2 \phi \quad (7.4)$$

Wir erhalten die "relativistische" Schrödinger-Gleichung oder Klein-Gordon-Gleichung:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \phi = m^2 \phi \quad \text{Klein-Gordon-Gleichung} \quad (7.5)$$

wobei $\phi \equiv \phi(\vec{x}, t)$. Im Allgemeinen wird eine solche Funktion ϕ des Raumzeit 4-Vektors x^μ als **Feld** bezeichnet.

Wir bemerken, dass Zeit und Raum in der Klein-Gordon-Gleichung gleichberechtigt betrachtet werden, d.h. die Gleichung enthält die zweite zeitliche und räumliche Ableitung des Felds!

Diese Gleichung für ein skalares Feld ist kovariant unter Lorentz-Transformationen. Wir können diese Kovarianz expliziter machen. Wir verwenden den 4-Gradient. Mit dem kanonischen Ansatz für die Energie- und Impuls-Operatoren (Gl. 7.3) können wir den **Energie-Impuls 4-Vektor-Operator** als

$$p^\mu \longrightarrow i\partial^\mu \quad (7.6)$$

schreiben.

Wir bemerken, dass

$$(p^\mu)^2 = m^2 = (i\partial^\mu)^2 = -\partial^\mu \partial_\mu \quad (7.7)$$

wobei

$$\partial^\mu \partial_\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad \text{D'Alembert-Operator} \quad (7.8)$$

Die Klein-Gordon-Gleichung kann in der *explizit kovarianten Form* ausgedrückt werden:

$$\boxed{(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0} \quad (7.9)$$

kovariante Form der Klein-Gordon-Gleichung

wobei $\phi \equiv \phi(x^\mu) = \phi(\vec{x}, t)$. Wir sprechen von expliziter Kovarianz, weil

1. die Ruhemasse $m^2 = p^\mu p_\mu$ ein Skalar ist (sie wird als Skalarprodukt des Energie-Impuls 4-Vektors definiert, und ist deshalb eine Invariante.)
2. der Operator $\partial^\mu \partial_\mu$ auch ein Skalar ist.

Was muss das Transformationsverhalten des Felds ϕ unter einer Lorentz Transformation sein? Wir diskutieren diese Frage im nächsten Abschnitt.

7.2.1 Skalares Feld

Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine kovariante Gleichung:

$$\underbrace{\left(\underbrace{\partial^\mu \partial_\mu}_{\text{invariant}} + \underbrace{m^2}_{\text{invariant}} \right)}_{\text{Wellenfunktion oder Feld}} \phi(x^\mu) = 0 \quad (7.10)$$

Das Feld entspricht einer komplexen Zahl (*C-Zahl*) in jedem Punkt der Raumzeit, der durch den 4-Vektor x^μ bestimmt wird. D.h. das Feld beschreibt den Zustand des Systems in jedem Punkt der Raumzeit. Wir können das Feld $\phi(x^\mu)$ bezüglich verschiedenen Beobachtern betrachten. Wir sind in diesem Fall an einer Lorentz-Transformation des Felds interessiert. Das Feld kann bestimmte Transformationseigenschaften besitzen.

Ein Feld, das bezüglich jedem Beobachter denselben Wert hat in jedem Punkt der Raumzeit, wird als **skalares Feld** bezeichnet. D.h:

$$\boxed{\text{Skalares Feld} \iff \phi'(x') = \phi(x)} \quad (7.11)$$

In diesem Fall ist die Klein-Gordon-Gleichung invariant unter der Lorentz-Transformation. Sie besitzt denselben Wert in jedem Inertialsystem.

Beispiel: das folgende Feld ist ein Skalarfeld (es ist invariant!)

$$\phi(x^\mu) = N \underbrace{e^{-ip^\mu x_\mu}}_{\text{Invariante}} = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} \quad (7.12)$$

wobei $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Die Phase des Feldes ist gleich dem Skalarprodukt zwischen zwei 4-Vektoren. Sie ist deshalb eine Invariante. Das Feld definiert eine C-Zahl in jedem Punkt der Raumzeit. Diese Zahl ist daher dieselbe bezüglich jedem Inertialsystem.

7.2.2 Tensorfelder

In einer kovarianten Theorie müssen die Felder bestimmte Transformationsregeln unter der Lorentz-Transformation befolgen. Ohne eine solche Bedingung kann die Theorie nicht dieselbe Form bezüglich allen Inertialsystemen besitzen. Wir betonen noch einmal, dass wenn das Feld bezüglich einem Beobachter O $\phi(x) = \phi(\vec{x}, t)$ ist, wird ein zweiter Beobachter O' das Feld so ausdrücken: $\phi'(x') = \phi'(\vec{x}', t')$ (er schreibt das Feld ϕ' bezüglich seinem Koordinatensystem).

Man betrachtet nun verschiedene Arten von Feldern:

1. **Skalares Feld** ϕ : das Feld ist eine Invariante der Lorentz-Transformation

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad (7.13)$$

2. **Vektoriell**es Feld A^μ : ein solches Feld muss 4-Komponenten besitzen und muss sich so transformieren:

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) \quad (7.14)$$

3. **Tensorfeld** $F^{\mu\nu}$: eine solche physikalische Grösse besitzt zwei Indizes (Siehe Kap. 4.3.5) und muss sich daher so transformieren:

$$F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}(x) \quad (7.15)$$

7.2.3 Transformation eines skalaren Felds

Die infinitesimale Lorentz-Transformation ist gleich (Siehe Kap. 4.6.5):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) x^\nu \quad (7.16)$$

Wegen der Definition des skalaren Felds gilt:

$$\phi'(x') = \phi(x) = \phi(\Lambda^{-1}x') \quad (7.17)$$

Daraus erhalten wir in erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \phi(\Lambda^{-1}x) = \phi((\delta^\mu_\nu - \omega^\mu_\nu)x^\nu) = \phi(x^\mu - \omega^\mu_\nu x^\nu) \\ &\approx \phi(x) - \omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Die intrinsische Änderung des Felds ist daher gleich:

$$\delta_\phi \phi = \phi'(x) - \phi(x) = -\omega^\mu_\nu x^\nu \partial_\mu \phi(x) \quad (7.19)$$

Wir erinnern uns (Siehe Kap. 4.6.5), dass gilt:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \quad (7.20)$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\delta_\phi \phi &= -(\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi(x)) = -\frac{1}{2} 2(\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi(x)) \\
&= -\frac{1}{2}(\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi(x) + \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi(x)) \\
&= -\frac{1}{2}(\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu \phi(x) - \omega^{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu \phi(x)) \\
&= -\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu)\phi(x)
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit derjenigen der Erzeugenden der Lorentz-Transformation. Tatsächlich gilt:

$$\delta_\phi \phi \equiv -\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu} \phi(x) \tag{7.22}$$

wobei $J_{\mu\nu} = i(x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu)$ die Erzeugenden der Lorentz-Transformation sind (Siehe Kap. 4.6.5). Wie erwartet ist die Änderung des Felds mit den Erzeugenden der L.T. korreliert.

7.2.4 Stromdichte der Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung entspricht der Wellengleichung eines Feldes. Sie ist übereinstimmend mit der Relativitätstheorie und ist explizit kovariant. Wir müssen jetzt verstehen, ob man diese Gleichung als Ersatz für die Schrödinger-Gleichung benutzen kann. Die Funktion ϕ ist ein komplexes Skalarfeld. Aus der Klein-Gordon-Gleichung folgt

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 \implies (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi^* = 0 \tag{7.23}$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen mit $-i\phi^*$ und $i\phi$, und addieren:

$$\begin{aligned}
&(-i\phi^*)(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi + (i\phi)(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi^* = 0 \\
\Rightarrow &(-i\phi^* \partial^\mu \partial_\mu \phi - i\phi^* m^2 \phi) + (i\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^* + i\phi m^2 \phi^*) = 0
\end{aligned} \tag{7.24}$$

oder

$$(-i\phi^* \partial^\mu \partial_\mu \phi) + (i\phi \partial^\mu \partial_\mu \phi^*) = 0 \tag{7.25}$$

Wir separieren die zeitliche und die räumliche Abhängigkeit:

$$-i\phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + i\phi \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2} + i\phi^* \vec{\nabla}^2 \phi - i\phi \vec{\nabla}^2 \phi^* = 0 \tag{7.26}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot \left[-i \left(\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^* \right) \right] = 0 \tag{7.27}$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit der *Kontinuitätsgleichung* (Siehe Kap. 3.2.4)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{7.28}$$

und definieren

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad \text{und} \quad \vec{j} = -i \left(\phi^* \vec{\nabla} \phi - \phi \vec{\nabla} \phi^* \right) \tag{7.29}$$

Wir führen den **Stromdichte 4-Vektor** ein

$$j^\mu \equiv (\rho, \vec{j}) \quad \text{und} \quad \underbrace{\partial_\mu j^\mu = 0}_{\text{kovariante Kontinuitätsgleichung}} \tag{7.30}$$

Es gilt:

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \tag{7.31}$$

Stromdichte der KG-Gleichung

7.2.5 Lösung für ein freies Teilchen

Für einen beliebigen Impuls, ist die Lösung eine **ebene Welle** (Skalarfeld):

$$\phi(x^\mu) = N e^{-ipx} = N e^{-ip^\mu x_\mu} = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} \tag{7.32}$$

mit $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Zu jedem Impuls gibt es eine Lösung mit positiver und eine Lösung mit negativer Energie:

$$\begin{cases} \phi_+(x) = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} & \text{mit } E = +\sqrt{p^2 + m^2} > 0 \\ \phi_-(x) = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} + i|E|t} & \text{mit } E = -\sqrt{p^2 + m^2} < 0 \end{cases} \tag{7.33}$$

Diese Tatsache kann so ausgedrückt werden:

$$\begin{cases} \phi_+(x) = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - iEt} \\ \phi_-(x) = N e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} + iEt} \end{cases} \quad \text{mit } E = +\sqrt{p^2 + m^2} > 0 \tag{7.34}$$

wobei die Energie E als positiv definiert wurde. Diese Situation war zu erwarten. In der relativistischen Theorie müssen die Energie und der Impuls ähnliche Eigenschaften besitzen (Vergleich mit Zeit und Raum). Daher muss sich die Energie, wie die Komponenten des Impulses, von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Daher gilt die Symmetrie zwischen Energie und Impuls.

Wir berechnen den Stromdichte 4-Vektor

$$\begin{aligned}
 j^\mu &= i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \\
 &= i|N|^2 (e^{+ipx} \partial^\mu e^{-ipx} - e^{-ipx} \partial^\mu e^{+ipx}) \\
 &= i|N|^2 (e^{+ipx} (-ip^\mu) e^{-ipx} - e^{-ipx} (+ip^\mu) e^{+ipx}) \\
 &= 2i|N|^2 (-ip^\mu) \\
 &= 2|N|^2 p^\mu
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

d.h.

$$\begin{cases} \text{Dichte } \rho = 2|N|^2 E \\ \text{Strom } \vec{j} = 2|N|^2 \vec{p} \end{cases} \tag{7.36}$$

Die Dichte verhält sich wie die zeitliche Komponente eines 4-Vektors, sie ist zur Energie proportional. Wir betrachten die folgende Grösse:

$$\rho d^3\vec{x} \xrightarrow{\text{Lorentz Boost}} \rho' d^3\vec{x}' = \gamma \rho \frac{d^3\vec{x}}{\gamma} = \rho d^3\vec{x} \tag{7.37}$$

d.h., das Produkt $\rho d^3\vec{x}$ ist, wie erwartet, invariant: wenn wir diese Grösse als die Wahrscheinlichkeit interpretieren, das Teilchen in einem Volumenelement $\rho d^3\vec{x}$ zu finden, dann muss diese Invarianz gelten.

Energie-Problem: Da $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ gibt es Lösungen zu positiver und negativer Energie:

$$E > 0 \quad \text{oder} \quad E < 0 \tag{7.38}$$

Die Lösungen mit negativer Energie sind problematisch:

1. wenn Lösungen mit negativer Energie existieren, werden Übergänge des Systems zu niedriger und niedriger Energie möglich. Wie wird der **Grundzustand** definiert?
2. Wenn die Energie des Systems negativ ist, dann besitzt die Dichte auch einen negativen Wert!

$$E < 0 \implies \rho < 0 \quad !!! \tag{7.39}$$

Wir können deshalb die Grösse $\rho d^3\vec{x}$ nicht mehr als die Wahrscheinlichkeit definieren, das Teilchen in einem Volumenelement $\rho d^3\vec{x}$ zu finden, weil sie nicht immer positive Werte besitzt.

Es folgt:

Das Feld ϕ in der Klein-Gordon-Gleichung kann nicht als die Wellenfunktion eines einzigen Teilchens interpretiert werden!

Die Klein-Gordon-Gleichung entspricht nicht der relativistischen Erweiterung der Schrödinger-Gleichung. Diese Gleichung wurde 1926 hergeleitet. Weil die

Interpretation des Felds als Wellenfunktion eines Teilchens nicht möglich war, wurde sie während vielen Jahren verworfen. Im Jahr 1934 haben Pauli und Weisskopf eine neue Interpretation für das Klein-Gordon-Feld gefunden. Diese Interpretation wird besser mit der zweiten Quantisierung (Siehe Kap. 7.4) verstanden. Aber zuerst wollen wir den Lagrange-Formalismus verwenden, um die Klein-Gordon-Gleichung auszudrücken.

7.3 Lagrange-Funktion des skalaren Klein-Gordon Felds

Wir betrachten das *skalare* Feld $\phi(x^\mu) = \phi(x^0, \vec{x})$. Wir suchen eine invariante Lagrange-Funktion, die eine Funktion des Feldes und dessen Ableitungen ist:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{7.40}$$

Wir unterscheiden die Fälle, bei denen das Feld reell oder komplexwertig ist.

7.3.1 Das reelle skalare Feld

Für das reelle Feld schreiben wir als Ansatz:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{7.41}$$

Wir berechnen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} m^2 2\phi = -m^2 \phi \tag{7.42}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 = \partial^\mu \phi \tag{7.43}$$

Beachte die Lage des Index. Der Beweis ist der folgende: wir betrachten die verschiedenen μ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_0 \phi)} \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - \dots] = \partial_0 \phi = \partial^0 \phi \tag{7.44}$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \phi)} = \frac{\partial}{\partial (\partial_1 \phi)} \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - (\partial_1 \phi)(\partial_1 \phi) \dots] = -\partial_1 \phi = \partial^1 \phi \tag{7.45}$$

usw...

Wegen der Euler-Lagrange-Gleichung gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \implies -m^2 \phi = \partial_\mu (\partial^\mu \phi) \quad \text{ok!} \tag{7.46}$$

7.3.2 Das komplexwertige skalare Feld

Für das komplexwertige Feld, zerlegen wir das Feld in reelle und komplexe Teile:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad \text{und} \quad \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \quad (7.47)$$

wobei ϕ_1 und ϕ_2 reelle (hermitesche) Felder sind. Beide Felder ϕ_1 und ϕ_2 erfüllen die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi_1 = 0 \quad \text{und} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi_2 = 0 \quad (7.48)$$

Der Ansatz ist:

$$\mathcal{L}_{KG} = (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \quad (7.49)$$

(Beachte die Abwesenheit des Faktors 1/2). In diesem Fall müssen wir das Feld und das komplexkonjugierte Feld als unabhängige Felder betrachten. Wir verwenden die Euler-Lagrange-Gleichung für ϕ und ϕ^* :

$$\begin{cases} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu (\partial^\mu \phi^*) + m^2 \phi^* = \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* \\ \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = \partial_\mu (\partial^\mu \phi) + m^2 \phi = \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi \end{cases} \quad (7.50)$$

Diese zwei Gleichungen entsprechen den Gleichungen für beide Felder ϕ_1 und ϕ_2 .

7.3.3 Erhaltener Strom

Wir betrachten eine interne Phasen-Transformation des *komplexwertigen* Felds (Siehe Kap. 6.3.4). Wir müssen in unserem Fall die Transformation von zwei Feldern betrachten (für ϕ und ϕ^*):

$$\begin{cases} \phi(x) \longrightarrow \phi'(x') = e^{-i\alpha} \phi(x) \approx \phi - i\alpha \phi \\ \phi^*(x) \longrightarrow \phi'^*(x') = e^{+i\alpha} \phi^*(x) \approx \phi^* + i\alpha \phi^* \end{cases} \quad (7.51)$$

In diesem Fall wird die Lagrange-Dichte oder die Wirkung von den zwei Feldern abhängen. Die gesamte Änderung der Wirkung ist daher gleich der Summe der einzelnen Änderungen. Schliesslich wird der erhaltene Strom diese zwei Beiträge enthalten:

$$j^\mu \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\delta \phi}{\delta \alpha} \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \frac{\delta \phi^*}{\delta \alpha} \right) \quad (7.52)$$

d.h., man muss die verschiedenen Felder summieren. Es gilt:

$$\begin{aligned} j^\mu &\equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} (-i\phi) \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} (+i\phi^*) \right) \\ &= ((\partial^\mu \phi^*)(-i\phi)) + ((\partial^\mu \phi)(+i\phi^*)) \\ &= i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \end{aligned} \quad (7.53)$$

Dies ist genau der Strom, den wir im Kap. 7.2.4 definiert haben! Die Erhaltung dieses Stroms kann daher als eine Folge der Invarianz des Systems unter einer internen Phasen-Transformation des Felds erklärt werden. Dieses Resultat ist fundamental und ist die Basis der eichinvarianten Quantenfeldtheorien.

7.4 Die “zweite” Quantisierung

7.4.1 Physikalische Interpretation

Nicht-relativistische Quantenmechanik: Die Wellenfunktion ψ der nicht-relativistischen Quantenmechanik kann als “Feld” betrachtet werden. In diesem Fall wird das Feld “klassisch” behandelt, d.h., die Wellenfunktion ist eine Funktion des Ortsvektors \vec{x} (wobei \vec{x} als ein kontinuierlicher Index für die Freiheitsgrade des Feldes wirkt), die den Zustand eines Teilchens beschreibt:

$$\text{Wellenfunktion } \Psi : \quad \rho(\vec{x}) \equiv \Psi^*(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) \quad (7.54)$$

Die Quantisierung kommt daher, dass wir den “klassischen” Hamilton-Operator $H \equiv H(\vec{p}, \vec{x})$ verwenden und die Symbole \vec{x} und \vec{p} als *Operatoren mit Kommutationsregeln* betrachten, d.h.,

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad \text{und} \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (7.55)$$

Relativistische Quantenmechanik: Wir haben eine Methode verwendet, um eine Wellengleichung zu finden, die mit der Relativitätstheorie übereinstimmt, d.h.,

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) &\longrightarrow \text{das Feld} \\ p^\mu &\longrightarrow \text{ein Operator} \end{aligned}$$

d.h., wir haben das Feld “klassisch” behandelt. Damit haben wir ein Problem mit der Klein-Gordon-Gleichung angetroffen: aus $E < 0$ und $p < 0$ folgt eine schwierige Interpretation des Feldes als *Wellenfunktion* eines Teilchens, weil die Wahrscheinlichkeit nicht positiv definit ist.

Es gibt noch andere Probleme, die wir noch nicht behandelt haben: wir suchen eine *allgemeine Theorie der Elementarteilchen* und müssen deshalb die folgenden Fragen lösen:

a) Wie werden wir *Bosonen und Fermionen* beschreiben? Welche Feldgleichung müssen wir in diesem Fall verwenden?

b) Wie werden wir *Teilchen und Antiteilchen* behandeln? Wegen der Energie-Masse-Äquivalenz der Relativitätstheorie können wir nicht eine mit der Relativitätstheorie übereinstimmende Theorie betrachten, in der die Anzahl von Teilchen-Antiteilchen erhalten wird. Wie werden wir die *Erzeugung-Vernichtung von Teilchen-Antiteilchen* formal behandeln?

Man glaubt, dass die Lösung dieser Probleme in der **Quanten-Feld-Theorie (QFT)** liegt.

In der QFT wird das Feld als ein quantisiertes Objekt betrachtet (sogenannte "zweite Quantisierung").

Das Feld beschreibt ein System mit unendlich vielen kontinuierlichen Freiheitsgraden. In diesem Fall spielt der Ortsvektor die Rolle eines kontinuierlichen Index, um die Freiheitsgrade zu identifizieren:

$$\underbrace{\phi}_{\text{quantisiertes Feld}} \underbrace{(x^\mu)}_{\text{kontinuierlicher Index}} \quad (7.56)$$

Der kanonische Ansatz der QFT ist der folgende: wir benutzen die klassische Lagrangedichte, die die Dynamik des Feldes beschreibt, und interpretieren das Feld als einen Operator mit Kommutationsregeln:

$$\left. \begin{array}{l} \text{klassisches Feld} \\ \phi(x^\mu) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{zweite Quantisierung}} \left\{ \begin{array}{l} \text{quantisiertes Feld} \\ \phi(x^\mu) - \text{Operatoren} \\ \text{mit Kommutationsregeln} \end{array} \right. \quad (7.57)$$

In der QFT wird das Feld *nicht mehr* als *Wellenfunktion eines Teilchens* interpretiert, die Theorie wird als eine Vielteilchentheorie re-interpretiert.

Das Feld entspricht einer physikalischen Grösse, deren Anregungen Teilchen beschreiben: Anregung des Feldes \iff ein Teilchen (\equiv ein Quant des Feldes)

Die Anregungen des Feldes werden mit Hilfe von Quantenoszillatoren beschrieben.

7.5 Quantisierung des reellen Klein-Gordon-Feldes

Wir betrachten ein reelles (d.h. nicht komplexwertiges) Feld ϕ .

Klassische Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{KG} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \end{aligned} \quad (7.58)$$

Der kanonische Impuls des Feldes ist (Siehe Kap. 6.3)

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{KG}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \frac{1}{2} 2 (\partial_0 \phi) = \partial_0 \phi \quad (7.59)$$

Die Hamiltondichte ist gleich

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv \Pi (\partial_0 \phi) - \mathcal{L} \\ &= (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{2} m^2 \phi^2}_{\geq 0} \end{aligned} \quad (7.60)$$

d.h., sie ist immer positiv definit, deshalb besitzt das Feld immer eine positive Energie! Das Feld leidet nicht unter dem Problem der negativen Energie. Beachte: wie schon erwähnt, entspricht das Feld nicht der Wellenfunktion eines Teilchens.

Das Feld wird dadurch quantisiert, dass wir den Feldern zur gleichen Zeit Kommutationsregeln auferlegen (die sogenannten **gleichzeitigen Kommutationsregeln**):

$$\left\{ \begin{array}{l} [\phi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] \equiv i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \\ [\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{x}', t)] = [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{x}', t)] = 0 \end{array} \right. \quad (7.61)$$

ETCR (Equal Time Comm. Rules)

Lösung: wie können wir die Anregungen des Feldes beschreiben? Wir werden das Feld nach ebenen Wellen entwickeln:

$$\phi(\vec{x}, t) \equiv \int \underbrace{\frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}}}_{\text{Summe ueber alle Moden}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2E_p}}}_{\text{Normierung } E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \underbrace{(a(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{+ip \cdot x})}_{\text{Summe ebener Wellen}} \quad (7.62)$$

wobei $a(\vec{p})$ und $a^\dagger(\vec{p})$ Fourier-Koeffizienten sind, welche Operatoren werden, wenn das Feld quantisiert wird. Man kann beweisen, dass aus den "gleichzeitigen Kommutationsregeln" folgt

$$\left\{ \begin{array}{l} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \equiv \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ [a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \equiv 0 \end{array} \right. \quad (7.63)$$

Diese Gleichungen sehen wie die Regeln von quantisierten, einfachen, harmonischen Oszillatoren aus !

7.5.1 Einfacher harmonischer Oszillator

Der Hamilton-Operator ist gleich ($m=1$)

$$H_{HO} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \quad (7.64)$$

wobei ω die Kreisfrequenz ist. Man benutzt die Leiter-Operatoren ("Ladder operators")

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}\omega}(a + a^\dagger) \quad \text{und} \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad (7.65)$$

wobei $[a, a^\dagger] = 1$ (aus $[x, p] = i$). Der Hamilton-Operator wird danach so ausgedrückt

$$\begin{aligned} H_{HO} &= \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \\ &= \omega \left(N + \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.66)$$

wobei $N \equiv a^\dagger a$ =Anzahl-Operator. Der Grundzustand wird als $|0\rangle$ bezeichnet, und wird so definiert, dass

$$a|0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad E_0 = \frac{1}{2}\omega \quad (\text{Nullpunktennergie}) \quad (7.67)$$

Wir nehmen an, dass die Energie-Eigenzustände die folgenden sind:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad \text{mit} \quad E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.68)$$

und es gilt,

$$Na^\dagger|n\rangle = a^\dagger aa^\dagger|n\rangle = a^\dagger(a^\dagger a + 1)|n\rangle = a^\dagger(N + 1)|n\rangle = (n + 1)a^\dagger|n\rangle \quad (7.69)$$

Die n-te Anregung wird dann durch sukzessive Anwendungen des **Erzeugungsoperators** a^\dagger gewonnen¹:

$$|n\rangle \equiv (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (7.70)$$

Der a -Operator spielt die Rolle des **Vernichtungsoperators**.

$$\begin{aligned} Na|n\rangle &= a^\dagger aa|n\rangle = (aa^\dagger - 1)a|n\rangle = a(a^\dagger a - 1)|n\rangle \\ &= a(N - 1)|n\rangle = (n - 1)a|n\rangle \end{aligned} \quad (7.71)$$

¹Die Normierung wurde hier vernachlässigt. Normierte Eigenzustände sind: $|n\rangle \equiv \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$

7.5.2 Das Klein-Gordon-Feld aus einfachen harmonischen Oszillatoren

Analog zum Fall des einfachen harmonischen Oszillators führen wir den **Teilchenzahl-Operator** ein:

$$N(\vec{p}) \equiv a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) \quad (7.72)$$

wobei \vec{p} ein kontinuierlicher Index ist. Dieser Operator beschreibt den Zustand des Oszillators " \vec{p} ". Weil wir ein kontinuierliches Impulsspektrum betrachten, entspricht der Operator $N(\vec{p})$ der *Teilchendichte*, d.h. *Anzahl Teilchen*/ $d^3\vec{p}$.

Weil \vec{p} eine kontinuierliche Variable ist, gibt es unendlich viele Oszillatoren. Das Feld ist die Summe von unendlich vielen, voneinander unabhängigen, Oszillatoren.

Der **Grundzustand** (*das Vakuum*) wird definiert als

$$\text{Vakuum: } N(\vec{p})|0\rangle = a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{p} \quad (7.73)$$

Um bestimmte Moden des Feldes anzuregen, benutzen wir den Erzeugungsoperator, d.h. den Leiteroperator eines bestimmten Impulses:

$$\begin{aligned} a^\dagger(\vec{p})|0\rangle &\iff |1_{\vec{p}}\rangle \\ a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})|0\rangle &\iff |1_{\vec{p}}1_{\vec{q}}\rangle \\ a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})a^\dagger(\vec{q})|0\rangle &\iff |1_{\vec{p}}2_{\vec{q}}\rangle \end{aligned} \quad (7.74)$$

usw.

7.5.3 Energie- und Impulsspektrum des Feldes

Wir suchen die Energie und den Impuls des Feldes (Siehe Kap. 6.3):

$$H = \int d^3\vec{x} \mathcal{H} = \int d^3\vec{x} T_0^0 \quad (7.75)$$

und

$$P_i = \int d^3\vec{x} T_i^0 = \int d^3\vec{x} \Pi(\partial_i \phi) \quad (7.76)$$

Wir nehmen die Zeit $t=0$ an. Es gilt,

$$\phi(\vec{x}, t=0) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (7.77)$$

und

$$\Pi(\vec{x}, t=0) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} (a(\vec{p}) - a^\dagger(-\vec{p})) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (7.78)$$

Die Hamiltondichte ist gleich

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ &= \frac{1}{2}(\Pi)^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \end{aligned} \quad (7.79)$$

wobei

$$(\Pi)^2 = \int \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^{3/2}} (-i)^2 \frac{1}{2} \sqrt{E_p E_{p'}} e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} \times (a(\vec{p}) - a^\dagger(-\vec{p})) (a(\vec{p}') - a^\dagger(-\vec{p}')) \quad (7.80)$$

und der Gradient wirkt als $\vec{\nabla}\phi = (i\vec{p})\phi$ oder

$$(\vec{\nabla}\phi)^2 = \int \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^{3/2}} (i)^2 (\vec{p} \cdot \vec{p}') \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} \times (a(\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})) (a(\vec{p}') + a^\dagger(-\vec{p}')) \quad (7.81)$$

Es gilt auch

$$(\phi)^2 = \int \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3\vec{p}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} \times (a(\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})) (a(\vec{p}') + a^\dagger(-\vec{p}')) \quad (7.82)$$

Schliesslich können wir die verschiedenen Terme in der Hamiltondichte gruppieren und erhalten für den Hamilton-Operator:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3\vec{x} \mathcal{H} \\ &= \int d^3\vec{x} \int \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} e^{i(\vec{p}+\vec{p}')\cdot\vec{x}} \left\{ -\frac{1}{2} \sqrt{E_p E_{p'}} \times \right. \\ &\quad (a(\vec{p}) - a^\dagger(-\vec{p})) (a(\vec{p}') - a^\dagger(-\vec{p}')) + \\ &\quad \left. \frac{-(\vec{p} \cdot \vec{p}') + m^2}{2\sqrt{E_p E_{p'}}} (a(\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})) (a(\vec{p}') + a^\dagger(-\vec{p}')) \right\} \end{aligned} \quad (7.83)$$

Die räumliche Integration liefert eine Dirac-Delta-Funktion:

$$H = \int \int \frac{d^3\vec{p} d^3\vec{p}'}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} + \vec{p}') \{ \dots \} \quad (7.84)$$

weshalb wir eine Integration über den Impuls durch die Bedingung $\vec{p}' = -\vec{p}$ ersetzen können:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{p} \left\{ -\frac{1}{2} E_p (\dots) + \frac{\vec{p}^2 + m^2}{2E_p} (\dots) \right\} \quad (7.85)$$

Wir können die Terme neu anordnen als

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{p} \frac{1}{2E_p} \{ -E_p^2 (\dots) + (\vec{p}^2 + m^2) (\dots) \} \quad (7.86)$$

oder

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\vec{p}}{2E_p} E_p^2 \{ - (a(\vec{p}) - a^\dagger(-\vec{p})) (a(-\vec{p}) - a^\dagger(\vec{p})) + \\ &\quad (a(\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})) (a(-\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p})) \} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{p} \frac{E_p}{2} \{ -a(\vec{p})a(-\vec{p}) + a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + \\ &\quad a^\dagger(-\vec{p})a(-\vec{p}) - a^\dagger(-\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + \\ &\quad a(\vec{p})a(-\vec{p}) + a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + \\ &\quad a^\dagger(-\vec{p})a(-\vec{p}) + a^\dagger(-\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) \} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\vec{p} \frac{2E_p}{2} \{ a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) \} \end{aligned} \quad (7.87)$$

wobei wir den Teilchenzahl-Operator $N(\vec{p})$ erkennen:

$$a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}) + a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) = 2N(\vec{p}) + C \quad (7.88)$$

wobei C als eine *C-Zahl* betrachtet werden kann². Schliesslich ist der Hamilton-Operator gleich

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{p} E_p \{ 2N(\vec{p}) + C \} \quad (7.89)$$

Er beschreibt die Energie des Feldes. Wir bemerken, dass das Feld als eine unendliche Summe von quantisierten einfachen harmonischen Oszillatoren dargestellt wird.

Ein berühmtes Problem liegt in der Nullpunktsenergie des Feldes. Wir bemerken, dass das Integral der Energie nach unendlich geht:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\vec{p} E_p \{ 2N(\vec{p}) + 1 \} = \int d^3\vec{p} N(\vec{p}) E_p + \underbrace{\frac{1}{2} \int d^3\vec{p} E_p \{ 1 \}}_{\text{Nullpunktsenergie} \rightarrow \infty} \quad (7.90)$$

²Für ein kontinuierliches Impulsspektrum ist C gleich der Dirac-Delta-Funktion $\delta(0)$. Für ein diskretes Spektrum ist C gleich 1.

In der QFT wird die Nullpunktsenergie vernachlässigt³, weil nur Energieunterschiede eine physikalische Bedeutung besitzen, und deshalb können wir den Nullpunkt so definieren, dass die Energie des Feldes gleich

$$H = \int d^3\vec{p} N(\vec{p}) E_p \quad (7.91)$$

ist. In ähnlicher Weise kann der Impuls des Feldes berechnet werden:

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \int d^3\vec{p} \vec{p} \{2N(\vec{p}) + C\} = \int d^3\vec{p} \{N(\vec{p})\vec{p}\} \quad (7.92)$$

Physikalische Interpretation: Das Vakuum haben wir so definiert

$$N(\vec{p})|0\rangle = a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p})|0\rangle = 0 \quad \text{für alle } \vec{p} \quad (7.93)$$

Es folgt,

$$E_0 = \int d^3\vec{p} N(\vec{p}) E_p = 0 \quad \text{und} \quad \vec{P} = 0 \quad (7.94)$$

Für die folgenden Zustände erhalten wir

$$\begin{aligned} |1_{\vec{p}}\rangle : \quad E &= E_p = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}; \quad \vec{P} = \vec{p} \\ |1_{\vec{p}}1_{\vec{q}}\rangle : \quad E &= E_p + E_q; \quad \vec{P} = \vec{p} + \vec{q} \end{aligned} \quad (7.95)$$

Es ist ganz natürlich, diese Anregungen mit Teilchen zu assoziieren.

Energie-Problem: in der "klassischen" Quantenmechanik (wenn wir das Feld als die Wellenfunktion des Teilchens betrachten) haben wir das Problem der negativen Energie angetroffen, weil

$$\begin{aligned} e^{-iEt} &\longrightarrow E > 0 \\ e^{+iEt} &\longrightarrow E < 0 \end{aligned} \quad (7.96)$$

Lösungen liefern. Das Vorzeichen der Phase gibt das Vorzeichen der Energie an. In der QFT haben wir das Feld so geschrieben,

$$\phi(\vec{x}, t) \propto \underbrace{a(\vec{p})e^{-ipx}}_{\text{positive Frequenz}} + \underbrace{a^\dagger(\vec{p})e^{+ipx}}_{\text{negative Frequenz}} \quad (7.97)$$

wobei $a(\vec{p})$ ein Teilchen mit **positiver** Energie **vernichtet**, und $a^\dagger(\vec{p})$ ein Teilchen mit **positiver** Energie **erzeugt**!

Die QFT hat die relativistische Bedingung, die positive und negative Frequenzen verlangt, mit einer Theorie in Einklang gebracht, in der Teilchen und Antiteilchen mit positiver Energie erzeugt und vernichtet werden können.

³Der Casimir-Effekt ist eine physikalische Erscheinung der Nullpunktsenergie. Dieser Effekt wurde experimentell im Fall des elektromagnetischen Felds beobachtet.

Statistik des Feldes: wir bemerken, dass wegen der Kommutationsregeln der Erzeugung- und Vernichtungsoperatoren, der Zustand mit zwei identischen Teilchen *symmetrisch unter der Vertauschung der Teilchen* ist:

$$a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})|0\rangle = a^\dagger(\vec{q})a^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (7.98)$$

weil $[a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = 0$. Zusätzlich *kann ein Impulsmoden viele Teilchen besitzen*, wie z.B.

$$|3_{\vec{p}}\rangle \propto a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (7.99)$$

Wir schliessen daraus, dass die **Klein-Gordon Teilchen Bosonen sind**. Sie folgen der **Bose-Einstein-Statistik**.

7.6 Quantisierung des komplexen Klein-Gordon-Feldes

Wir studieren die Eigenschaften eines Feldes ϕ , das komplexwertig ist. Wir zerlegen das Feld in reelle und imaginäre Teile:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \quad \text{und} \quad \phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \quad (7.100)$$

wobei ϕ_1 und ϕ_2 reelle (hermitesche) Felder sind. Beide Felder ϕ_1 und ϕ_2 erfüllen die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi_1 = 0 \quad \text{und} \quad (\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi_2 = 0 \quad (7.101)$$

Jedes Feld wird nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren entwickelt:

$$\begin{cases} \phi_1(x) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_1(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a_1^\dagger(\vec{p})e^{+ip \cdot x} \right) \\ \phi_2(x) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_2(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a_2^\dagger(\vec{p})e^{+ip \cdot x} \right) \end{cases} \quad (7.102)$$

wobei a_i ($i=1,2$) Operatoren sind. Wir führen die folgenden Operatoren ein:

$$\begin{cases} a(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p})) \\ b^\dagger(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger(\vec{p}) + ia_2^\dagger(\vec{p})) \end{cases} \quad (7.103)$$

Mit diesen Definitionen werden die Felder so ausgedrückt:

$$\begin{cases} \phi(x) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + b^\dagger(\vec{p})e^{+ip \cdot x}) \\ \phi^\dagger(x) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a^\dagger(\vec{p})e^{+ip \cdot x} + b(\vec{p})e^{-ip \cdot x}) \end{cases} \quad (7.104)$$

wobei die Kommutationsregeln der zwei Arten von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden sind:

$$\begin{aligned} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] &= [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ \text{alle anderen} &= 0 \end{aligned} \quad (7.105)$$

d.h., sie besitzen dieselbe Algebra wie die a_1 und a_2 Operatoren. Wir definieren zwei Teilchenzahl-Operatoren:

$$N^+(\vec{p}) \equiv a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) \quad \text{und} \quad N^-(\vec{p}) \equiv b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p}) \quad (7.106)$$

Man kann zeigen, dass in diesem Fall der 4-Energie-Impuls-Operator gleich

$$P_\mu = \int d^3\vec{p} p_\mu [N^+(\vec{p}) + N^-(\vec{p})] \quad (7.107)$$

ist. Wir interpretieren dieses Ergebnis folgendermassen:

Das komplexwertige skalare Feld beschreibt ein System, das zwei a priori unabhängige Arten von Teilchen (derselben Masse) enthält. Die Anzahl dieser Teilchen werden durch die N^+ und N^- Operatoren beschrieben.

Wir betrachten den (erhaltenen) Strom der Form $j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$. Die zeitliche Komponente definiert eine (erhaltene) Grösse, die gleich

$$\begin{aligned} Q &\equiv \int d^3\vec{x} j^0 = i \int d^3\vec{x} (\phi^\dagger \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^\dagger) \\ &= \int d^3\vec{p} [N^+(\vec{p}) - N^-(\vec{p})] \end{aligned} \quad (7.108)$$

ist.

Wegen der Differenz $N^+ - N^-$ interpretieren wir die Grösse Q als die "Ladung". Das komplexwertige Feld beschreibt zwei Arten von Teilchen, die dieselbe Masse aber entgegengesetzte Ladungen besitzen.

Der a^\dagger Operator erzeugt ein Teilchen der Ladung +1, der b^\dagger Operator erzeugt ein Teilchen der Ladung -1.

Kapitel 8

Fermionfelder: Die Dirac Gleichung

8.1 Herleitung der Dirac-Gleichung

Lange Zeit dachte man, dass die Klein-Gordon-Gleichung die einzig mögliche relativistische Erweiterung der Schrödinger-Gleichung sei. Diese Gleichung konnte aber nicht verwendet werden als Wellengleichung eines Felds, das wie in der Quantenmechanik als Wellenfunktion eines Teilchens interpretiert wird. Bevor die Klein-Gordon-Gleichung in einer Quantenfeldtheorie verwendet wurde, hatte man alternative Lösungen gesucht, bei denen man eine andere Wellengleichung fand, die in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie war und die Wellenfunktion eines relativistischen Teilchens beschrieb. Eine solche Gleichung hat Dirac hergeleitet. Heute wird seine Gleichung auch im Bereich der Quantenfeldtheorie angewendet und man spricht von Dirac-Feldern. Trotzdem kann die Dirac-Gleichung auch für die Beschreibung der Wellenfunktion in einer "klassischen" Quantentheorie verwendet werden. Wir werden sehen, dass aus der Bedingung, dass die Gleichung relativistisch sein muss, die Existenz von Teilchen und Antiteilchen folgt!

Dirac (1927): Dirac bemerkte, dass die *zweite zeitliche Ableitung* der Klein-Gordon-Gleichung für die Probleme (z.B. negative Wahrscheinlichkeitsdichte) verantwortlich ist.

Eine mögliche Alternative ist eine Gleichung zu verwenden, die auch 1. Ordnung in der Zeitableitung ist (wie die Schrödinger-Gleichung), d.h.

$$\text{Ansatz: } i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H_{Dirac}\Psi \quad (8.1)$$

wobei ψ die Wellenfunktion eines *einzigsten* Teilchens darstellt.

Die Kovarianz *erzwingt* eine Symmetrie der Gleichung zwischen Raum und Zeit. Der Dirac-Hamilton-Operator muss deshalb auch 1.Ordnung in den räum-

lichen Ableitungen sein:

$$\text{Dirac-Postulat: } H_{Dirac} \equiv -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m \quad (8.2)$$

wobei

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{und} \quad \beta \quad (8.3)$$

noch bestimmt werden müssen. Im Fall eines freien Teilchens muss gelten $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ deshalb

$$\begin{aligned} H_{Dirac}^2 \Psi &= (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \Psi \\ &= \left(-i \sum_i \alpha_i \partial_i + \beta m \right) \left(-i \sum_j \alpha_j \partial_j + \beta m \right) \Psi \end{aligned} \quad (8.4)$$

wobei

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (8.5)$$

Es folgt,

$$\begin{aligned} H_{Dirac}^2 \Psi &= \left(- \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j - im \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i + \beta^2 m^2 \right) \Psi \\ &= \left(- \sum_i \alpha_i^2 \partial_i^2 - \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \partial_i \partial_j - im \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \partial_i + \beta^2 m^2 \right) \Psi \end{aligned} \quad (8.6)$$

Andererseits muss gelten

$$H_{Dirac}^2 \Psi = (\vec{p}^2 + m^2) \Psi = \left(- \sum_i \partial_i^2 + m^2 \right) \Psi \quad (8.7)$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = 1; \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j); \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0; \\ \beta^2 = 1 \end{cases} \quad (8.8)$$

Komplexe Zahlen können diese Bedingungen nicht befriedigen! Dirac schlug vor, dass α und β Matrizen sind.

Wir können die Bedingungen schreiben als

$$\begin{cases} \alpha_i^2 = \beta^2 = 1; \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}; \\ \{\alpha_i, \beta\} = 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

wobei $\{A, B\}$ der Antikommutation $AB + BA$ entspricht. Welche Eigenschaften müssen diese Matrizen haben?

1. Der Hamilton-Operator muss reelle Eigenwerte besitzen. Es folgt daraus, dass die α und β Matrizen *hermitesch* sein müssen:

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i \quad \text{und} \quad \beta^\dagger = \beta \quad (8.10)$$

d.h., die adjungierte Matrix ist gleich der ursprünglichen Matrix.

2. Die Eigenwerte sind gleich +1 oder -1, weil

$$\alpha_i^2 = \beta_i^2 = 1 \quad (8.11)$$

3. Es gilt,

$$\begin{aligned} \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 &\implies \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \\ &\implies \alpha_i = -\beta \alpha_i \beta \end{aligned} \quad (8.12)$$

Wir betrachten die Spur der Matrizen:

$$\text{Tr}(\alpha_i) = \text{Tr}(-\beta \alpha_i \beta) = \text{Tr}(-\beta \alpha_i) = \text{Tr}(-\alpha_i) \quad (8.13)$$

weil $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Dann muss die Spur verschwinden

$$\boxed{\text{Tr}(\alpha_i) = 0} \quad (8.14)$$

In ähnlicher Weise,

$$\boxed{\text{Tr}(\beta) = 0} \quad (8.15)$$

D.h. die Matrizen sind spurlos.

Dirac bewies, dass die einfachste Darstellung (d.h. die Darstellung der niedrigsten Dimension) dieser Matrizen eine 4x4 Darstellung ist.

Es gibt verschiedene bekannte Darstellungen.

Pauli-Dirac Darstellung:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

wobei (Siehe Kap. 4.5.2): $\sigma_i = 2 \times 2$ Pauli-Matrizen. Wir bemerken, dass in der Pauli-Dirac-Darstellung die β -Matrix diagonal ist.

Chirale (oder Weyl-) Darstellung:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Wir bemerken, dass in der Weyl-Darstellung die α -Matrizen diagonal sind.

Bemerkung: Welche Darstellung man benutzen wird, hängt von der Eigenschaft der Dirac-Gleichung ab, an der wir interessiert sind. Insbesondere ist die Diagonalität der α oder β -Matrizen wichtig. Natürlich hängen die physikalischen Ergebnisse nicht von der gewählten Darstellung ab. In Wirklichkeit werden wir eine bestimmte Darstellung nur verwenden, wenn wir eine bestimmte Lösung der Gleichung zeigen wollen.

8.2 Dirac-Spinoren

Wir betrachten die Dirac-Gleichung:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \Psi = 0 \quad (8.18)$$

oder

$$\boxed{\left(i \frac{\partial}{\partial t} + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m \right) \Psi = 0} \quad \text{Dirac-Gleichung} \quad (8.19)$$

Die Wellenfunktion ist ein Kolonnen-Vektor mit 4 Elementen. Jedes Element ψ_i ist eine komplexe Funktion:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \quad \text{Bi-Spinor} \quad \text{oder} \quad \text{Dirac-Spinor} \quad (8.20)$$

Wir werden bald die physikalische Bedeutung der 4 Komponenten des Spinors diskutieren.

Wichtige Bemerkung: Der Dirac-Spinor besitzt 4-Komponenten. Er ist aber kein 4-Vektor! Seine Transformations-Eigenschaften sind nicht gleich der eines 4-Vektors, d.h.

$$(x^\mu)' = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (8.21)$$

8.3 Kovariante Form der Dirac-Gleichung

Wir wollen zuerst die Dirac-Gleichung in kovarianter Form ausdrücken¹. Wir multiplizieren die Gleichung mit β :

$$\left(i \beta \frac{\partial}{\partial t} + i \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - \beta m \right) \Psi = 0 \quad (8.22)$$

¹Aus der Forderung der Kovarianz der Dirac-Gleichung folgt das Transformationsverhalten der Spinoren ψ unter Lorentz-Transformationen.

Wir definieren die **Dirac- γ -Matrizen**:

$$\gamma^0 \equiv \beta \quad \text{und} \quad \gamma^k \equiv \beta \alpha^k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8.23)$$

Wenn wir

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta \alpha^k) \quad (8.24)$$

schreiben, dann kann die Dirac-Gleichung ausgedrückt werden als

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^k \partial_k - m \right) \Psi = 0 \quad (8.25)$$

oder

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad \text{Dirac-Gleichung (Kovariante Form)} \quad (8.26)$$

oder

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \Psi = 0 \quad \text{Dirac-Gleichung (Kovariante Form)} \quad (8.27)$$

wobei wir den Energie-Impuls-Operator ersetzt haben.

Die Dirac-Gleichung stellt vier gekoppelte Differentialgleichungen dar, die die vier Komponenten des Spinors ψ in Beziehung setzen. D.h., z.B. in der Pauli-Dirac-Darstellung:

$$\left(i \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=\gamma^0} \partial_t + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}}_{=\gamma^k} \partial_k - m \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=1} \right) \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

oder

$$\sum_{k=1}^4 \left[\sum_{\mu} i (\gamma^\mu)_{jk} \partial_\mu - m \delta_{jk} \right] \Psi_k = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (8.29)$$

Antikommutationsregel: Wir werden die γ -Matrizen oft benutzen. Die explizite Form der γ -Matrizen ist nicht wichtig. Wir werden wenn möglich die Algebra der Matrizen benutzen! Es gilt z.B. für die γ -Matrizen

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = (2g^{\mu\nu}) \cdot 1 \quad (8.30)$$

Es folgt daraus,

$$(\gamma^\mu)^2 = (\gamma^\mu \gamma^\mu) = g^{\mu\mu} \quad (8.31)$$

d.h.,

$$(\gamma^0)^2 = 1 \quad \text{und} \quad (\gamma^k)^2 = -1 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8.32)$$

Der Dagger-Operator: In den vorherigen Kapiteln haben wir die komplex-konjugierte oft benutzt. Nun werden wir die hermitesch adjungierte Matrix (durch den “**Dagger-Operator**”) einführen. Sie ist definiert als die transponierte komplex-konjugierte Matrix.

Z.B.

$$\begin{aligned} (\gamma^k)^\dagger &= (\beta \alpha^k)^\dagger = \alpha^k \beta \quad (\alpha^k, \beta \text{ hermitesch}) \\ &= -\beta \alpha^k \quad (\text{Antikommutation}) \\ &= -\gamma^k \quad (k = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (8.33)$$

oder

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^\dagger &= (\beta)^\dagger = \beta \quad (\beta \text{ hermitesch}) \\ &= \gamma^0 \end{aligned} \quad (8.34)$$

8.4 Die adjungierte Gleichung und die Dichte

Wie im Fall der Schrödinger- und der Klein-Gordon-Gleichung wollen wir einen Stromdichte-4-Vektor definieren:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad \implies \quad (i\gamma^0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i\gamma^k \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} - m \Psi) = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (8.35)$$

Mit Hilfe des Dagger-Operators finden wir die adjungierte Gleichung:

$$\left(-i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \underbrace{(\gamma^0)^\dagger}_{=\gamma^0} - i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^k} \underbrace{(\gamma^k)^\dagger}_{=-\gamma^k} - m \Psi^\dagger \right) = 0 \quad (8.36)$$

oder

$$\left(-i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 + i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^k} \gamma^k - m \Psi^\dagger \right) = 0 \quad (8.37)$$

Die Gleichung sieht ähnlich aus wie die Dirac-Gleichung, das Vorzeichen zwischen den zeitlichen und räumlichen Ableitungen ausgenommen. Wir multiplizieren die Gleichung von rechts mit γ^0 :

$$\left(-i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 + i \frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^k} \underbrace{\gamma^k \gamma^0}_{=-\gamma^0 \gamma^k} - m \Psi^\dagger \gamma^0 \right) = 0 \quad (8.38)$$

oder

$$\left(-i \left(\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \right) \gamma^0 - i \left(\frac{\partial \Psi^\dagger}{\partial x^k} \gamma^0 \right) \gamma^k - m \Psi^\dagger \gamma^0 \right) = 0 \quad (8.39)$$

Wir führen den **adjungierten Spinor** (ein Zeilenvektor) ein:

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 = (\dots) \quad (8.40)$$

und erhalten die adjungierte Dirac-Gleichung

$$(i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi}) = 0 \quad \text{Adjungierte Dirac-Gleichung} \quad (8.41)$$

Wir betrachten nun die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ und mit Hilfe der Dirac-Gleichung konstruieren wir den erhaltenen Strom:

$$\begin{cases} (i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi) = 0 \\ (i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m\bar{\Psi}) = 0 \end{cases} \quad (8.42)$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit dem adjungierten Spinor und die zweite Gleichung mit dem Spinor und addieren die beiden Terme:

$$\begin{aligned} (i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi) + (i(\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi + m\bar{\Psi} \Psi) &= 0 \\ \implies i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + i(\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi &= 0 \\ \implies \partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) &= 0 \end{aligned} \quad (8.43)$$

Wir definieren deshalb den **Stromdichte 4-Vektor der Dirac-Gleichung** als

$$j^\mu \equiv \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad \text{Stromdichte-4-Vektor} \quad (8.44)$$

Seine zeitliche Komponente entspricht der Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho = j^0 = \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi = \Psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=1} \Psi = \Psi^\dagger \Psi = (\dots) \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 \Psi_i^* \Psi_i = \sum_{i=1}^4 |\Psi_i|^2 \quad (8.45)$$

und es folgt daraus,

$$\rho \geq 0 \quad !! \quad (8.46)$$

d.h., die Dirac-Gleichung löst das Problem der negativen Wahrscheinlichkeitsdichte, das wir bei der Klein-Gordon Gleichung angetroffen haben.

8.5 Lösungen der Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung löst das Problem der negativen Wahrscheinlichkeitsdichte. Jedoch bleiben die Lösungen mit negativen Energien:

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \implies E > 0 \quad \text{oder} \quad E < 0 \quad (8.47)$$

Wir betrachten den Spinor eines freien Teilchens:

$$\Psi(x^\mu) \equiv \underbrace{u(\vec{p})}_{\text{unabhängig von } x^\mu} \times \underbrace{e^{-ip \cdot x}}_{x^\mu\text{-Abhängigkeit}} \quad (8.48)$$

wobei $u(\vec{p})$ ein 4-Komponenten Spinor ist. Wir setzen den Spinor in die Dirac-Gleichung ein:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi) &= 0 \implies (i\gamma^\mu \partial_\mu (u(\vec{p})e^{-ip \cdot x}) - m\Psi) = 0 \\ \implies (i\gamma^\mu (-ip_\mu) \Psi - m\Psi) &= 0 \\ \implies (\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi &= 0 \end{aligned} \quad (8.49)$$

Wir führen die "Slash"-Notation ein:

$$\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{a} \quad (8.50)$$

und erhalten die sogenannte "Impuls-Darstellung" der Dirac-Gleichung:

$$(\not{p} - m)\Psi = 0 \quad (8.51)$$

8.5.1 Lösung der Dirac-Gleichung

Wir versuchen zuerst die Gleichung für einen verschwindenden Impuls (d.h., das Teilchen befindet sich in Ruhe) zu lösen:

$$\vec{p} = 0 \implies \Psi(\vec{p} = 0) = u(\vec{p} = 0)e^{-ip^\mu x_\mu} = u(\vec{p} = 0)e^{-imt} \quad (8.52)$$

Die Lösung ist unabhängig von den Raumkoordinaten:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi) = 0 \implies (i\gamma^0 \partial_0 \Psi - m\Psi) = 0 \quad (8.53)$$

weil $\partial_k \Psi = 0$ für $k = 1, 2, 3$. Wir benutzen die Pauli-Dirac-Darstellung

$$(i\gamma^0 \partial_0 \Psi - m\Psi) = 0 \quad \text{wobei} \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.54)$$

oder

$$i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_0 \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} \quad (8.55)$$

wobei wir den Spinor in zwei Komponenten aufgeteilt haben:

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} \quad (8.56)$$

Hier ist jede der zwei Komponenten ψ_A und ψ_B des Spinors ψ ein 2-Komponenten-Vektor. Wir erhalten zwei unabhängige Gleichungen:

$$i\partial_0 \Psi_A = m\Psi_A \quad \text{und} \quad i\partial_0 \Psi_B = -m\Psi_B \quad (8.57)$$

mit den Lösungen:

$$\begin{cases} \Psi_A(t) = \Psi_A e^{-imt} \\ \Psi_B(t) = \Psi_B e^{+imt} \end{cases} \quad \text{Freier Spinor} \quad (8.58)$$

Wir erkennen die gewöhnliche Zeitabhängigkeit für stationäre Zustände, die wir aus der Quantenmechanik schon kennen: e^{-iEt} . Wir interpretieren dieses Ergebnis als:

$$\begin{cases} \Psi_A(t) & \implies E = +m \quad \text{das Teilchen ruht} \\ \Psi_B(t) & \implies E = -m \end{cases} \quad (8.59)$$

d.h., ψ_B stellt ein Zustand mit negativer Energie dar. Wir suchen die Komponenten des Spinors in der Impulsdarstellung:

$$(\not{p} - m)\Psi = 0 \implies \left(\gamma^0 p^0 - \underbrace{\sum_k \gamma^k p^k}_{=0} - m \right) u(\vec{0}) e^{-iEt} = 0 \quad (8.60)$$

Mit der Pauli-Dirac-Darstellung erhalten wir

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} u(\vec{0}) = m u(\vec{0}) \quad \text{wobei} \quad u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

oder

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (8.62)$$

Hier sind die Komponenten u_A und u_B 2-Komponenten Kolonnenvektoren. Diese Gleichung liefert zwei unabhängige Beziehungen:

$$\begin{aligned} E u_A &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} u_A = m u_A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} u_A \\ \text{und} \quad \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} u_B &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} u_B \end{aligned} \quad (8.63)$$

Zwei unabhängige Eigenvektoren der ersten Gleichung sind die folgenden:

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad E = +m \quad (8.64)$$

und in einer ähnlicher Weise

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad E = -m \quad (8.65)$$

Zusammenfassend hat die Dirac-Gleichung vier unabhängige Lösungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \Psi^{(1)}(\vec{p}=0) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} & \Psi^{(2)}(\vec{p}=0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} & \text{mit} \quad E \geq 0 \\ \Psi^{(3)}(\vec{p}=0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt} & \Psi^{(4)}(\vec{p}=0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt} & \text{mit} \quad E \leq 0 \end{aligned} \right. \quad (8.66)$$

Nun können wir die Lösungen für einen nicht-verschwindenden Impuls suchen:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi = 0 \implies \gamma^\mu p_\mu = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{p} \quad (8.67)$$

Mit Hilfe der Pauli-Dirac-Darstellung erhalten wir

$$\gamma^\mu p_\mu = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E \end{pmatrix} \quad (8.68)$$

wobei jeder der vier Terme der Matrix eine 2×2 Matrix ist. Wir suchen deshalb eine Lösung der folgenden Art:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} u(\vec{p}) = 0 \quad (8.69)$$

wobei

$$u(\vec{p}) = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (8.70)$$

Es folgt,

$$\begin{pmatrix} E - m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad (8.71)$$

oder

$$\begin{cases} (E - m)u_A - (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B = 0 \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A - (E + m)u_B = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_B = (E - m)u_A \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})u_A = (E + m)u_B \end{cases} \quad (8.72)$$

Wir erhalten zwei gekoppelte Gleichungen:

$$\begin{cases} u_A = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - m} \right) u_B \\ u_B = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \right) u_A \end{cases} \implies u_A = \left(\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E - m)(E + m)} \right) u_A \quad (8.73)$$

Mit Hilfe der Darstellung der Pauli-Matrizen kann man leicht beweisen, dass gilt

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2 \quad 2 \times 2 - \text{Matrix} \quad (8.74)$$

und es folgt,

$$u_A = \left(\frac{\vec{p}^2}{(E^2 - m^2)} \right) u_A \implies (E^2 - m^2)u_A = \vec{p}^2 u_A \quad (8.75)$$

Dieses Ergebnis wird erwartet, weil für eine Lösung der Dirac-Gleichung gelten muss $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$. Wir suchen nun die allgemeinen Lösungen. Wir bemerken, dass gilt

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} = p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \quad (8.76)$$

Wir versuchen:

$$\begin{cases} u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\ u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E+m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{cases} \quad (8.77)$$

und

$$\begin{cases} u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E-m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \\ u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E-m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \\ p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \end{cases} \quad (8.78)$$

Wegen der inversen $E+m$ Abhängigkeit der ersten zwei Lösungen, entsprechen diese Lösungen der positiven Energie. Die zwei letzten stellen die Lösungen negativer Energie dar. Schliesslich haben wir die folgenden vier unabhängigen Lösungen gefunden:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} & u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} & \text{mit } E \geq 0 \\ u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{mit } E \leq 0 \end{array} \right. \quad (8.79)$$

wobei N der Normierung entspricht.

8.5.2 Der adjungierte Spinor

Wir definieren den **adjungierten Spinoren**

$$\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0 \quad (8.80)$$

wobei

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \Rightarrow u^\dagger = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*) \quad (8.81)$$

Zum Vergleich

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \quad \text{wobei} \quad (i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m \bar{\Psi}) = 0 \quad (8.82)$$

Es gilt,

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 &\Rightarrow \gamma^\mu p_\mu u = mu \\ \Rightarrow u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger p_\mu = mu^\dagger &\Rightarrow u^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 p_\mu = mu^\dagger \gamma^0 \end{aligned} \quad (8.83)$$

Weil

$$(\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \begin{cases} (\gamma^0)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \\ (\gamma^k)^\dagger \gamma^0 = -\gamma^k \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^k \end{cases} \Rightarrow (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \quad (8.84)$$

gilt

$$\underbrace{u^\dagger \gamma^0}_{=\bar{u}} \gamma^\mu \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_{=1} p_\mu = m \underbrace{u^\dagger \gamma^0}_{=\bar{u}} \quad (8.85)$$

oder

$$\bar{u}(\not{p} - m) = 0 \text{ adjungierte Gleichung} \quad (8.86)$$

8.5.3 Normierung

Es ist praktisch die Spinoren zu normieren. Wir benutzen die Normierung, bei der gilt

$$u^\dagger u = 2|E| \quad (8.87)$$

Dieses Produkt ist gleich

$$u^\dagger u = |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 + |u_4|^2 = \sum_i |u_i|^2 \quad (8.88)$$

Man kann beweisen, dass in diesem Fall gilt

$$N = \sqrt{|E| + m} \quad \text{Normierung der Dirac-Spinoren} \quad (8.89)$$

8.5.4 Orthogonalität

Wir können leicht verifizieren, dass die Lösungen zueinander orthogonal sind:

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 0 \quad \text{wenn } r \neq s \quad (8.90)$$

Mit der Normierung $N = \sqrt{|E| + m}$ erhalten wir

$$u^{(r)\dagger} u^{(r)} = 2|E| \quad (8.91)$$

Zusammenfassend kann die Orthogonalitätsbeziehung ausgedrückt werden als

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 2|E| \delta_{r,s} \quad r, s = 1, 2, 3, 4 \quad (8.92)$$

8.6 Die Helizität eines Dirac-Teilchens

Wir bemerken, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung für jede Energie zweifach entartet sind. Wir beweisen, dass die Interpretation dieses Freiheitsgrads einem Spin-1/2 entspricht. Wir beginnen mit dem Drehimpuls $\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla}$ (Siehe Kap. 4.5.1) Wir bemerken, dass der Drehimpuls **nicht** mit dem Dirac-Hamilton-Operator kommutiert:

$$\begin{aligned} [\vec{L}, H_{Dirac}] &= [\vec{x} \times \vec{p}, (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)] \\ &= [\vec{x} \times \vec{p}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] \\ &= [\vec{x}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] \times \vec{p} \\ &= (\vec{\alpha} \cdot [\vec{x}, \vec{p}]) \times \vec{p} \\ &= i\vec{\alpha} \times \vec{p} \end{aligned} \quad (8.93)$$

d.h., der Drehimpuls des Systems ist nicht erhalten!

Wir definieren einen Operator Σ als Erweiterung der Pauli-Spin-Operatoren für Spin-1/2:

$$\Sigma - \text{Operator} : \quad \Sigma \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (8.94)$$

wobei $\vec{\sigma}$ die 2×2 Pauli-Matrizen sind. Man kann leicht beweisen, dass gilt

$$[\vec{\Sigma}, H_{Dirac}] = -2i(\vec{\alpha} \times \vec{p}) \quad (8.95)$$

Es folgt daraus, dass der Operator \vec{J}

$$\vec{J} \equiv \vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \quad (8.96)$$

eine erhaltene Grösse ist:

$$[\vec{J}, H_{Dirac}] = [\vec{L} + \frac{1}{2}\vec{\Sigma}, H_{Dirac}] = 0 \quad (8.97)$$

Wir schliessen daraus, dass die Dirac-Gleichung ein Teilchen mit einem Spin-1/2 beschreibt.

Wir definieren den **Helizitätsoperator**:

$$h \equiv \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} \quad (8.98)$$

Dieser Operator entspricht der **Projektion des Spins auf den Impuls** des Teilchens. Es gilt,

$$\begin{aligned} [\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}, H_{Dirac}] &= [\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}, (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)] \\ &= [\vec{\Sigma} \cdot \vec{p}, \vec{\alpha} \cdot \vec{p}] = 0 \quad \text{weil} \quad [\vec{\Sigma}, \vec{\alpha}] = 0 \end{aligned} \quad (8.99)$$

Die Helizität ist deshalb für freie Teilchen eine gute Quantenzahl. Die Eigenwerte des Helizitätsoperators sind, wie im Fall der Pauli- σ Matrizen, +1 oder -1:

$$\text{Helizitätseigenwerte: } h = \pm 1 \quad (8.100)$$

Wenn $h=1$, ist der Spin zum Impuls parallel. Wenn $h=-1$, ist der Spin zum Impuls antiparallel. Man spricht von *positiver und negativer Helizität*. Siehe Abb. 8.1.

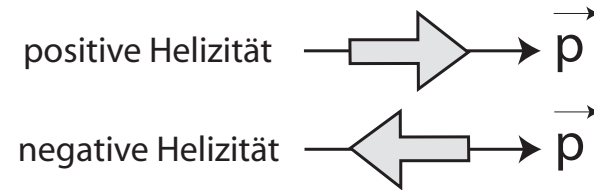


Abbildung 8.1: Die positive und negative Helizität eines Teilchens.

Bemerkung: Wir können a priori versuchen, die Spinoren mit Spineigenzuständen zu identifizieren. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &\overset{?}{\longleftrightarrow} \text{Teilchen mit Spin - up} \quad |\uparrow\rangle \\ u^{(2)} &\overset{?}{\longleftrightarrow} \text{Teilchen mit Spin - down} \quad |\downarrow\rangle \end{aligned}$$

Das ist unmöglich, weil gilt $[\vec{\Sigma}, H_{Dirac}] \neq 0$ und deshalb können die Lösungen $u^{(i)}$ keine Eigenzustände des Spins sein.

In den Übungen wird gezeigt, wie man *Eigenzustände der Helizität* konstruieren kann. Diese Eigenzustände sind verschieden von den Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$, die wir hier eingeführt haben.

In der Praxis werden wir oft mit den Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$ arbeiten, obwohl ihre Spin-Interpretation nicht ganz direkt ist. Wichtig ist, dass die Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$ ein vollständiges System darstellen.

Im Fall, dass der Impuls in die z -Richtung zeigt, kann man die Spinoren mit Spineigenzuständen identifizieren. Es gilt,

$$\vec{p} = (0, 0, p) \implies u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.101)$$

Wir betrachten die dritte Komponente des Σ -Operators:

$$\Sigma_3 u^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = u^{(1)} \quad !! \quad (8.102)$$

In ähnlicher Weise können wir für die anderen Spinoren beweisen, dass die Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$ Eigenzustände des Spins sind:

$$\vec{p} = (0, 0, p) \implies \begin{cases} u^{(1)}, u^{(3)} & \text{Spin - up} \quad |\uparrow\rangle \\ u^{(2)}, u^{(4)} & \text{Spin - down} \quad |\downarrow\rangle \end{cases} \quad (8.103)$$

8.7 Das Dirac-Teilchen und die “Löcher”-Theorie

Wegen seiner Matrizenform, beschreibt die Dirac-Gleichung ein Teilchen mit Spin-1/2. Die Wellenfunktion ist ein Spinor mit 4 Freiheitsgraden.

1. Zwei Freiheitsgrade stellen die “Spin-up” und “Spin-down” Freiheitsgrade eines Spin-1/2 Teilchens dar.
2. Die anderen zwei Freiheitsgrade entsprechen den zwei Arten von Lösungen: die Lösungen mit positiven und negativen Energien.

Ein natürlicher Kandidat für das Dirac-Teilchen ist das *Elektron*. Dirac schlug vor, dass seine Gleichung ein Elektron beschreibt. Es fehlte noch eine Interpretation für die Elektronen mit negativen Energien². Dirac löste das Problem mit Hilfe des **Ausschlussprinzips von Pauli**. Dirac postulierte die Existenz eines unendlichen Sees im Vakuum, der mit Elektronen mit negativen Energien gefüllt ist.

²Die Dirac-Gleichung löst das Problem der negativen Dichte. Dass beide Arten von Lösungen betrachtet werden müssen, ist eine Folgerung der relativistischen Beziehung zwischen Energie und Impuls.

Es folgt daraus, dass alle Zustände mit negativen Energien besetzt sind. Elektronen mit positiver Energie können nicht in Zustände mit negativen Energien fallen.

Löcher-Theorie: Dirac betrachtete den Fall, in dem ein Elektron mit negativer Energie $-E < 0$ in einen Zustand positiver Energie $E' > 0$ angeregt wird. Siehe Abb. 8.2.

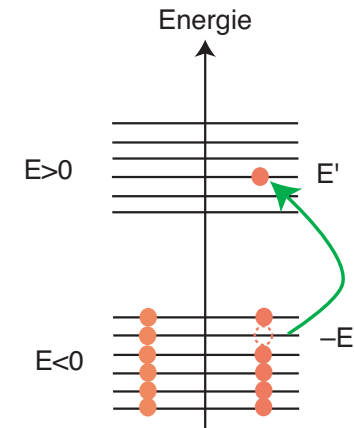


Abbildung 8.2: Die Löcher-Theorie. Ein Elektron mit negativer Energie wird in einen Zustand mit positiver Energie angeregt.

Als Folge der Anregung des Elektrons bleibt ein “Loch” im See.

Die Abwesenheit des negativ geladenen Elektrons mit negativer Energie ($E < 0$) wird als Anwesenheit eines positiv geladenen “Antielektrons” mit positiver Energie $E > 0$ interpretiert!

Die Löcher-Theorie sagt die Existenz eines Teilchens voraus, das dieselbe Ruhemasse wie das Elektron besitzt, aber mit einer positiven Ladung.

Die Anregung eines Elektrons vom See stellt deshalb die Erzeugung eines Elektrons und Antielektrons dar: $e^-(E') + e^+(E)$

8.8 Die Entdeckung des Positrons

Die Dirac-Theorie sagt voraus, dass beide, das Elektron und das Antielektron (das **Positron**), existieren müssten.

C.D. Anderson (1933): die “gewöhnliche” Materie enthält Elektronen, Protonen und Neutronen. Anderson suchte nach neuen Teilchen, die nicht in der gewöhnlichen Materie enthalten sind. Er war an den höchsten Energien, die man beobachten konnte, interessiert. Die höchsten Energien wurden in **kosmischen Strahlen**³ beobachtet.

Anderson (mit Millikan) benutzte eine Nebelkammer (“*Cloud chamber*”). In dieser Kammer erzeugt übersättigter (“*supersaturated*”) Dampf kleine Tröpfchen entlang der Ionisierungsspur eines geladenen Teilchens. Die Tröpfchen werden fotografiert.

Der *Impuls* eines Teilchens wird mit Hilfe eines magnetischen Feldes gemessen, und die *Ladung* des Teilchens wird durch das Vorzeichen der Krümmung gewonnen. Die Richtung des Teilchens wird mit Hilfe einer 6mm dicken Bleiplatte gefunden.

Mit einer solchen Anordnung gelang es Anderson durch Beobachtung von 1300 Fotografien Spuren positiv geladener Teilchen zu entdecken, die nicht als Protonen interpretiert werden konnten.

Teilchenidentifikation (“*particle identification*”): Durch die Messung der Reichweite (“*Range*”) und des Energieverlusts (“*Energy loss*”) konnte Anderson schliessen, dass es Spuren von positiven Elektronen (d.h. Positronen) waren.

Stückelberg (1941) und Feynman (1948): neue Vorschrift, zur Behandlung von Zuständen mit negativen Energien:

Ein Zustand mit negativer Energie beschreibt ein Teilchen, das sich rückwärts in der Zeit ausbreitet

$$e^{-i(-E)(+t)} = e^{-i(+E)(-t)} \quad (8.104)$$

Die Bewegung eines negativ geladenen Teilchens, das sich rückwärts in der Zeit ausbreitet, ist gleich der Bewegung eines positiv geladenen Teilchens, das sich vorwärts in der Zeit ausbreitet.

Wir können z.B. den Strom-4-Vektor der Klein-Gordon Gleichung betrachten: für ein Elektron:

$$\begin{aligned} j^\mu(e^-) &= (-e) (i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)) \\ &= -2e|N|^2(E, \vec{p}) \end{aligned} \quad (8.105)$$

für ein Positron:

$$\begin{aligned} j^\mu(e^+) &= (+e) (i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)) \\ &= +2e|N|^2(E, \vec{p}) = -2e|N|^2(-E, -\vec{p}) \end{aligned} \quad (8.106)$$

³Die kosmischen Strahlen wurden von Viktor Hess mit Beobachtungen in Ballonen entdeckt.

Es folgt,

$$j^\mu(e^+, E, \vec{p}) = j^\mu(e^-, -E, -\vec{p}) \quad (8.107)$$

Siehe Abb. 8.3.

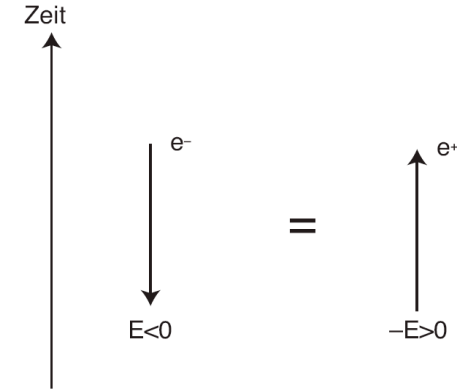


Abbildung 8.3: Die Beziehung zwischen Teilchen und Antiteilchen.

Wir bemerken:

die Zeit ist keine kovariante Grösse. Verschiedene Beobachter messen verschiedene Zeiten. Als Folgerung daraus wird eine kovariante Theorie immer Teilchen enthalten, die sich vorwärts und rückwärts in der Zeit ausbreiten werden. Eine kovariante Theorie wird deshalb immer Teilchen und Antiteilchen enthalten. Unter dieser Annahme kann die Existenz von Antimaterie als eine Folgerung der Prinzipien der Relativität betrachtet werden.

8.9 Dirac-Spinoren für Antiteilchen

Wir haben die freien Spinoren $u^{(1)}, \dots, u^{(4)}$ hergeleitet. Die Spinoren hängen von der Energie und vom Impuls ab. Wie können wir die Zustände mit negativer Energie als Positron interpretieren?

Ein Spinor mit negativer Energie wird als Zustand eines Antiteilchens mit positiver Energie interpretiert.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Positron } e^+ \\ E > 0, \vec{p} \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{Elektron } e^- \\ -E, -\vec{p} \end{array} \right. \quad (8.108)$$

Wir definieren danach den Zustand eines Positrons als

$$v^{(1,2)}(\vec{p}) \Longleftrightarrow u^{(4,3)}(-\vec{p}) \quad (8.109)$$

d.h.,

$$v^{(1)}(E, \vec{p}) \equiv u^{(4)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{-(p_x - ip_y)}{-E - m} \\ \frac{p_z}{-E - m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E + m} \\ \frac{-p_z}{E + m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $E \geq 0$

(8.110)

und in ähnlicher Weise

$$v^{(2)}(E, \vec{p}) \equiv -u^{(3)}(-E, -\vec{p}) = -N \begin{pmatrix} \frac{-p_z}{-E - m} \\ \frac{-(p_x + ip_y)}{-E - m} \\ \frac{1}{0} \\ 0 \end{pmatrix} = -N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E + m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E + m} \\ \frac{1}{0} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $E \geq 0$

(8.111)

Wir bemerken, dass wir die folgenden Spinoren assoziiert haben:

$$\begin{aligned} v^{(1)} &\Longleftrightarrow u^{(4)} & \text{d.h., fuer } p_x = p_y = 0 & \text{ spin - down} \\ v^{(2)} &\Longleftrightarrow u^{(3)} & & \text{ spin - up} \end{aligned} \quad (8.112)$$

d.h., wir ändern den Impuls und den Spin des Teilchens. Als Folge wird die Helizität des Teilchens erhalten:

$$p^\mu \Longleftrightarrow -p^\mu, \quad \text{und} \quad \Sigma \Longleftrightarrow -\Sigma, \quad \text{aber} \quad h \Longleftrightarrow h \quad (8.113)$$

Die Dirac-Gleichung für die $v^{(1)}, v^{(2)}$ Spinoren ist die folgende:

$$(\gamma^\mu(-p_\mu) - m) u(-\vec{p}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \\ (\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0 \end{cases} \quad (8.114)$$

Der adjungierte Spinor:

$$\begin{cases} (\not{p}' - m)u = 0 \\ (\not{p}' + m)v = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{u}(\not{p}' - m) = 0 \\ \bar{v}(\not{p}' + m) = 0 \end{cases} \quad (8.115)$$

Die Normierung:

$$\begin{cases} \bar{u}^{(r)} u^{(s)} = 2m \delta_{r,s} & (u^\dagger(r) u^{(s)} = 2E \delta_{r,s}) \\ \bar{v}^{(r)} v^{(s)} = -2m \delta_{r,s} & \end{cases} \quad (8.116)$$

Von jetzt an werden wir die folgenden Spinoren benutzen:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(E, \vec{p}), u^{(2)}(E, \vec{p}) &\Rightarrow e^- \\ v^{(1)}(E, \vec{p}), v^{(2)}(E, \vec{p}) &\Rightarrow e^+ \end{aligned} \quad (8.117)$$

wobei die Energie immer positiv ist.

8.10 Lorentz-Transformationen und bilineare Kovarianten

8.10.1 Lorentz-Transformation des Spinors

Wir betrachten einen Spinor. Obwohl er vier Komponenten besitzt, ist der Spinor kein 4-Vektor. Die Transformation eines Spinors wird so geschrieben:

$$\underbrace{\Psi'}_{\text{bezüglich Beobachter } O'} \equiv S \Psi \quad (8.118)$$

wobei S eine 4×4 Matrix ist. In Björken & Drell wird bewiesen, dass, im Fall dass der Beobachter O' sich relativ zum Beobachter O mit einer Geschwindigkeit β in x -Richtung bewegt, die S -Matrix gleich

$$S = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad a_\pm = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \quad (8.119)$$

ist, wobei γ der Lorentz-Faktor ist. Wir betrachten die folgende Grösse:

$$\Psi^\dagger \Psi = \sum_{i=1}^4 |\Psi_i|^2 \quad (8.120)$$

Bezüglich O' gilt

$$(\Psi^\dagger \Psi)' = (\Psi^\dagger)' (\Psi)' = \Psi^\dagger S^\dagger S \Psi \quad (8.121)$$

Mit Hilfe der Definition von S können wir das Produkt $S^\dagger S$ berechnen:

$$S^\dagger S = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \sigma_1 \\ -\beta \sigma_1 & 1 \end{pmatrix} \neq 1 \quad (8.122)$$

d.h., das Produkt wird unter der Lorentz-Transformation nicht erhalten.

Wir betrachten nun das Produkt

$$\bar{\Psi} \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 - |\Psi_3|^2 - |\Psi_4|^2 \quad (8.123)$$

Die Transformation der Grösse ist

$$(\bar{\Psi} \Psi)' = (\Psi^\dagger)' \gamma^0 \Psi' = \Psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S \Psi \quad (8.124)$$

Man kann mit Hilfe der Definition der Matrizen einfach beweisen, dass

$$S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0 \quad (8.125)$$

Es folgt daraus, dass wir eine skalare Grösse gefunden haben:

$$(\bar{\Psi}\Psi)' = \Psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S \Psi = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi = \bar{\Psi}\Psi \quad (8.126)$$

8.10.2 Raumspiegelung (Parität) des Spinors

Die Raumspiegelung (Parität) wurde definiert als

$$\begin{cases} x^0 = x^0 \\ x^i = -x^i \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (8.127)$$

Man kann beweisen, dass die Raumspiegelung auf einen Spinor so wirkt:

$$\Psi' = P\Psi = \gamma^0 \Psi \quad \text{Raumspiegelung} \quad (8.128)$$

Es folgt daraus,

$$(\bar{\Psi}\Psi)' = (\Psi^\dagger)' \gamma^0 \Psi' = (\Psi^\dagger \gamma^0) \gamma^0 (\gamma^0 \Psi) = \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi = \bar{\Psi}\Psi \quad (8.129)$$

d.h.,

$$\bar{\Psi}\Psi \text{ ist eine Invariante der Parität} \implies \bar{\Psi}\Psi \text{ Skalar} \quad (8.130)$$

8.10.3 Skalar und Pseudoskalar

Wir führen eine neue γ -Matrix ein:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (8.131)$$

Die Algebra dieser Matrix ist die folgende:

$$\begin{aligned} \gamma^5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5 &= 0 & \text{Antikommutation} \\ (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5 & (\gamma^5)^2 = 1 \end{aligned} \quad (8.132)$$

In der Pauli-Dirac Darstellung ist die Matrix gleich

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.133)$$

Pseudoskalar: Wir definieren nun die folgende Grösse (eine C-Zahl)

$$\bar{\Psi}\gamma^5\Psi \quad (8.134)$$

Das Produkt ist invariant unter der Lorentz-Transformation.

Unter der Parität gilt

$$\begin{aligned} P(\bar{\Psi}\gamma^5\Psi) &= (\Psi^\dagger)' \gamma^0 \gamma^5 (\Psi)' = \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \Psi \\ &= \Psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \Psi = -\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \Psi = -(\bar{\Psi}\gamma^5\Psi) \end{aligned} \quad (8.135)$$

Das Produkt wird deshalb als Pseudoskalar bezeichnet, weil sich sein Vorzeichen unter der Parität ändert.

8.10.4 Bilineare Kovarianten

Wir können das Produkt von Spinoren mit einer allgemeinen 4×4 Γ -Matrix betrachten:

$$\bar{\Psi} \underbrace{\Gamma}_{4 \times 4 \text{-Matrix}} \Psi \quad (8.136)$$

Die 4×4 Γ -Matrix besitzt 16 unabhängige Komponenten. Wir können eine beliebige 4×4 Matrix als Funktion von 16 linear unabhängigen Matrizen ausdrücken. Ein solche Basis für die Matrix kann die folgende sein:

$$1, \underbrace{\gamma^\mu}_{4 \text{ Matrizen}}, \gamma^5, \underbrace{\gamma^\mu \gamma^5}_{4 \text{ Matrizen}}, + 6 \text{ Matrizen} \quad (8.137)$$

Die letzten 6-Matrizen werden durch den antisymmetrischen Tensor $\sigma^{\mu\nu}$ ausgedrückt

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad (8.138)$$

Es gibt 6 unabhängige Matrizen, die nicht verschwinden:

$$\sigma^{01}, \sigma^{02}, \sigma^{03}, \sigma^{12}, \sigma^{13}, \sigma^{23} \quad (8.139)$$

Wir können deshalb 16 sogenannte **bilineare Kovarianten** bilden:

$$\begin{array}{ll} \text{Skalar :} & \bar{\Psi}\Psi \quad 1 \\ \text{Pseudoskalar:} & \bar{\Psi}\gamma^5\Psi \quad 1 \\ \text{Vektor :} & \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad 4 \\ \text{Axialvektor :} & \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi \quad 4 \\ \text{Tensor :} & \bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi \quad 6 \end{array} \quad (8.140)$$

Das ist alles. Jede beliebige Grösse der Form $\bar{\Psi}\Gamma\Psi$ kann als Linearkombination dieser "bilinearen Kovarianten" ausgedrückt werden.

8.10.5 Ladungsspiegelung

Diese Operation transformiert den Spinor eines Teilchens in den Spinor des Antiteilchens. Es gilt,

$$\Psi_C \equiv C\Psi = i\gamma^2\Psi^* \quad (8.141)$$

Es gilt,

$$Cu^{(1)} = v^{(1)} \quad \text{und} \quad Cu^{(2)} = v^{(2)} \quad (8.142)$$

8.11 Lagrange-Funktion der Dirac-Gleichung

Wir betrachten ein Spinorfeld ψ und die folgende Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (8.143)$$

Die beiden Spinoren Ψ und $\bar{\Psi}$ werden als zwei unabhängige Felder betrachtet, d.h. wir benutzen zweimal die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\Psi \implies \gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\Psi = 0 \quad \text{ok!} \quad (8.144)$$

und

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Psi} = -m\bar{\Psi} \implies i\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu) - m\bar{\Psi} = 0 \quad \text{ok!} \quad (8.145)$$

8.12 Quantisierung des Dirac-Feldes

Wir betrachten das quantisierte Dirac-Spinorfeld ψ . Ein Spinor besitzt 4-Komponenten.

Lösung: das Feld kann als Linearkombination von 4 unabhängigen Spinoren ausgedrückt werden. Wir benutzen die $u^{(1)}, u^{(2)}, v^{(1)}, v^{(2)}$ Spinoren als Basis:

$$\begin{cases} \Psi \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} (a_s(\vec{p})u^{(s)}(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + b_s^\dagger(\vec{p})v^{(s)}(\vec{p})e^{+ip\cdot x}) \\ \bar{\Psi} \equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} (a_s^\dagger(\vec{p})\bar{u}^{(s)}(\vec{p})e^{+ip\cdot x} + b_s(\vec{p})\bar{v}^{(s)}(\vec{p})e^{-ip\cdot x}) \end{cases} \quad (8.146)$$

wobei wir 4 Operatoren eingeführt haben: $a_s(\vec{p}), a_s^\dagger(\vec{p}), b_s(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{p})$ wobei $s=1,2$ dem Spinzustand entspricht und \vec{p} dem Impulsmodus.

Kommutationsregeln: wir können nicht dieselben Kommutationsregeln wie im Fall des Klein-Gordon-Feldes auferlegen. Die Kommutationsregeln des KG-Feldes führen auf *Bosonen*. Im Fall des Dirac-Feldes sind wir an der Beschreibung von *Fermionen* interessiert. Deshalb werden wir **Antikommutationsregeln** auferlegen. D.h.,

$$\{b, b^\dagger\} = bb^\dagger + b^\dagger b = 1 \quad (8.147)$$

Vakuum: $b|0\rangle=0$; Erste Anregung: $|1\rangle=b^\dagger|0\rangle$

Es gilt,

$$Nb^\dagger|1\rangle = b^\dagger bb^\dagger|1\rangle = b^\dagger(1-b^\dagger b)|1\rangle = b^\dagger(1-N)|1\rangle = 0 \quad ! \quad (8.148)$$

d.h.,

$$b^\dagger|1\rangle = 0 \quad \text{oder} \quad b^\dagger b^\dagger|0\rangle = 0 \quad (8.149)$$

Es gibt nur zwei unabhängige Zustände für einen Modus: $|0\rangle$ und $|1\rangle$. Die Antikommutationsregeln führen auf *Fermionen*. Das *Ausschliessungsprinzip* verhindert alle Zustände ausser $|0\rangle$ oder $|1\rangle$.

Diese Bedingung besagt, dass die Dirac-Spinorfelder durch Antikommutationsregeln quantisiert werden müssen:

$$\begin{cases} \{\Psi_i(\vec{x}, t), \Psi_j^\dagger(\vec{x}', t)\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')\delta_{ij} \\ \text{alle anderen} = 0 \end{cases} \quad (8.150)$$

wobei die Indizes i, j die Komponenten des Spinorsfeldes angeben. Es folgt daraus,

$$\{a_r(\vec{p}), a_s^\dagger(\vec{p}')\} = \{b_r(\vec{p}), b_s^\dagger(\vec{p}')\} = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{r,s} \quad (8.151)$$

Energie-Impuls des Feldes: in ähnlicher Weise wie im Fall des Klein-Gordon-Feldes kann man die Energie- und Impuls-Operatoren des Feldes berechnen. Wir erhalten:

$$H = \int d^3\vec{p} \sum_{s=1,2} E_p \left(\underbrace{a_s^\dagger(\vec{p})a_s(\vec{p})}_{=N_s^a(\vec{p})} + \underbrace{b_s^\dagger(\vec{p})b_s(\vec{p})}_{=N_s^b(\vec{p})} \right) \quad (8.152)$$

wobei $N_s^a(\vec{p})$ und $N_s^b(\vec{p})$ die Teilchenzahl-Operatoren sind für beide Arten von Teilchen mit Spinzustand s und Modus \vec{p} , und

$$\vec{P} = \int d^3\vec{p} \sum_{s=1,2} \vec{p} \left(\underbrace{a_s^\dagger(\vec{p})a_s(\vec{p})}_{=N_s^a(\vec{p})} + \underbrace{b_s^\dagger(\vec{p})b_s(\vec{p})}_{=N_s^b(\vec{p})} \right) \quad (8.153)$$

Physikalische Interpretation: das Dirac-Spinorfeld beschreibt zwei Arten von Teilchen, d.h. z.B. Elektronen und Positronen.

$a^\dagger(\vec{p})$ erzeugt ein *Elektron* mit Energie $+E_p > 0$ und Impuls \vec{p}

$b^\dagger(\vec{p})$ erzeugt ein *Positron* mit Energie $+E_p > 0$ und Impuls \vec{p}

$N_s^a(\vec{p})$ ist gleich der Anzahl (pro $d^3\vec{p}$) von Elektronen und $N_s^b(\vec{p})$ gleich der Anzahl (pro $d^3\vec{p}$) von Positronen.

Der Feldzustand mit einem einzigen Elektron mit Spin s wird so erzeugt:

$$|e^-(\vec{p}, s)\rangle = a_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (8.154)$$

und im Fall eines einzigen Positrons wird der Feldzustand sein:

$$|e^+(\vec{p}, s)\rangle = b_s^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (8.155)$$

Statistik: wegen der Antikommutationsregeln gilt

$$a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})|0\rangle = -a^\dagger(\vec{q})a^\dagger(\vec{p})|0\rangle \quad (8.156)$$

d.h. der Zustand ist antisymmetrisch unter der Vertauschung der Teilchen.

Dirac-Spinorfelder beschreiben Teilchen, die der Fermi-Dirac-Statistik folgen.

Im Allgemeinen kann man zeigen, dass die Bedingung, dass die Energie des Teilchens immer positiv definiert wird, die Antikommutationsregeln *erzwingen*. Dieses Ergebnis ist ein Teil des allgemeinen **Spin-Statistik-Theorems (Pauli, 1940)**, das voraussagt:

Spin-Statistik-Theorem: Lorentz-Invarianz, positive Energien, positiv definierte Wahrscheinlichkeiten und Kausalität zwingen Teilchen mit ganzzahligem Spin Bosonen zu sein, und Teilchen mit halb-zahligem Spin Fermionen.

Kapitel 9

Die Elektrodynamik und das Photon

Wir sind an der Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Elektronen, Positronen und dem Photon interessiert. Wir beginnen mit der "klassischen" Theorie des Elektromagnetismus.

9.1 Klassische Maxwellsche Theorie

9.1.1 Das elektromagnetische 4-Potential

Die Maxwellsche Theorie kann als eine **klassische Feldtheorie** dargestellt werden, die mit der Relativitätstheorie übereinstimmt. Wir verwenden die Heavyside-Lorentz Einheiten, für die gilt

$$c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1 \quad (9.1)$$

Die Maxwellschen Gleichungen lauten damit:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho & \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J} & \text{inhomogene} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 & \text{homogene} \end{cases} \quad (9.2)$$

wobei \vec{E} , \vec{B} die elektrischen und magnetischen Felder sind, und ρ , \vec{J} die elektrische Ladungsdichte und die Stromdichte.

Wir definieren das (kontravariante) **elektromagnetische 4-Potential**

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A}) \quad (9.3)$$

wobei die Felder ϕ und \vec{A} folgendermassen mit \vec{E} , \vec{B} zusammenhängen:

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} \equiv -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9.4)$$

Die Potentiale sind Lösungen der homogenen Maxwellschen Gleichungen:

$$\vec{B} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{A} \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad \text{ok!} \quad (9.5)$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \implies \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \implies \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi \quad (9.6)$$

Wir führen den **antisymmetrischen elektromagnetischen Feldtensor** ein:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (9.7)$$

Mit dieser Definition können die *inhomogenen* Maxwellschen Gleichungen ausgedrückt werden als

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{wobei} \quad J^\nu \equiv (\rho, \vec{J}) \quad (9.8)$$

Der 4-Vektor J^ν ist der **elektrische Ladungs-Strom-4-Vektor**. In dieser Form ist die Kovarianz der Maxwellschen Theorie explizit! Man kann leicht beweisen, dass der elektromagnetische Feldtensor gleich

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

ist. Der Tensor transformiert sich unter der Lorentz-Transformation wie:

$$(F^{\mu\nu})' = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (9.10)$$

Der Tensor enthält beide, elektrische und magnetische, Felder. Eine Lorentz-Transformation wird deshalb, wie erwartet, die elektrischen und magnetischen Felder mischen.

Die physikalische Grösse: wir betrachten den 4-Potentialvektor A^μ als die *fundamentale physikalische Grösse*. Die elektromagnetischen Felder \vec{E} und \vec{B} können aus A^μ hergeleitet werden. Wenn wir den 4-Potentialvektor A^μ verwenden, sind die homogenen Maxwellschen Gleichungen automatisch erfüllt, und die ganze Theorie wird in einer Vektorgleichung zusammengefasst:

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = J^\nu \quad \text{wobei} \quad J^\nu \equiv (\rho, \vec{J}) \quad (9.11)$$

Der ganze Elektromagnetismus kann daher als die Feldtheorie des Vektorfelds A^μ zusammengefasst werden.

9.1.2 Das Problem der Eichtransformation

Es gibt aber ein Problem: der 4-Potentialvektor A^μ ist nicht eindeutig definiert. Unter der **Eichtransformation**

$$\begin{aligned} A^\mu &\rightarrow A^\mu + \partial^\mu \lambda \\ &\rightarrow \left(\phi + \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \vec{A} - \vec{\nabla} \lambda\right) \end{aligned} \quad (9.12)$$

wird der elektromagnetische Feldtensor nicht geändert, wobei $\lambda = \lambda(x^\mu)$ eine beliebige skalare Funktion des Raumzeitvektors ist.

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu \lambda) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu \lambda) = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (9.13)$$

Wir können diesen Freiheitsgrad, der keinen Effekt auf die \vec{E} - und \vec{B} -Felder hat, dazu benutzen, um eine zusätzliche Bedingung zu stellen:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad \text{Lorentz-Bedingung} \quad (9.14)$$

Man spricht vom **Festlegen der Eichung** ("gauge fixing"). Die Maxwell'schen Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\partial_\mu \partial^\nu A^\mu}_{=0} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu \quad (9.15)$$

oder

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu \quad \text{Maxwell'sche Gleichung in Lorentz-Bedingung} \quad (9.16)$$

Strahlungs- (oder Coulomb-) Eichung: Aus der Lorentz-Bedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ folgt

$$\partial_\mu \partial^\mu \lambda = 0 \quad (9.17)$$

d.h., die möglichen Eichfunktionen werden eingeschränkt. Dies legt das Potential immer noch nicht eindeutig fest. Tatsächlich gibt es keinen sauberen Weg diese Ambiguität aufzulösen.

Im Fall des Vakuums ($J^\nu = 0$) stellt man oft eine zusätzliche Bedingung:

Im Vakuum:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \text{ und wir setzen } A^0 \equiv 0 \quad (9.18)$$

Es folgt,

$$A^0 \equiv 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \text{Coulomb-Eichung} \quad (9.19)$$

Diese Bedingung ist nicht kovariant und kann deshalb nicht unabhängig vom Beobachter definiert werden. Die physikalische Bedeutung ist aber klar, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden.

9.2 Vektorfelder

Ein Vektorfeld trägt einen Lorentz-Index und wird durch seine Transformationseigenschaft unter einer Lorentz-Transformation charakterisiert (Siehe Kap. 7.2.2):

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x') \quad (9.20)$$

Für eine infinitesimale Lorentz-Transformation (Siehe Kap. 4.6.5 und 7.2.3) gilt:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu = (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) x^\nu \quad \text{und} \quad x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu x'^\nu = (\delta^\mu_\nu - \omega^\mu_\nu) x'^\nu \quad (9.21)$$

In erster Ordnung erhalten wir für das Feld:

$$\begin{aligned} A'^\mu(x) &= \Lambda^\mu_\nu A^\nu((\Lambda^{-1})^\alpha_\beta x^\beta) \\ &\approx (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) A^\nu((\delta^\alpha_\beta - \omega^\alpha_\beta) x^\beta) \\ &\approx (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) [A^\nu(x) - \omega^\alpha_\beta x^\beta \partial_\alpha A^\nu(x)] \\ &= (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) [A^\nu(x) - \omega^{\alpha\beta} x_\beta \partial_\alpha A^\nu(x)] \end{aligned} \quad (9.22)$$

Es gilt für den zweiten Term in der eckigen Klammer (Siehe Kap. 7.2.3):

$$\begin{aligned} (\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu) &= \frac{1}{2} (\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu) \\ &= \frac{1}{2} (\omega^{\mu\nu} x_\nu \partial_\mu - \omega^{\mu\nu} x_\mu \partial_\nu) \\ &= -\frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \equiv \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (9.23)$$

wobei der Drehimpuls-Tensor gleich

$$L_{\mu\nu} \equiv i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \quad (9.24)$$

ist. In ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) &= \delta^\mu_\nu + \omega^{\alpha\beta} \delta^\mu_\alpha g_{\beta\nu} \\ &= \delta^\mu_\nu + \frac{1}{2} (\omega^{\alpha\beta} \delta^\mu_\alpha g_{\beta\nu} - \omega^{\alpha\beta} \delta^\mu_\beta g_{\alpha\nu}) \\ &= \delta^\mu_\nu - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} i (\delta^\mu_\alpha g_{\beta\nu} - \delta^\mu_\beta g_{\alpha\nu}) \equiv \delta^\mu_\nu - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (\Sigma_{\alpha\beta})^\mu_\nu \end{aligned} \quad (9.25)$$

wobei wir den antisymmetrischen Operator Σ eingeführt haben. Es gilt:

$$\begin{aligned} A'^\mu(x) &\approx (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) [A^\nu(x) - \omega^{\alpha\beta} x_\beta \partial_\alpha A^\nu(x)] \\ &\approx (\delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu) \left[A^\nu(x) - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} A^\nu(x) \right] \\ &\approx \left(\delta^\mu_\nu - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (\Sigma_{\alpha\beta})^\mu_\nu \right) \left[A^\nu(x) - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} A^\nu(x) \right] \\ &\approx A^\mu(x) - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} A^\mu(x) - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (\Sigma_{\alpha\beta})^\mu_\nu A^\nu(x) \end{aligned} \quad (9.26)$$

d.h. die Transformation des Felds enthält zwei Teile: der erste entspricht, wie im Fall des skalaren Felds (Siehe Kap. 7.2.3) dem Drehimpuls des Felds. Der zweite entspricht einem internen Freiheitsgrad, nämlich dem Spin. Der gesamte Drehimpuls-Tensor wird definiert als

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta} A^\mu(x) &\equiv L_{\alpha\beta} A^\mu(x) + (\Sigma_{\alpha\beta})^\mu_\nu A^\nu(x) \\ &= (L_{\alpha\beta} + \Sigma_{\alpha\beta}) A^\mu(x) \quad (\text{Notation}) \end{aligned} \quad (9.27)$$

Damit gilt:

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} A^\mu(x) \quad (9.28)$$

Diese letzte Gleichung beschreibt die gesamte Änderung des Vektorfelds unter der Lorentz-Transformation. Beim Vergleich mit den allgemeinen Resultaten des Kap. 4.6.5 interpretieren wir den *J-Tensor-Operator* als die Darstellung der Generatoren der Gruppe. Der gesamte Drehimpuls ist durch die rein räumlichen Komponenten dieses Tensors gegeben. Man kann zeigen, dass dieser intrinsische Drehimpuls einem Spin $S=1$ entspricht. Es folgt:

Vektorfelder beschreiben Teilchen mit Spin 1.

9.3 Das Photon

Das Photon ist ein elementares Boson. Es ist schwierig zu sagen, wer das Photon entdeckt hat.

Planck (1900) *Elektromagnetische Strahlung von schwarzen Körpern*

Die elektromagnetische Strahlung, die Körper emittieren, ist quantisiert und die Beziehung zwischen Frequenz und Energie ist:

$$E = h\nu \quad h \equiv \text{Plancksche Konstante} \quad (9.29)$$

Einstein (1905) Quantisierung ist eine Eigenschaft der elektromagnetischen Strahlung. Erklärt den photoelektrischen Effekt.

Compton (1923) Lichtquant wird als Teilchen mit verschwindender Masse behandelt. Energie-Impuls-Erhaltung wird verwendet.

$$\text{Photon } \gamma \equiv \text{elementares Teilchen} \quad (9.30)$$

9.3.1 Quantenelektromagnetismus

Das Potential A^μ wird zur *Wellenfunktion des Photons*.

Freies Photon: ($J^\nu=0$)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \quad \text{Maxwellsches freies Photon} \quad (9.31)$$

Wir erkennen die Klein-Gordon Gleichung (Siehe Kap. 7.2) für ein masseloses Teilchen!

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x^\mu) = 0 \quad \xrightarrow{m=0} \quad \partial^\mu \partial_\mu \phi(x^\mu) = 0 \quad (9.32)$$

Die Maxwellsche Gleichung besitzt aber vier Komponenten. Jede Komponente des Potentials A^μ erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung. Für ein freies Photon nehmen wir an:

Ansatz: ebene Welle mit vierkomponentigem Polarisationsvektor

$$A^\mu(x) = a e^{-ip \cdot x} \epsilon^\mu(p) \quad (9.33)$$

wobei ϵ^μ der Polarisations-4-Vektor ist (der nur vom 4-Impuls abhängt).

Der Polarisationsvektor hat eine Beziehung zum Spin des Photons. Es gilt für die ebene Welle:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0 \implies (-i)^2 p_\mu p^\mu A^\nu = 0 \implies p^\mu p_\mu = p^2 = 0 \quad (9.34)$$

Es folgt (wie erwartet), $m = 0$ und $E = |\vec{p}|$.

9.3.2 Polarisation des Photons

Wir betonen, dass ϵ^μ a priori 4 voneinander unabhängige Komponenten besitzt. Wir wenden die Eich-Bedingungen an.

Lorentz-Bedingung:

$$\partial_\mu A^\mu = (-ip_\mu) a e^{-ip \cdot x} \epsilon^\mu(p) = 0 \quad (9.35)$$

$$\implies p_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (9.36)$$

Die Anzahl von unabhängigen Komponenten des Polarisationsvektors reduziert sich auf drei.

Coulomb-Eichung: $A^0 = 0, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.

Es folgt,

$$\epsilon^0 = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0 \quad (9.37)$$

Der Polarisationsvektor $\vec{\epsilon}$ ist zur Ausbreitungsrichtung senkrecht. *Das freie Photon ist transversal polarisiert in der Coulombschen Eichung.*

Beispiel: $\vec{p} // z$ -Achse

Wir wählen als Basis die zwei unabhängigen Zustände

$$\begin{cases} \epsilon_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0) \equiv (0, \vec{\epsilon}_1) \\ \epsilon_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0) \equiv (0, \vec{\epsilon}_2) \end{cases} \quad (9.38)$$

Von den ursprünglichen 4 unabhängigen Komponenten bleiben schliesslich nur zwei übrig:

Die Vektoren $\epsilon^{\mu}_{(1)}$ und $\epsilon^{\mu}_{(2)}$ entsprechen den transversalen linearen Polarisationen des Felds. Durch Überlagerung zweier um 90° phasenverschobenen linear polarisierten Wellen, können links- oder rechts-zirkular polarisierte Wellen erzeugt werden, die mit den Spins $m=\pm 1$ assoziiert sind, wobei die Achse der Quantisierung des Spins in die Richtung des Impulses gerichtet wurde.

Daher besitzt das (masselose) Photon nur zwei Helizitäten: der Spin zeigt in die Richtung oder in die entgegengesetzte Richtung des Impulses.

9.3.3 Die zweite Quantisierung des elektromagnetischen Felds

In der Coulombschen Eichung gilt: $A^0 = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

Wir haben damit die Kovarianz verloren, aber das Feld ist daher eindeutig definiert. Eine allgemeine Lösung kann deshalb als eine gewöhnliche Entwicklung in ebenen Wellen ausgedrückt werden:

$$\vec{A}(x) \equiv \underbrace{\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}}}_{\text{Summe ueber alle Moden}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=1}^2 \left(\vec{\epsilon}_\lambda(\vec{p}) a_\lambda(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + \vec{\epsilon}_\lambda^*(\vec{p}) a_\lambda^\dagger(\vec{p}) e^{+ip \cdot x} \right) \quad (9.39)$$

wobei a_λ die Vernichtungs- und a_λ^\dagger die Erzeugungs-Operatoren sind. Wir betonen, dass diese Form von der Eichung abhängt. Das Feld kann im Prinzip mit anderen Eichungen ausgedrückt werden. Schliesslich müssen die messbaren physikalischen Grössen immer unabhängig von der Wahl der Eichung sein!

Folgende allgemeinen Resultate gelten für das quantisierte elektromagnetische Feld:

$$H = \int d^3\vec{p} E_p \sum_{\lambda=1}^2 \left(a_\lambda^\dagger(\vec{p}) a_\lambda(\vec{p}) \right) \quad (9.40)$$

$$\vec{P} = \int d^3\vec{p} \vec{p} \sum_{\lambda=1}^2 \left(a_\lambda^\dagger(\vec{p}) a_\lambda(\vec{p}) \right) \quad (9.41)$$

d.h., die Energie und der Impuls des Zustands mit einem Photon sind gleich:

$$H a_\lambda^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle = E_p a_\lambda^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle \quad \text{und} \quad \vec{P} a_\lambda^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle = \vec{p} a_\lambda^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle \quad (9.42)$$

Daher erzeugt der Operator a_λ^\dagger ein Photon mit Energie E_p , Impuls \vec{p} und Polarisation λ . Der a_λ -Operator vernichtet ein Photon mit Energie E_p , Impuls \vec{p} und Polarisation λ .

9.4 Massive Vektorfelder

Wir wissen, dass das Photon ein masseloses Teilchen ist. Der Elektromagnetismus entspricht daher einer Theorie eines masselosen Vektorfelds. Im Allgemeinen kann man natürlich auch massive Vektorfelder betrachten. Wenn wir freie Felder betrachten, dann ist es sinnvoll anzunehmen, dass das massive Feld durch ein 4-Vektor-Feld beschrieben werden kann, wobei jede Komponente des Felds die Klein-Gordon-Gleichung mit Masse m erfüllt:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) A^\nu(x) = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, 3) \quad (9.43)$$

mit der Lorentz-Bedingung:

$$\partial_\nu A^\nu(x) = 0 \quad (9.44)$$

Die (explizit kovariante) Lorentz-Bedingung reduziert die Anzahl von unabhängigen Komponenten auf drei. Die Zahl entspricht genau der Anzahl von physikalisch unabhängigen Spinfreiheitsgraden eines Teilchens mit Spin 1.

Für ein freies Feld können wir eine ebene Welle als Ansatz annehmen: $A^\mu(x) = a e^{-ip \cdot x} \epsilon^\mu(p)$. Durch Einsetzen in die Klein-Gordon-Gleichung erhalten wir die folgende Bedingung für den Energie-Impuls-4-Vektor:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) A^\nu = 0 \implies (-i)^2 p_\mu p^\mu A^\nu + m^2 A^\nu = 0 \implies p^2 = m^2 \quad (9.45)$$

Die Lorentz-Bedingung beschränkt die möglichen Polarisationen:

$$\partial_\mu A^\mu = (-ip_\mu) a e^{-ip \cdot x} \epsilon^\mu(p) = 0 \implies p_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (9.46)$$

Man erhält daher drei unabhängige Polarisationen. Wenn der Impuls z.B. parallel zur z-Achse ist, dann ist eine mögliche Wahl die folgende:

$$\begin{cases} \epsilon_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0) \\ \epsilon_{(3)}^\mu = \frac{1}{m}(p, 0, 0, E_p) \end{cases} \quad \text{wobei} \quad E_p = \sqrt{p^2 + m^2} \quad (9.47)$$

Die Basisvektoren sind reell, raum-artig und haben eine Normierung gleich -1. Im Schwerpunktsystem des Teilchens sind die Vektoren gleich:

$$\begin{cases} \epsilon_{(1)}^\mu = (0, 1, 0, 0) \\ \epsilon_{(2)}^\mu = (0, 0, 1, 0) \\ \epsilon_{(3)}^\mu = (0, 0, 0, 1) \end{cases} \quad (\text{im SP}) \quad (9.48)$$

d.h., sie beschreiben drei Polarisationen in die x -, y - und z -Richtungen. Wie im Fall des elektromagnetischen Felds entsprechen $\epsilon^{\mu}_{(1)}$ und $\epsilon^{\mu}_{(2)}$ den transversalen Polarisationen des Felds. Der dritte Vektor $\epsilon^{\mu}_{(3)}$ entspricht einer longitudinalen Polarisation, die nicht erlaubt wäre, wenn das Teilchen, wie das Photon, masselos wäre.

Natürlich ist auch eine andere Wahl der Basisvektoren möglich. Die Polarisationsvektoren können in bestimmten Fällen komplizierter aber praktischer sein. Schliesslich müssen die messbaren physikalischen Grössen immer unabhängig von der Wahl der Polarisationsbasis (oder der Eichung!) sein.

Wir vergleichen dieses Ergebnis mit dem Fall des elektromagnetischen Felds (Siehe Kap. 9.3.2).

Die Wahlfreiheit bei der Eichung erlaubt die Lorentz-Eichung zu fordern. Im Allgemeinen liefert die Bedingung eine zusätzliche Gleichung, die die Anzahl von unabhängigen Komponenten des Felds von vier auf drei reduziert. Das massive Feld besitzt daher drei unabhängige Polarisationsrichtungen.

Im Fall des elektromagnetischen Felds verlangte das Festlegen der Eichung zwei Bedingungen: die Lorentz- und die Coulomb-Bedingung. Daher besitzt das Photon nur zwei unabhängige Polarisationsrichtungen.

9.5 Lagrange-Formalismus der Elektrodynamik

9.5.1 Der Elektromagnetismus

Wir suchen nun die Lagrange-Dichte, die die Maxwellschen Gleichungen liefert.

Die L -Dichte muss Lorentz- und eichinvariant sein, so dass die Theorie auch Lorentz- und eichinvariant sein wird.

a) Masseloses freies Feld:

$$\mathcal{L}_{frei} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad \text{Proca-Lagrange-Funktion} \quad (9.49)$$

Die Lagrange-Dichte ist Lorentz- und eichinvariant.

Wir nehmen das Potential A^μ als *fundamentales* Feld. Es gilt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \left[-\frac{1}{4}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \right] \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} [(2\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta - 2\partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha)] \\ &= -\frac{1}{4} 2 \left[\frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} (\partial_\alpha A_\beta \partial^\alpha A^\beta) - \frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} (\partial_\alpha A_\beta \partial^\beta A^\alpha) \right] \\ &= -\frac{1}{4} 2 [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu] = -(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (9.50) \end{aligned}$$

Es folgt,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial A^\nu} = 0 \quad (9.51)$$

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung (Siehe Kap. 6.2) erhalten wir:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial A^\nu} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{frei}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \right) = 0 \implies \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ok!} \quad (9.52)$$

b) Masseloses Feld mit Quelle:

Wir addieren einen Term, der das Feld mit der Quelle J^μ koppelt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{frei} + \mathcal{L}_{Quelle} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \quad (9.53)$$

Wir erhalten,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Quelle}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{Quelle}}{\partial A^\nu} = -J_\nu \quad (9.54)$$

und es folgt aus der Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = J_\nu \quad \text{ok!} \quad (9.55)$$

D.h., die ganze Maxwellsche elektromagnetische Theorie kann in der folgenden Lagrange-Funktion zusammengefasst werden:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu \quad (9.56)$$

Wir bemerken, dass die Kontinuitätsgleichung auch folgt, weil:

$$\partial F^{\mu\nu} = J_\nu \implies \partial^\nu J_\nu = \underbrace{\partial^\nu \partial^\mu}_{\text{symmetrisch}} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\text{antisymmetrisch}} = 0 \quad ! \quad (9.57)$$

9.5.2 Teilchen im elektromagnetischen Feld

In der klassischen Elektrodynamik kann die Bewegung eines geladenen Teilchens der Ladung e in einem elektromagnetischen Potential durch die kanonische minimale Substitution des Impulses und der Energie

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A} \quad \text{und} \quad E \rightarrow E - e\phi \quad (9.58)$$

in der Lagrange-Funktion gewonnen werden. Wir können diese Methode erweitern zu

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \quad (9.59)$$

oder als Ersatz des Operators

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu - eA^\mu \quad (9.60)$$

Die minimale Substitution legt nahe, dass die Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes so

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \Psi = 0 \quad \text{Dirac-Gleichung mit äusserem Feld} \quad (9.61)$$

erweitert werden muss.

Wir können deshalb die **gesamte Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik (QED)** bauen (Siehe Kap. 6.3 und 9.5) als

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{Wechselwirkung} \\ &= \bar{\Psi} [\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \\ &= \underbrace{\bar{\Psi} [\gamma^\mu i\partial_\mu - m] \Psi}_{\text{freies Dirac-Feld}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{freies e.m. Feld}} - \underbrace{(J^\mu + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) A_\mu}_{\text{Quellen und WW zwischen Dirac und e.m.-Feld}}\end{aligned}\tag{9.62}$$

Wenn wir das Potential A^μ variieren, erhalten wir die Maxwellschen Gleichungen mit der folgenden Ladungs-Strom-Dichte

$$\begin{aligned}\partial^\mu F_{\mu\nu} &= J_\nu + e\bar{\Psi}\gamma_\nu\Psi \\ &= J_\nu + ej_\nu \quad \text{wobei } j^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^\mu\Psi\end{aligned}\tag{9.63}$$

wobei wir den *Dichtestrom-4-Vektor der Dirac-Gleichung* j^μ (Siehe Kap. 8.4) erkennen. Der Strom J_ν beschreibt eventuell vorhandene makroskopische Ströme. Diese Gleichung definiert den Ausdruck der elektromagnetischen Wechselwirkung eines Dirac-Teilchens als das Produkt der Ladung e und der bilinearen Kovarianten (Siehe Kap. 9.4.4) der Vektor-Form mit dem Vektorpotential A_μ :

$$\underbrace{e}_{\text{Staerke zur Ladung proportional}} \times \underbrace{(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)}_{\text{Form des Stroms:Vektor}} \times A_\mu\tag{9.64}$$

Kapitel 10

Wechselwirkungen und die Propagatortheorie

10.1 Wechselwirkungsmodell

10.1.1 Der Zeitentwicklungsoperator

Bis jetzt haben wir nur *freie* Klein-Gordon- oder Dirac-Teilchen betrachtet. Wie führen wir Wechselwirkungen ein? Im Allgemeinen wird die Lagrange-Dichte des Systems zwei Terme enthalten: der erste Term beschreibt die freien Felder und der zweite ihre Wechselwirkungen:

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W \quad (10.1)$$

Als Folge wird der Hamilton-Operator als Summe von zwei Termen ausgedrückt:

$$H = H_0 + H_W \quad (10.2)$$

wobei H_W die Wechselwirkung darstellt.

Die Hamiltondichte ist gleich

$$\mathcal{H}_W = \frac{\partial \mathcal{L}_W}{\partial(\partial^0 \phi)} (\partial^0 \phi) - \mathcal{L}_W = -\mathcal{L}_W \quad (10.3)$$

wenn die Lagrangedichte des Wechselwirkungsterms unabhängig von der Ableitung des Feldes ist. In diesem Fall spricht man von einer **direkten Kopplung** ("direct or nonderivative coupling").

Man benutzt die sogenannte **Heisenberg-Darstellung der Operatoren**, um die Zeitentwicklung des Feldes auszudrücken:

$$\phi(x^\mu) = e^{iH(t-t_0)} \phi(\vec{x}, t_0) e^{-iH(t-t_0)} \quad (10.4)$$

Wir können die Zeitentwicklung in zwei Terme aufteilen, und nur die Zeitentwicklung des H_0 -Operators betrachten. Wir definieren das Feld im Wechselwirkungs-Bild:

$$\phi_I(x^\mu) = e^{iH_0(t-t_0)} \phi(\vec{x}, t_0) e^{-iH_0(t-t_0)} \quad (10.5)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= e^{iH(t-t_0)} \phi(\vec{x}, t_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_0(t-t_0)} \phi_I(\vec{x}, t) e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \\ &= U^\dagger(t, t_0) \phi_I(\vec{x}, t) U(t, t_0) \end{aligned} \quad (10.6)$$

wobei

$$U(t, t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)} \quad (10.7)$$

der **Zeitentwicklungsoperator** ist. Wir bemerken, dass die zeitliche Ableitung des Operators gleich

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) &= e^{iH_0(t-t_0)} (H - H_0) e^{-iH(t-t_0)} \\ &= \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} (H_W) e^{-iH_0(t-t_0)}}_{=H_W(t)} \underbrace{e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}}_{=U(t, t_0)} \end{aligned} \quad (10.8)$$

ist, wobei $H_W(t)$ der (zeitabhängige) **Wechselwirkungsoperator im Wechselwirkungs-Bild** ist.

Wir können diese Differentialgleichung lösen:

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H_W(t) U(t, t_0) \quad \text{und} \quad U(t_0, t_0) = 1 \quad (10.9)$$

Die formale Lösung ist gleich

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_W(t_1) U(t_1, t_0) \quad (10.10)$$

Wir können diese Integration *iterativ* berechnen:

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_W(t_1) U(t_1, t_0) \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt_1 H_W(t_1) \left(1 - i \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_W(t_2) U(t_2, t_0) \right) \\ &= 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_W(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_W(t_1) H_W(t_2) + \dots \\ &\quad + (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H_W(t_1) \dots H_W(t_n) + \dots \end{aligned} \quad (10.11)$$

Wir bemerken, dass

$$\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_W(t_1) H_W(t_2) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 T [H_W(t_1) H_W(t_2)] \quad (10.12)$$

wobei T der **zeitordnende Dyson-Operator**¹ ist. Siehe Abb. 10.1.

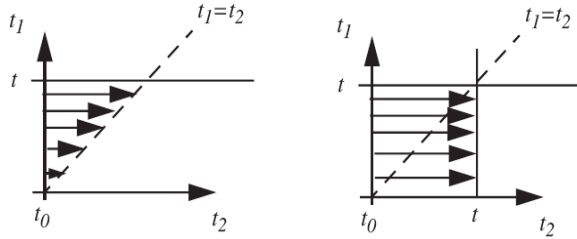


Abbildung 10.1: Transformation der Zeitintegration.

Wenn wir alle Terme in ähnlicher Weise anordnen, erhalten wir

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n T [H_W(t_1) \dots H_W(t_n)] \quad (10.13)$$

$$= T \left[e^{-i \int_{t_0}^t dt H_W(t)} \right]$$

Die Entwicklung wird dann definiert als Taylor-Reihe von zeitgeordneten Termen! In der Praxis werden wir nur die ersten Terme der Reihe berechnen (Siehe Kap. 10.4).

10.1.2 Übergangsamplitude: die S-Matrix

In der Störungstheorie (Siehe Kap. 3.3) haben wir die Übergangsamplitude zwischen Zuständen betrachtet. Um die Anordnung zu beschreiben, die wir in der Praxis treffen, haben wir die Übergangsamplitude zwischen $-T/2 \rightarrow \infty$ und $T/2 \rightarrow +\infty$ angenommen. Hier sind wir am Zeitentwicklungsoperator zwischen $-\infty$ und $+\infty$ interessiert.

¹Der zeitordnende Dyson-Operator wird definiert als: $T[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2), & \text{falls } t_1 \geq t_2 \\ B(t_2)A(t_1), & \text{falls } t_1 \leq t_2 \end{cases}$

Die S-Matrix wird definiert als

$$S \equiv U(-\infty, +\infty) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T [H_W(t_1) \dots H_W(t_n)] \quad (10.14)$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T [\mathcal{H}_W(t_1) \dots \mathcal{H}_W(t_n)]$$

wobei \mathcal{H}_W die *Hamiltontichte des Wechselwirkungsterms* ist. Die S-Matrix kann als eine Reihe von Termen dargestellt werden:

$$S \equiv 1 + S_1 + S_2 + \dots \quad (10.15)$$

wobei der n-te Term gleich

$$S_n = \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots \int d^4x_n T [\mathcal{H}_W(t_1) \dots \mathcal{H}_W(t_n)] \quad (10.16)$$

ist. Jeder Term kann im Prinzip berechnet werden, und die gesamte Amplitude wird dann als die Summe dieser Terme gewonnen.

10.2 Einfacher Prozess: lokale Wechselwirkung

Die einfachste Form der Wechselwirkung ist lokal, d.h. die Terme, die die Wechselwirkung beschreiben, werden im selben Punkt der Raumzeit angenommen. Wenn keine Ableitungen der Felder im Wechselwirkungsterm erscheinen, heisst die Wechselwirkung *direkt* ("direct or nonderivative", Siehe Kap. 10.1.1).

Als Beispiel bauen wir ein einfaches Modell mit einem reellen skalaren Feld $\sigma(x)$ der Masse M und drei reellen skalaren Feldern $\phi_a(x)$, $a=1,2,3$ der Massen m . Die Felder $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ werden kombiniert, um ein komplexwertiges Feld aufzubauen (Siehe Kap. 7.6):

$$\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \quad (10.17)$$

Dieses Feld beschreibt geladene Teilchen, z.B. π^+ und π^- . Das Feld $\phi(x)=\phi_3(x)$ beschreibt ein neutrales Teilchen, z.B. π^0 . In Abwesenheit einer Wechselwirkung wird das freie System durch die folgende Lagrange-Dichte beschrieben (Siehe Kap. 7.3):

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M^2 \sigma^2 + \sum_a \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_a) (\partial^\mu \phi_a) - \frac{1}{2} m^2 \phi_a^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} M^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + (\partial_\mu \varphi^\dagger) (\partial^\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi \quad (10.18)$$

10.2.1 Neutraler Zerfall

Wir betrachten die Reaktion: $\sigma \rightarrow \pi^0 \pi^0$.

Eine lokale, direkte Kopplung wird eingeführt, wenn man Produkte von Feldern betrachtet. Man kann z.B. folgende Terme annehmen:

$$\phi^4, \sigma\phi^3, \sigma^2\phi^2, \sigma^3\phi, \sigma^4, \phi^3, \sigma\phi^2, \sigma^2\phi, \text{ oder } \sigma^3 \quad (10.19)$$

Diese Terme sind Lorentz-invariant. Die Stärke der Kopplung wird durch eine **Kopplungskonstante** definiert. Durch eine Dimensionsanalyse sieht man, dass Terme wie ϕ^4 eine dimensionslose Kopplungskonstante haben, weil Terme wie ϕ^3 eine Kopplungskonstante mit der Dimension einer Energie (Masse) haben:

$$g\phi^4, g'\sigma\phi^3, g''\sigma^2\phi^2, \dots, \lambda\phi^3, \lambda'\sigma\phi^2, \lambda''\sigma^2\phi, \dots \quad (10.20)$$

Um das Problem zu vereinfachen, können wir bestimmte Eigenschaften unter gewissen Symmetrien betrachten. Natürlich muss die Lagrange-Dichte immer Lorentz-invariant sein. Man kann dazu z.B. auch die Parität (Raumspiegelung, Siehe Kap. 4.4) betrachten:

$$\begin{cases} x^0 = x^0 \\ x^i = -x^i \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (10.21)$$

Wir nehmen an, dass das Feld $\sigma(x)$ *skalar* unter der Parität ist, und dass das Feld $\phi(x)$ ein *Pseudoskalar* (der Parität) ist. Es gilt daher:

$$P: \begin{cases} \sigma(t, \vec{x}) \rightarrow \sigma(t, -\vec{x}) = +\sigma(t, \vec{x}) \\ \phi(t, \vec{x}) \rightarrow \phi(t, -\vec{x}) = -\phi(t, \vec{x}) \end{cases} \quad (10.22)$$

Wir bemerken:

Die freie Lagrange-Dichte ist invariant unter der Parität. Wenn das wechselwirkende System diese Eigenschaft erhalten muss, dürfen die Kopplungen nur gerade Potenzen von ϕ enthalten. Für das Feld σ gibt es keine spezielle Bedingung.

Daher hat die Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte die folgende allgemeine Form:

$$\mathcal{L}_W = -g\phi^4 - g'\sigma^2\phi^2 - g''\sigma^4 - \lambda\sigma\phi^2 - \lambda'\sigma^3 \quad (10.23)$$

Weil es keine Ableitungen der Felder in den Kopplungen gibt, gilt:

$$\mathcal{H}_W = -\mathcal{L}_W = g\phi^4 + g'\sigma^2\phi^2 + g''\sigma^4 + \lambda\sigma\phi^2 + \lambda'\sigma^3 \quad (10.24)$$

Die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_0 beschreibt das freie System und die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_W entspricht der Störung des Systems. Wir nehmen nun an, dass die Felder quantisiert werden. Wir schreiben (Siehe Kap. 7.5):

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &\equiv \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{+ip \cdot x}) \\ \sigma(\vec{x}, t) &\equiv \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_k}} (c(\vec{k})e^{-ik \cdot x} + c^\dagger(\vec{k})e^{+ik \cdot x}) \end{aligned} \quad (10.25)$$

mit Kommutationsregeln

$$\begin{cases} [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \equiv \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') & [a(\vec{p}), a(\vec{p}')] = [a^\dagger(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \equiv 0 \\ [c(\vec{p}), c^\dagger(\vec{p}')] \equiv \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') & [c(\vec{p}), c(\vec{p}')] = [c^\dagger(\vec{p}), c^\dagger(\vec{p}')] \equiv 0 \\ [a(\vec{p}), c(\vec{p}')] = [a^\dagger(\vec{p}), c^\dagger(\vec{p}')] = [a(\vec{p}), c^\dagger(\vec{p}')] = [a^\dagger(\vec{p}), c(\vec{p}')] = 0 \end{cases} \quad (10.26)$$

Wir müssen nun die Kinematik des Zerfalls einführen:

$$\sigma(k^\mu) \rightarrow \pi^0(q_1^\mu) + \pi^0(q_2^\mu) \quad (10.27)$$

Daher wird der Anfangszustand mit Hilfe des Erzeugungsoperators definiert:

$$\underbrace{|k\rangle}_{\text{Teilchen im Impulseigenzustand } \vec{k}} \equiv \underbrace{\sqrt{(2\pi)^3 2E_k}}_{\text{Normierung}} \underbrace{c^\dagger(\vec{k})}_{\text{erzeugt Teilchen}} \underbrace{|0\rangle}_{\text{Teilchen Vakuum}} \quad (10.28)$$

In ähnlicher Weise ist der Endzustand:

$$|q_1 q_2\rangle \equiv \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_2}} a^\dagger(\vec{q}_1) a^\dagger(\vec{q}_2) |0\rangle \quad (10.29)$$

oder

$$\langle q_1 q_2 | \equiv \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_2}} \langle 0 | a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_2) \quad (10.30)$$

In erster Ordnung ist die Kopplung durch den Term $\lambda\sigma\phi^2$ gegeben. Das entsprechende Element der S-Matrix ist gleich:

$$S_1 = (-i) \langle q_1 q_2 | \int d^4x_1 \lambda \sigma(x_1) \phi^2(x_1) | k \rangle \quad (10.31)$$

oder

$$\begin{aligned} S_1 &= (-i\lambda) \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_2}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_k} \times \\ &\quad \langle 0 | a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_2) \int d^4x_1 \sigma(x_1) \phi^2(x_1) c^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (10.32)$$

Wir betrachten das Matrixelement:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_2) \int d^4x \sigma(x) \phi^2(x) c^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle = \\ &\langle 0 | a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_2) \int d^4x \phi^2(x) \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{k'}}} \left(c(\vec{k}') e^{-ik' \cdot x} + c^\dagger(\vec{k}') e^{+ik' \cdot x} \right) c^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle = \\ &\langle 0 | a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_2) \int d^4x \phi^2(x) \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{k'}}} e^{-ik' \cdot x} c(\vec{k}') c^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (10.33)$$

Es gilt mit Hilfe der Kommutationsregeln:

$$\begin{aligned} \langle 0 | c(\vec{k}') c^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle &= \langle 0 | \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) | 0 \rangle + \langle 0 | c^\dagger(\vec{k}) c(\vec{k}') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (10.34)$$

Daher:

$$\begin{aligned}
& \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2) \int d^4x \sigma(x) \phi^2(x) c^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \\
&= \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2) \int d^4x \phi^2(x) \int \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{k'}}} e^{-ik' \cdot x} \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2) \int d^4x \phi^2(x) e^{-ik \cdot x} | 0 \rangle \quad (10.35)
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann das Feld ϕ eingefügt werden:

$$\begin{aligned}
& \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2) \int d^4x \phi^2(x) e^{-ik \cdot x} | 0 \rangle \\
&= \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2) \int d^4x \left(\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p})e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{+ip \cdot x}) \right)^2 e^{-ik \cdot x} | 0 \rangle \\
&= \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2) \int d^4x \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}} \\
&\quad (a^\dagger(\vec{p}_1)e^{+ip_1 \cdot x}) (a^\dagger(\vec{p}_2)e^{+ip_2 \cdot x}) e^{-ik \cdot x} | 0 \rangle \quad (10.36)
\end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned}
\langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2)a(\vec{p}_1)a(\vec{p}_2) | 0 \rangle &= 0 \\
\langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2)a(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle &= 0 \\
\langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2)a^\dagger(\vec{p}_1)a(\vec{p}_2) | 0 \rangle &= 0 \quad (10.37)
\end{aligned}$$

Wir betrachten den Term:

$$\begin{aligned}
& \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2)a^\dagger(\vec{p}_1)a^\dagger(\vec{p}_2) | 0 \rangle = \\
& \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) + \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) \quad (10.38)
\end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned}
& \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2) \int d^4x \phi^2(x) e^{-ik \cdot x} | 0 \rangle = \\
&= \int d^4x e^{-ik \cdot x} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}} e^{+ip_1 \cdot x} e^{+ip_2 \cdot x} \times \\
&\quad (\delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) + \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_1)) \quad (10.39)
\end{aligned}$$

Nun kann die S-Matrix berechnet werden:

$$\begin{aligned}
S_1 &= (-i\lambda) \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_2}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_k} \times \\
&\quad \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_k}} \langle 0|a(\vec{q}_1)a(\vec{q}_2) \int d^4x \phi^2(x) e^{-ik \cdot x} | 0 \rangle \\
&= (-i\lambda) \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{q_2}} \times \\
&\quad \int d^4x e^{-ik \cdot x} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}} e^{+ip_1 \cdot x} e^{+ip_2 \cdot x} \times \\
&\quad (\delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) + \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_1)) \\
&= (-i\lambda) \sqrt{2E_{q_1}} \sqrt{2E_{q_2}} \times \\
&\quad \int d^4x \int d^3\vec{p}_1 \int d^3\vec{p}_2 \frac{1}{\sqrt{2E_{p_1}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p_2}}} e^{+i(p_1+p_2-k) \cdot x} \times \\
&\quad (\delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) + \delta^3(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^3(\vec{q}_2 - \vec{p}_1)) \\
&= (-i\lambda) \sqrt{2E_{q_1}} \sqrt{2E_{q_2}} \times \\
&\quad \int d^4x \frac{1}{\sqrt{2E_{q_1}}} \frac{1}{\sqrt{2E_{q_2}}} (e^{+i(q_1+q_2-k) \cdot x} + e^{+i(q_2+q_1-k) \cdot x}) \\
&= (-i\lambda) \int d^4x (e^{+i(q_1+q_2-k) \cdot x} + e^{+i(q_2+q_1-k) \cdot x}) \\
&= (-i\lambda) 2(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - k) \quad (10.40)
\end{aligned}$$

Schliesslich haben wir gezeigt:

$$S_1 = (i\mathcal{M})(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - k) = (-2i\lambda)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - k) \quad (10.41)$$

In der Praxis werden wir die Amplitude so ausdrücken (Siehe Kap. 5.3):

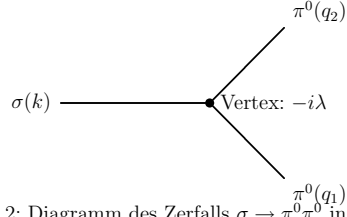
$$Amplitude \equiv -(i\mathcal{M})(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{Anfangszustand} p_i - \sum_{Endzustand} p_f \right) \quad (10.42)$$

d.h. das Matrix-Element des Zerfalls in unserer Theorie ist

$$i\mathcal{M} = 2i\lambda \quad (\sigma \rightarrow \pi^0 \pi^0) \quad (10.43)$$

Graphisch wird dieses Resultat mit Hilfe von sogenannten **Feynman-Diagrammen** dargestellt. Für diese Reaktion ist das entsprechende Diagramm in Abb. 10.2 gezeigt. Das Diagramm enthält einen Vertex, der die Wechselwirkung darstellt, und drei äussere Linien, die das zerfallende Teilchen und die auslaufenden Teilchen (Endzustandsprodukte) darstellen.

Der Vertex wurde mit dem Faktor $-i\lambda$ bezeichnet. Der Faktor 2 kommt aus der Symmetrisierung des Endzustands: die zwei Teilchen sind identische Bosonen


 Abbildung 10.2: Diagramm des Zerfalls $\sigma \rightarrow \pi^0 \pi^0$ in unserer Theorie.

und es gibt zwei Möglichkeiten die Bosonen an den Vertex zu koppeln. Der Symmetrie-Faktor wird im Diagramm nicht dargestellt.

Die Zerfallsrate des σ -Teilchens kann mit den kinematischen Faktoren berechnet werden. Die Formel ist (Siehe Kap. 5.3.2):

$$\begin{aligned} d\Gamma(M \rightarrow 1 + 2) &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_A} S \frac{d^3 \vec{q}_1}{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \frac{d^3 \vec{q}_2}{(2\pi)^3 2E_{q_2}} (2\pi)^4 \delta^4(k - q_1 - q_2) \\ &= \frac{|2i\lambda|^2}{32\pi^2} \frac{1}{2} \frac{q}{M^2} d\Omega \quad \text{wobei} \quad q = \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - 4m^2} \end{aligned} \quad (10.44)$$

wobei wir als statistischen Faktor $S=1/2$ verwendet haben. Die Integration über den Raumwinkel liefert:

$$\begin{aligned} \Gamma(\sigma \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \frac{4\lambda^2}{32\pi^2} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{M^2} 4\pi \\ &= \frac{\lambda^2}{8\pi} \frac{\sqrt{M^2 - 4m^2}}{M^2} \end{aligned} \quad (10.45)$$

10.2.2 Geladener Zerfall

Wir betrachten nun den Zerfall in zwei geladene Teilchen:

$$\sigma(k^\mu) \rightarrow \pi^+(q_1^\mu) + \pi^-(q_2^\mu) \quad (10.46)$$

Wir nehmen an, dass die geladenen Teilchen mit dem σ -Teilchen wie die neutralen koppeln. Der Term, der die Kopplung beschreibt, ist daher:

$$\mathcal{L}_W = -\lambda \sigma(x) (\phi_1^2(x) + \phi_2^2(x)) \dots = -2\lambda \sigma(x) (\varphi^\dagger(x) \varphi(x)) \dots \quad (10.47)$$

Das Feld φ wird so quantisiert (Siehe Kap. 7.6):

$$\begin{cases} \varphi(x) \equiv \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b^\dagger(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}) \\ \varphi^\dagger(x) \equiv \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a^\dagger(\vec{p}) e^{+ip \cdot x} + b(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}) \end{cases} \quad (10.48)$$

Wie im Fall des neutralen Zerfalls kann das Matrixelement berechnet werden. Man findet:

$$\begin{aligned} S_1 &= (-i) \langle q_1 q_2 | \int d^4 x_1 2\lambda \sigma(x_1) \varphi^\dagger(x_1) \varphi(x_1) | \vec{k} \rangle \\ &= (-2i\lambda) \langle 0 | b(\vec{q}_2) a(\vec{q}_1) \int d^4 x \times \\ &\quad \int d^3 \vec{p}_1 (a^\dagger(\vec{p}_1) e^{+ip_1 \cdot x}) \int d^3 \vec{p}_2 (b^\dagger(\vec{p}_2) e^{+ip_2 \cdot x}) \int d^3 \vec{k}' (c(\vec{k}') e^{-ik' \cdot x}) c^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle \\ &= (-2i\lambda) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - k) \end{aligned} \quad (10.49)$$

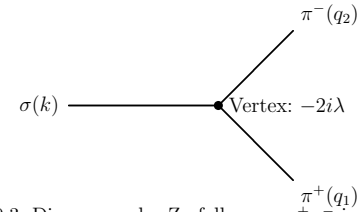
d.h., die Amplitude ist gleich:

$$i\mathcal{M} = 2i\lambda \quad (\sigma \rightarrow \pi^+ \pi^-) \quad (10.50)$$

und das entsprechende Diagramm ist in Abb. 10.3 gezeigt. In diesem Fall braucht man keine Symmetrisierung, weil der Endzustand unterschiedliche Teilchen enthält. Der Vertex-Faktor ist daher $2i\lambda$.

Die Zerfallsrate kann leicht berechnet werden, wie im Fall des neutralen Zerfalls. Man erhält:

$$\Gamma(\sigma \rightarrow \pi^+ \pi^-) = 2\Gamma(\sigma \rightarrow \pi^0 \pi^0) \quad (10.51)$$


 Abbildung 10.3: Diagramm des Zerfalls $\sigma \rightarrow \pi^+ \pi^-$ in unserer Theorie.

10.3 Streuprozesse

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, wie lokale Wechselwirkungen in die Theorie eingeführt werden. Wir haben als Beispiel den Zerfall eines skalaren Teilchens berechnet. Eine solche Form entspricht der grundlegenden Art von Wechselwirkung. In der Praxis will man auch die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen beschreiben, die sich nicht im selben Punkt befinden.

Wie schon im Kap. 1 erwähnt, wird die Wechselwirkung über eine Distanz im Raum durch den Austausch eines Feldquants erklärt, das Energie und Impuls überträgt. Wir bemerken:

Der Austausch-Prozess wird durch die Amplitude für die Erzeugung eines Feldquants in einem Punkt der Raumzeit und die Vernichtung des Feldquants in einem anderen Punkt der Raumzeit charakterisiert. Diese Ausbreitungsamplitude wird als **Propagator** bezeichnet.

10.3.1 Ausbreitungsamplitude

Wir definieren den normierten Zustand, der ein Teilchen mit bestimmtem Impuls \vec{p} darstellt:

$$|p\rangle \equiv \sqrt{(2\pi)^3 2E_p} a^\dagger(\vec{p}) |0\rangle \quad (10.52)$$

Wir betrachten die Anwendung des Feldoperators auf das Vakuum:

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) |0\rangle &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{+ip\cdot x}) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(\underbrace{a(\vec{p})e^{-ip\cdot x} |0\rangle}_{\rightarrow 0} + \underbrace{a^\dagger(\vec{p})e^{+ip\cdot x} |0\rangle}_{\rightarrow \frac{|p\rangle}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_p}}} \right) \\ &\propto \int d^3\vec{p} e^{+ip\cdot x} |\vec{p}\rangle \end{aligned} \quad (10.53)$$

Diese Summe ist eine Überlagerung von Zuständen mit verschiedenen Impulsen \vec{p} . Sie sieht ähnlich aus, wie der Ausdruck eines Eigenzustandes des Ortsvektors $|\vec{x}\rangle$ in der Quantenmechanik.

Wir können deshalb sagen, dass der Feldoperator ein Teilchen in einem bestimmten Punkt der Raumzeit erzeugt:

$$\phi(x^\mu) |0\rangle \equiv \text{Feldzustand eines Teilchens im Raumzeitpunkt } x^\mu \quad (10.54)$$

d.h. der Operator $\phi(x^\mu)$ erzeugt ein Teilchen im Raumzeitpunkt x^μ .

In ähnlicher Weise kann man beweisen, dass gilt

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(x^\mu) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \langle 0 | \left(a(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + \underbrace{a^\dagger(\vec{p})e^{+ip\cdot x}}_{\rightarrow 0} \right) \\ &\propto \int d^3\vec{p} e^{-ip\cdot x} \langle \vec{p} | \end{aligned} \quad (10.55)$$

Es folgt daraus, dass wir die **Amplitude der Ausbreitung eines Teilchens von y^μ nach x^μ** als

$$D(x, y) \equiv \underbrace{D(x - y)}_{\text{wegen Translationsinvarianz}} = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \quad (10.56)$$

ausdrücken können.

Wir können leicht beweisen, dass gilt

$$\begin{aligned} \phi(x)\phi(y) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{4E_p E_q}} \times \\ &\quad (a(\vec{p})e^{-ip\cdot x} + a^\dagger(\vec{p})e^{+ip\cdot x}) (a(\vec{q})e^{-iq\cdot y} + a^\dagger(\vec{q})e^{+iq\cdot y}) \\ &\propto (a(\vec{p})a(\vec{q})\dots) + (a(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})\dots) + (a^\dagger(\vec{p})a(\vec{q})\dots) + (a^\dagger(\vec{p})a^\dagger(\vec{q})\dots) \end{aligned} \quad (10.57)$$

Aber

$$\begin{aligned} \langle 0 | a(\vec{p}) a(\vec{q}) | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{q}) | 0 \rangle &= \delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \\ \langle 0 | a^\dagger(\vec{p}) a(\vec{q}) | 0 \rangle &= 0 \\ \langle 0 | a^\dagger(\vec{p}) a^\dagger(\vec{q}) | 0 \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (10.58)$$

und wir erhalten

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = D(x - y) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(x-y)} \quad (E_p > 0) \quad (10.59)$$

Dieser Ausdruck ist ganz allgemein. Bis jetzt haben wir nichts bezüglich x^μ oder y^μ gesagt. Die Beziehung gibt die Amplitude der Ausbreitung zwischen x^μ und y^μ , wobei x^μ oder y^μ zwei beliebige Raumzeitpunkte sind.

Wir sehen, dass gilt

$$D(y - x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip\cdot(y-x)} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i(-p)\cdot(x-y)} \quad (10.60)$$

d.h., wie erwartet hat der Feynman-Propagator die folgende Eigenschaft: **die Ausbreitung vorwärts in der Zeit mit 4-Impuls p^μ ist gleich der Ausbreitung rückwärts in der Zeit mit Impuls $-p^\mu$** (Siehe Kap. 8.8).

10.3.2 Zeitgeordnete Ausbreitung - Der Feynman-Propagator

Wir können zwei Fälle unterscheiden:

1. $y^0 > x^0$: Ausbreitung rückwärts in der Zeit
2. $y^0 < x^0$: Ausbreitung vorwärts in der Zeit

Im Prinzip wollen wir *nicht* denselben Ausdruck verwenden für die Ausbreitung rückwärts in der Zeit und die Ausbreitung vorwärts in der Zeit. Wir führen den **Feynman-Propagator** ein:

Feynman schlug vor, dass man die folgende Form für den Propagator verwenden muss, um eine "kovariante" Form zu gewinnen:

$$D_F(x-y) \equiv \begin{cases} D(x-y) & \text{wenn } x^0 > y^0 \\ D(y-x) & \text{wenn } x^0 < y^0 \end{cases} \quad (10.61)$$

Man kann den Feynman-Propagator mit Hilfe der Stufenfunktion schreiben:

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) D(x-y) + \theta(y^0 - x^0) D(y-x) \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (10.62)$$

wobei $\theta(t)$ die Stufenfunktion ist. Daher kann der Feynman-Propagator auch mit Hilfe des Dyson-Symbols T ausgedrückt werden:

$$D_F(x-y) \equiv \langle 0 | T [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle \quad (10.63)$$

wobei T der **zeitordnende Dyson-Operator** ist.

Wir bestimmen nun den Feynman-Propagator. Wir fügen die Entwicklungen der skalaren reellen (quantisierten) Felder ein. Wir betrachten den ersten Term:

$$\begin{aligned} &\theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \\ &\theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + a^\dagger(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}) \times \\ &\quad \int \frac{d^3 \vec{p}'}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_{p'}}} (a(\vec{p}') e^{-ip' \cdot y} + a^\dagger(\vec{p}') e^{+ip' \cdot y}) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (10.64)$$

In ähnlicher Weise ist der zweite Term gleich:

$$\theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (y-x)} \quad (10.65)$$

Die Summe liefert den Propagator:

$$\begin{aligned} D_F(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) D(x-y) + \theta(y^0 - x^0) D(y-x) \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip \cdot (y-x)} \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\theta(x^0 - y^0) e^{-ip \cdot (x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ip \cdot (y-x)}) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\theta(x^0 - y^0) e^{-ip^0(x^0 - y^0)} e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ip^0(y^0 - x^0)} e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{y} - \vec{x})}) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\theta(x^0 - y^0) e^{-ip^0(x^0 - y^0)} e^{+i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ip^0(y^0 - x^0)} e^{-i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip^0(\vec{x} - \vec{y})} (\theta(x^0 - y^0) e^{-ip^0(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ip^0(y^0 - x^0)}) \end{aligned} \quad (10.66)$$

wobei wir in der letzten Zeile das Vorzeichen des räumlichen Exponenten des ersten Terms geändert haben, ohne das Resultat zu ändern. Die Stufenfunktion kann als Integral ausgedrückt werden:

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-izt}}{z + i\epsilon} \quad (10.67)$$

Tatsächlich kann das Integral berechnet werden, wenn wir eine Konturintegration in der komplexen Ebene betrachten. Der Integrand ist analytisch ausser im Pol $-i\epsilon$ in der unteren Halbebene. Es folgt:

1. wenn $t > 0$, muss die Kontur in der unteren Halbebene geschlossen werden.
2. wenn $t < 0$, muss die Kontur in der oberen Halbebene geschlossen werden.

Damit trägt das Integral über den Halbkreis nichts bei, weil die Exponentialfunktion nach Null geht. Es gilt daher:

$$\theta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-izt}}{z + i\epsilon} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t > 0 \\ 0 & \text{wenn } t < 0 \end{cases} \quad (10.68)$$

Man kann diese Darstellung der Stufenfunktion im Propagator einfügen und erhält: ($\epsilon \rightarrow 0^+$)

$$\begin{aligned} &\theta(x^0 - y^0) e^{-ip^0(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ip^0(y^0 - x^0)} = \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-iz(x^0 - y^0)} e^{-iE_p(x^0 - y^0)}}{z + i\epsilon} + \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-iz(y^0 - x^0)} e^{-iE_p(y^0 - x^0)}}{z + i\epsilon} \right\} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-i(z+E_p)(x^0 - y^0)}}{z + i\epsilon} + \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{e^{-i(z+E_p)(y^0 - x^0)}}{z + i\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (10.69)$$

Wir nehmen p^0 als Integrationsvariable an:

$$p^0 \equiv z + E_p \implies z = p^0 - E_p \quad (10.70)$$

d.h. $(\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0^+)$

$$\begin{aligned} & \theta(x^0 - y^0) e^{-iE_p(x^0 - y^0)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-iE_p(y^0 - x^0)} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{p^0 - E_p + i\epsilon} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(y^0 - x^0)}}{p^0 - E_p + i\epsilon} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{E_p - p^0 - i\epsilon} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(y^0 - x^0)}}{E_p - p^0 - i\epsilon} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{E_p - p^0 - i\epsilon} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{E_p + p^0 - i\epsilon} \right\} \\ &\approx \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{(E_p) e^{-ip^0(x^0 - y^0)} + (E_p) e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(E_p - p^0 - i\epsilon)(E_p + p^0 - i\epsilon)} \right\} \\ &= \frac{2E_p}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(E_p^2 - (p^0)^2 - i\epsilon')} \right\} \quad (10.71) \end{aligned}$$

wobei $p^0 = p_0$. Wir bemerken, dass das Endergebnis nur einen Term enthält, der für $y^0 > x^0$ und $y^0 < x^0$ gilt, obwohl der Feynman-Propagator als Summe von Ausbreitungen rückwärts und vorwärts in der Zeit ausgedrückt wurde. Der Nenner kann vereinfacht werden:

$$E_p^2 - (p_0)^2 = \vec{p}^2 + m^2 - (p_0)^2 = m^2 - ((p_0)^2 - \vec{p}^2) = m^2 - p^2 \quad (10.72)$$

Zusammenfassend haben wir gefunden:

$$\begin{aligned} D_F(x - y) &= \theta(x^0 - y^0) D(x - y) + \theta(y^0 - x^0) D(y - x) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} (\theta(x^0 - y^0) e^{-ip(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ip(y-x)}) \\ &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \frac{2E_p}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(E_p^2 - (p^0)^2 - i\epsilon')} \right] \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(m^2 - p^2 - i\epsilon')} \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{+i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(m^2 - p^2 - i\epsilon')} \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{(m^2 - p^2 - i\epsilon')} \quad (10.73) \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird oft so ausgedrückt: $(\epsilon \rightarrow 0^+)$

$$iD_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (10.74)$$

wobei m die Ruhemasse des Teilchens ist. Dieser Ausdruck entspricht dem **Feynman-Propagator eines reellen Klein-Gordon-Felds**. Er gilt für $y^0 > x^0$ und $y^0 < x^0$! Die physikalische Interpretation ist die folgende: der erste und zweite Term des Propagators müssen als die Ausbreitung eines Teilchens und eines Antiteilchens interpretiert werden. Die letzte Gleichung sorgt daher gleichzeitig für Teilchen und Antiteilchen.

Man kann den Ausdruck für den Propagator als ein Fourier-Integral interpretieren:

$$iD_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{D}_F(p) \quad (10.75)$$

wobei der **Feynman-Propagator im Impulsraum** gleich

$$\tilde{D}_F(p) \equiv \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (10.76)$$

ist.

Für geladene Teilchen muss ein komplexwertiges Feld verwendet werden. In diesem Fall ist der Feynman-Propagator so definiert:

$$D_F^q \equiv \langle 0 | T(\varphi(x) \varphi^\dagger(y)) | 0 \rangle \quad (10.77)$$

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass der **Propagator des komplexwertigen (geladenen) Klein-Gordons-Felds** gleich dem der reellen (neutralen) Felder ist:

$$iD_F^q(x - y) = iD_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (10.78)$$

10.3.3 Pion-Streuung

Wir betrachten die Streuung von vier skalaren Teilchen:

$$\pi^+(q_1) + \pi^-(q_2) \rightarrow \pi^+(q_3) + \pi^-(q_4) \quad (10.79)$$

In erster Ordnung wird diese Reaktion durch einen 4-Punkt-Vertex dargestellt (Siehe Abb. 10.4). Sie kann mit Hilfe der 4-Feld-Kopplung ausgedrückt werden. Bisher haben wir die folgende Kopplung betrachtet: $\lambda \sigma \phi^2$. Nun wollen wir

sie mit den drei reellen skalaren Feldern $\phi_a(x)$, $a=1,2,3$ (Siehe Kap. 10.2) erweitern und betrachten auch die Selbst-Kopplung in 4-ter Potenz $g\phi^4$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_W &= -g(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)^2 - \lambda\sigma(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) + \dots \\ &= -g\phi^4 - \lambda\sigma\phi^2 - 4g(\varphi^\dagger\varphi)^2 - 4g\varphi^\dagger\varphi\phi^2 - 2\lambda\sigma(\varphi^\dagger\varphi) + \dots\end{aligned}\quad (10.80)$$

Die Amplitude des 4-Punkt-Vertexes, der unsere Reaktion in erster Ordnung beschreibt, kann so berechnet werden:

$$S_1 = (-i)\langle q_3 q_4 | \int d^4 x_1 4g(\varphi^\dagger(x_1)\varphi(x_1))^2 | q_1 q_2 \rangle \quad (10.81)$$

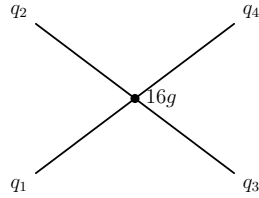


Abbildung 10.4: Vier-Punkt-Vertex für Pion-Streuung.

Wie früher wird man die Entwicklung des quantisierten Felds einfügen und einen Ausdruck als Funktion der Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren erhalten. Durch gewöhnliche Algebra man findet:

$$\begin{aligned}S_1 &= (-i)\langle q_3 q_4 | \int d^4 x_1 4g(\varphi^\dagger(x_1)\varphi(x_1))^2 | q_1 q_2 \rangle \\ &= (-4gi)4(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \\ &= (-16ig)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - q_3 - q_4)\end{aligned}\quad (10.82)$$

Die Amplitude in erster Ordnung ist daher:

$$i\mathcal{M}_1 = 16ig \quad (\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-) \quad (10.83)$$

In zweiter Ordnung kann man den folgenden Wechselwirkungsterm betrachten:

$$-2\lambda\sigma(\varphi^\dagger\varphi) \quad (10.84)$$

Er liefert:

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{(-i)^2}{2!} \langle q_3 q_4 | \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \\ &\quad T [2\lambda\sigma(x_1)(\varphi^\dagger(x_1)\varphi(x_1))2\lambda\sigma(x_2)(\varphi^\dagger(x_2)\varphi(x_2))] | q_1 q_2 \rangle \\ &= \frac{(-2\lambda i)^2}{2} \langle q_3 q_4 | \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \\ &\quad T [\sigma(x_1)(\varphi^\dagger(x_1)\varphi(x_1))\sigma(x_2)(\varphi^\dagger(x_2)\varphi(x_2))] | q_1 q_2 \rangle\end{aligned}\quad (10.85)$$

Wir bemerken, dass wenn die Felder φ und φ^\dagger auf den Anfangs- und Endzustand wirken, liefern sie wie früher Exponentialfunktionen der kinetischen 4-Impulse. Tatsächlich findet man mit Algebra in unserem Fall die folgenden Terme:

$$\begin{aligned}&\int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \langle q_3 q_4 | \varphi^\dagger(x_1)\varphi(x_1)\varphi^\dagger(x_2)\varphi(x_2) | q_1 q_2 \rangle = \\ &\int d^4 x_1 \int d^4 x_2 [e^{ix_1(q_3-q_1)}e^{ix_2(q_4-q_2)} + e^{ix_1(q_3+q_4)}e^{-ix_2(q_1+q_2)} + \\ &\quad e^{-ix_1(q_1+q_2)}e^{ix_2(q_3+q_4)} + e^{ix_1(q_4-q_2)}e^{ix_2(q_3-q_1)}] \\ &= 2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 [e^{ix_1(q_3+q_4)}e^{-ix_2(q_1+q_2)} + e^{ix_1(q_4-q_2)}e^{-ix_2(q_1-q_3)}]\end{aligned}\quad (10.86)$$

Die resultierende S-Matrix ist schliesslich gleich:

$$\begin{aligned}S_2 &= (-2\lambda i)^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \\ &\quad \{e^{ix_1(q_3+q_4)}e^{-ix_2(q_1+q_2)} + e^{ix_1(q_4-q_2)}e^{-ix_2(q_1-q_3)}\} \langle 0 | T [\sigma(x_1)\sigma(x_2)] | 0 \rangle\end{aligned}\quad (10.87)$$

Wir bemerken eine Art von Fourier-Transformierte des Vakuum Erwartungswerts des zeitgeordneten Produkts des Feldes σ . Wir erkennen den Feynman-Propagator: weil das Feld σ nicht auf externe Impulse wirkt, liefert es den Propagator:

$$\langle 0 | T [\sigma(x_1)\sigma(x_2)] | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) = \frac{1}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{(p^2 - M^2 + i\epsilon)} \quad (10.88)$$

wobei M die Ruhemasse des σ -Teilchens ist. Schliesslich erhalten wir die folgende S-Matrix:

$$\begin{aligned}S_2 &= (-2\lambda i)^2 \frac{1}{i} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}}{(p^2 - M^2 + i\epsilon)} \\ &\quad \{e^{ix_1(q_3+q_4)}e^{-ix_2(q_1+q_2)} + e^{ix_1(q_4-q_2)}e^{-ix_2(q_1-q_3)}\} \\ &= (-2\lambda i)^2 \frac{1}{i} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\ &\quad \left\{ \frac{e^{ix_1(q_3+q_4-p)}e^{-ix_2(q_1+q_2-p)}}{(p^2 - M^2 + i\epsilon)} + \frac{e^{ix_1(q_4-q_2-p)}e^{-ix_2(q_1-q_3-p)}}{(p^2 - M^2 + i\epsilon)} \right\} \\ &= (-2\lambda i)^2 \frac{1}{i} (2\pi)^4 \int d^4 p \\ &\quad \left\{ \frac{\delta^4(q_3 + q_4 - p)\delta^4(q_1 + q_2 - p)}{(p^2 - M^2 + i\epsilon)} + \frac{\delta^4(q_4 - q_2 - p)\delta^4(q_1 - q_3 - p)}{(p^2 - M^2 + i\epsilon)} \right\} \\ &= (-2\lambda i)^2 (2\pi)^4 \delta^4(q_3 + q_4 - q_1 - q_2) \\ &\quad \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{((q_1 + q_2)^2 - M^2 + i\epsilon)} + \frac{1}{((q_1 - q_3)^2 - M^2 + i\epsilon)} \right\}\end{aligned}\quad (10.89)$$

Die entsprechende Amplitude kann daher so geschrieben werden:

$$i\mathcal{M}_2 = (-2\lambda i)^2 \left\{ i\tilde{D}_F(q_1 + q_2) + i\tilde{D}_F(q_1 - q_3) \right\} \quad (10.90)$$

Die physikalische Bedeutung ist in Abb. 10.5 gezeigt.

1. Der erste Term stellt die Vernichtung der Teilchen in ein σ -Teilchen, die Ausbreitung des σ -Teilchens und den Zerfall des σ -Teilchens in ein $\pi\pi$ -Paar dar.
2. Der zweite Term stellt die direkte Streuung des $\pi\pi$ -Paares durch den Austausch eines σ -Teilchens dar.

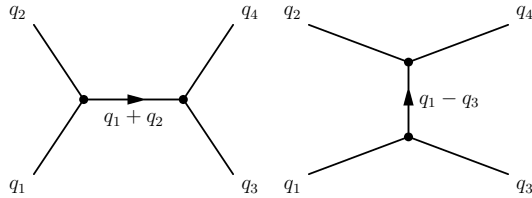


Abbildung 10.5: Die Diagramme stellen den Mechanismus des Austausches eines σ -Teilchens in der $\pi\pi$ -Streuung dar (links) Vernichtungs-Diagramm (rechts) Austausch-Diagramm.

Die Amplitude der Streuung wird durch die Summe der zwei Amplituden in erster und zweiter Ordnung gegeben:

$$i\mathcal{M} = i\mathcal{M}_1 + i\mathcal{M}_2 \quad (10.91)$$

Wir betonen, dass wir die *Amplituden* addieren und nicht die Wahrscheinlichkeiten der Prozesse. Dies kann Interferenz-Phänomene zwischen Diagrammen erzeugen und wird später diskutiert.

10.4 Elementare Prozesse in der Quantenelektrodynamik

Aus Kap. 9.5.2 wissen wir, dass die Lagrangedichte der elektromagnetischen Wechselwirkung in Abwesenheit von Quellen gleich

$$\mathcal{L}_W = -(J^\mu + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)A_\mu = -(e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)A_\mu \quad \text{wenn } J^\mu = 0 \quad (10.92)$$

ist, wobei e die Ladung des Teilchens ist. Dann gilt

$$\mathcal{H}_W = (e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)A_\mu \quad (10.93)$$

Die ersten Terme der S-Matrix-Entwicklung sind gleich

$$S_1 = \frac{(-ie)}{1} \int d^4x_1 \bar{\Psi}(x_1)\gamma^\mu\Psi(x_1)A_\mu(x_1) \quad (10.94)$$

und

$$S_2 = \frac{(-ie)^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 T [\bar{\Psi}(x_1)\gamma^\mu\Psi(x_1)A_\mu(x_1)\bar{\Psi}(x_2)\gamma^\nu\Psi(x_2)A_\nu(x_2)] \quad (10.95)$$

usw... Die *S-Matrix* wird deshalb als eine Reihe von Termen geschrieben, wobei der Term n -ter Ordnung proportional zur n -ten Potenz der Ladung ist:

$$S \equiv 1 + (-ie)(\dots) + (-ie)^2(\dots) \quad (10.96)$$

Die Beziehung zwischen elektrischer Ladung und der Feinstruktur-Konstante α ist die folgende:

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137,036} \quad (10.97)$$

In natürlichen Einheiten ($\epsilon_0 = \hbar = c = 1$) ist dann die elektrische Ladung gleich

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} \quad (10.98)$$

Diese Zahl ist ziemlich klein, deshalb erwarten wir, dass die Entwicklung der S-Matrix als Funktion der elektrischen Ladung schnell konvergieren wird und die Näherung mit nur einigen Termen wird im Allgemeinen eine gute Näherung sein.

Im Allgemeinen sind wir an folgender Art von Vorgängen interessiert:

$$\underbrace{A + B + C + \dots}_{m \text{ Teilchen}} \rightarrow \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots}_{n \text{ Teilchen}} \quad (10.99)$$

wobei die Anzahl m der Teilchen des Anfangszustands verschieden von der Anzahl n der Teilchen des Endzustands sein kann.

Jedes Teilchen wird durch seinen 4-Impuls und seine internen Freiheitsgrade (d.h. Spin) charakterisiert:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_A^\mu, p_B^\mu, p_C^\mu, \dots, p_1^\mu, p_2^\mu, p_3^\mu, \dots \\ \text{Spin} \quad s_A, s_B, \dots, s_1, s_2, \dots \end{array} \right.$$

Vom Standpunkt der QFT werden wir die folgende Amplitude berechnen:

$$\langle \underbrace{p_1^\mu s_1, p_2^\mu s_2, p_3^\mu s_3, \dots}_{\text{Endzustand}} | S | \underbrace{p_A^\mu s_A, p_B^\mu s_B, p_C^\mu s_C, \dots}_{\text{Anfangszustand}} \rangle \quad (10.100)$$

wobei die Teilchen den folgenden Zuständen entsprechen:

Spin 0 Boson:

$$|p_A^\mu\rangle = \sqrt{(2\pi)^3 2E_A} a^\dagger(\vec{p}_A) |0\rangle \quad (10.101)$$

Spin 1/2 Fermion (Dirac):

$$|p_A^\mu s_A\rangle = \sqrt{(2\pi)^3 2E_A} a_s^\dagger(\vec{p}_A) |0\rangle \quad (10.102)$$

Antifermion:

$$|p_A^\mu s_A\rangle = \sqrt{(2\pi)^3 2E_A} b_s^\dagger(\vec{p}_A) |0\rangle \quad (10.103)$$

d.h., ein allgemeiner Zustand mit vielen Teilchen (wie z.B. ein Anfangszustand mit spinlosen Teilchen) wird so erzeugt:

$$|p_A^\mu, p_B^\mu, p_C^\mu, \dots\rangle = \sqrt{(2\pi)^3 2E_A} a^\dagger(\vec{p}_A) \times \sqrt{(2\pi)^3 2E_B} a^\dagger(\vec{p}_B) \sqrt{(2\pi)^3 2E_C} a^\dagger(\vec{p}_C) |0\rangle \quad (10.104)$$

10.4.1 Diagramme der niedrigsten Ordnung

Beispiel: Photon-Absorption an einem Elektron $e^- \gamma \rightarrow e^-$

Der Anfangszustand ist:

$$|e^- \gamma\rangle = |p_1^\mu s_1, p^\mu \epsilon^\mu\rangle \quad (10.105)$$

Der Endzustand:

$$|e^-\rangle = |p_2^\mu s_2\rangle \quad (10.106)$$

In erster Ordnung müssen wir den ersten Term S_1 der S-Matrix betrachten: $S_1 = (-ie) \int d^4x \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x)$ d.h., wir sind an der folgenden Amplitude interessiert:

$$(-ie) \int d^4x \langle p_2^\mu s_2 | \bar{\Psi}(x) \gamma^\mu \Psi(x) A_\mu(x) | p_1^\mu s_1, p^\mu \epsilon^\mu \rangle \quad (10.107)$$

wobei ψ und A_μ Feldoperatoren sind. Wir betrachten den Dirac-Feldoperator und finden, dass gilt:

$$\Psi |p_1^\mu s_1\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} (a_s(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} + b_s^\dagger(\vec{p}) v^{(s)}(\vec{p}) e^{+ip \cdot x}) \times \sqrt{(2\pi)^3 2E_1} a_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) |0\rangle \quad (10.108)$$

Wir betrachten den Term, der den a -Operator enthält (wir sind an Elektronen interessiert) und erhalten:

$$\begin{aligned} & \int d^3\vec{p} \sqrt{\frac{E_1}{E_p}} \sum_{s=1,2} (a_s(\vec{p}) u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}) a_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) |0\rangle = \\ & \int d^3\vec{p} \sqrt{\frac{E_1}{E_p}} \sum_{s=1,2} (u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}) a_s(\vec{p}) a_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1) |0\rangle = \\ & \int d^3\vec{p} \sqrt{\frac{E_1}{E_p}} \sum_{s=1,2} (u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}) \{a_s(\vec{p}), a_{s_1}^\dagger(\vec{p}_1)\} |0\rangle = \\ & \int d^3\vec{p} \sqrt{\frac{E_1}{E_p}} \sum_{s=1,2} (u^{(s)}(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}) \delta^3(\vec{p} - \vec{p}_1) \delta_{s,s_1} |0\rangle = \\ & = e^{-ip_1 \cdot x} u^{(s_1)}(\vec{p}_1) |0\rangle \end{aligned} \quad (10.109)$$

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass der adjungierte Feldoperator den folgenden Term liefert:

$$\langle p_2^\mu, s_2 | \bar{\Psi} \implies \langle 0 | e^{+ip_2 \cdot x} \bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2) \quad (10.110)$$

und auch

$$A_\mu |p^\mu, \epsilon\rangle \implies \epsilon_\mu(\vec{p}) e^{-ip \cdot x} |0\rangle \quad (10.111)$$

Es folgt, dass die gesamte Amplitude zu

$$(-ie) \int d^4x \langle 0 | e^{-i(p+p_1-p_2) \cdot x} \bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2) u^{(s_1)}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(\vec{p}) |0\rangle \quad (10.112)$$

proportional ist. Die Integration liefert einen Term der Form:

$$(-ie) \underbrace{\delta^4(p + p_1 - p_2)}_{\text{Energie-Impuls-Erhaltung}} \underbrace{\left(\bar{u}^{(s_2)}(\vec{p}_2) \gamma^\mu u^{(s_1)}(\vec{p}_1) \epsilon_\mu(\vec{p}) \right)}_{\text{Amplitude des Prozesses}} \quad (10.113)$$

Die Dirac-Funktion entspricht der Bedingung der Energie-Impuls-Erhaltung. Der letzte Term gibt die Form der Amplitude für den Prozess.

Die Amplitude des Prozesses kann als ein Diagramm dargestellt werden. Siehe Abb. 10.6. In der Abbildung werden das einfallende und das auslaufende Elektron sowie das Photon als externe "Beine" gezeichnet. Die kinematischen (4-Impulse) und die internen Größen (Spin, usw.) werden neben den Beinen angezeigt.

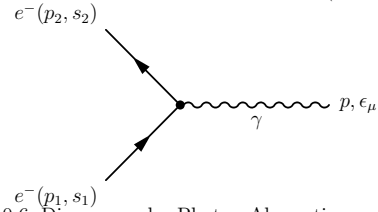


Abbildung 10.6: Diagramm der Photon-Absorption an einem Elektron.

10.4.2 Feldkontraktion

Im Allgemeinen können wir Regeln angeben, die die Berechnung der Amplituden von beliebigen Prozessen vereinfachen. Die folgenden Regeln müssen verwendet werden:

1. Wir betrachten die **Kontraktion der Felder**, wie z.B.

$$\langle p_2, s_2 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu | p_1, s_1, p, \epsilon \rangle$$

Man spricht von der **Kontraktion der äusseren Beine**.

2. Die *Kontraktion des elektromagnetischen Feldes mit einem Photonzustand* liefert den folgenden Faktor in der Amplitude:

$$A_\mu | p, \epsilon \rangle \rightarrow \epsilon_\mu(p) \equiv \bullet \text{---} \text{wavy line} \text{---}$$

3. Die *Kontraktion des Dirac-Spinorfeldes mit einem Elektronenzustand* liefert ein *einfallendes Elektron* der Form:

$$\Psi | p, s \rangle \rightarrow u^{(s)}(p) \equiv \bullet \text{---} \text{arrow pointing left} \text{---}$$

4. Die *Kontraktion des adjungierten Dirac-Spinorfeldes mit einem Elektronenzustand* liefert ein *auslaufendes Elektron* der Form:

$$\langle p, s | \bar{\Psi} \rightarrow \bar{u}^{(s)}(p) \equiv \text{---} \text{arrow pointing left} \text{---} \bullet \text{---}$$

5. Der Vertex-Faktor ist gleich

$$(-ie)\gamma^\mu \quad (10.114)$$

Im Fall eines Positrons werden wir die folgenden Regeln verwenden:

1. Die *Kontraktion des adjungierten Dirac-Spinorfeldes mit einem Positronenzustand* liefert ein *einfallendes Positron* der Form:

$$\bar{\Psi} | p, s \rangle \rightarrow \bar{v}^{(s)}(p) \equiv \bullet \text{---} \text{arrow pointing right} \text{---} \text{einfallendes Positron}$$

(Beachte die Richtung des Pfeils!)

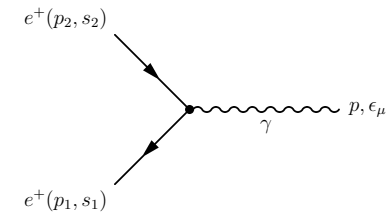
2. Die *Kontraktion des Dirac-Spinorfeldes mit einem Positronenzustand* liefert ein *auslaufendes Positron* der Form:

$$\langle p, s | \Psi \rightarrow v^{(s)}(p) \equiv \text{---} \text{arrow pointing right} \text{---} \bullet \text{---} \text{auslaufendes Positron}$$

(Beachte die Richtung des Pfeils!)

Beispiel: Photon-Absorption an einem Positron $e^+ \gamma \rightarrow e^+$

Das Diagramm ist das folgende:



Die entsprechende Amplitude ist gleich

$$(-ie)\delta^4(p+p_1-p_2) \left(\underbrace{\bar{v}^{(s_1)}(\vec{p}_1)\gamma^\mu v^{(s_2)}(\vec{p}_2)\epsilon_\mu(\vec{p})}_{\text{Amplitude des Prozesses}} \right) \quad (10.115)$$

10.4.3 Diagramme der nächsten Ordnung; das Wick-Theorem

Wir müssen den zweiten Term der S-Matrix betrachten:

$$S_2 = \frac{(-ie)^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 T [\bar{\Psi}(x_1) \gamma^\mu \Psi(x_1) A_\mu(x_1) \bar{\Psi}(x_2) \gamma^\nu \Psi(x_2) A_\nu(x_2)] \quad (10.116)$$

der auf den Anfangs- und Endzustand wirkt, d.h., $\langle \dots | S_2 | \dots \rangle$.

Man verwendet das **Wick-Theorem**, um das zeitgeordnete Produkt zu berechnen.

Skalares Feld (n=2): Wir beginnen mit dem Fall, bei dem wir ein zeitgeordnetes Produkt von zwei skalaren Feldern haben. In diesem Fall sagt das Wick-Theorem voraus, dass das zeitgeordnete Produkt gleich einem "normalgeordneten" Produkt ist:

$$\underbrace{T(\phi(x)\phi(y))}_{\text{zeitgeordnet}} = \underbrace{N(\phi(x)\phi(y) + \overline{\phi(x)\phi(y)})}_{\text{normalgeordnet}} \quad (10.117)$$

wobei

1. *normalgeordnet* heisst, dass alle Vernichtungs-Operatoren rechts von den Erzeugungs-Operatoren sind. Z.B.:

$$N(a(\vec{q}_1) a^\dagger(\vec{q}_2) a(\vec{q}_3)) = a^\dagger(\vec{q}_2) a(\vec{q}_1) a(\vec{q}_3) \quad (10.118)$$

Wir bemerken, dass der Vakuumerwartungswert (v.e.w) eines beliebigen Normalprodukts verschwindet:

$$\langle 0 | N(\text{beliebig}) | 0 \rangle = 0 \quad (10.119)$$

2. der Vakuumerwartungswert der *Kontraktion* von zwei Feldern ist gleich dem Feynman-Propagator:

$$\langle 0 | \overline{\phi(x)\phi(y)} | 0 \rangle = D_F(x - y) \quad (10.120)$$

Skalares Feld (n beliebig): Das Theorem kann zu einer beliebigen Anzahl von Produkten in verschiedenen Punkten der Raumzeit erweitert werden. Es gilt:

$$\underbrace{T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n))}_{\text{zeitgeordnet}} = \underbrace{N(\phi(x_1) \dots \phi(x_n) + \text{alle moeglichen Kontraktionen})}_{\text{normalgeordnet}} \quad (10.121)$$

Wir haben z.B. für n=4 (wir definieren $\phi_a = \phi(x_a)$)

$$T(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) = N(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 + \overline{\phi_1 \phi_2} \phi_3 \phi_4 + \overline{\phi_1 \phi_3} \phi_2 \phi_4 + \overline{\phi_1 \phi_4} \phi_2 \phi_3 + \overline{\phi_2 \phi_3} \phi_1 \phi_4 + \overline{\phi_2 \phi_4} \phi_1 \phi_3 + \overline{\phi_3 \phi_4} \phi_1 \phi_2 + \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_3 \phi_4} + \overline{\phi_1 \phi_3} \overline{\phi_2 \phi_4} + \overline{\phi_1 \phi_4} \overline{\phi_2 \phi_3}) \quad (10.122)$$

Wenn wir den Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produkts betrachten, verschwinden alle normalgeordneten Terme, die nicht vollständig *kontrahiert* sind. Nämlich:

$$\langle 0 | T(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) | 0 \rangle = \langle 0 | \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_3 \phi_4} | 0 \rangle + \langle 0 | \overline{\phi_1 \phi_3} \overline{\phi_2 \phi_4} | 0 \rangle + \langle 0 | \overline{\phi_1 \phi_4} \overline{\phi_2 \phi_3} | 0 \rangle \quad (10.123)$$

Die graphische Darstellung dieses Resultats ist in Abb. 10.7 gezeigt. Wir bemerken:

1. zwei Teilchen werden in zwei Punkten der Raumzeit erzeugt;
2. jedes Teilchen breitet sich aus. Diese Ausbreitung kann in drei verschiedenen Arten geschehen, die allen Möglichkeiten entsprechen, mit welchen die Punkte paarweise verbunden werden können;
3. die Teilchen werden vernichtet.

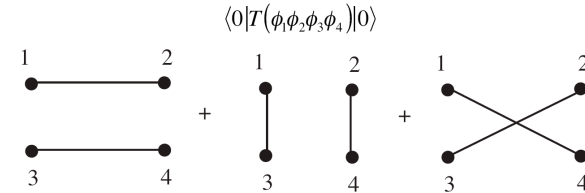


Abbildung 10.7: Graphische Darstellung (Feynman-Diagramm) des zeitgeordneten Produkts.

Die gesamte Amplitude des Prozesses $\langle 0 | T(\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4) | 0 \rangle$ ist daher gleich der Summe der drei Diagramme.

Dirac-Feld: Das Theorem gilt auch für Dirac-Felder. Es gilt:

$$\underbrace{T(\Psi(x) \bar{\Psi}(y))}_{\text{zeitgeordnet}} = \underbrace{N(\Psi(x) \bar{\Psi}(y) + \overline{\Psi(x) \bar{\Psi}(y)})}_{\text{normalgeordnet}} \quad (10.124)$$

wobei

$$\langle 0 | \overline{\Psi}(x) \overline{\Psi}(y) | 0 \rangle \equiv S_F(x - y) \quad (10.125)$$

Feynman – Elektron – Propagator

$$\langle 0 | \overline{\Psi}(x) \overline{\Psi}(y) | 0 \rangle = \langle 0 | \overline{\Psi}(x) \overline{\Psi}(y) | 0 \rangle = 0 \quad (10.126)$$

Der Feynman-Propagator eines Dirac-Felds wird in Kap. 10.4.6 diskutiert.

10.4.4 Elektron-Myon-Streuung

Das **Myon** ist ein “schweres Elektron”, d.h. es besitzt dieselben Eigenschaften wie das Elektron, ausser der Ruhemasse: $m_e \approx 0,511 \text{ MeV}$ und $m_\mu \approx 105,659 \text{ MeV} \approx 200 \times m_e$. Der Hauptzerfallskanal ist $\mu \rightarrow e \nu \nu$ ($\tau = 2,2 \mu\text{s}$ und $c\tau = 660 \text{ m}$).

Wir betrachten den elastischen Streuprozess:

$$e^-(p_1, s_1) + \mu^-(k_1, t_1) \rightarrow e^-(p_2, s_2) + \mu^-(k_2, t_2) \quad (10.127)$$

d.h., wir wollen die folgende Amplitude berechnen:

$$\langle p_2, s_2; k_2, t_2 | T (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu |_{x_1} \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi A_\nu |_{x_2}) | p_1, s_1; k_1, t_1 \rangle \quad (10.128)$$

Als Folge des Wick-Theorems gilt

$$\langle |T(\dots)| \rangle = \langle |N(\dots + \text{alle moeglichen Kontraktionen})| \rangle \quad (10.129)$$

d.h. wir müssen jedes mögliche Diagramm betrachten².

Z.B.,

$$\langle p_2, s_2; k_2, t_2 | \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi A_\nu | p_1, s_1; k_1, t_1 \rangle$$

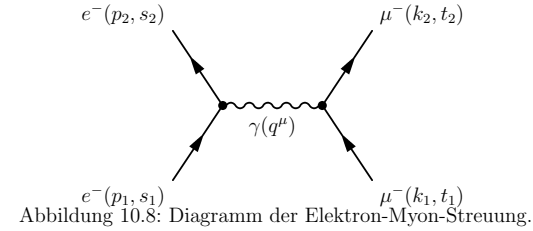
wobei die Kontraktion von zwei elektromagnetischen Potentialen dem **Photon-Propagator** entspricht:

$$\overline{A^\mu A^\nu} \rightarrow \left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \right) \text{ (Photon-Propagator) }$$

²Man kann beweisen, dass nur ganz verbundene Diagramme (d.h. bei denen die äusseren Beine verbunden sind) beitragen.

Diese Kontraktion entspricht dem Diagramm, das in Abb. 10.8 gezeigt ist. Die entsprechende Amplitude ist gleich (wir vernachlässigen die Spins):

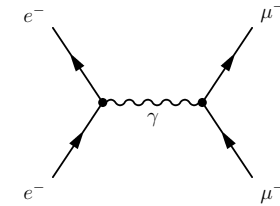
$$(-ie)^2 \underbrace{(\bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1))}_{\text{Strom des Elektrons}} \underbrace{\left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \right)}_{\text{Photon-Propagator}} \underbrace{(\bar{u}(k_2) \gamma_\nu u(k_1))}_{\text{Strom des Myons}} \times \underbrace{\delta^4(p_1 - p_2 - q) \delta^4(k_1 + q - k_2)}_{\text{Energie-Erhaltung an jedem Vertex}} \quad (10.130)$$



10.4.5 Elementare elektromagnetische Prozesse

Wir können verschiedene elementare Prozesse betrachten:

1. Elastische Elektron-Myon-Streuung ($e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$)



Man spricht von **Photon-Austausch-Diagramm**.

2. Elastische Elektron-Elektron-Streuung ($e^- e^- \rightarrow e^- e^-$) (**Möller-Streuung**)

Das Wick-Theorem besagt, dass man alle Diagramme betrachten muss. Die gesamte Amplitude ist gleich der Summe der Amplituden aller Diagramme.

Im Fall der Möller-Streuung betrachten wir zwei Diagramme, weil die auslaufenden Teilchen **ununterscheidbar** sind und deshalb nicht entschieden werden kann, von welchem Vertex die auslaufenden Teilchen stammen (Siehe Abb. 10.9).

Wie müssen wir die Diagramme addieren? Wir müssen nun etwas über das Vorzeichen bemerken. Die Q.F.T. sagt voraus, dass sich unter Vertauschung von ununterscheidbaren Fermionen das Vorzeichen der Amplitude ändern muss (d.h. Antikommutation).

Als Folge haben die Amplituden der beiden Diagramme ein entgegengesetztes Vorzeichen, d.h. die gesamte Amplitude ist gleich

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2 \quad (10.131)$$

wobei \mathcal{M}_1 die Amplitude des ersten Diagramms und \mathcal{M}_2 die des zweiten ist.

Das entgegengesetzte Vorzeichen berücksichtigt den Austausch von ununterscheidbaren Fermionen.

3. Elastische Elektron-Positron-Streuung $e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$

(**Bhabha-Streuung**)

In diesem Fall müssen wir zwei Diagramme betrachten: den **Photon-Austausch**- und den **Vernichtungs-Vorgang** (Siehe Abb. 10.10).

Wie müssen wir die Diagramme addieren? Wie im Fall der Möller-Streuung gibt es ein negatives Vorzeichen zwischen den Diagrammen.

Das entgegengesetzte Vorzeichen berücksichtigt den Austausch von einem einfallenden Elektron und einem auslaufenden Positron.

4. Inelastische Myonpaar-Erzeugung

Siehe Abb. 10.11.

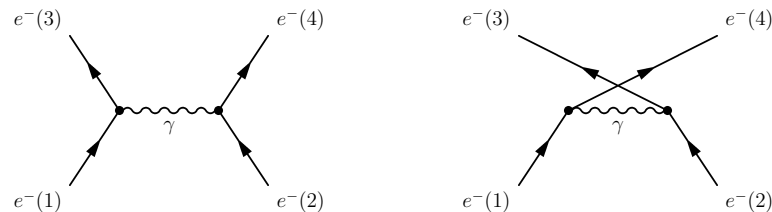


Abbildung 10.9: Diagramme der Möller-Streuung.

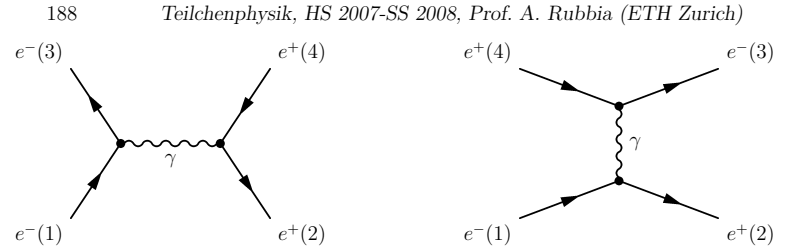


Abbildung 10.10: Diagramme der Bhabha-Streuung.

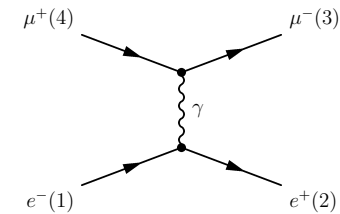


Abbildung 10.11: Diagramm der inelastischen Myonpaar-Erzeugung.

10.4.6 Boson- und Fermion-Propagator

Wir haben bis jetzt nur den Klein-Gordon-Teilchen-Propagator und den Photon-Propagator angetroffen. Man kann auch die Propagatoren von Dirac-Fermionen betrachten.

Im Fall der Spin-0 Bosonen haben wir gesehen:

$$\text{Spin 0 Boson: } \overline{\phi(x)}\phi(y) = D_F(x-y) \rightarrow \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)$$

----->-----
p^μ

In ähnlicher Weise kann man den Feynman-Propagator eines Dirac-Teilchens definieren. In diesem Fall müssen wir die Antikommutationsregeln verwenden, und schliesslich findet man (Beachte das negative Vorzeichen!):

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \Psi(x) \bar{\Psi}(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\Psi}(y) \Psi(x) | 0 \rangle \\ &\equiv \langle 0 | T(\Psi(x) \bar{\Psi}(y)) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (10.132)$$

Es gilt für den Feynman-Propagator des Dirac-Teilchens:

$$\begin{aligned} S_F(x-y) &= \langle 0 | T (\Psi(x) \bar{\Psi}(y)) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{\not{p} + m}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ &= \frac{1}{i} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{S}_F(p) \end{aligned} \quad (10.133)$$

wobei

$$i\tilde{S}_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} = \frac{i \sum u_i \bar{u}_i}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (10.134)$$

Der Propagator des Dirac-Teilchens ist daher eine 4x4-Matrix. Er wird mit einer Linie und einem Pfeil bezeichnet:

$$\begin{array}{c} p^\mu \\ \longrightarrow \end{array} \quad \frac{(\not{p} + m)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

1. Paar-Vernichtung $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$

Die entsprechenden Diagramme sind in Abb. 10.12 gezeigt. In diesen Diagrammen bemerken wir die Anwesenheit eines Elektron-Propagators. In welcher Richtung bewegt sich das Elektron?

Der Propagator entspricht dem *Feynman-Propagator* des Elektrons. In einer kovarianten Theorie können wir die Ausbreitung eines *Elektrons* vorwärts in der Zeit nicht von der Ausbreitung eines *Positrons* rückwärts in der Zeit unterscheiden.

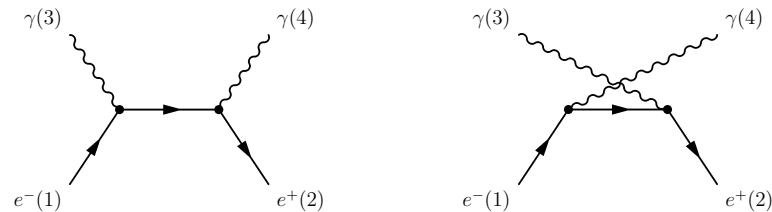
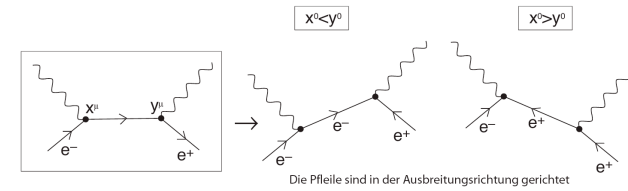


Abbildung 10.12: Diagramme der Paar-Vernichtung.

Die physikalische Interpretation des Diagramms ist dann die folgende:

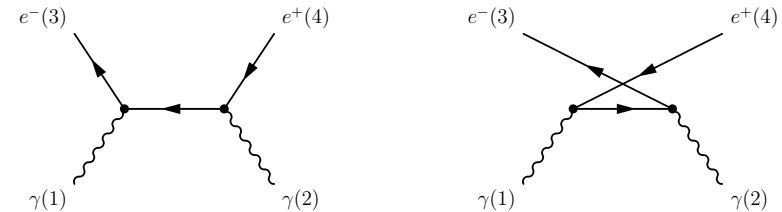


Das kovariante Diagramm ist tatsächlich die Summe von zwei unabhängigen Termen. Jeder Term für sich allein ist nicht kovariant, aber die Summe ist in kovarianter Form ausgedrückt.

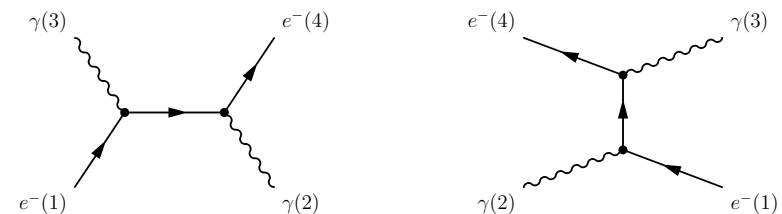
Wenn $x^0 < y^0$, sprechen wir von der Ausbreitung eines Elektrons, das sich mit dem einfallenden Positron vernichtet wird. Wenn $x^0 > y^0$, können wir das Diagramm wie die Ausbreitung eines Positrons darstellen, wobei das Positron sich mit dem einfallenden Elektron vernichtet.

Wie schon erwähnt, hat Feynman diese Eigenschaft so interpretiert: Materie und Antimaterie sind nötig, um eine kovariante Theorie zu bekommen.

2. Paar-Erzeugung $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$



3. Compton-Streuung $e^- \gamma \rightarrow e^- \gamma$



Kapitel 11

Die Quantenelektrodynamik (QED)

11.1 Einleitung

Wir können die Ergebnisse der letzten Kapitel zusammenfassen. Wir beginnen mit der Lagrange-Funktion der QED-Theorie (Siehe Kap. 9.5.2)

$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{\bar{\Psi} [\gamma^\mu i \partial_\mu - m] \Psi}_{\text{freie Teilchen}} - \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) A_\mu}_{\text{Wechselwirkung}} \quad (11.1)$$

Der erste Teil der Lagrange-Funktion, der die freien Teilchen der Theorie (d.h. Dirac-Elektronen/Positronen und Maxwell'sche Photonen) beschreibt, liefert die Form der Propagatoren (Siehe Kap. 10.4.6 für Elektron- und Positron-Propagatoren und Kap. 10.4.4 für den Photon-Propagator). Der zweite Teil der Lagrange-Funktion liefert die Form der Vertexfaktoren.

Die Amplitude \mathcal{M} eines Prozesses wird mit einer Gesamtheit von Diagrammen assoziiert. Im Allgemeinen enthalten die Diagramme die folgenden Teile (Siehe Abb. 11.1):

1. äussere Beine
2. freie Propagatoren
3. Vertexfaktoren
4. interne Diagramme (wie z.B. interne "Loops")

Die äusseren Beine sind durch ihre kinematischen (4-Impulse) und internen (Spin, usw.) Grössen charakterisiert.

Wir fassen die Regeln zusammen, um die Amplituden der Diagramme zu berechnen:

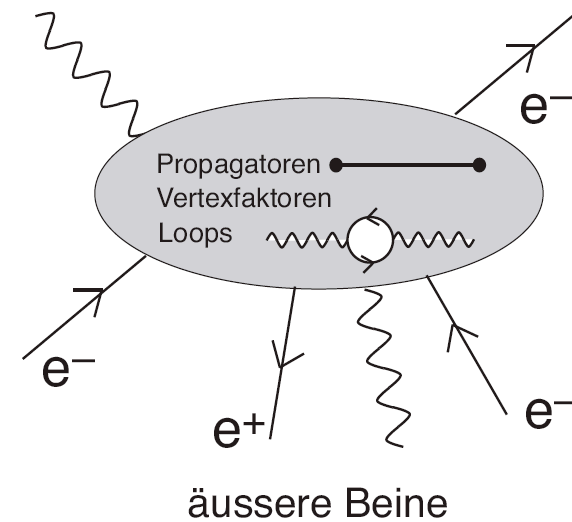


Abbildung 11.1: Die verschiedenen Teile von Feynman-Diagrammen.

1. **Externe Beine:** Bezeichnen der einlaufenden und auslaufenden 4-Impulse p_1, p_2, \dots und der entsprechenden internen Grössen (Spins s_1, s_2 , usw.). Richtung der Pfeile an den äusseren Beinen angeben.
2. **Berechnung der externen Beine:** jedes Bein trägt einen Faktor bei wie in Tabelle 11.1 angegeben.

e^-	einlaufend	u
	auslaufend	\bar{u}
e^+	einlaufend	\bar{v}
	auslaufend	v
γ	einlaufend	ϵ^μ
	auslaufend	$\epsilon^{*\mu}$

Tabelle 11.1: Faktoren der verschiedenen Arten von externen Beinen.

3. **Vertexfaktoren:** Jeder Vertex trägt den Faktor

$$(-ie\gamma^\mu) \quad (11.2)$$

bei, wobei e die elektrische Ladung ($e > 0$) ist.

4. **Propagatoren:** Jede interne Linie trägt einen Faktor, wie in der Tabelle 11.2 gezeigt, bei:

Spin 1/2 Fermion	$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Spin 0 Boson	$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Spin 1 Photon	$\frac{-ig^{\mu\nu}}{p^2}$

Tabelle 11.2: Propagatoren.

5. **Interne Energie-Impuls-Erhaltung:** In jedem Vertex muss der gesamte Energie-Impuls-4-Vektor erhalten werden, d.h. für jeden Vertex erhalten wir eine δ -Funktion, wie z.B.

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k_3) \quad (11.3)$$

6. **Integration über interne Impulse:** im Fall, dass es interne "Loops" gibt, muss über den internen Impuls integriert werden, d.h.

$$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \quad (11.4)$$

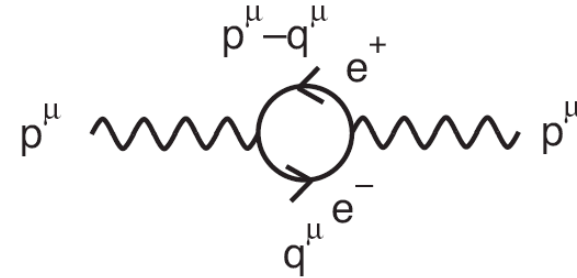


Abbildung 11.2: Die Definition eines Loops.

Ein Diagramm mit einem "Fermion-Loop" besitzt ein negatives Vorzeichen. Die Spur der Matrizen, die dem Loop entsprechen, muss berechnet werden.

7. **Gesamte δ -Funktion:** Die Amplitude muss einen Faktor besitzen, der die allgemeine Energie-Impuls-Erhaltung beschreibt, d.h. z.B.

$$(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{\text{Anfangszustand}} p_i - \sum_{\text{Endzustand}} p_f \right) \quad (11.5)$$

8. **Antisymmetrisierung** : ein negatives Vorzeichen muss zwischen Diagrammen eingefügt werden, die sich nur durch den Austausch von Fermionen unterscheiden, wie z.B.

(a) zwei einfallende Elektronen (oder Positronen) $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$

(b) ein einfallendes Elektron und ein auslaufendes Positron $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$

11.2 Berechnung eines Feynman-Diagramms

Nach vielen Kapiteln über Formalismus sind wir nun bereit, die relativistische Berechnung einer Prozessamplitude im Bereich der QED durchzuführen.

In der Praxis werden wir die Amplitude so ausdrücken:

$$\text{Amplitude} \equiv (-i\mathcal{M}) \times (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{\text{Anfangszustand}} p_i - \sum_{\text{Endzustand}} p_f \right) \quad (11.6)$$

wobei wir die gesamte Amplitude in die Amplitude des Prozesses und die Energie-Impuls-Erhaltung getrennt haben. Die Amplitude \mathcal{M} wird als die **invariante Amplitude** (oder **Matrix-Element**) bezeichnet.

Wir betrachten den folgenden Prozess: $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. Die Definitionen der kinematischen Grössen werden in Abb. 11.3 gezeigt. Die Impulse werden daher so definiert:

$$e^+(p'^\mu)e^-(p^\mu) \rightarrow \mu^+(k'^\mu)\mu^-(k^\mu) \quad (11.7)$$

Der 4-Impuls des Photons ist gleich

$$\begin{aligned} q^\mu &\equiv 4 - \text{Impuls des Photons} = \\ &= (p^\mu + p'^\mu) = (k^\mu + k'^\mu) \end{aligned} \quad (11.8)$$

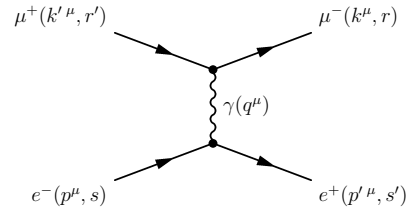


Abbildung 11.3: Definition der kinematischen Grössen für den Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Die invariante Amplitude ist gleich

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M} &= \left(\underbrace{\bar{v}^{(s')}(p')}_{\text{einfallendes Positron}} \underbrace{(-ie\gamma_\mu)}_{\text{Vertex}} \underbrace{u^{(s)}(p)}_{\text{einfallendes Elektron}} \right) \times \\ &\quad \underbrace{\left(\frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \right)}_{\text{Photon-Propagator}} \times \\ &\quad \left(\underbrace{\bar{u}^{(r)}(k)}_{\text{auslaufendes Myon}} \underbrace{(-ie\gamma_\nu)}_{\text{Vertex}} \underbrace{v^{(r')}(k')}_{\text{auslaufendes Anti-Myon}} \right) \end{aligned} \quad (11.9)$$

Wenn wir die Spinindizes zuerst vernachlässigen, können wir die invariante Amplitude so ordnen:

$$-i\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)) (\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')) \quad (11.10)$$

Die **Wahrscheinlichkeit des Vorgangs** (d.h. der Wirkungsquerschnitt) hängt vom **Betragsquadrat der Amplitude** ab:

$$d\sigma \propto |\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^* \mathcal{M} \quad (11.11)$$

Wir bemerken, dass gilt

$$(\bar{v}\gamma^\mu u)^* = (u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} v) = (u^\dagger \gamma^\mu \gamma^0 v) = (\bar{u}\gamma^\mu v) \quad (11.12)$$

weil

$$(u^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 v) = \begin{cases} (u^\dagger \gamma^{0\dagger} \gamma^0 v) = (u^\dagger \gamma^0 \gamma^0 v) = (\bar{u}\gamma^0 v) \\ (u^\dagger \gamma^{k\dagger} \gamma^0 v) = (-u^\dagger \gamma^k \gamma^0 v) = (u^\dagger \gamma^0 \gamma^k v) = (\bar{u}\gamma^k v) \\ k = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Es folgt daraus,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (\bar{v}(p')\gamma^\mu u(p)\bar{u}(p)\gamma^\nu v(p')) (\bar{u}(k)\gamma_\mu v(k')\bar{v}(k')\gamma_\nu u(k)) \quad (11.13)$$

Mit diesem Ausdruck können wir für beliebige Spinoren $u^{(s)}(p)$, $v^{(s')}(p')$, usw. die Wahrscheinlichkeit des Prozesses bestimmen.

In der Praxis ist es schwierig, die Spinzustände der verschiedenen Teilchen zu kontrollieren.

Anfangszustand: Im Fall des Anfangszustands ist es manchmal möglich polarisierte Teilchen zu verwenden. In diesem Fall müssen wir bestimmte Spinzustände betrachten. Wenn die Polarisierung der Teilchen nicht möglich ist (d.h. der Anfangszustand nicht polarisiert ist), müssen wir über die Spinzustände mitteln.

Endzustand: wenn die Spins des Endzustands nicht gemessen werden, müssen wir die **Summe** der Spinzustände berechnen.

Im Fall des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses werden das Mittel der Elektronspins und die Summe über die Myonspins berechnet, d.h. das mittlere invariante Matrixelement ist gleich

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} \sum_r \sum_{r'} |\mathcal{M}(s, s' \rightarrow r, r')|^2 \quad (11.14)$$

Die Summe sieht kompliziert aus. Sie kann jedoch mit Hilfe von Spur-Theoremen vereinfacht werden.

Wir können die Invariante-Amplitude in zwei Teile trennen:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle \equiv \frac{e^4}{q^4} L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} L_{\text{Myon}}^{\mu\nu} \quad (11.15)$$

wobei

$$L_{\text{Elektron}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_s \frac{1}{2} \sum_{s'} (\bar{v}^{(s')}(p')\gamma^\mu u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)\gamma^\nu v^{(s')}(p')) \quad (11.16)$$

Wir verwenden die Vollständigkeitsrelationen für Dirac-Spinoren (Siehe Übungen)

$$\sum_s (u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p)) = \gamma^\mu p_\mu + m = \not{p} + m$$

$$\sum_s (v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p)) = \not{p} - m \quad (11.17)$$

Wir können $L^{\mu\nu}_{Elektron}$ mit Indizes ausdrücken als

$$L^{\mu\nu}_{Elektron} = \frac{1}{4} \sum_{s,s'} \bar{v}_a^{(s')}(p') \gamma_{ab}^\mu u_b^{(s)}(p) \bar{u}_c^{(s)}(p) \gamma_{cd}^\nu v_d^{(s')}(p') \quad (11.18)$$

wobei über doppelt vorkommende Indizes a, b, c und d summiert wird. Mit Hilfe der Vollständigkeitsrelationen erhalten wir

$$L^{\mu\nu}_{Elektron} = \frac{1}{4} (\not{p}' - m_e)_{da} \gamma_{ab}^\mu (\not{p} + m_e)_{bc} \gamma_{cd}^\nu \quad (11.19)$$

Die verschiedenen Terme enthalten die folgenden Indizes: da , ab , bc und cd . Wenn wir über die Indizes summieren, erhalten wir schliesslich die folgende einfache *Spur*:

$$L^{\mu\nu}_{Elektron} = \frac{1}{4} \text{Tr}((\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu) \quad (11.20)$$

In ähnlicher Weise kann man den Ausdruck für das Myon bestimmen und schliesslich gilt:

$$\langle |\mathcal{M}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)|^2 \rangle \equiv \frac{1}{4} \frac{e^4}{q^4} \text{Tr}((\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu) \times \text{Tr}((\not{k} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{k}' - m_\mu) \gamma_\nu) \quad (11.21)$$

In dieser Gleichung gibt es keine Spinoren mehr. Das Problem wurde auf die Berechnung von Spuren reduziert.

Spurtheoreme:

Man kann die Spuren mit Hilfe der algebraischen Eigenschaften der γ -Matrizen herleiten.

Wir bemerken,

$$\text{Tr}(1) = 4 \quad \text{und} \quad \text{Tr}\gamma^\mu = 0 \quad (11.22)$$

In eleganter Weise:

$$\text{Tr}\gamma^\mu = \text{Tr}\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu = -\text{Tr}\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 = -\text{Tr}\gamma^5 \gamma^5 \gamma^\mu = -\text{Tr}\gamma^\mu = 0 \quad (11.23)$$

wobei wir die Spureigenschaft $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$ und die Eigenschaften der γ -Matrizen benutzt haben.

Es gilt auch,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \text{Tr}(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= 2g^{\mu\nu} \text{Tr}(1) - \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) \\ &= 8g^{\mu\nu} - \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\mu) \\ \implies \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (11.24)$$

Falls wir das Produkt von 4 γ -Matrizen betrachten:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= \text{Tr}(2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma) \\ &= \text{Tr}(2g^{\mu\nu} \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma^\nu 2g^{\mu\rho} \gamma^\sigma + \gamma^\nu \gamma^\rho 2g^{\mu\sigma} - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu) \\ \implies \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= g^{\mu\nu} \text{Tr}(\gamma^\rho \gamma^\sigma) - g^{\mu\rho} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\sigma) + g^{\mu\sigma} \text{Tr}(\gamma^\nu \gamma^\rho) \\ &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (11.25)$$

Allgemein gilt: die *Spur* von einer ungeraden Anzahl von γ -Matrizen verschwindet:

$$\text{Tr}((\gamma^\mu)^{\text{ungerade Anzahl}}) = \text{Tr}(\gamma^5 \gamma^5 (\gamma^\mu)^{\text{ungerade Anzahl}}) = 0 \quad (11.26)$$

und es gilt auch

$$\text{Tr}\gamma^5 = 0 \quad \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = 0 \quad \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (11.27)$$

Berechnung des Elektron-Positron-Vernichtungs-Diagramms

Mit den Spurtheoremen erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Tr}((\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu) &= \\ &= \text{Tr} \left(\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu + \underbrace{(-m_e) \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu}_{=0} + \underbrace{(m_e) \not{p}' \gamma^\mu \gamma^\nu}_{=0} - m_e^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \right) \\ &\quad \text{ungerade Anzahl } \gamma - \text{Matrizen} \\ &= \text{Tr}(\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu) - m_e^2 \underbrace{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)}_{=4g^{\mu\nu}} \\ &= p'_\alpha p_\beta \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) - m_e^2 4g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (11.28)$$

Die Spur von den 4 γ -Matrizen liefert:

$$\begin{aligned} p'_\alpha p_\beta \text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu) &= 4p'_\alpha p_\beta (g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta}) \\ &= 4(p'^\mu p^\nu - (p' \cdot p) g^{\mu\nu} + p'^\nu p^\mu) \end{aligned} \quad (11.29)$$

und schliesslich

$$\text{Tr}((\not{p}' - m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^\nu) = 4(p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu} (p' \cdot p + m_e^2)) \quad (11.30)$$

In ähnlicher Weise liefert die Myon-Spur das folgende Ergebnis:

$$\text{Tr}((\not{k} + m_\mu)\gamma^\mu(\not{k}' - m_\mu)\gamma^\nu) = 4(k'^\mu k^\nu + k'^\nu k^\mu - g^{\mu\nu}(k' \cdot k + m_\mu^2)) \quad (11.31)$$

Wir vernachlässigen die Elektronruhmehasse relativ zur Myonruhmehasse: $m_e \ll m_\mu \approx 200m_e$, d.h. $m_e = 0$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \rangle &= \frac{16e^4}{4q^4} (p'^\mu p^\nu + p'^\nu p^\mu - g^{\mu\nu}(p' \cdot p)) \times \\ &\quad (k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu - g_{\mu\nu}(k' \cdot k + m_\mu^2)) \\ &= \frac{16e^4}{4q^4} \{ (p' \cdot k')(p \cdot k) + (p \cdot k')(p' \cdot k) \times 2 \\ &\quad - (p \cdot p')(k \cdot k') \times 2 + \underbrace{g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}}_{=4} (p \cdot p')(k' \cdot k + m_\mu^2) \\ &\quad - (p \cdot p')(k \cdot k' + m_\mu^2) \times 2 \} \\ &= 2 \left(\frac{16e^4}{4q^4} \right) \{ (p'k')(pk) + (pk')(p'k) \\ &\quad - (pp')(kk') + 2(pp')(kk') - (pp')(kk') + m_\mu^2(pp') \} \quad (11.32) \end{aligned}$$

und schliesslich ist die nicht-polarisierte invariante Amplitude gleich

$$\langle |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 \rangle = \frac{8e^4}{q^4} \{ (pk)(p'k') + (pk')(p'k) + m_\mu^2(pp') \} \quad (11.33)$$

Diese Amplitude sieht explizit kovariant aus!

11.2.1 Der Prozess $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Wir fahren mit der vollständigen Berechnung des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses weiter. Wir haben im letzten Abschnitt die invariante Amplitude $\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ schon bestimmt und dazu die Spurtheoreme benutzt, um das Mittel der Anfangszustandspins (Elektronenspins) und die Summe der Endzustandspins (Myonenspins) zu berechnen (die Masse des Elektrons wurde gegenüber der Masse des Myons vernachlässigt). Siehe Gl. 11.10. Die 4-Impulse wurden so definiert: $e^+(p'^\mu)e^-(p^\mu) \rightarrow \mu^+(k'^\mu)\mu^-(k^\mu)$.

Wir wählen ein bestimmtes Bezugssystem. Ein natürliches Bezugssystem ist in diesem Fall das **Schwerpunktssystem** (SP). Siehe Abb. 11.4.

Elektron, Positron (wir vernachlässigen die Ruhemasse des Elektrons):

$$p^\mu = (E, E\hat{z}) \quad p'^\mu = (E, -E\hat{z}) \quad (E \gg m_e \implies m_e = 0) \quad (11.34)$$

wobei wir den Einheitsvektor in z -Richtung verwendet haben.

Für das Myon und das Antimyon:

$$k^\mu = (E, \vec{k}) \quad k'^\mu = (E, -\vec{k}) \quad (11.35)$$

Streuung im Schwerpunktssystem

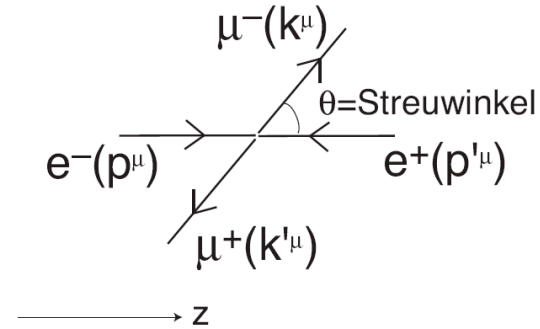


Abbildung 11.4: Definition der kinematischen Grössen im Schwerpunktsystem der Reaktion.

Für das ausgetauschte Photon des Feynman-Diagramms gilt (Siehe Kap. 11.2 und Abb. 8 im Kap. 10)

$$q^\mu \equiv 4 - \text{Impuls des Photons} = (p^\mu + p'^\mu) = (k^\mu + k'^\mu) \quad (11.36)$$

und

$$q^2 = (p^\mu + p'^\mu)^2 = 4E^2 = (2E)^2 \neq 0 \quad (11.37)$$

Es folgt, dass die Masse des ausgetauschten Photons nicht verschwindet. Man spricht von einem **virtuellen Photon** γ^* , dessen virtuelle Masse nicht auf der Massenschale ("on-shell") liegt:

$$m_{\gamma^*}^2 = q^2 \neq 0 \quad (11.38)$$

Man kann sich die Reaktion so vorstellen: ein Elektron-Positron-Paar vernichtet sich in ein virtuelles Photon:

$$e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^- \quad (11.39)$$

Wir bemerken tatsächlich, dass die Ruhemasse des Photons gleich der Energie des Schwerpunkts ist

$$q^2 = (2E)^2 = E_{SP}^2 \quad (11.40)$$

Das virtuelle Photon zerfällt in ein Myon-Antimyon-Paar.

Aus den kinematischen Grössen folgt

$$\begin{aligned} (p \cdot k) &= (p' \cdot k') = E^2 - E|\vec{k}| \cos \theta \\ (p \cdot k') &= (p' \cdot k) = E^2 + E|\vec{k}| \cos \theta \\ (p \cdot p') &= 2E^2 \end{aligned} \quad (11.41)$$

und damit

$$\begin{aligned} < |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 > = \\ & \frac{8e^4}{16E^4} \left\{ (E^2 - E|\vec{k}| \cos \theta)^2 + (E^2 + E|\vec{k}| \cos \theta)^2 + 2m_\mu^2 E^2 \right\} \\ &= \frac{e^4}{2} \left\{ \left(1 - \frac{|\vec{k}|}{E} \cos \theta\right)^2 + \left(1 + \frac{|\vec{k}|}{E} \cos \theta\right)^2 + \frac{2m_\mu^2}{E^2} \right\} \\ &= \frac{e^4}{2} \left\{ 2 + 2 \left(\frac{|\vec{k}|}{E} \cos \theta \right)^2 + \frac{2m_\mu^2}{E^2} \right\} \\ &= e^4 \left\{ 1 + \frac{|\vec{k}|^2}{E^2} \cos^2 \theta + \frac{m_\mu^2}{E^2} \right\} \end{aligned} \quad (11.42)$$

d.h.,

$$< |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 > = e^4 \left\{ \left(1 + \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}\right) \cos^2 \theta \right\} \quad (11.43)$$

Wir bemerken die Streuwinkelabhängigkeit. Im ultra-relativistischen Grenzfall, d.h. $E \gg m_\mu$, gilt

$$< |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 > \propto 1 + \cos^2 \theta \quad \text{im SP} \quad (11.44)$$

11.3 Mandelstam-Variablen

Für die Reaktion $e^+(p'^\mu)e^-(p^\mu) \rightarrow \mu^+(k'^\mu)\mu^-(k^\mu)$ werden die Mandelstam-Variablen so definiert:

$$\begin{cases} s \equiv (p + p')^2 = (k + k')^2 \\ t \equiv (k - p)^2 = (k' - p')^2 \\ u \equiv (k' - p)^2 = (k - p')^2 \end{cases} \quad (11.45)$$

Wir nehmen den ultra-relativistischen Grenzfall an, d.h. $E \gg m_e, m_\mu$ und es gilt,

$$\begin{cases} s \equiv q^2 \\ t \equiv (k - p)^2 = (k' - p')^2 = -2k \cdot p + k^2 + p^2 = \\ \quad = 2k \cdot p + m_\mu^2 + m_e^2 \approx -2k \cdot p \approx -2k' \cdot p' \\ u \equiv (k' - p)^2 = (k - p')^2 \approx -2k' \cdot p \approx -2k \cdot p' \end{cases} \quad (11.46)$$

d.h.

$$(p \cdot k) = (p' \cdot k') \approx -\frac{t}{2} \quad \text{und} \quad (p \cdot k') = (p' \cdot k) \approx -\frac{u}{2} \quad (11.47)$$

und

$$\begin{aligned} < |\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)|^2 > &= \frac{8e^4}{q^4} \{ (pk)(p'k') + (pk')(p'k) + m_\mu^2(pp') \} \\ &\approx \frac{8e^4}{s^2} \left\{ \left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^2 \right\} \\ &\approx (2e^4) \left\{ \frac{t^2 + u^2}{s^2} \right\} \quad \text{ultra-relativistisch} \end{aligned} \quad (11.48)$$

Man spricht vom “**s-Kanal**”, weil im Nenner des Matrixelements die s-Variable steht.

Der s-Kanal entspricht einer Reaktion, bei der die Teilchen des Anfangszustands sich in einem Photon vernichten und bei der das Photon die Teilchen des Endzustands erzeugt. Aus dieser Tatsache folgt die Abhängigkeit des Matrixelements proportional zu s^{-2} .

Wir haben gesehen, dass im s-Kanal die Streuwinkelabhängigkeit im Schwerpunktsystem proportional zu $(1 + \cos^2 \theta)$ ist.

11.4 Ultra-relativistischer Grenzfall

Oft werden wir Prozesse im ultra-relativistischen Grenzfall betrachten. Wir können z.B. noch einmal den Prozess betrachten $e^+(p'^\mu)e^-(p^\mu) \rightarrow \mu^+(k'^\mu)\mu^-(k^\mu)$.

Wir betrachten den Prozess bezüglich des Schwerpunktsystems und berechnen den ultra-relativistischen Grenzfall, d.h. $E^2 \gg p^2 = p'^2 = m_e^2$ und $E^2 \gg k^2 = k'^2 = m_\mu^2$, wobei E die Energie der Teilchen ist.

Es gilt,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} &= \left(\frac{1}{64\pi^2}\right) \left(\frac{1}{E_{SP}^2}\right) |\mathcal{M}|^2 \\ &\approx \left(\frac{1}{64\pi^2}\right) \left(\frac{1}{E_{SP}^2}\right) (2e^4) \left\{\frac{t^2 + u^2}{s^2}\right\} \\ &= \left(\frac{2e^4}{64\pi^2}\right) \left(\frac{1}{s}\right) \left\{\frac{t^2 + u^2}{s^2}\right\} \end{aligned} \quad (11.49)$$

und

$$\begin{cases} s = (2E)^2 \\ t \approx -2k \cdot p \approx -2E^2(1 - \cos\theta) = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta) \\ u \approx -2k' \cdot p \approx -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta) \end{cases} \quad (11.50)$$

wobei θ der Streuwinkel ist (Beachte: der Winkel θ wird zwischen dem einfallenden Elektron und dem auslaufenden Myon, d.h. den Teilchen mit negativer Ladung, definiert).

Es folgt,

$$\begin{aligned} \frac{t^2 + u^2}{s^2} &\approx \frac{\frac{s^2}{4}(1 - \cos\theta)^2 + \frac{s^2}{4}(1 + \cos\theta)^2}{s^2} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta) \end{aligned} \quad (11.51)$$

und mit der Definition $e^2 = 4\pi\alpha$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} &= \left(\frac{2(16\pi^2)\alpha^2}{64\pi^2}\right) \frac{1}{s} \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta) \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{4s}\right) (1 + \cos^2\theta) \quad e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \text{ ultrarelativistisch} \end{aligned} \quad (11.52)$$

Wir können den **totalen Wirkungsquerschnitt** bestimmen:

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{4s}\right) \int_{-1}^1 d\cos\theta \int d\phi (1 + \cos^2\theta) \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{4s}\right) (2\pi) \left(\frac{8}{3}\right) \end{aligned} \quad (11.53)$$

daher

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (11.54)$$

Wir erinnern uns an die natürlichen Einheiten (Siehe Kap. 3.1), die wir benutzen. Der Wirkungsquerschnitt hängt von der inversen Schwerpunktsenergie ab: E_{SP}^2 , d.h.

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3E_{SP}^2} \text{ GeV}^{-2} \quad (\alpha \approx \frac{1}{137}) \quad (11.55)$$

Es gilt,

$$1 \text{ m} \approx 5,07 \times 10^{15} \text{ GeV}^{-1} \quad \text{dann} \quad 1 \text{ m}^2 \approx 25,7 \times 10^{30} \text{ GeV}^{-2} \quad (11.56)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist eine Fläche und wir definieren die Einheit

$$1 \text{ barn} \equiv 10^{-28} \text{ m}^2 \quad (11.57)$$

und

$$1 \text{ GeV}^{-2} = 0,0389 \times 10^{-30} \text{ m}^2 = 0,389 \text{ mb} \quad (11.58)$$

deshalb können wir schreiben

$$\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \approx \frac{8,68 \times 10^{-5}}{E_{SP}^2(\text{GeV}^2)} \text{ mb} = \frac{86,8}{E_{SP}^2(\text{GeV}^2)} \text{ nb} \quad (11.59)$$

Der erwartete Wirkungsquerschnitt und die gemessenen Werte am PETRA Beschleuniger sind als Funktion der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} in Abb. 11.5 gezeigt. Die Übereinstimmung zwischen der QED-Theorie und den Experimenten ist sehr gut.

In der Praxis wird oft das Verhältnis $R_{\mu\mu}$ betrachtet, definiert als

$$R_{\mu\mu}(s) \equiv \frac{\sigma_{gemessen}(s)}{\left(\frac{4\pi\alpha^2}{3s}\right)} \quad (11.60)$$

Das von Mark J gemessene Verhältnis ist in Abb. 11.6 gezeigt. Die Übereinstimmung zwischen der QED-Theorie und Mark J ist sehr gut.

11.5 Erhaltung der Helizität

Der Wirkungsquerschnitt des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses besitzt eine bestimmte Streuwinkelabhängigkeit (der Winkel θ wird zwischen dem einfallenden Elektron und dem auslaufende Myon, d.h. den Teilchen mit negativer Ladung, definiert):

$$\left(\frac{d\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}{d\Omega}\right)_{SP} \propto (1 + \cos^2\theta) \quad (11.61)$$

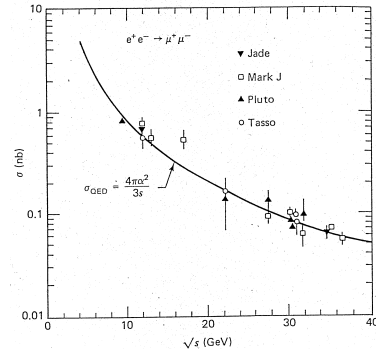


Abbildung 11.5: Der totale Wirkungsquerschnitt für den $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess als Funktion der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} .

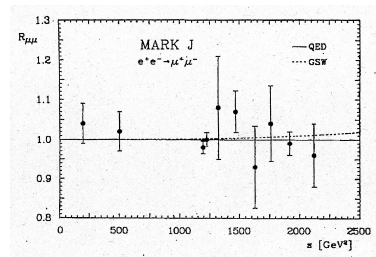
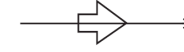


Abbildung 11.6: Das von Mark J gemessene Verhältnis $R_{\mu\mu}(s)$ als Funktion der Schwerpunktsenergie im Quadrat s .

Woher kommt diese Form? Wir werden beweisen, dass der Drehimpuls (d.h. Spin) verantwortlich ist.

Wir wählen eine **Spinbasis** (d.h. eine **Polarisationsbasis**). Wir betrachten den ultra-relativistischen Grenzfall ($E \gg m$) und verwenden die **Helizitätsbasis**:

$h=+1$ Rechtshändig: u_+



$h=-1$ Linkshändig: u_-



d.h. wir quantisieren die Spins entlang der Impulse.

Für $E \gg m$ kann man beweisen (bei Verwendung einer bestimmten Darstellung), dass gilt

$$\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)u \approx u_+ \quad \text{und} \quad \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)u \approx u_- \quad (11.62)$$

d.h. $1+\gamma^5$ und $1-\gamma^5$ wirken als **Projektionsoperatoren der Helizität** (Siehe auch Kap. 19).

Wir können die Form der elektromagnetischen Vektor-Ströme studieren:

$$\bar{u}\gamma^\mu u = (\bar{u}_- + \bar{u}_+)\gamma^\mu(u_- + u_+) \quad \text{wobei} \quad u = u_+ + u_- \quad (11.63)$$

Wir bemerken,

$$\begin{aligned} \bar{u}_- &= u_-^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) \gamma^0 \quad \text{weil} \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \\ &= u^\dagger \gamma^0 \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) \quad \text{weil} \quad \gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5 \\ &= \bar{u} \left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right) \end{aligned} \quad (11.64)$$

und damit

$$\begin{aligned} \bar{u}_- \gamma^\mu u_+ &= \frac{1}{4} \bar{u} (1+\gamma^5) \gamma^\mu (1+\gamma^5) u \\ &= \frac{1}{4} \bar{u} \gamma^\mu \underbrace{(1-\gamma^5)(1+\gamma^5)}_{=0} u \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11.65)$$

und in ähnlicher Weise

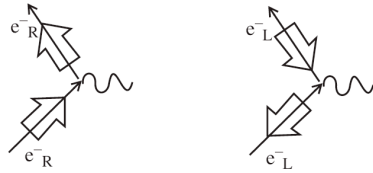
$$\bar{u}_+ \gamma^\mu u_- = 0 \quad (11.66)$$

Es folgt daraus, dass

im ultra-relativistischen Grenzfall ($E \gg m$) die Helizität an den Vertices erhalten wird:

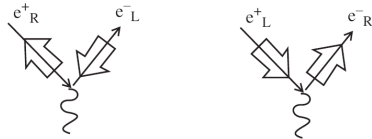
$$\bar{u}\gamma^\mu u = \bar{u}_-\gamma^\mu u_- + \bar{u}_+\gamma^\mu u_+ \quad (\text{ultrarelativistisch}) \quad (11.67)$$

Wir werden die Helizitäts-Zustände des Elektrons als e^-_R und e^-_L bezeichnen.:



Im Fall des Positrons müssen wir den Spinor u durch v ersetzen und als Folge wird die Helizität geändert (d.h. $p \rightarrow -p$ und der Spin bleibt unverändert).

An einem elektromagnetischen Vertex werden das Elektron und das Positron entgegengesetzte Helizität besitzen.



Deshalb müssen wir nur zwei Anfangsspinzustände betrachten:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_R) \quad \text{oder} \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_R e^-_L) \quad (11.68)$$

weil

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_L) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_R e^-_R) = 0 \quad (11.69)$$

Der Endzustand folgt ähnlichen Regeln: die Helizitäten der Myonen müssen entgegengesetzt sein. Zusammenfassend gibt es nur 4 nicht-verschwindende Spinkonfigurationen:

$$\begin{array}{ll} e^+_R e^-_L \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L & e^+_R e^-_L \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R \\ e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L & e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R \end{array}$$

Diese 4 Prozesse werden den gesamten Wirkungsquerschnitt ausmachen, d.h. wir werden die Elektronenspinzustände mitteln und die Myonenspinzustände summieren:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) &= \frac{1}{4} \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_R e^-_L \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_R e^-_L \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R) + \right. \\ &\quad \left. \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L) + \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R) \right] \quad (11.70) \end{aligned}$$

Tatsächlich kann man beweisen, dass die folgenden bestimmten Spinkonfigurationen die folgenden Wirkungsquerschnitte besitzen:

$$\begin{cases} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R) = \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} (1 + \cos \theta)^2 \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_R e^-_L \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L) = \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} (1 - \cos \theta)^2 \end{cases} \quad (11.71)$$

und ähnliche Ausdrücke für die $e^+_R e^-_L$ Reaktionen. Dieses Ergebnis kann mit Hilfe der Erhaltung des gesamten Drehimpulses erklärt werden. Siehe Abb. 11.7. Wir bemerken z.B., dass

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R) |_{\theta=180^\circ} &= \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} (1 + \cos 180^\circ)^2 = 0 \\ \frac{d\sigma}{d\Omega}(e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L) |_{\theta=180^\circ} &= \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} (1 - \cos 180^\circ)^2 = \frac{\alpha^2}{E_{SP}^2} \quad (11.72) \end{aligned}$$

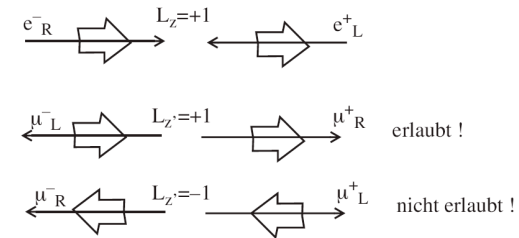


Abbildung 11.7: Helizitätserhaltung in der 180 Grad-Streuung. Die z -Komponente des Drehimpulses muss erhalten werden.

Diese Bedingung folgt aus der Erhaltung der z -Komponente des gesamten Drehimpulses. Wenn der Streuwinkel gleich 180 Grad ist, ist es unmöglich, einen Endzustand mit z -Komponente des gesamten Drehimpulses $L_{z'} = -1$ zu

erzeugen. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für $e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R$ verschwindet deshalb, wenn $\theta=180$ Grad ist, und wir verstehen den Ursprung der $(1 + \cos \theta)^2$ -Abhängigkeit.

In ähnlicher Weise kann man die $(1 - \cos \theta)^2$ -Abhängigkeit des $e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L$ Prozesses erklären.

Wenn wir beide Beiträge addieren, erhalten wir die erwartete $(1 + \cos^2 \theta)$ -Abhängigkeit (Siehe Abb. 11.8):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_L \mu^-_R) + \frac{d\sigma}{d\Omega} (e^+_L e^-_R \rightarrow \mu^+_R \mu^-_L) &= \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} [(1 + \cos \theta)^2 + (1 - \cos \theta)^2] \\ &= \frac{\alpha^2}{4E_{SP}^2} 2(1 + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (11.73)$$

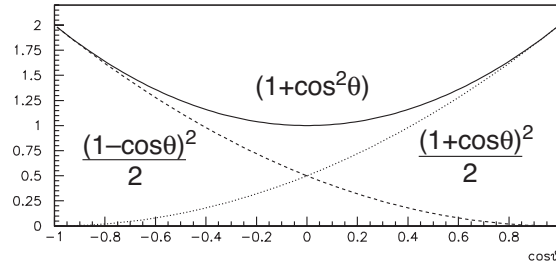


Abbildung 11.8: Streuwinkel-Abhängigkeit des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses.

11.6 Vorwärts-rückwärts-Asymmetrie

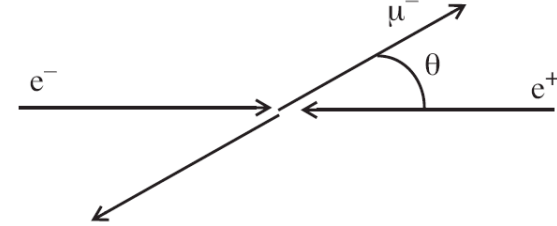
Im letzten Kapitel haben wir die Streuwinkel-Abhängigkeit des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses im Schwerpunktsystem hergeleitet und erklärt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto (1 + \cos^2 \theta) \quad (11.74)$$

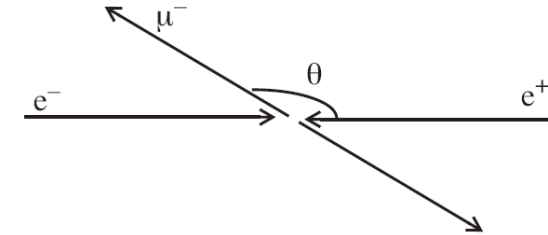
Der experimentelle Beweis dieser Abhängigkeit ist natürlich ein wichtiger Test der Theorie. Bei einer *Messung der Ladung der Myonen* im Endzustand kann diese Abhängigkeit gemessen werden.

Man definiert oft zwei Bereiche des Streuwinkels:

1. Vorwärts-Bereich: $\cos \theta > 0$



2. Rückwärts-Bereich: $\cos \theta < 0$



Wir definieren die **Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie** A_{FB} als

$$A_{FB} \equiv \frac{\int_{\cos \theta > 0} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} - \int_{\cos \theta < 0} d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}}{\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}} \quad (11.75)$$

Experimentell kann man die Anzahl N von Ereignissen in beiden Bereichen messen und die gemessene Asymmetrie wird so definiert:

$$A = \frac{N(\theta < 90^\circ) - N(\theta > 90^\circ)}{N(\theta < 90^\circ) + N(\theta > 90^\circ)} \quad (11.76)$$

Diese Messung ist experimentell relativ einfach und stellt deshalb eine relativ einfache Überprüfung der Theorie dar.

Wenn wir die Asymmetrie des $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozesses im Schwerpunktsystem bestimmen, erhalten wir wegen der symmetrischen $(1 + \cos^2 \theta)$ -Abhängigkeit eine verschwindende Asymmetrie:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{QED} \propto (1 + \cos^2 \theta) \implies A_{\mu\mu}^{QED} = A(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0 \quad (11.77)$$

Die experimentellen Resultate von **Mark J** sind in Abb. 11.9 und 11.10 gezeigt. In Experimenten wird oft eine $(1 + A \cos^2 \theta + B \cos \theta)$ -Abhängigkeit gefittet. Von der QED wird ein verschwindendes B erwartet.

Wir bemerken, dass die allgemeine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment gut ist. Es gibt aber Hinweise, dass bei den höchsten Schwerpunktsenergien die Asymmetrie nicht vollständig verschwindet (d.h. $B \neq 0$), und dass ein "Trend" existiert. Diese Beobachtung wird im Kap. 19 erklärt.

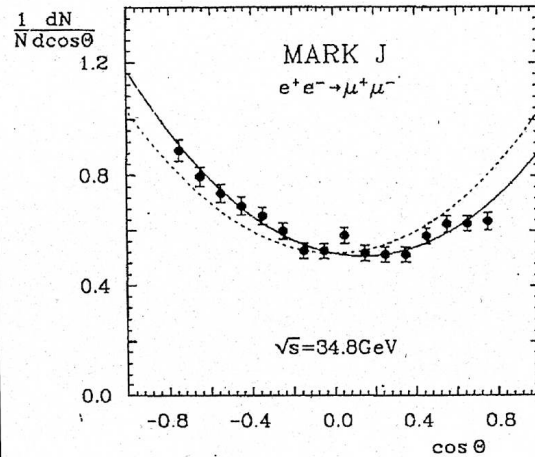


Abbildung 11.9: Der von Mark J gemessene differentielle Wirkungsquerschnitt für den $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 34.8$ GeV. Die gestrichelte Kurve gilt für verschwindende Asymmetrie.

11.7 Der $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ Prozess

Wir haben den $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ Prozess in Einzelheiten behandelt. Wir betrachten nun einen anderen, ähnlichen Prozess, nämlich den folgenden:

$$e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^- \quad (11.78)$$

Die invariante Amplitude für $e^-(1)\mu^-(2) \rightarrow e^-(4)\mu^-(3)$ ist gleich (Siehe Abb. 11.11)

$$-i\mathcal{M}(e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-) = \frac{ie^2}{q^2} (\bar{u}(4)\gamma^\mu u(1)) (\bar{u}(3)\gamma_\mu u(2)) \quad (11.79)$$

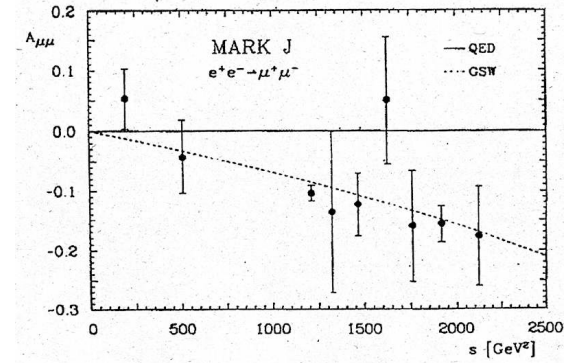


Abbildung 11.10: Die von Mark J gemessene vorwärts-rückwärts-Asymmetrie $A_{\mu\mu}$ als Funktion der Schwerpunktsenergie im Quadrat s .

und für die über die Spins gemittelte und summierte Amplitude im Quadrat erhalten wir

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr}((\not{p}_4 + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu) \text{Tr}((\not{p}_3 + m_\mu)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m_\mu)\gamma_\nu) \quad (11.80)$$

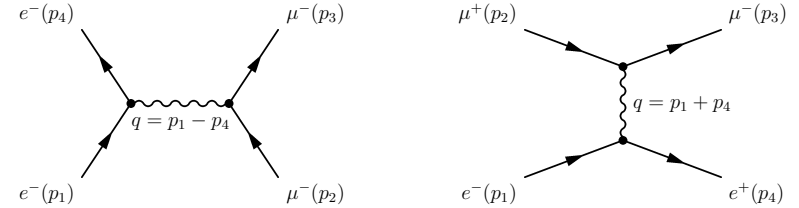


Abbildung 11.11: Definition der kinematischen Größen für die Prozesse $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ (links) und $e^-e^+ \rightarrow \mu^+\mu^-$ (rechts).

Wir bemerken, dass die invariante Amplitude für $e^-(1)e^+(4) \rightarrow \mu^+(2)\mu^-(3)$ ist (Siehe Gl. 11.10):

$$-i\mathcal{M}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{ie^2}{q^2} (\bar{v}(4)\gamma^\mu u(1)) (\bar{u}(3)\gamma_\mu v(2)) \quad (11.81)$$

Daher gilt:

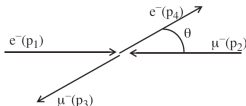
$$\mathcal{M}_{e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathcal{M}_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(p_1, -p_2, p_3, -p_4) \quad (11.82)$$

In der invarianten Amplitude kann ein einfallendes Teilchen durch ein auslaufendes Antiteilchen ersetzt werden durch den Austausch $p^\mu \rightarrow -p^\mu$.

Es folgt daraus, dass wir die Spuren nicht mehr neu bestimmen müssen. Wir können das Ergebnis für den $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Prozess direkt aus dem $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ Prozess herleiten. Es folgt, für $m_e=0$ (Vergleiche mit Gl. 11.33):

$$\langle |\mathcal{M}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-)|^2 \rangle = \frac{8e^4}{q^4} \{ (p_1 p_3)(p_4 p_2) + (p_1 p_2)(p_3 p_4) - m_\mu^2 (p_1 p_4) \} \quad (11.83)$$

Um den Ausdruck weiter zu vereinfachen, müssen wir die Kinematik des Prozesses betrachten. Diese wird verschieden vom $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ Prozess sein. Als Funktion der Mandelstam-Variablen finden wir:



$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 \\ t = (p_1 - p_4)^2 \\ u = (p_1 - p_3)^2 \end{cases}$$

Im Vergleich zum $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ Prozess finden wir den folgenden Austausch (Siehe auch Abb. 11.11):

$$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^- \begin{cases} s = (p_1 + p_4)^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 \\ u = (p_1 - p_2)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 \\ t = (p_1 - p_4)^2 \\ u = (p_1 - p_3)^2 \end{cases} e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^- \quad (11.84)$$

d.h. unter dem Austausch $p_2 \leftrightarrow -p_2$ und $p_4 \leftrightarrow -p_4$ kriegen wir:

$$s \leftrightarrow t, \quad t \leftrightarrow u, \quad \text{und} \quad u \leftrightarrow s$$

Der Austausch der Mandelstam-Variablen liefert direkt das Matrixelement für den $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Prozess, d.h. im ultra-relativistischen Grenzfall erhalten wir (Siehe Gl. 11.48):

$$\langle |\mathcal{M}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-)|^2 \rangle \approx (2e^4) \left\{ \frac{s^2 + u^2}{t^2} \right\} \quad \text{ultra-relativistisch} \quad (11.85)$$

Mit den folgenden Näherungen

$$\begin{cases} s = (2E)^2 \\ t \approx -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \\ u \approx -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) \end{cases} \quad (11.86)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{SP} &= \left(\frac{2e^4}{64\pi^2} \right) \frac{1}{s} \left(\frac{s^2 + \frac{1}{4}s^2(1 + \cos \theta)^2}{\frac{1}{4}s^2(1 - \cos \theta)^2} \right) \\ &= \left(\frac{\alpha^2}{2s} \right) \left(\frac{4 + (1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} \right) \end{aligned} \quad (11.87)$$

$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ ultrarelativistisch

Wir bemerken, dass der Wirkungsquerschnitt eine Divergenz bei $\theta \rightarrow 0$ besitzt (Der totale Wirkungsquerschnitt kann nicht berechnet werden):

$$\left(\frac{d\sigma(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-)}{d\Omega} \right)_{SP} \propto \frac{1}{\theta^4} \rightarrow \infty (\theta \rightarrow 0) \quad (11.88)$$

Dieses Verhalten kann durch das Feynman-Diagramm verstanden werden. Im Fall des $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Prozesses ist der 4-Impuls des ausgetauschten Photons durch

$$q^2 = (p_1 - p_4)^2 \equiv t \quad ! \quad (11.89)$$

gegeben. Siehe Abb. 11.11. Die Masse des ausgetauschten (virtuellen) Photons ist gleich

$$m_\gamma^* = q^2 = t \approx -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) < 0 \quad ! \quad (11.90)$$

Wenn $\theta \rightarrow 0$, $\cos \theta \rightarrow 1$, $t \rightarrow 0$ und $m_\gamma^* \rightarrow 0$. Das Photon wird reell, d.h. auf der Massenschale liegen ("on-mass shell"). Wenn das ausgetauschte Photon reell wird, nimmt der Wirkungsquerschnitt zu.

Weil

$$\langle |\mathcal{M}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-)|^2 \rangle \propto \frac{1}{t^2} \quad (11.91)$$

spricht man vom **t-Kanal**.

Im Gegensatz dazu gibt es im *s-Kanal* keine Divergenz bei $\theta \rightarrow 0$. Weil

$$\langle |\mathcal{M}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-)|^2 \rangle \propto \frac{1}{s^2} \quad (11.92)$$

wird das ausgetauschte Photon nie reell.

Die (virtuelle) Masse des ausgetauschten Photons ist im s-Kanal gleich der Schwerpunktsenergie:

$$q^2 = s = E_{SP}^2 \implies m_\gamma^* = \sqrt{s} = E_{SP} \quad (11.93)$$

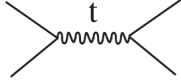
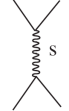
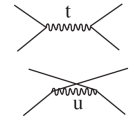
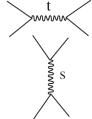
11.8 “Crossing”-Symmetrie

Wir haben das Ergebnis für den $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ Prozess aus dem $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ Prozess gefunden, dank der sogenannten “Crossing”-Symmetrie.

Im Allgemeinen sind die invarianten Amplituden von Prozessen, die sich voneinander durch einfallende Teilchen und ausfallende Antiteilchen unterscheiden, leicht korrelierbar.

Einige Resultate sind in Tabelle 11.3 zusammengefasst.

Tabelle 11.3: Einige Prozesse, die durch die “Crossing”-Symmetrie korreliert sind.

$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$		$\frac{s^2 + u^2}{t^2}$ Vorwärts-Peak
$e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$		$\frac{t^2 + u^2}{s^2}$ ($1 + \cos^2 \theta$)-Abhängigkeit
$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ (Møller)		$\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2 + t^2}{u^2}$ Vorwärts-Peak Rückwärts-Peak
$e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-$ (Bhabha)		$\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} + \frac{u^2 + t^2}{s^2}$ Vorwärts-Peak und s-Kanal