

# Das Zeitschrittverfahren in PALM

Heiko Jansen

11. Februar 2004

Bisher wurde in PALM das sogenannte *Leapfrog* Verfahren verwendet, das wie folgt definiert ist:

$$\psi_{n+1} = \psi_{n-1} + 2h_n F(\psi_n), \quad (1)$$

wobei  $\psi_n$  die prognostische Variable (Windgeschwindigkeit, Temperatur, Feuchte etc.) zum n-ten Integrationsschritt bezeichnet,  $h_n$  ist der Zeitschritt und  $F$  ist die Funktion der Kräfte, die  $\psi$  beeinflussen. Dieses besitzt zwar relativ robuste Eigenschaften, aber zwei deutliche Nachteile: der Zeitschritt darf aus Stabilitätsgründen höchstens 20% des nach dem Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) Kriterium (COURANT ET AL., 1928) maximal möglichen Zeitschritts betragen (MASON, 1989)<sup>1</sup> und es ist der Einsatz eines Zeitfilters erforderlich (ASSELIN, 1972). Durch Einsatz eines moderneren Zeitschrittverfahrens, etwa eines Runge-Kutta-Verfahrens dritter Ordnung (wie z.B. im LES-Modell von SULLIVAN ET AL., 1996) könnte der Zeitbedarf reduziert und gleichzeitig noch die Genauigkeit der Prognose verbessert werden. Runge-Kutta Verfahren wurden auch in den LES Arbeiten von (SPALART ET AL., 1991) und (HUAI ET AL., 1997) eingesetzt.

## 1 Runge-Kutta Verfahren

Es wurden nun zwei *Runge-Kutta Verfahren* implementiert. Zunächst etwas zur Definition: Ein *s-stufiges Runge-Kutta Verfahren* ist ein Einschrittverfahren der Form

$$\begin{aligned} k_i &= F\left(\psi_n + h_n \sum_{j=1}^l a_{ij} k_j\right), \quad i = 1 \dots s, \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + h_n \sum_{i=1}^s b_i k_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Koeffizienten  $a_{ij}$  und  $b_i$  sind geeignet zu bestimmen (siehe zum Beispiel LAMBERT (1983), Seiten 114ff.). Das Verfahren heisst *explizit*, falls  $l = i - 1$ , *semi-implizit*, falls  $l = i$  und *implizit*, falls  $i < l \leq n$ . Implizite Verfahren besitzen meist bessere Stabilitätseigenschaften als explizite Verfahren, aus Gründen des Rechenaufwands kommen für unser Problem jedoch nur explizite Verfahren in Frage. Für ein konsistentes Runge-Kutta Verfahren muss  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$  gelten, dieser Zusammenhang sollte als Prüfsumme in der Implementierung des Verfahrens Verwendung finden. Der Vorteil der Runge-Kutta Verfahren, im Vergleich zum Leapfrog Verfahren, ist, dass in der Zeit rein vorwärts gerechnet wird. Beim Leapfrog Verfahren muss nach jeder Änderung der Schrittweite ein Schritt mit dem Euler

---

<sup>1</sup>praktisch wurde bei der Implementierung eine notwendige Grenze von 10% festgestellt (Raasch, pers. Mitteilung)

Verfahren gerechnet werden, um ein  $\psi_{n+1}$  mit dem passenden zeitlichen Abstand zu erhalten. Diese Notwendigkeit entfällt bei Anwendung eines Runge-Kutta Verfahrens.

Zunächst wurde ein zweistufiges Runge-Kutta Verfahren zweiter Ordnung implementiert (DURRAN (1999), Seiten 68ff.):

$$\begin{aligned} k_1 &= F(\psi_n), \\ k_2 &= F(\psi_n + h_n k_1), \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + \frac{1}{2} h_n (k_1 + k_2). \end{aligned}$$

Zur Implementation ist es günstig,  $\psi_{n+1}$  aus dem Zwischenergebnis  $\tilde{\psi}$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi_n + h_n F(\psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \tilde{\psi} + \frac{1}{2} h_n (F(\tilde{\psi}) - F(\psi_n)). \end{aligned} \quad (3)$$

Das folgende dreistufige Runge-Kutta Verfahren dritter Ordnung hat bessere Stabilitätseigenschaften als das zweistufige Verfahren (DURRAN (1999), Seiten 68ff.):

$$\begin{aligned} k_1 &= F(\psi_n), \\ k_2 &= F(\psi_n + \frac{1}{3} h_n k_1), \\ k_3 &= F(\psi_n - \frac{3}{16} h_n k_1 + \frac{15}{16} h_n k_2), \\ \psi_{n+1} &= \psi_n + \frac{1}{30} h_n (5k_1 + 9k_2 + 16k_3). \end{aligned}$$

Zur Implementation ist es wiederum günstig,  $\psi_{n+1}$  aus den beiden Zwischenergebnissen  $\tilde{\psi}_1$  und  $\tilde{\psi}_2$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \psi_n + \frac{1}{3} h_n F(\psi_n), \\ \tilde{\psi}_2 &= \tilde{\psi}_1 + \frac{1}{48} h_n (45F(\tilde{\psi}_1) - 25F(\psi_n)), \\ \psi_{n+1} &= \tilde{\psi}_2 + \frac{1}{240} h_n (128F(\tilde{\psi}_2) - 153F(\tilde{\psi}_1) + 85F(\psi_n)). \end{aligned} \quad (4)$$

Dieses Verfahren hat jedoch gegenüber dem zweistufigen Verfahren (3) den Nachteil, daß es kostspieliger im Speicherbedarf ist, da ein Datenfeld mehr benötigt wird. Mit der Implementation (3) müssen die Größen  $\psi_n$ ,  $\psi_{n+1}$ ,  $F(\psi_n)$  gespeichert werden, die aktuelle Tendenz  $F(\tilde{\psi})$  wird nur lokal benötigt. Beim dreistufigen Verfahren sind es  $\psi_n$ ,  $\psi_{n+1}$ ,  $F(\psi_n)$ ,  $F(\tilde{\psi}_1)$ . Dies kann vermieden werden, indem nach dem zweiten Schritt in (4) die Größen  $F(\psi_n)$  und  $F(\tilde{\psi}_1)$  zusammengefasst und auf das Feld  $F(\tilde{\psi}_1)$  gespeichert werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 &= \psi_n + \frac{1}{3} h_n F(\psi_n), \\ \tilde{\psi}_2 &= \tilde{\psi}_1 + \frac{1}{48} h_n (45F(\tilde{\psi}_1) - 25F(\psi_n)), \\ F(\tilde{\psi}_1) &= -153F(\tilde{\psi}_1) + 85F(\psi_n), \\ \psi_{n+1} &= \tilde{\psi}_2 + \frac{1}{240} h_n (128F(\tilde{\psi}_2) + F(\tilde{\psi}_1)). \end{aligned} \quad (5)$$

## 2 Implementation

Die Verfahren werden in PALM im Modul `prognostic_equations.f90` wie folgt implementiert. Der neue Wert von  $\psi$  berechnet sich, hier exemplarisch für  $\tilde{\psi}_2$ , gemäß

```

u_p(k,j,i) = ( 1.0-tsc(1) ) * u_m(k,j,i) + tsc(1) * u(k,j,i)
              + dt_3d * (tsc(2) * tend(k,j,i) + tsc(3) * tu_m(k,j,i)
              - tsc(4) * ( p(k,j,i) - p(k,j,i-1) ) * ddx )
              - tsc(5) * rdf(k) * ( u(k,j,i) - ug ),

```

wobei in  $u_p$  der neue Wert (hier:  $\tilde{u}_2$ ), in  $u$  der aktuelle Wert ( $\tilde{u}_1$ ) und in  $u_m$  der Wert zum letzten Zeitschritt gespeichert ist.  $tend$  ist die aktuelle Tendenz ( $F(u_1)$ ) und  $tu_m$  ist vorherige Tendenz ( $F(u_n)$ ). Der Druck wird mit  $p$  bezeichnet und  $rdf$  ist der Koeffizient für die Rayleigh-Dämpfung,  $ug$  ist der geostrophische Wind. Der Zeitschritt ist in  $dt\_3d$  gespeichert,  $ddx$  bezeichnet die Gitterweite in x-Richtung. Das eigentliche Zeitschrittverfahren ist im Koeffizientensatz  $tsc$  gespeichert, der im Modul `timestep_scheme_steering.f90` definiert wird (siehe Tabelle 1).

tsc(1)	tsc(2)	tsc(3)	tsc(4)	tsc(5)	Verfahren
1	1	0	1	1	Euler
0	2	0	1	2	Leapfrog
1	1	0	1	0	RK2, erster Teilschritt
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	RK2, zweiter Teilschritt
1	$\frac{1}{3}$	0	1	0	RK3, erster Teilschritt
1	$\frac{15}{16}$	$-\frac{25}{48}$	0	0	RK3, zweiter Teilschritt
1	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	0	1	RK3, dritter Teilschritt

Tabelle 1: Faktoren für die in PALM implementierten Zeitschrittverfahren.

Der Koeffizient  $tsc(4)$  bestimmt die Präkonditionierung des Drucklösers. Dieser darf pro Zeitschritt nur einmal aufgerufen werden, da sonst der Drucklöser überkonditioniert wird. Bei den mehrstufigen Runge-Kutta Verfahren ist es sinnvoll, den Aufruf im jeweils ersten Teilschritt zu tätigen. Der Koeffizient  $tsc(5)$  steuert die Rayleigh Dämpfung und wird jeweils im letzten Teilschritt aktiviert. Beim Leapfrog Verfahren geht der entsprechende Term zweifach ein, da sich dieses Verfahren über 2 Schrittängen erstreckt.

### 3 Beispielmodellkonfiguration

Die neu implementierten Verfahren wurden durch Integration der Beispielmodellkonfiguration getestet, in der eine quasi-stationäre, konvektive, atmosphärische Grenzschicht ohne mittleren Horizontalwind simuliert wird (siehe Anhang). Als Referenz wurde die Integration mit dem Leapfrog Verfahren und einem CFL Faktor von 0.2 gewählt. Diesem Modelllauf wurden Läufe mit den Runge-Kutta Verfahren und unterschiedlichen CFL Faktoren gegenübergestellt. Alle Integrationen wurden auf 2 Prozessoren eines Rechners des lokalen Linuxclusters durchgeführt. Die Runge-Kutta Verfahren sind bis CFL=1 stabil. Das zweistufige Runge-Kutta Verfahren (3) ist bei einem CFL Faktor von 0.9 um den Faktor  $\sim 5$  schneller als das Referenzverfahren, das dreistufige Runge-Kutta Verfahren (4) ergibt bei einem CFL Faktor von 0.9 einen Rechenzeitgewinn um den Faktor  $\sim 3.5$ . Ergebnisse sind in den Tabellen 2 und 3 dargestellt. Abbildungen 1 - 3 zeigen Zeitreihen einer Integration über 6 Stunden. Die Zeitreihen der Runge-Kutta Läufe zeigen die gleichen Größenordnungen wie der Referenzlauf. Die Geschwindigkeiten sind bis zum Ende der Integration stabil und wachsen nicht weiter an.

Lauf	Verfahren	CFL	$h_n$	$U_{\max}$	$V_{\max}$	$W_{\max}$	$z_i$	Iter	Zeit	Zeitfaktor
-	-	s	-	$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	m	-	s	-
0	Leapfrog	0.2	1.46	-2.04	-2.53	3.42	800	2487	534	1.00
1	RK2	0.2	2.28	-2.35	-2.07	4.36	950	1196	387	1.38
2	RK2	0.4	5.69	-2.83	2.86	3.52	900	593	198	2.70
3	RK2	0.6	7.47	-2.33	-2.14	3.89	850	411	143	3.73
4	RK2	0.8	9.52	-2.55	-2.25	4.20	800	316	110	4.86
5	RK2	0.9	11.00	-2.60	-2.26	3.98	850	286	99	5.39
6	RK2	1.0	12.60	3.06	2.83	3.90	900	263	99	5.39
7	Leapfrog	0.2	1.01	-3.60	-3.41	4.98	1250	20221	54710	1.00
8	RK2	0.9	8.84	-3.56	3.02	5.09	1200	2217	12507	4.37
9	Leapfrog	0.2	0.86	3.89	-4.38	5.50	1450	42740	-	-
10	RK2	0.9	8.92	3.36	3.94	5.04	1400	4691	-	-

Tabelle 2: Testergebnisse für das zweistufige Runge-Kutta Verfahren (3). Der CFL Faktor ist mit 'CFL', die Zeitschrittänge am Ende der Integration mit  $h_n$  bezeichnet.  $U_{\max}$ ,  $V_{\max}$  und  $W_{\max}$  sind die maximalen Geschwindigkeitskomponenten und  $z_i$  die erreichte Grenzschichthöhe. Die Anzahl der Iterationen ist mit 'Iter' bezeichnet. Der Zeitfaktor bezieht sich auf den jeweiligen Referenzlauf. Alle Läufe sind auf 2 Prozessoren des lokalen Linuxclusters gerechnet. Lauf 0-6: Beispielmodellkonfiguration. Lauf 7,8: 6 Stunden Integration und  $120 \times 120 \times 64$  statt  $40 \times 40 \times 40$  Gitterpunkte; Lauf 11,12: Wie Lauf 9,10, aber 12 Stunden Integration.

Lauf	Verfahren	CFL	$h_n$	$U_{\max}$	$V_{\max}$	$W_{\max}$	$z_i$	Iter	Zeit	Zeitfaktor
-	-	s	-	$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	$m s^{-1}$	m	-	s	-
0	Leapfrog	0.2	1.46	-2.04	-2.53	3.42	800	2487	534	1.00
1	RK3	0.2	2.69	-2.85	-2.35	3.70	900	1169	633	0.84
2	RK3	0.4	5.19	2.27	-2.18	3.86	900	595	476	1.12
3	RK3	0.6	7.91	-2.72	-2.87	3.85	900	405	220	2.43
4	RK3	0.8	9.87	-2.42	-2.60	3.91	900	313	177	3.02
5	RK3	0.9	11.10	2.53	-2.66	3.94	900	282	151	3.54
6	RK3	1.0	12.40	-2.37	-2.51	4.04	900	257	137	3.90
7	Leapfrog	0.2	1.01	-3.60	-3.41	4.98	1250	20221	54710	1.00
8	RK3	0.9	9.93	-3.30	3.23	4.56	1200	2173	13933	3.93
9	Leapfrog	0.2	0.86	3.89	-4.38	5.50	1450	42740	-	-
10	RK3	0.9	7.31	-3.86	-3.51	6.16	1450	4575	-	-

Tabelle 3: Testergebnisse für das dreistufige Runge-Kutta Verfahren (4). Bezeichnungen wie in Tabelle 2.

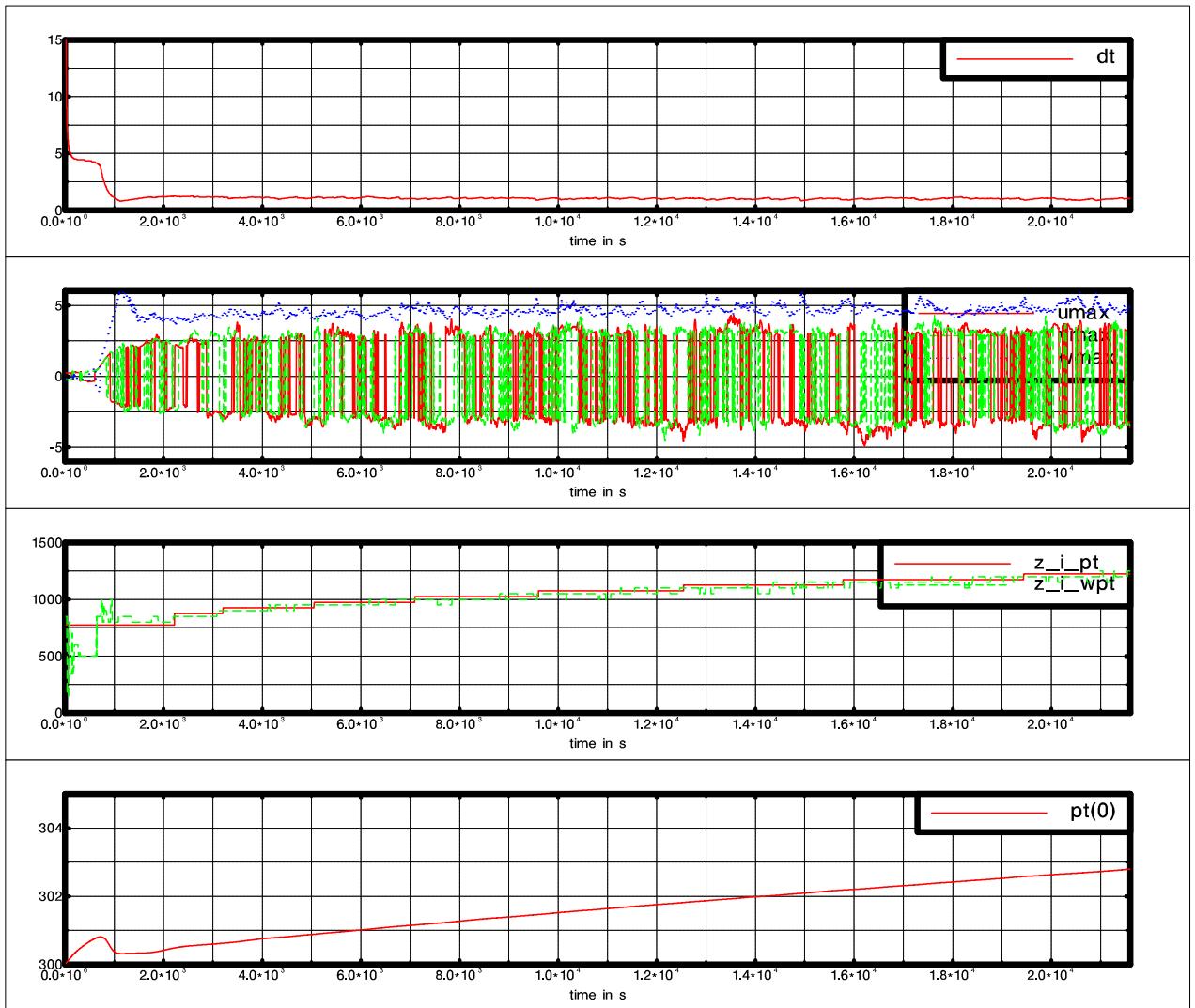


Abbildung 1: Zeitserie des Referenzlaufes (Lauf Nr. 7 in Tabelle 2, Leapfrog, CFL Faktor 0.2).

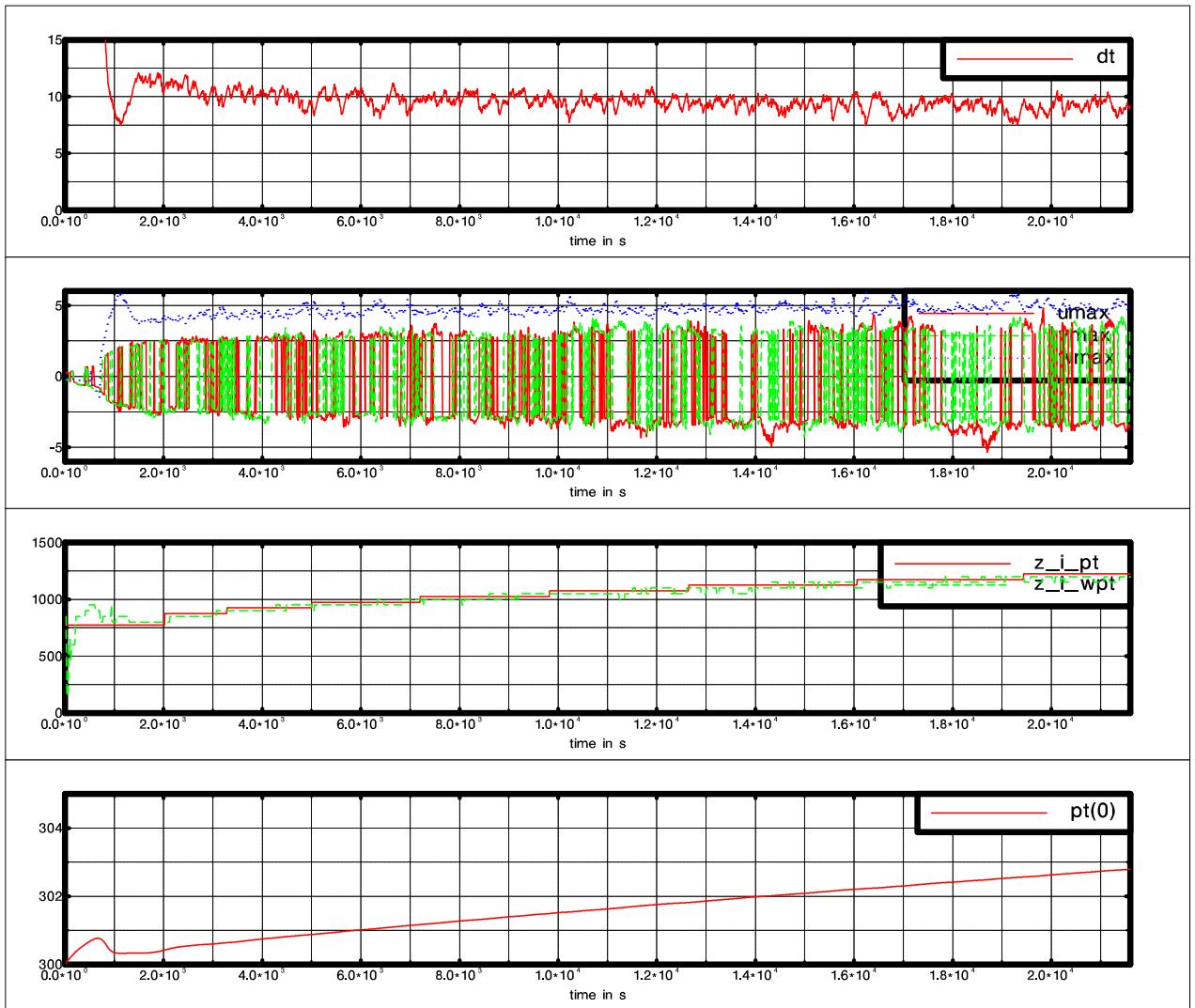


Abbildung 2: Zeitserie eines Runge-Kutta-2 Laufes (Lauf Nr. 8 in Tabelle 2, CFL Faktor 0.8).

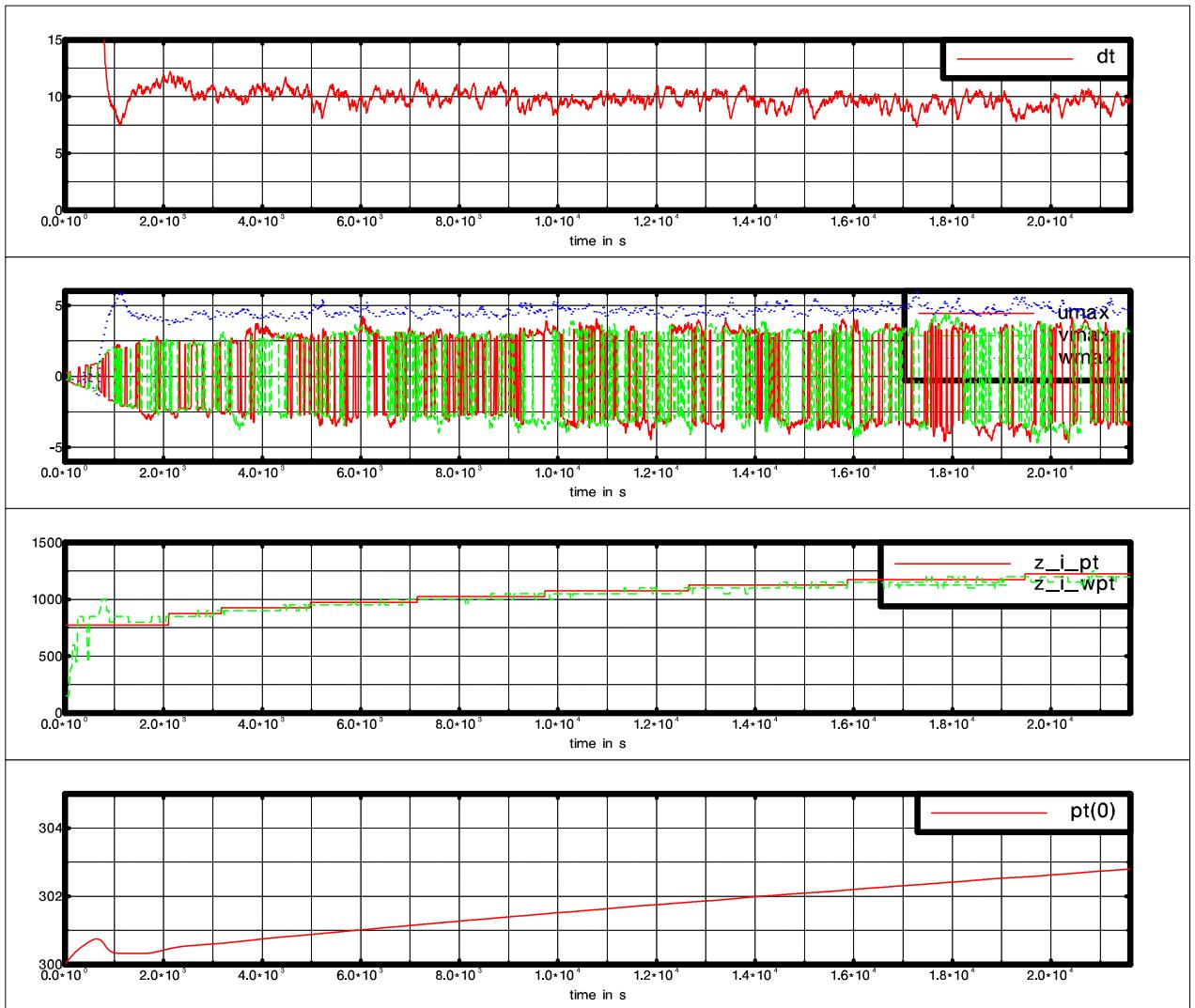


Abbildung 3: Zeitserie eines Runge-Kutta-3 Laufes (Lauf Nr. 8 in Tabelle 3, CFL Faktor 0.9).

Es wurden überdies Spektren der Geschwindigkeiten und der potentiellen Temperatur betrachtet. Ergebnisse sind in Abbildungen 4 - 9 dargestellt. Die in x-Richtung ermittelten Spektren der Runge-Kutta Läufe sind im wesentlichen vergleichbar mit dem Referenzlauf. Auffällig sind jedoch die fehlenden Spitzen im Spektrum der U und W Geschwindigkeiten, die im Referenzlauf bei  $k \sim 4 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$  (Abb. 4) auftreten. In den in y-Richtung ermittelten Spektren treten diese Unterschiede nicht auf.

PALM 2.8 run: leapfrog.00 host: lcmuk 06-02-04 13:51:23

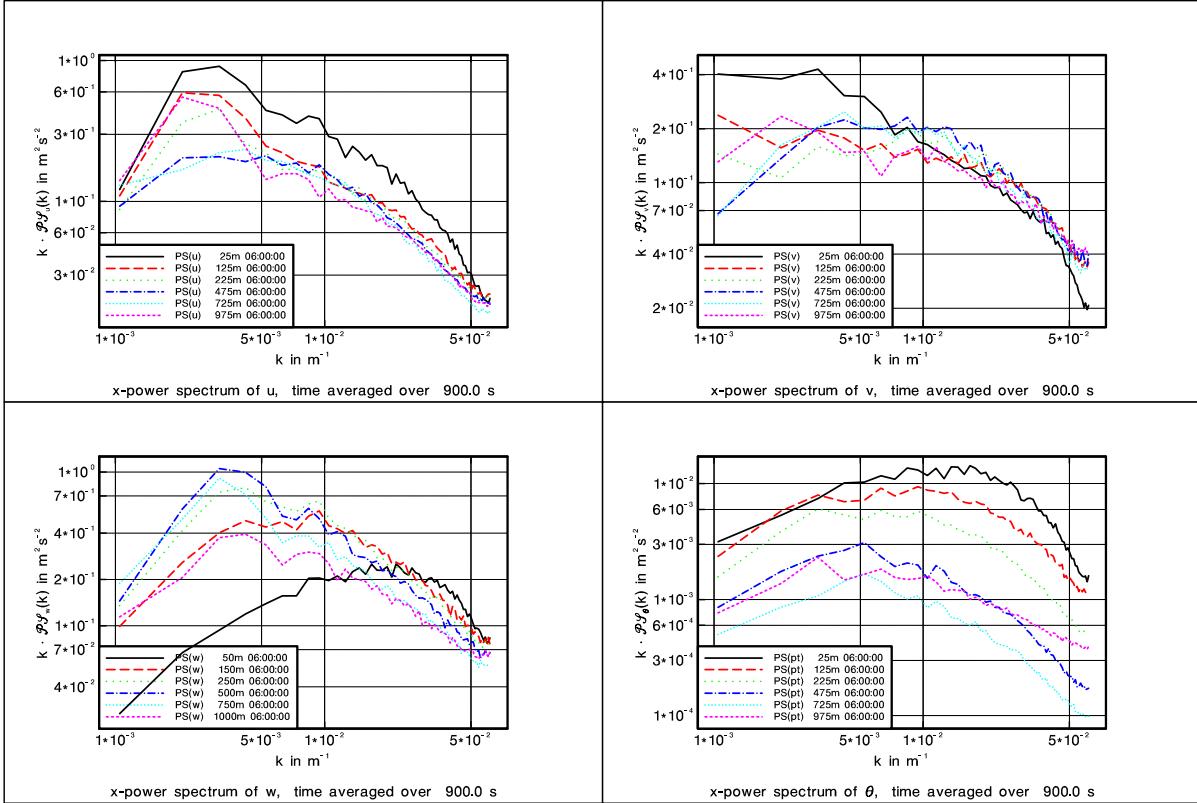


Abbildung 4: Ausgewählte Spektren der Geschwindigkeiten und der potentiellen Temperatur. Referenzlauf, in x-Richtung ermittelt und nach 6 Stunden Integration (Lauf Nr. 7 in Tabelle 2, Leapfrog, CFL Faktor 0.2).

PALM 2.8 run: rk2test.00 host: lcmuk 04-02-04 07:37:01

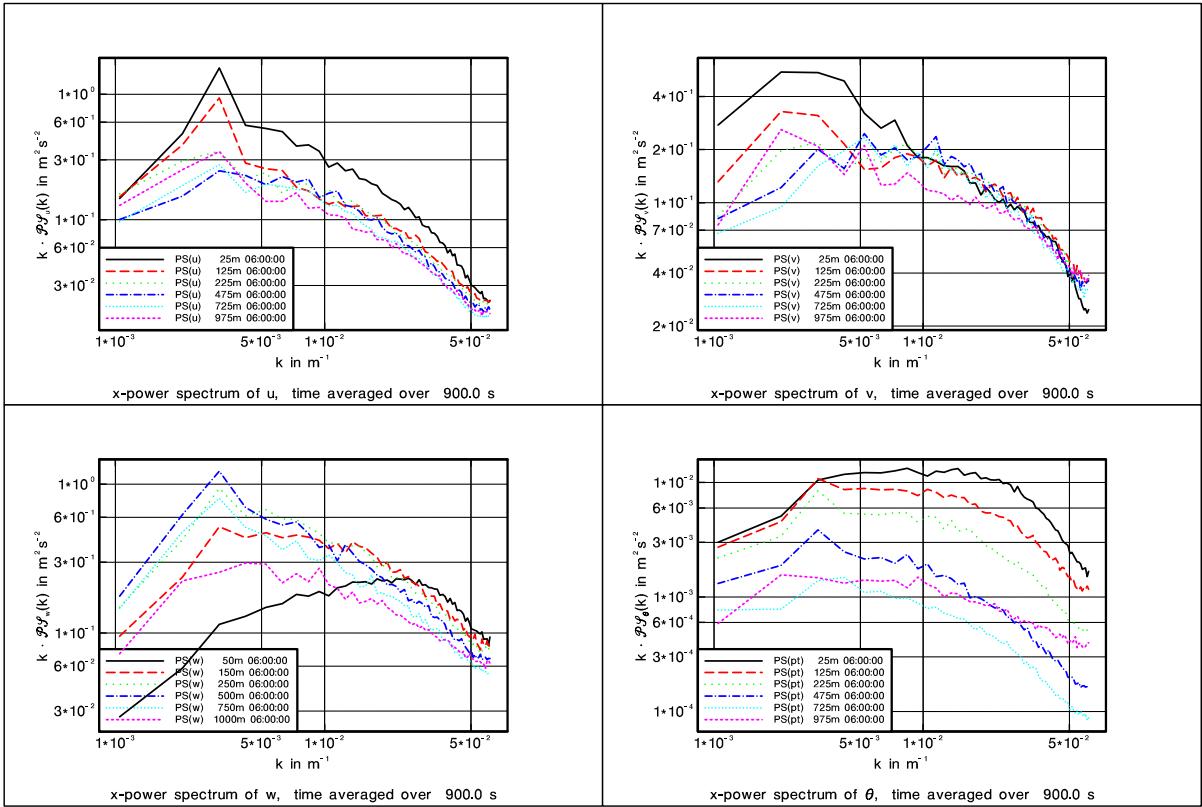


Abbildung 5: Ausgewählte Spektren der Geschwindigkeiten und der potentiellen Temperatur. Zwei-stufiges Runge-Kutta Verfahren, in x-Richtung ermittelt und nach 6 Stunden Integration (Lauf Nr. 8 in Tabelle 2, CFL Faktor 0.9).

PALM 2.8 run: rk3test.00 host: lcmuk 05-02-04 07:33:53

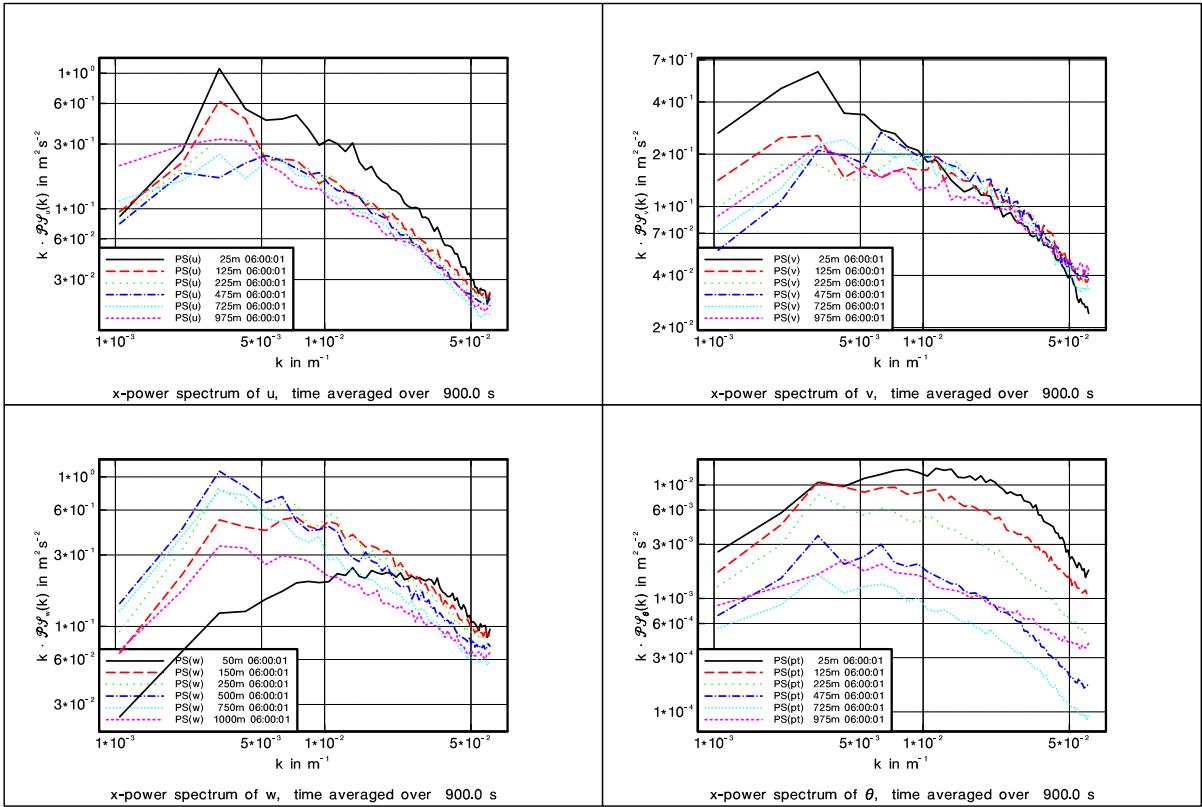


Abbildung 6: Ausgewählte Spektren der Geschwindigkeiten und der potentiellen Temperatur. Dreistufiges Runge-Kutta Verfahren, in x-Richtung ermittelt und nach 6 Stunden Integration (Lauf Nr. 8 in Tabelle 3, CFL Faktor 0.9).

PALM 2.8 run: leapfrog.00 host: lcmuk 06-02-04 13:51:23

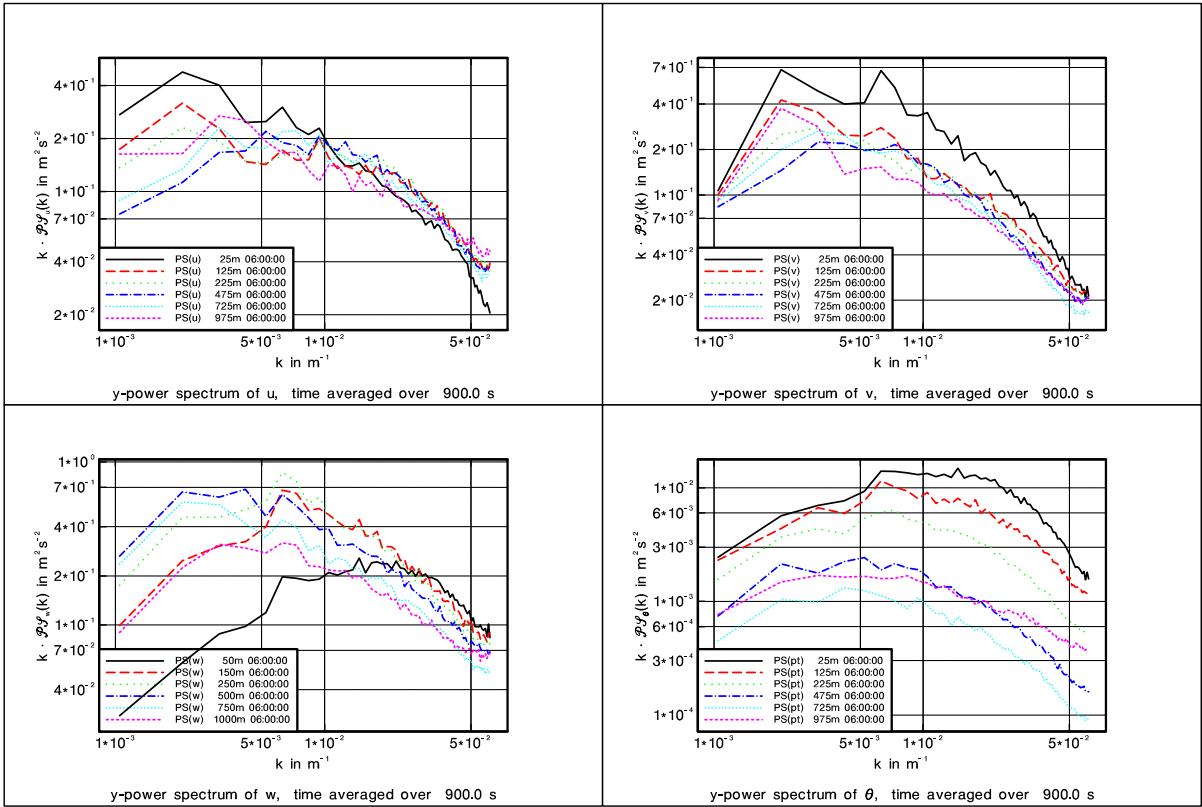


Abbildung 7: Ausgewählte Spektren der Geschwindigkeiten und der potentiellen Temperatur. Referenzlauf, in  $y$ -Richtung ermittelt und nach 6 Stunden Integration (Lauf Nr. 7 in Tabelle 2, Leapfrog, CFL Faktor 0.2).

PALM 2.8 run: rk2test.00 host: lcmuk 04-02-04 07:37:01

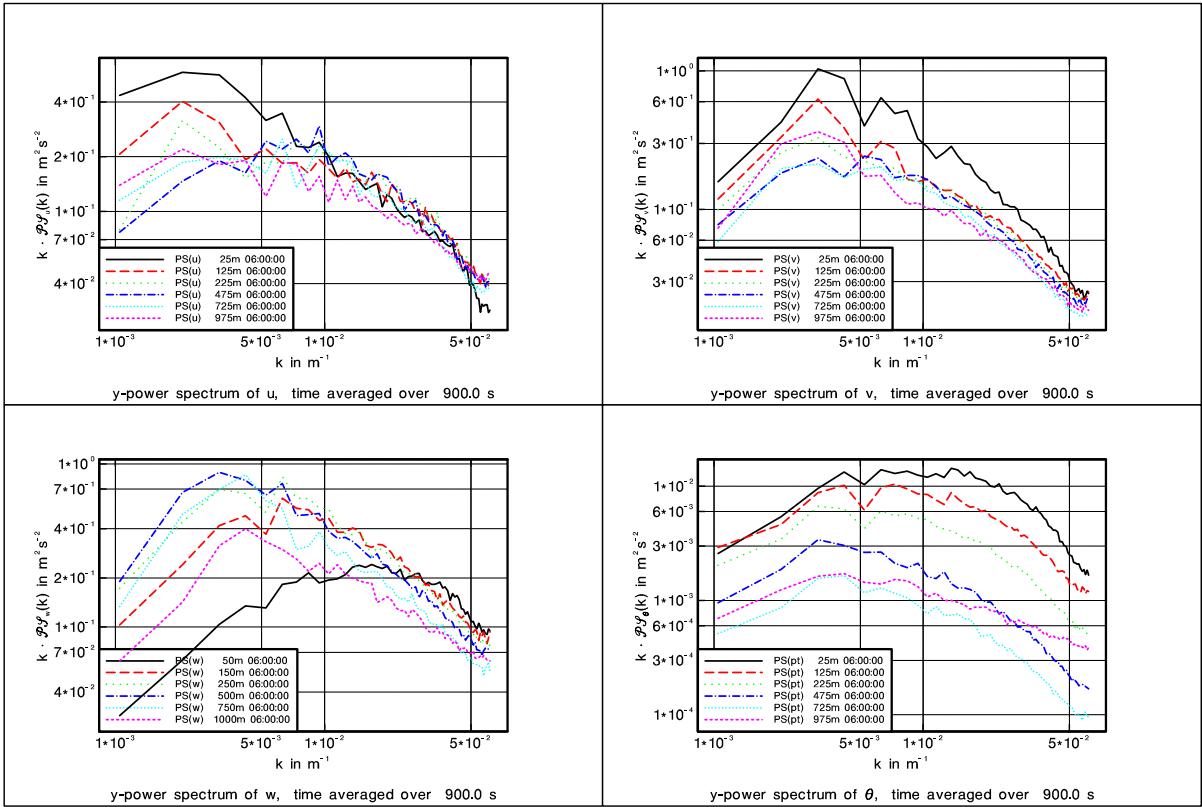


Abbildung 8: Ausgewählte Spektren der Geschwindigkeiten und der potentiellen Temperatur. Zwei-stufiges Runge-Kutta Verfahren, in  $y$ -Richtung ermittelt und nach 6 Stunden Integration (Lauf Nr. 8 in Tabelle 2, CFL Faktor 0.9).

PALM 2.8 run: rk3test.00 host: lcmuk 05-02-04 07:33:53

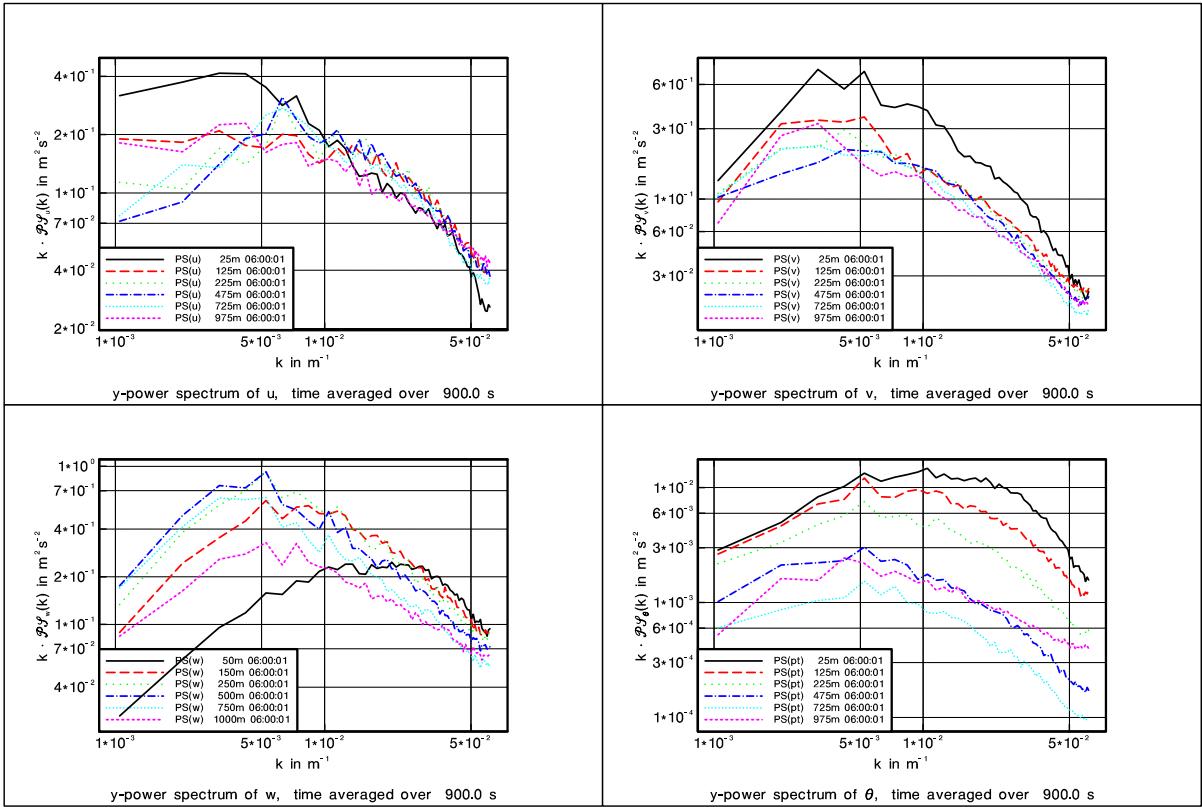


Abbildung 9: Ausgewählte Spektren der Geschwindigkeiten und der potentiellen Temperatur. Dreistufiges Runge-Kutta Verfahren, in  $y$ -Richtung ermittelt und nach 6 Stunden Integration (Lauf Nr. 8 in Tabelle 3, CFL Faktor 0.9).

Es wurden ausserdem Vertikalprofile der potentiellen Temperatur, des Wärmestroms, der Varianz der Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur sowie der Diffusion betrachtet. Abbildungen 10 - 12 zeigen Profile des 6-Stunden Modellaufs. Hier zeigen sich keine signifikanten Unterschiede. Die bodennahe Temperaturvarianz ist mit den Runge-Kutta Verfahren etwas höher als im Referenzlauf, ebenso der Wärmefluss. Letzterer weist aber schon nach 1 Stunde kaum Abweichungen vom Referenzlauf auf.

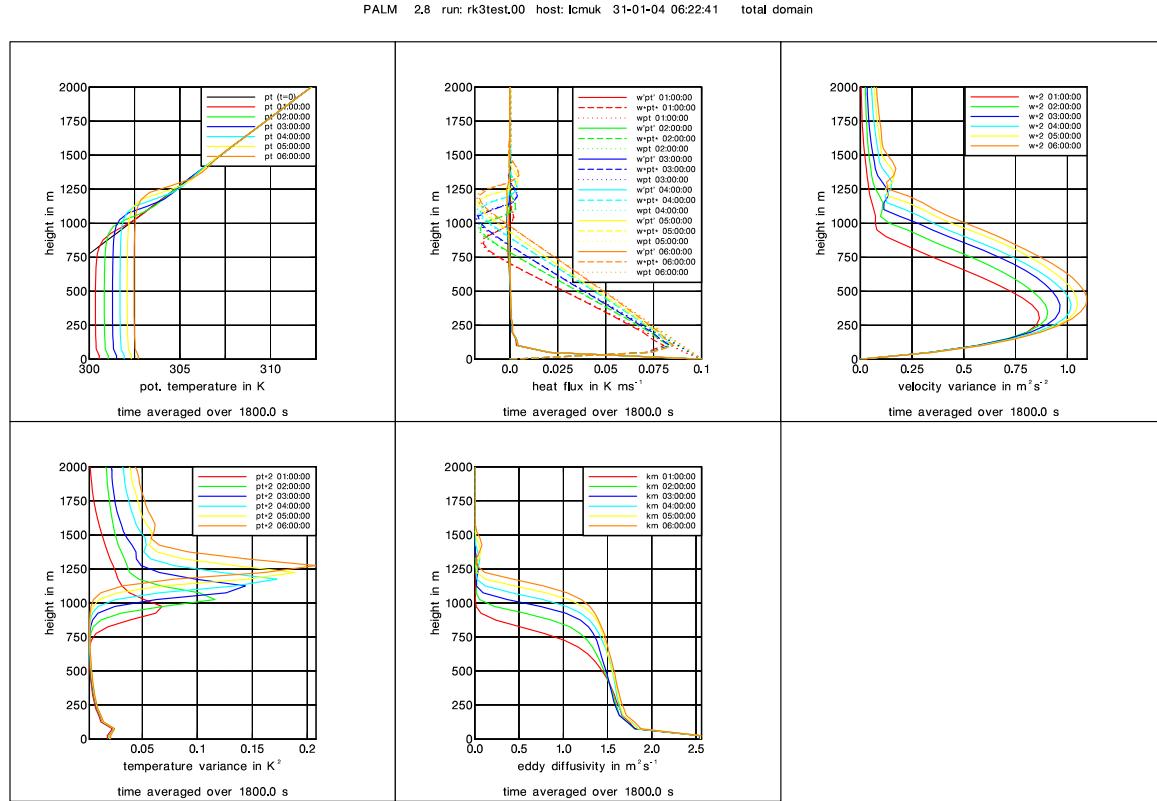


Abbildung 10: Vertikalprofile der potentiellen Temperatur, des Wärmestroms, der Varianz der Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur sowie der Diffusion. Ausgabe alle 60 min., jeweils über 30 min. gemittelt, 6 Stunden Integration mit dem Leapfrog Verfahren (Lauf Nr. 7 in Tabelle 2, CFL Faktor 0.2).

PALM 2.8 run: rk2test.00 host: lcmuk 04-02-04 11:05:27 total domain

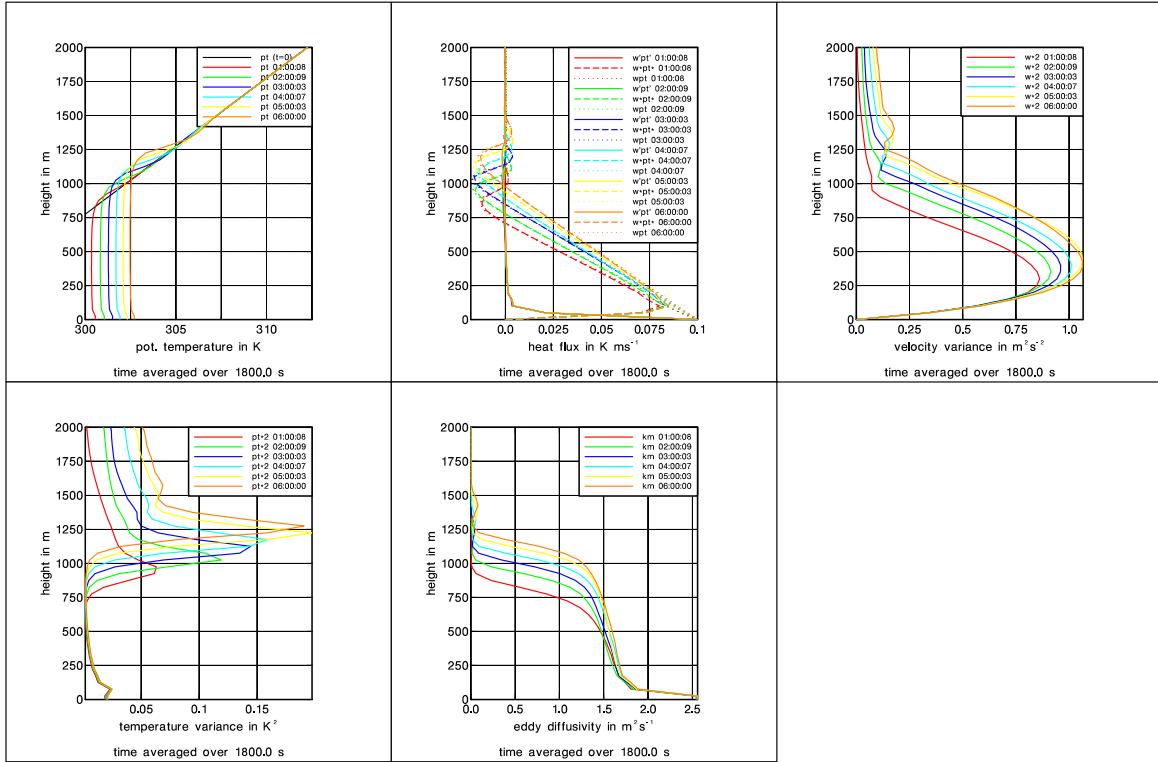


Abbildung 11: Vertikalprofile der potentiellen Temperatur, des Wärmestroms, der Varianz der Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur sowie der Diffusion. Ausgabe alle 60 min., jeweils über 30 min. gemittelt, 6 Stunden Integration mit dem zweistufigen Runge-Kutta Verfahren (Lauf Nr. 8 in Tabelle 2, CFL Faktor 0.9).

PALM 2.8 run: rk3test.00 host: lcmuk 03-02-04 12:15:04 total domain

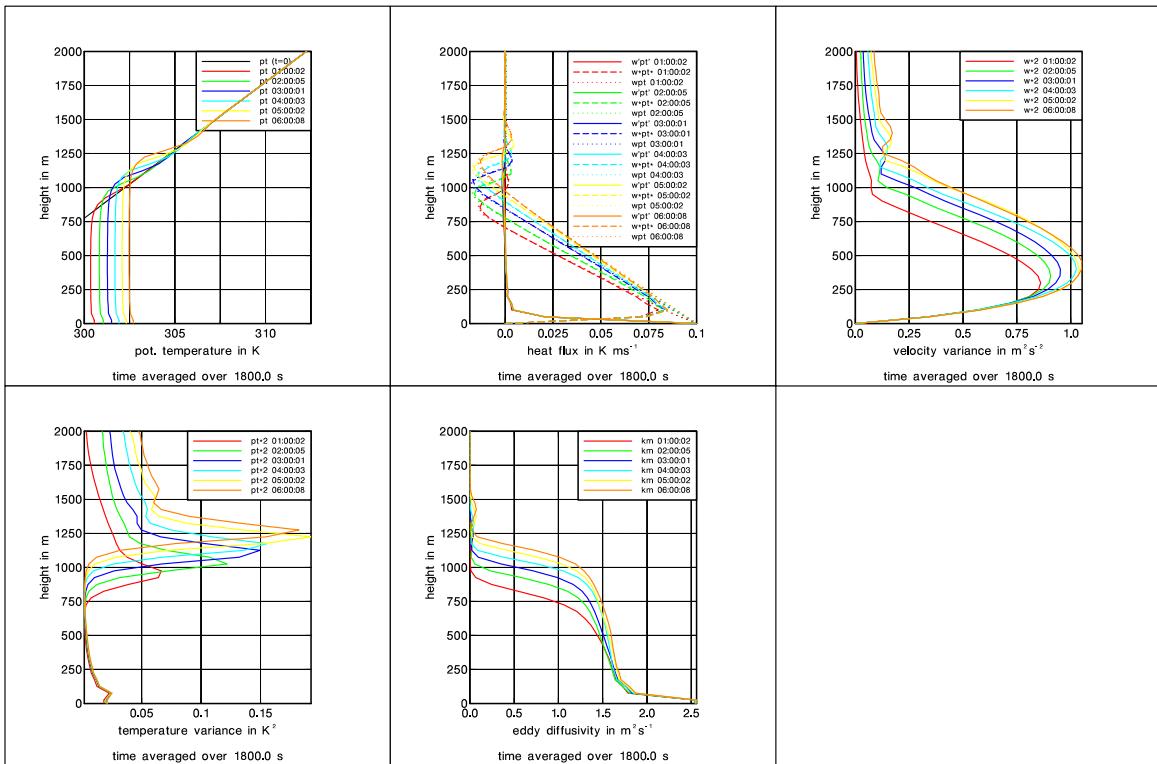


Abbildung 12: Vertikalprofile der potentiellen Temperatur, des Wärmestroms, der Varianz der Vertikalgeschwindigkeit und Temperatur sowie der Diffusion. Ausgabe alle 60 min., jeweils über 30 min. gemittelt, 6 Stunden Integration mit dem dreistufigen Runge-Kutta Verfahren (Lauf Nr. 8 in Tabelle 3, CFL Faktor 0.9).

## 4 Verlagerung eines Rankine Wirbels

In einem zweiten Test sollen die numerischen Verfahren nun anhand der Verlagerung eines Rankine Wirbels untersucht werden. Hierbei wird in der Mitte des Modellgebietes ein Wirbel aufgeprägt, dessen Kernradius  $8 \Delta x$  beträgt, der exponentiell abfallende Teil reicht bis  $32 \Delta x$  (siehe init-rankine.f90). Dabei sind Gleitreibungsrandbedingungen für  $u$  und  $v$  notwendig. Um den Wirbel nicht zu deformieren, sind außerdem höhenkonstante Geschwindigkeiten während der Simulation erforderlich, d.h. die Diffusion muss abgeschaltet sein. Der Wirbel wird mit einem Grundstrom von  $u_g = v_g = 5 \text{ m s}^{-1}$  verlagert. Ergebnisse einer 30-minütigen Modellsimulation sind in Tabelle 4 dargestellt.

Lauf	Verfahren	CFL	$h_n$	$U_{\max}$	$V_{\max}$	$W_{\max}$	Iter
-	-	-	-	$\text{m s}^{-1}$	$\text{m s}^{-1}$	$\text{m s}^{-1}$	-
0	Leapfrog	0.2	1.97	5.0446	5.0288	-0.0057	914
1	RK2	0.9	2.32	18.2787	18.0010	12.8893	721
2	RK3	0.9	8.87	5.0486	5.0307	-0.0056	203
3	RK2	0.5	1.44	13.8734	14.3651	10.0549	1243
4	RK2	0.2	1.97	5.0640	5.0412	-0.0057	914
5	RK3	0.2	1.97	5.0548	5.0358	-0.0057	914

Tabelle 4: Testergebnisse für die Verlagerung eines Rankine Wirbels. Der CFL Faktor ist mit 'CFL', die Zeitschrittlänge am Ende der Integration mit  $h_n$  bezeichnet.  $U_{\max}$ ,  $V_{\max}$  und  $W_{\max}$  sind die maximalen Geschwindigkeitskomponenten. Die Anzahl der Iterationen ist mit 'Iter' bezeichnet. Der Zeitfaktor bezieht sich auf den Referenzlauf.

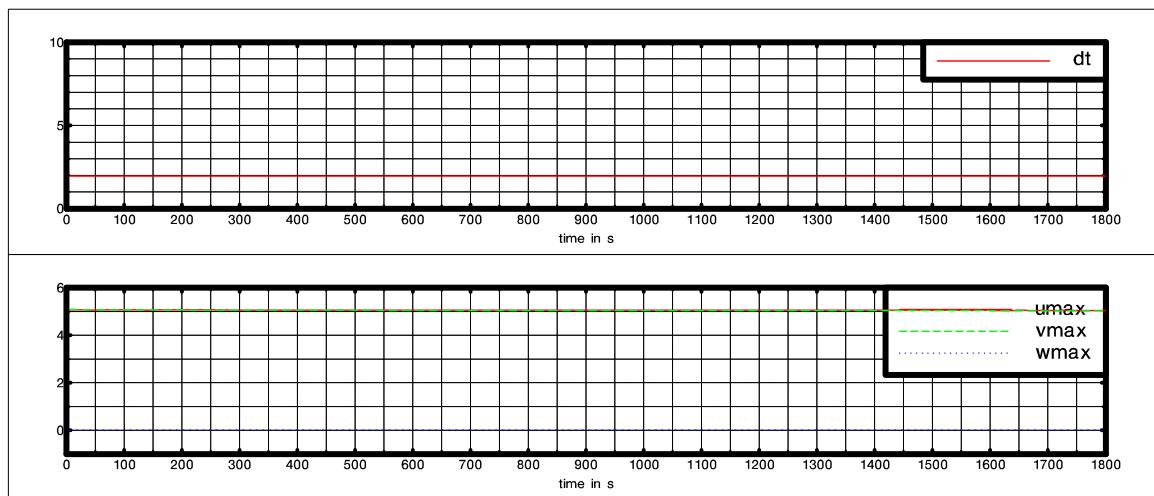


Abbildung 13: Zeitserie der Geschwindigkeitsmaxima und der Zeitschrittlänge für den Referenzlauf (Lauf Nr. 0 in Tabelle 4, CFL Faktor 0.2).

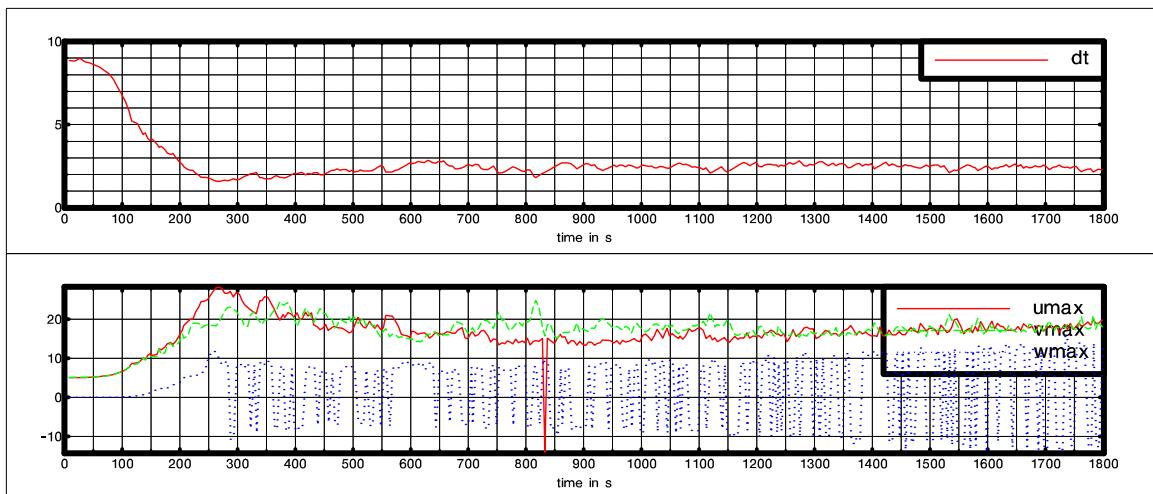


Abbildung 14: Zeitserie der Geschwindigkeitsmaxima und der Zeitschrittänge mit dem zweistufigen Runge-Kutta Verfahren (3) und CFL Faktor 0.9 (Lauf Nr. 1 in Tabelle 4).

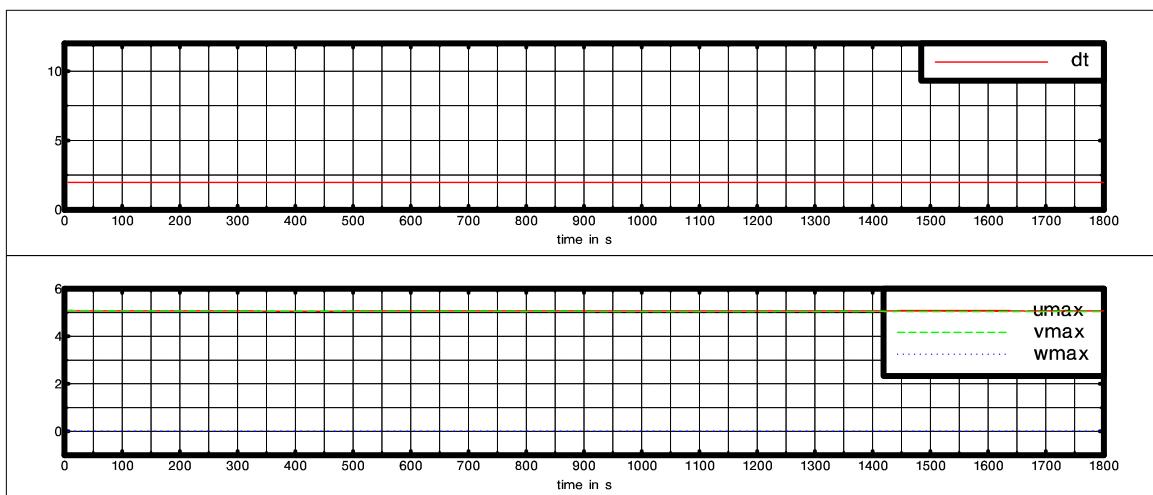


Abbildung 15: Zeitserie der Geschwindigkeitsmaxima und der Zeitschrittänge mit dem zweistufigen Runge-Kutta Verfahren (3) und CFL Faktor 0.2 (Lauf Nr. 4 in Tabelle 4).

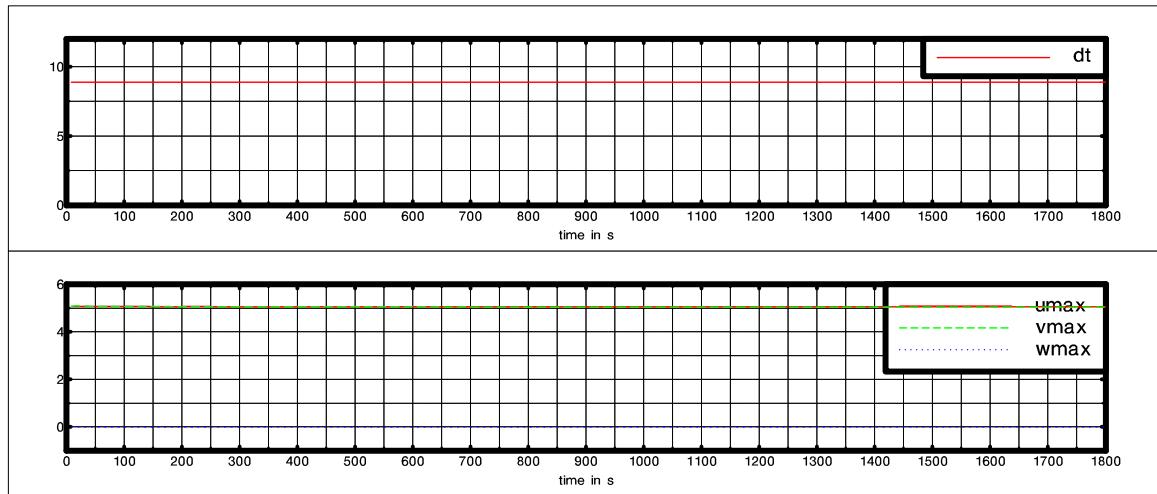


Abbildung 16: Zeitserie der Geschwindigkeitsmaxima und der Zeitschrittänge mit dem dreistufigen Runge-Kutta Verfahren (4) und CFL Faktor 0.9 (Lauf Nr. 2 in Tabelle 4).

Es werden nun Schnitte des Stördrucks und der u-Komponente der Vertikalgeschwindigkeit betrachtet. Hierbei fällt auf, dass sich die Ergebnisse des Leapfrog Verfahrens und des dreistufigen Runge-Kutta Verfahrens hinsichtlich der zeitlichen Entwicklung des Stördrucks so gut wie gar nicht unterscheiden (siehe Abb. 17, 19). Bezuglich der Geschwindigkeiten sind jedoch signifikante Unterschiede sichtbar: So überwiegen beim Leapfrog Verfahren Muster in Strömungsrichtung (Abb. 18), während die Muster mit dem dreistufigen Runge-Kutta Verfahren oft quer zur Strömungsrichtung verlaufen (Abb. 20). Ausserdem ist der Wirbel beim Runge-Kutta Verfahren zum Teil nicht so klar erkennbar wie mit dem Leapfrog Verfahren. Dies ändert sich jedoch, wenn auch das Runge-Kutta Verfahren mit  $CFL=0.2$  gerechnet wird (siehe Abb. 21). Die Muster quer zur Strömungsrichtung verschwinden und auch der Wirbel ist durchgängig klarer erkennbar.

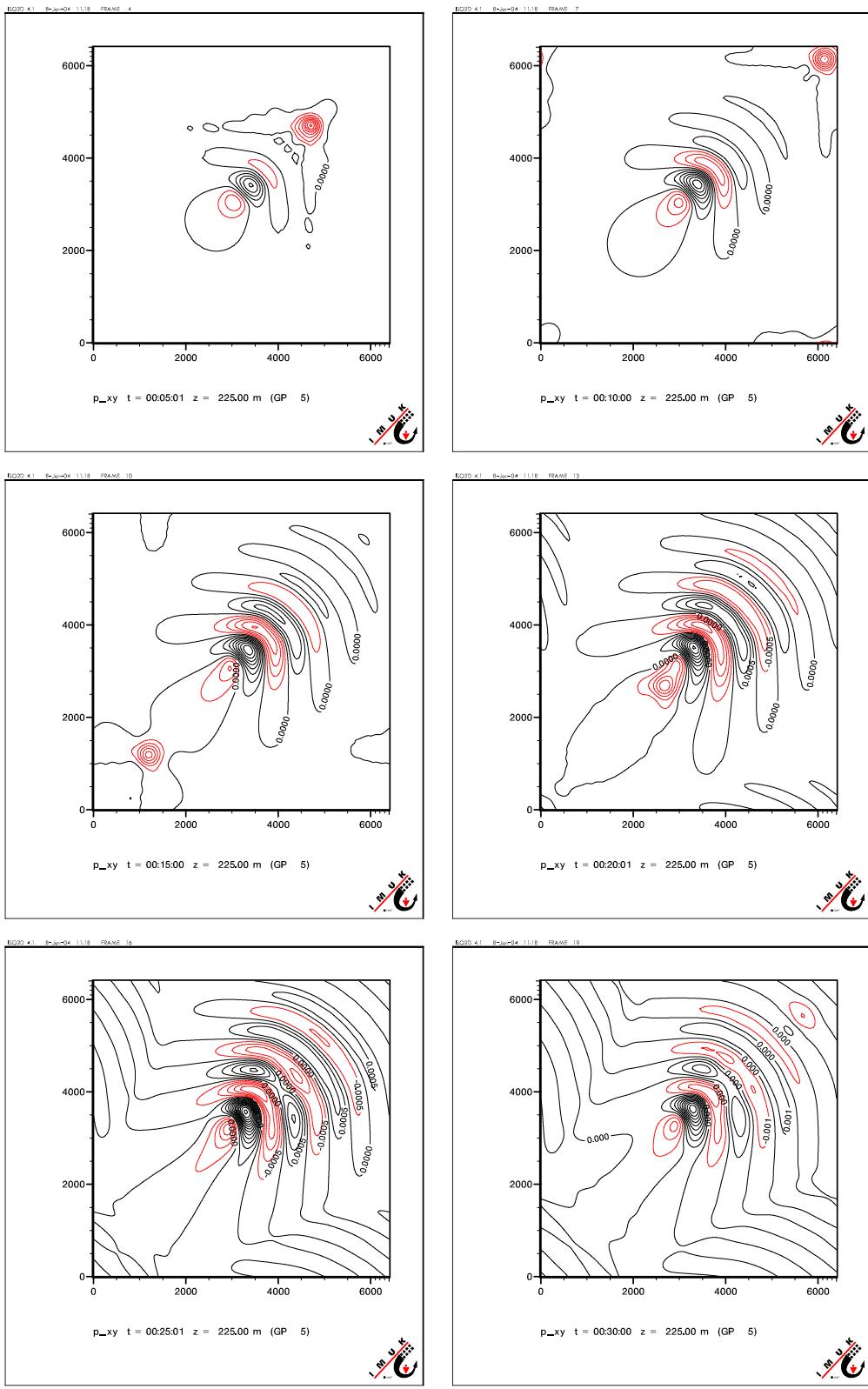


Abbildung 17: Zeitliche Entwicklung des Stördrucks mit dem Leapfrog Verfahren und CFL Faktor 0.2 (Lauf Nr. 0 in Tabelle 4).

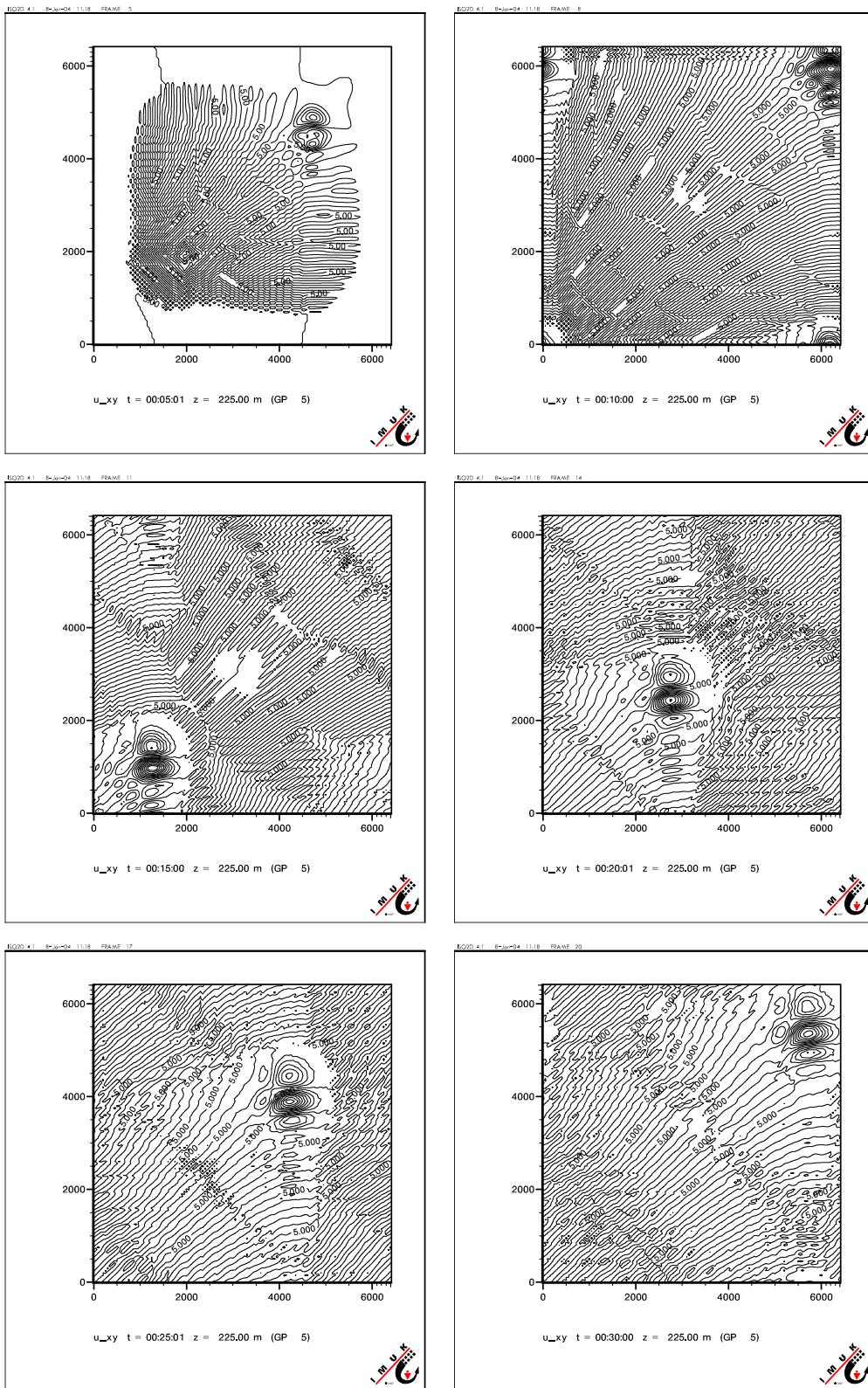


Abbildung 18: Zeitliche Entwicklung der  $u$ -Komponente der Geschwindigkeit mit dem Leapfrog Verfahren und CFL Faktor 0.2 (Lauf Nr. 0 in Tabelle 4).

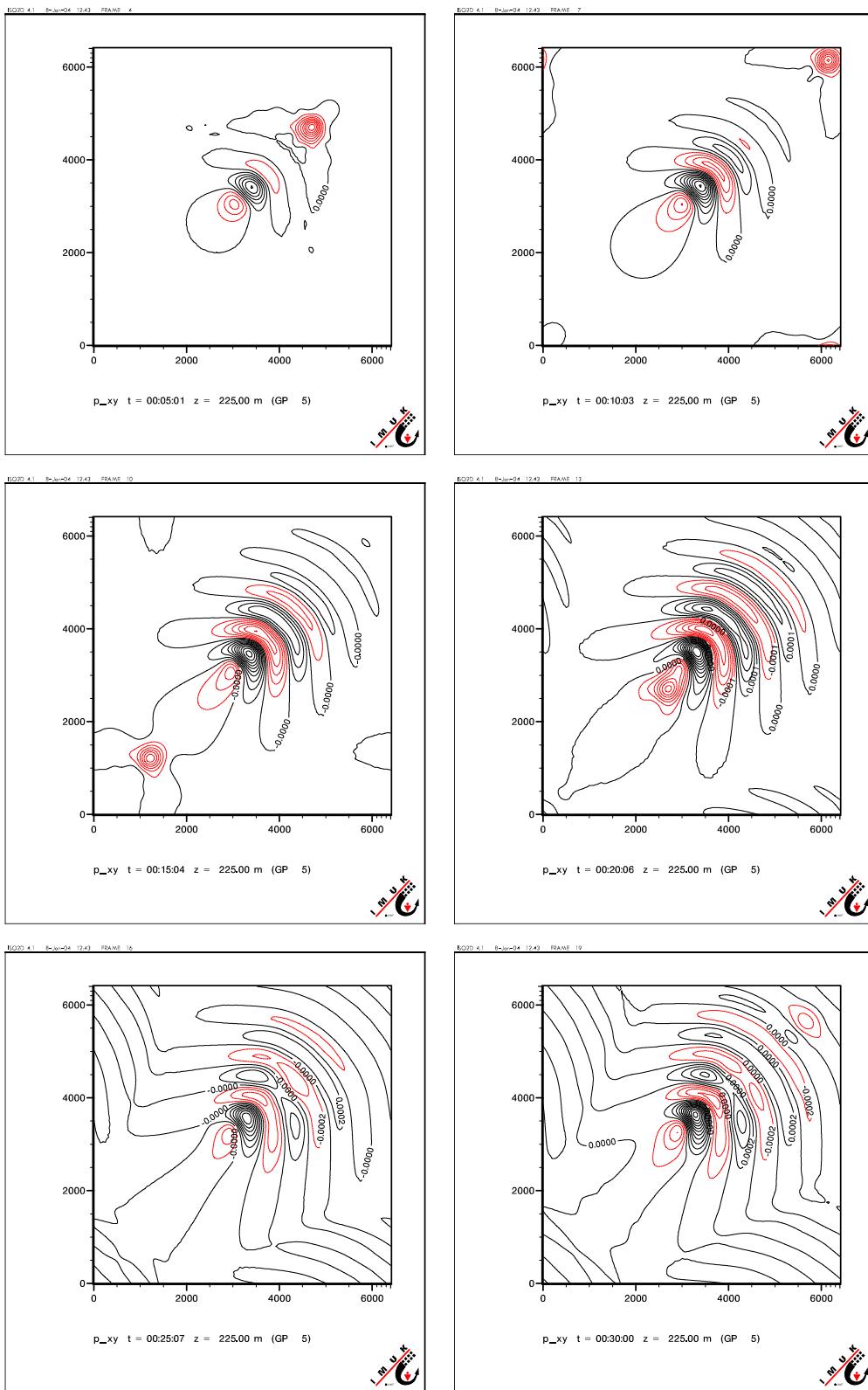


Abbildung 19: Zeitliche Entwicklung des Stördrucks mit dem dreistufigen Runge-Kutta Verfahren (4) und CFL Faktor 0.9 (Lauf Nr. 2 in Tabelle 4).

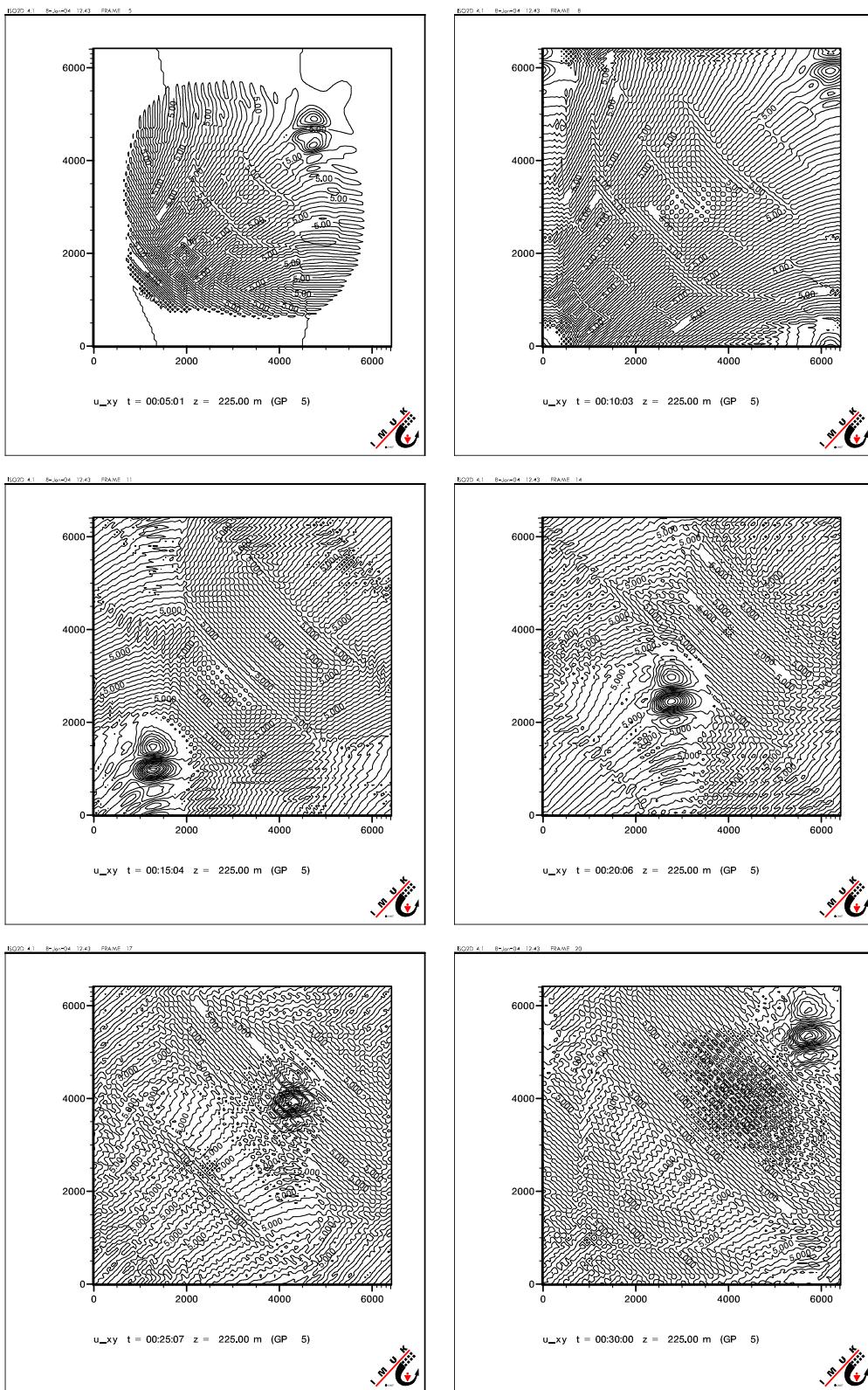


Abbildung 20: Zeitliche Entwicklung der  $u$ -Komponente der Geschwindigkeit mit dem dreistufigen Runge-Kutta Verfahren (4) und CFL Faktor 0.9 (Lauf Nr. 2 in Tabelle 4).

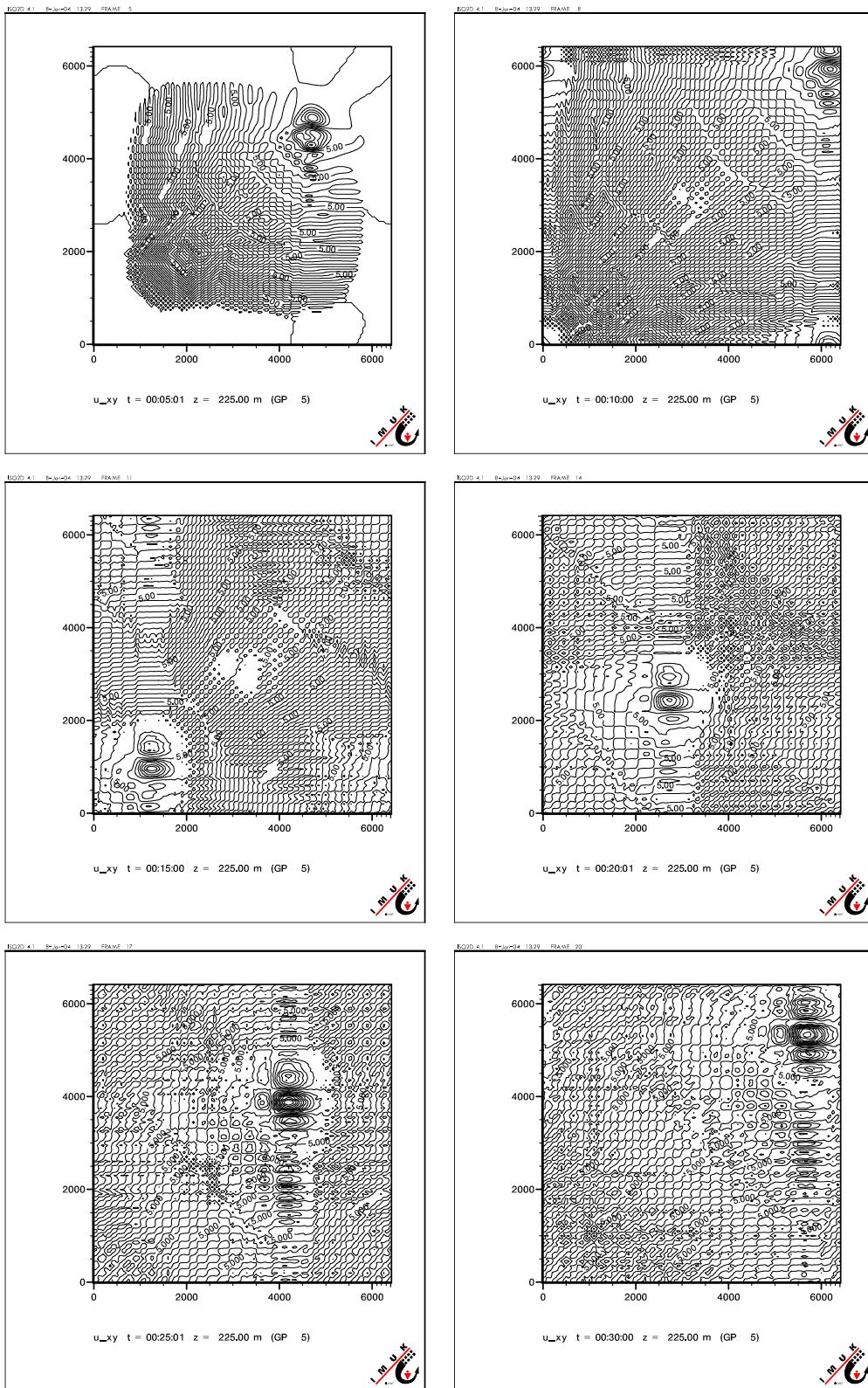


Abbildung 21: Zeitliche Entwicklung der  $u$ -Komponente der Geschwindigkeit mit dem dreistufigen Runge-Kutta Verfahren (4) und CFL Faktor 0.2 (Lauf Nr. 5 in Tabelle 4).

## **5 Fazit**

Während beim Test der Beispielmodellkonfiguration das zweistufige Runge-Kutta Verfahren am besten abschneidet und gegenüber dem bisherigen Referenzverfahren (Leapfrog mit CFL 0.2) einen Rechenzeitgewinn von bis zu 500% erzielt, ist bei der Verlagerung des Rankine Wirbels nur das dreistufige Runge-Kutta Verfahren ähnlich stabil wie das Referenzverfahren. Das dreistufige Runge-Kutta Verfahren erzielt einen Rechenzeitgewinn von ca. 350%. Bei gleichem CFL Faktor ist überdies das dreistufige Runge-Kutta Verfahren durch die höhere Ordnung genauer als das zweistufige Verfahren. Es wird daher als neues Standardverfahren empfohlen. Je nach Modellkonfiguration kann im Einzelfall auch das schnellere zweistufige Verfahren zum Einsatz kommen, was von Fall zu Fall entschieden werden muss.

## Literatur

- R. ASSELIN (1972). Frequency filter for time integrations. *Mon. Wea. Rev.*, **100**: 487–490.
- R. COURANT, K. FRIEDRICHS und H. LEWY (1928). Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Math. Ann.*, **100**: 32–74.
- DALE R. DURRAN (1999). *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*. New York: Springer.
- X. HUAI, R. D. JOSLIN und U. PIOMELLI (1997). Large-Eddy Simulation of Transition to Turbulence in Boundary Layers. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **9**: 149–163.
- J. D. LAMBERT (1983). *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*. Chichester: John Wiley & Sons.
- P. J. MASON (1989). Large-eddy simulation of the convective atmospheric boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **46**: 1492–1516.
- P. R. SPALART, R. D. MOSER und M. M. ROGERS (1991). Spectral Methods for the Navier-Stokes Equations with One Infinite and Two Periodic Directions. *JCP*, **96**: 297–324.
- P. P. SULLIVAN, J. C. MCWILLIAMS und C. H. MOENG (1996). A grid nesting method for large-eddy simulation of planetary boundary-layer flows. *Boundary-Layer Meteorol.*, **80**(1–2): 167–202.