

04.03.2025 (Лекция 3)

3. ТЕМА: “КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ”

3.1 Корректность задачи

При постановке и решении любой задачи ставятся одни и те же вопросы:

- а) существует ли у нее решение (то есть задача разрешима)?
- б) если ответ на первый вопрос положительный, то единственно ли это решение?
- с) как зависит решение от входных данных?

Возможны два случая:

1). Задача поставлена *корректно* (задача корректна):

- задача разрешима при любых допустимых входных данных;
- имеется единственное решение;
- **решение задачи непрерывно зависит от входных данных (малому изменению входных данных соответствует малое изменение малое изменение решения)** — тогда говорят, что задача устойчива.

2). Задача *некорректна*, если не выполняется хотя бы одно из вышеперечисленных условий. Обычно не выполняется третье условие - малому изменению входных данных может соответствовать неограниченно большое изменение решения.

Примером корректной задачи может служить задача интегрирования, а примером некорректной задачи – дифференцирование.

Пример. Пусть по прямой движется частица единичной массы. Движение обусловлено тем, что на частицу действует сила $q(t)$, которая меняется во времени. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$ и имела нулевую скорость, то в соответствии с законом Ньютона движение частицы будет описываться функцией $u(t)$, удовлетворяющей задаче Коши:

Поставим задачу Коши для $u(t)$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = q(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dt}|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь $u(t)$ — положение частицы в момент времени t .

Задача определения $u(t)$ решается двойным интегрированием функции $q(t)$:

$$u(t) = \int_0^t \int_0^s q(\tau) d\tau + C_1 t + C_2$$

и является устойчивой при $u \in C^2[0, T]$, $q(t) \in C[0, T]$ (корректно поставленной).

Рассмотрим *обратную задачу*: требуется определить $q(t)$ по известной функции $u(t)$.

Покажем неустойчивость задачи определения $q(t)$. Пусть $u(t)$ — решение прямой задачи для некоторого $q(t)$. Рассмотрим следующие возмущения решения прямой задачи:

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n} \cos(nt).$$

Этим возмущениям соответствуют правые части

$$q_n(t) = q(t) - n \cos(nt),$$

т.к. $u''(t) = q(t)$.

Очевидно, что

$$\|u - u_n\|_{C[0, T]} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, а

$$\|q - q_n\|_{C[0, T]} \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, малое возмущение функции $u(t)$ соответствуют сколь угодно большому изменению функции $q(t)$.

3.2 Устойчивость задачи

Для изучения устойчивости дифференциального уравнения по начальным данным будем рассматривать модельное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x > 0, \quad y(0) = y_0.$$

а именно, рассмотрим модель радиоактивного распада вещества

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad x > 0, \quad y(0) = y_0. \quad (3)$$

Его решение $y(t) = y_0 e^{-\lambda x}$ убывает при $\lambda > 0$ и

$$|y(t)| \leq |y_0| \quad \text{при } \lambda \geq 0 \text{ для всех } t \geq 0, \quad (4)$$

т.е. уравнение (3) *устойчиво* при $\lambda \geq 0$, что соответствует условию

$$\frac{\partial f}{\partial y} \leq 0.$$

В этом случае при выполнении (4) малым изменениям начальных данных будет соответствовать малое изменение самого решения. Такие условия в дальнейшем мы будем называть *условием устойчивости*.

При дискретизации вводится естественное требование: для дискретных моделей, аппроксимирующих (приближающих с некоторой погрешностью) модельные уравнения, для корректности должен выполняться аналог неравенства (4):

$$|y_k| \leq |y_0|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Мы увидим ниже, что это не всегда выполняется.

Рассмотрим ряд примеров.

1) Явная схема Эйлера (когда правая часть, зависящая от y , проектируется в известный узел сетки):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_k = 0, \quad y_{k+1} = (1 - h\lambda)y_k. \quad (5)$$

Отсюда видно, что условие

$$|y_{k+1}| \leq |y_k| \leq \dots \leq |y_0| \quad (6)$$

выполнено при $|1 - h\lambda| \leq 1$ или $-1 \leq 1 - h\lambda \leq 1$, то есть при

$$h\lambda \leq 2.$$

Если, например, $h\lambda \geq 3$, то

$$\begin{aligned} |y_{k+1}| &= |h\lambda - 1||y_k| \geq 2|y_k| \geq \dots \geq 2^{k+1}|y_0|, \\ |y_k| &\geq 2^k|y_0| \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Схема неустойчива, условие (6) не выполнено. Таким образом, в этом случае говорят, что явная схема Эйлера (5) *условно устойчива* с условием устойчивости $h \leq 2\lambda$, $\lambda > 0$.

2) Неявная схема Эйлера (когда правая часть, зависящая от y , проектируется в неизвестный узел сетки):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_{k+1} = 0, \quad y_{k+1} = \frac{1}{1 + h\lambda} y_k. \quad (7)$$

Так как $\frac{1}{1+h\lambda} \leq 1$ при любых $h\lambda \geq 0$, то говорят, что схема *безусловно устойчива*.

3) Схема с весами:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda(\sigma y_{k+1} + (1 - \sigma)y_k) = 0,$$

отсюда приводим к виду

$$y_{k+1} = qy_k.$$

Для выполнения условия $|y_{k+1}| \leq |y_k| \leq \dots \leq |y_0|$, то есть для выполнения требования устойчивости необходимо и достаточно, чтобы

$$|q| \leq 1, \quad q = \frac{1 - (1 - \sigma)h\lambda}{1 + \sigma h\lambda}.$$

Видим, что $|q| \leq 1$, если

$$-1 - \sigma h\lambda \leq 1 - (1 - \sigma)h\lambda \leq 1 + \sigma h\lambda$$

или

$$1 + h(\sigma - 1/2)\lambda \geq 0,$$

так что

$$1 + \sigma h\lambda \geq h\lambda/2 > 0.$$

Таким образом, схема с весами безусловно (или абсолютно) устойчива (при любых h) при $\sigma > 1/2$ и условно устойчива в случае $\sigma < 1/2$, если $h \leq \frac{1}{(1/2 - \sigma)\lambda}$.

11.03.2025 (Лекция 4)

4. ТЕМА: “ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ (ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ 1+1)”

До сих пор мы рассматривали либо:

- динамические (эволюционные) модели, не зависящие от пространства;
- стационарные модели, имеющие место в определенный момент времени и рассматривающие искомые величины в зависимости только от пространственной переменной.

4.1 Построение модели. Постановка корректной задачи

Построим одномерную модель продольных упругих колебаний стержня длины L , которые рассматриваются с течением времени в промежутке $[0, T]$.

Пусть ось x направлена вдоль стержня, $u(x, t)$ – смещение вдоль этой оси в момент t поперечного сечения, которое в свободном равновесном состоянии стержня имело абсциссу x . продольное начальное положение стержня.

При воздействии внешних сил возникает деформация ε , при этом $u(x, t)$ получает приращение $\Delta u(x, t)$ при изменении $x + \Delta x$, тогда относительное удлинение (деформация) будет в среднем по длине Δx :

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как процесс происходит во временном континууме неравномерно, то имеет место ускорение

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Согласно второму закону Ньютона, применяемому к элементу Δx :

$$ma = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + \Delta x, t) = \Delta F(x, t), \quad (1)$$

$m = \rho(x)S\Delta x$, S – площадь поперечного неоднородного сечения стержня (плотность зависит от x), F – действующие силы.

Пренебрегая силой трения, деформация порождает упругую силу F :

$$F(x, t) = S\sigma(\varepsilon), \quad (2)$$

$\sigma(\varepsilon)$ – упругое напряжение (сила, направленная противоположно силе внешнего давления).

По закону Гука

$$\sigma(\varepsilon) = k(x)\varepsilon, \quad (3)$$

$k(x)$ – коэффициент жесткости (модуль Юнга, приводится в специальных таблицах и зависит от материала стержня).

Таким образом, с учетом (2), (3)

$$F = Sk(x)\varepsilon.$$

В уравнении (1) с учетом вышесказанного имеем:

$$\rho(x)S\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + \Delta x, t) = \Delta F \rightarrow \rho(x)S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + \Delta x, t) = \frac{1}{\rho(x)S} \frac{1}{\Delta x} \Delta(Sk(x)\varepsilon) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)S} \frac{1}{\Delta x} \Delta(Sk(x) \frac{\Delta u}{\Delta x})$$

Переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, получим математическую модель:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}). \quad (4)$$

Если $k(x), \rho(x)$ являются постоянными (стержень является однородным по всей длине), то из (4) следует классическое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5)$$

$$a^2 = \frac{k}{\rho} \rightarrow a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

называется *скоростью распространения упругих волн* (продольных колебаний). В общем случае

$$a^2(x) = \frac{k(x)}{\rho(x)}.$$

Добавляя к (4) или (5) действие внешней силы $f(x, t)$ по всей длине стержня, получаем модель с учетом внешнего воздействия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x, t). \quad (4')$$

Для получения единственного решения (4), необходимо дополнить модель начальными (задача Коши по времени) и граничными или краевыми условиями.

Пусть в начальный момент времени имеем (*задача Коши*):

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (6)$$

Граничные условия первого рода (носят название *условия Дирихле*)

$$u(0, t) = g(t), \quad u(L, t) = q(t). \quad (7)$$

Граничные условия второго рода (*задача Неймана*)

$$u_x(0, t) = G(t), \quad u_x(L, t) = Q(t). \quad (8)$$

Таким образом, корректная постановка задачи для моделирования волнового процесса будет выглядеть как решение уравнения (4') вместе с условиями (6)-(7) или (6), (8):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x, t), & t \in [0, T], x \in [0, L], \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, L] \\ u(0, t) = g(t), \quad u(L, t) = q(t), & t \in [0, T] \end{cases} \quad (9)$$

4.2 Переход к дискретной модели (конечно-разностный метод). Явный метод расчета

Введем равномерное разбиение прямоугольника $[0, L] \times [0, T]$ на сетку с узлами (x_j, t_m) , где $x_j = j * \Delta x$, $t_m = m * \Delta t$, $j = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Здесь $\Delta x = L/N$, $\Delta t = T/M$ – шаги разбиения отрезка $[0, L]$ и $[0, T]$ соответственно.

Тогда известные непрерывно-дифференцируемые функции $\rho(x)$, $k(x)$, $f(x)$ становятся известными дискретными функциями

$$\rho_j := \rho(x_j) = \rho(j * \Delta x),$$

$$k_j := k(j * \Delta x),$$

$$f_j^m := f(j * \Delta x, m * \Delta t).$$

Искомой величиной в дискретной задаче будет двумерный массив

$$u_j^m \approx u(x_j, t_m)$$

Для дискретизации основного уравнения перепишем его, раскрывая производную произведения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k'(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (4'')$$

Для дискретизации частных производных воспользуемся формулой Тейлора аналогично тому, как это было для обычных производных, например, для дискретизации второй производной по x :

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2!}u_{xx}(x, t)(\Delta x)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}u_{xxx}(x, t)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2!}u_{xx}(x, t)(\Delta x)^2 \\ &- \frac{1}{3!}u_{xxx}(x, t)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (11)$$

Складывая равенства (10) и (11), получим

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) + u_{xx}(x, t)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^4).$$

Отсюда, разделив на $(\Delta x)^2$, получаем конечно-разностную аппроксимацию $u_{xx}(x, t)$ с порядком точности $O((\Delta x)^2)$:

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2),$$

$$u_{xx}(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, M} \quad (12)$$

Аналогично, вторая производная по времени

$$u_{tt}(x_j, t_m) \approx \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2}, \quad j = \overline{0, N}, \quad k = \overline{1, M-1} \quad (13)$$

Первая производная по x может быть заменена на правую (14a), левую (14b) и центральную разности (14c) соответственно:

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - u_j^m}{\Delta x}, \quad (14a)$$

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x}, \quad (14b)$$

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x}, \quad (14c)$$

Например, выбирая центральную разность (14c), уравнение (4'') заменяется на дискретный аналог с помощью (12) и (13):

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} \\ & + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + f(x_j, t_m), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Начальные условия в дискретном случае будут выглядеть:

$$u_j^0 = g(t_j), \quad \frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = q(t_j) \rightarrow u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N} \quad (16)$$

граничные условия Дирихле:

$$u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}, \quad (17)$$

граничные условия Неймана:

$$\frac{u_1^m - u_0^m}{\Delta x} = G(t_m), \quad \frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{\Delta x} = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}, \quad (18)$$

Заметим, что в уравнении (15) в расчете участвует пять точек u_j^m , u_{j-1}^m , u_{j+1}^m , u_j^{m-1} , u_j^{m+1} . На первом шаге благодаря начальным условиям, оказываются известными значения 4-х значений на $m-1$, m временном слое,

а неизвестной является из них одна точка u_j^{m+1} . Выражая ее явно из (15), мы получим рекуррентную формулу для расчета смещения в точке (x_j, t_{m+1}) :

$$u_j^{m+1} = \left(2 - 2 \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_j^m - u_j^{m-1} + \dots \quad (19)$$

здесь самостоятельно дописать!

Определение 1. Если в дискретной модели пространственные производные по x берутся на известном временном слое m , то такой расчетный метод называется *явным*.

Определение 2. Если в дискретной модели пространственные производные по x берутся на неизвестном временном слое $m + 1$, то такой расчетный метод называется *неявным*.

Явный метод расчета обладает одним недостатком: он условно устойчив. Иначе говоря, не при всяких шагах дискретизации $\Delta t, \Delta x$ он работает. То есть метод чувствителен к размерности массива $M \times N$. Условием устойчивости здесь является *условие Куранта*:

$$\left| 2 - 2 \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right| \leq 1$$

19.03.2025 (Лекция 5)

4.3 Неявный метод расчета

Обобщая выводы из предыдущего параграфа дискретная задача для **явного метода** имеет вид (граничные условия Дирихле)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + \\ \quad + f(x_j, t_m), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \\ u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}. \end{array} \right. \quad (20)$$

Тогда, используя *Определение 2* задача для **неявного метода** будет иметь вид

$$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} + f(x_j, t_m), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}. \quad (21)$$

Начальные и граничные условия остаются без изменения, то есть такие же, как в (20).

В уравнении (21) неизвестными являются три точки u_{j+1}^{m+1} , u_j^{m+1} , u_{j-1}^{m+1} . То есть матрица для неизвестных получается трехдиагональная. Перепишем (21), выделяя коэффициенты при этих трех неизвестных:

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j-1}^{m+1} - \left(\frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) u_j^{m+1} + \left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j+1}^{m+1} = \frac{u_j^{m-1} - 2u_j^m}{(\Delta t)^2} - f(x_j, t_m). \quad (22)$$

Введя обозначение

$$a_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad b_j = \frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2},$$

$$c_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad \tilde{f}_j^m = \frac{u_j^{m-1} - 2u_j^m}{(\Delta t)^2} - f(x_j, t_m),$$

получим задачу для неявного метода

$$\begin{cases} a_j u_{j-1}^{m+1} - b_j u_j^{m+1} + c_j u_{j+1}^{m+1} = \tilde{f}, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \\ u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}. \end{cases} \quad (23)$$

Метод прогонки заключается в представлении (гипотезе), что

$$u_j^{m+1} = A_{j+1} u_{j+1}^{m+1} + B_{j+1}, \quad j = 0, \dots, N-1; m = 0, \dots, M-1. \quad (24)$$

На первом этапе (прямой ход) определяются коэффициенты

$$A_{j+1} = \frac{c_j}{b_j - A_j a_j}, \quad B_{j+1} = \frac{a_j B_j - \tilde{f}}{b_j - A_j a_j}. \quad (25)$$

На втором этапе обратный ход представляет равенство (24).

5. ТЕМА: “МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ИЛИ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЕЩЕСТВА (ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ) 1+1”

Рассмотрим, какое уравнение возникает в качестве математической модели распространения тепла в стержне. Рассмотрим тонкий стержень, вытянутый вдоль оси x , как показано на рис.1. Мы предполагаем, что стержень полностью изолирован, за исключением, может быть, концов, и поток тепла может распространяться только в направлении x (т.е. у нас одномерная модель).

5.1 Вывод уравнения

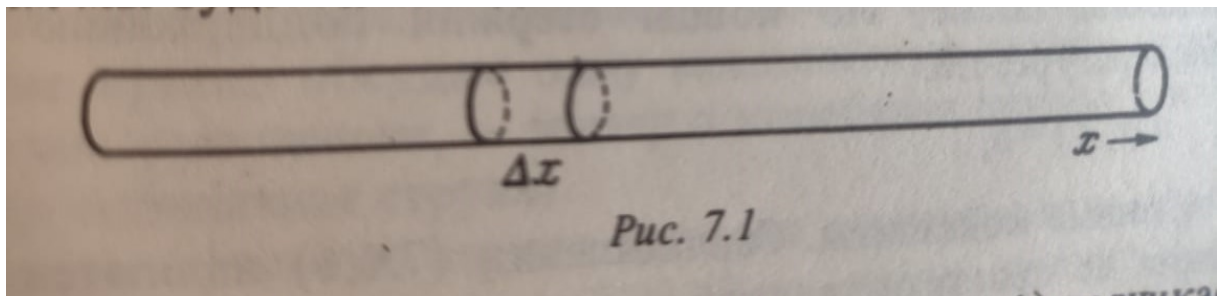


Рис. 1:

Пусть $u(x, t)$ – температура стержня (в кельвинах) длиной L в точке x в момент времени t и a – площадь поперечного сечения стержня. Из элементарной физики известно, что количество тепла, которое протекает в единицу времени через сечение, перпендикулярное оси стержня есть $-kau_x$, где $k > 0$ – коэффициент теплопроводности. Таким образом, если градиент температуры u_x в данном сечении отрицателен, то есть температура слева выше, чем справа, то в полном соответствии с интуитивными представлениями тепло через это сечение будет течь слева направо. След-но, если мы рассмотрим элемент стержня длины Δx , то в единицу времени в этот элемент через сечение x втекает количество тепла, равное

$$(-kau_x)|_x,$$

и вытекает через сечение $x + \Delta x$ количество тепла, равное

$$(-kau_x)|_{x+\Delta x},$$

то есть количество тепла в элементе изменяется на

$$(-kau_x)|_x - (-kau_x)|_{x+\Delta x}. \quad (1)$$

С другой стороны, из элементарной физики также известно, что количество тепла, которым обладает элемент, пропорционально массе элемента и его температуре; более точно, оно равно

$$sa\Delta x\rho u,$$

где s – удельная теплоемкость материала (это физическая величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо передать веществу массой 1 кг для того, чтобы его температура изменилась на 1°C). Другими словами, это способность вещества поглощать и отдавать тепло); ρ – плотность.

Из этого следует, что производная по времени от количества тепла в элементе равна (1):

$$sa\Delta x\rho u_t = (kau_x)|_{x+\Delta x} - (kau_x)|_x.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$u_t = \frac{1}{s\rho}(ku_x)_x. \quad (2)$$

Если k не зависит от x , то это уравнение сводится к классическому уравнению теплопроводности:

$$u_t = \frac{k}{s\rho}u_{xx} =: cu_{xx}. \quad (3)$$

То есть производная от температуры по времени пропорциональна второй производной от температуры по пространственной переменной.

Далее, как это бывает в теории дифференциальных уравнений, необходимо задать начальные и (или) граничные условия. Посмотрим, какие условия мы можем наложить на решение уравнений теплопроводности в задаче о стержне.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ нам известно распределение $g(x)$ температуры в стержне.

Предположим также, что концы стержня поддерживаются при постоянной температуре, то есть

$$u(0, t) = \alpha, \quad u(L, t) = \beta, \quad (4)$$

где α, β – заданные константы. Соотношения (4) являются граничными условиями по переменной x .

В качестве начального условия мы используем заданное начальное распределение температуры

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5)$$

Таким образом, приходим к следующей физической формулировке задачи:

Имеется стержень, концы которого поддерживаются при фиксированных температурах α и β . Считая начальное распределение температуры вдоль стержня известным, требуется найти температуру любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$.

Вывод: математической моделью этой проблемы служит дифференциальное уравнение в частных производных (2) или (3) с граничными условиями (4) и начальным условием (5).

Некоторые варианты этой постановки задачи можно моделировать, меняя граничные условия или само уравнение. Если, например, правый конец стержня будет теплоизолирован, то через этот конец тепло теряться не будет, поток обратиться в нуль:

$$u(0, t) = \alpha, \quad u_x(L, t) = 0, \quad (6)$$

Уравнение (2) или (3) служит также математической моделью и для целого ряда других физических явлений, как, например, диффузия газа. В этом случае $u(x, t)$ есть концентрация газа.

26.03.2025 (Лекция 6)

5.2 Переход к дискретной модели (конечно-разностный метод). Явный метод расчета

Введем равномерное разбиение прямоугольника $[0, L] \times [0, T]$ на сетку с узлами (x_j, t_m) , где $x_j = j * \Delta x$, $t_m = m * \Delta t$, $j = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Здесь $\Delta x = L/N$, $\Delta t = T/M$ – шаги разбиения отрезка $[0, L]$ и $[0, T]$ соответственно.

Тогда известные непрерывно-дифференцируемые функции $\rho(x)$, $k(x)$, $f(x)$ становятся известными дискретными функциями

$$\rho_j := \rho(x_j) = \rho(j * \Delta x),$$

$$s_j := s(x_j) = s(j * \Delta x),$$

$$k_j := k(j * \Delta x),$$

$$f_j^m := f(j * \Delta x, m * \Delta t).$$

Искомой величиной в дискретной задаче будет двумерный массив

$$u_j^m : \approx u(x_j, t_m)$$

Для дискретизации основного уравнения перепишем его, раскрывая производную произведения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{s(x)} \left[\frac{k'(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + f(x, t). \quad (7)$$

Выбирая центральную разность (14с) для первой производной по x и правую разность для производной по t уравнение (7) заменяется на дискретный аналог:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} &= \frac{1}{s_j} \left[\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} \right. \\ &\left. + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} \right] + f(x_j, t_m), j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные условия в дискретном случае будут выглядеть:

$$u_j^0 = g(t_j), j = \overline{0, N} \quad (9)$$

граничные условия Дирихле (если концы подвергаются нагреву):

$$u_0^m = \alpha(t_m), \quad u_N^m = \beta(t_m), m = \overline{0, M}, \quad (10)$$

граничные условия Неймана (если концы стержня теплоизолированы):

$$\frac{u_1^m - u_0^m}{\Delta x} = 0, \quad \frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{\Delta x} = 0, m = \overline{0, M}, \quad (11)$$

Задача для дискретной функции u_j^m (8)-(11) аппроксимирует исходную задачу (2)-(6) с порядком $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$. Для волнового уравнения порядок аппроксимации $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$.

Заметим, что в уравнении (8) в расчете участвуют четыре точки u_j^m , u_{j-1}^m , u_{j+1}^m , u_j^{m+1} . На первом шаге благодаря начальным условиям, оказываются известными значения четыре значения на m временном слое, а неизвестной является из них одна точка u_j^{m+1} . Выражая ее явно из (8), мы получим рекуррентную формулу для расчета смещения в точке (x_j, t_{m+1}) :

$$u_j^{m+1} = \left(1 - 2 \frac{k(x_j)}{s_j \rho(x_j)} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^m + \dots \quad (12)$$

здесь самостоятельно дописать!

Условием устойчивости здесь является *условие Куранта*:

$$\left|1 - 2 \frac{k(x_j)}{s_j \rho(x_j)} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right| \leq 1$$

5.3 Неявный метод расчета

Дискретная задача для **неявного метода** имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \frac{1}{s_j} \left[\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} \right] \\ \quad + f(x_j, t_m), j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M-1}, \\ \\ u_j^0 = g(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \text{ - начальное условие} \\ \\ u_0^m = \alpha(t_m), \quad u_N^m = \beta(t_m), \quad m = \overline{0, M} \text{ - условия нагрева концов,} \\ \\ \text{или} \\ \frac{u_1^{m+1} - u_0^{m+1}}{\Delta x} = 0, \quad \frac{u_N^{m+1} - u_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} = 0, \text{ - условие теплоизоляции} \end{array} \right. \quad (13)$$

В уравнении (13) неизвестными являются три точки u_{j+1}^{m+1} , u_j^{m+1} , u_{j-1}^{m+1} . То есть матрица для неизвестных получается трехдиагональная. Перепишем (13), выделяя коэффициенты при этих трех неизвестных:

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j-1}^{m+1} - \left(\frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) u_j^{m+1} +$$

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j+1}^{m+1} = \frac{-s_j u_j^m}{\Delta t} - s_j f(x_j, t_m). \quad (14)$$

Введя обозначение

$$a_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad b_j = \frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2},$$

$$c_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad \tilde{f}_j^m = \frac{-s_j u_j^m}{(\Delta t)^2} - s_j f(x_j, t_m),$$

получим задачу для неявного метода

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j u_{j-1}^{m+1} - b_j u_j^{m+1} + c_j u_{j+1}^{m+1} = \tilde{f}, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \text{ - начальные условия,} \\ \text{условия нагрева концов:} \\ u_0^{m+1} = \alpha(t_{m+1}) =: \alpha_{m+1}, \quad u_N^{m+1} = \beta(t_{m+1}) =: \beta_{m+1}, \quad m = \overline{0, M-1}, \\ \text{или} \\ \frac{u_1^{m+1} - u_0^{m+1}}{\Delta x} = 0, \quad \frac{u_N^{m+1} - u_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} = 0, \text{ - условие теплоизоляции} \end{array} \right. \quad (14)$$

Метод прогонки заключается в представлении (гипотезе), что

$$u_j^{m+1} = A_{j+1} u_{j+1}^{m+1} + B_{j+1}, \quad j = 0, \dots, N-1; m = 0, \dots, M-1. \quad (15)$$

На первом этапе (прямой ход) определяются коэффициенты

$$A_{j+1} = \frac{c_j}{b_j - A_j a_j}, \quad B_{j+1} = \frac{a_j B_j - \tilde{f}}{b_j - A_j a_j}. \quad (16)$$

На втором этапе обратный ход представляет равенство (15).

В зависимости от того, как ставятся граничные условия (нагреваются или наоборот теплоизолированы), начальные значения A_1, B_1 задаются соответственно:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \alpha_{m+1} \text{ нагрев}$$

или

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 0 \text{ теплоизоляция,}$$

так как $u_0^{m+1} = u_1^{m+1}$.

То есть для задания A_1, B_1 берем граничные условия на левом конце.

Граничные условия на правом конце используем для задания u_N^{m+1} , которое необходимо знать перед выполнением обратного хода (15). Здесь также в зависимости от того, нагреваются ли концы либо теплоизолированы, мы задаем u_N^{m+1} соответственно

$$u_N^{m+1} = \beta_{m+1}, \text{ нагрев}$$

или для случая теплоизоляции, решая систему из двух уравнений

$$u_{N-1}^{m+1} = A_N u_N^{m+1} + B_N,$$

$$\frac{u_N^{m+1} - u_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} = 0,$$

получаем

$$u_N^{m+1} = \frac{B_N}{1 - A_N}.$$

Примеры задания 5.

1. Имеется неоднородный стержень с коэффициентом температуропроводности $k(x)$ и плотностью $\rho(x)$, концы которого нагреваются по закону (изменение температуры по времени) $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Считая начальное в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня известным и равным $g(x)$, требуется найти температуру и построить ее график для любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$. Считать удельную теплоемкость заданной величиной $s(x)$.

2. Имеется неоднородный стержень с коэффициентом температуропроводности $k(x)$ и плотностью $\rho(x)$, концы которого теплоизолированы. Считая начальное в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня известным и равным $g(x)$, требуется найти температуру и построить ее график любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$. Считать удельную теплоемкость заданной величиной $s(x)$.

02.04.2025 (Лекция 7)

6. ТЕМА: “МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ВОЛНЫ ПРОРЫВА В ГОРНОМ ВОДОХРАНИЛИЩЕ”

6.1 Основные понятия гидравлики

Определение 1. *Линия тока* – это линия, проведенная через точки движения жидкости таким образом, что в каждой из этих точек вектор скорости \vec{v} направлен по касательной в момент времени t .

Определение 2. *Гидродинамическое давление* – это внутреннее давление, развивающееся при движении жидкости.

Определение 3. *Установившееся движение жидкости* – это такое движение, при котором скорость потока жидкости \vec{v} и гидродинамическое давление p в любой точке **не** изменяются с течением времени, а зависят только от положения в потоке жидкости (то есть могут быть функциями только от пространственных координат или константами вообще).

В противном случае течение называется *неустановившимся*.

Например, течение жидкости в реке или в трубе, канале – установившееся. Но, если будет осуществляться приток в русло при интенсивном снеготаянии или дождевых осадках, то прогноз изменения объема жидкости, а также ее скорости по времен – актуальная проблема экологического характера.

Определение 4. Если плотность жидкости $\rho = const$, то жидкость называется *идеальной несжимаемой*.

Определение 5. Сечение потока жидкости, перпендикулярное линиям тока, называется *живым сечением* и обозначается w .

Определение 6. Величина $Q = \frac{V}{t}$, где V – объем жидкости, протекаемый через живое сечение за время t , называется *средним расходом жидкости*. Если $V = V(t)$, то $Q(t) = V'(t)$ – мгновенный расход.

Можно вычислять средний расход по другой формуле

$$Q = v \cdot w.$$

Закон сохранения массы для средних величин:

$$Q = const, \quad w_1 v_1 = w_2 v_2$$

Различают два вида естественных русел: призматическое и непризматическое.

Определение 7. *Призматическое русло* – это такое русло, форма и размеры которого постоянны вдоль всего потока. В противном случае русло *непризматическое*.

6.2 Гидродинамическая постановка задачи

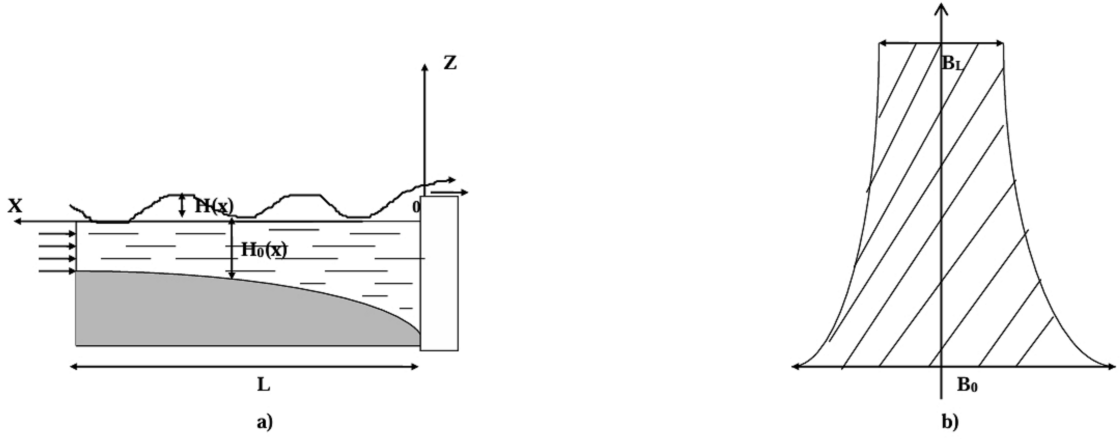


Рис. 2:

Предположим, что в прямоугольной системе координат $xoyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 \leq x \leq L$, $-B(x)/2 \leq y \leq B(x)/2$, $-H_0(x) \leq z \leq 0$ и заполненная водой, представляет горное водохранилище непризматического очертания в плане и с переменной в продольном направлении глубиной $H_0(x)$. В створе $x = 0$ расположена плотина, $B(x)$ – представляет переменную ширину водохранилища.

Рассмотрим волновое движение воды, вызванное тем, что с берега $x = L$ в водохранилище вторгся обвально-оползневый массив или поток селевого либо лавинного характера. В линейном приближении теории мелкой воды волновое движение описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1)$$

$$B \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (B H_0 v) = 0, \quad (2)$$

где $v(x, t)$ – средняя по ширине каньона скорость движения воды, $B = B(x)$ – ширина каньона, $H_0(x)$ – глубина воды в водохранилище при невозмущенном состоянии, $H(x, t)$ – возмущение глубины в результате вторжения с берега $x = L$.

Введем функцию $\phi = \phi(x, t)$, подобную потенциалу скорости, следующим образом

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x}, H = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3)$$

Легко заметить, что дифференциальное уравнение (1) относительно функции $\phi(x, t)$ превращается в тождество, а уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g H_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - g \left[\frac{dH_0}{dx} + H_0(x) \frac{1}{B(x)} \frac{dB}{dx} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи запишутся следующим образом:

$$\phi(x, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(L, t) = \tilde{v}(t), \quad (6)$$

где $\tilde{v}(t)$ – скорость вторжения.

Таким образом, модель представляет начально-краевую задачу (4)-(6) для дифференциальных уравнений теории «мелкой» воды в линейном приближении. В дифференциальном уравнении (4) коэффициенты представляют переменные величины и по этой причине его решение для произвольных функций $H_0(x)$ и $B(x)$ связано со значительными математическими трудностями. Но, если представить очертания водохранилища математическими функциями, то вопрос аналитического решения решается эффективно.

К примеру, ширина водохранилища аппроксимируется экспоненциальной функцией вида

$$B(x) = B_0 e^{sx}. \quad (7)$$

Скорость вторжения представим в виде функции Хевисайда

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v_0, & 0 < t < t_0, \\ 0, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (8)$$

6.3 Аналитическое исследование математической модели

Вместо независимой переменной x введем новую переменную ξ с помощью следующей подстановки (преобразование годографа)

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{gH_0(x)}}. \quad (9)$$

При такой подстановке начально-краевая задача (4)-(6) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \left[gH_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{qH_0}} \right) + \sqrt{\frac{g}{H_0}} \frac{dH_0}{dx} + \sqrt{gH_0} \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\phi(\xi, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\xi, 0) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(L_1, t) = \sqrt{gH_0(L)} \tilde{v}(t), \quad (12)$$

где L_1 – значение длины водохранилища в системе координат (ξ, t) .

Далее, для упрощения в уравнении (10) коэффициент при производной первого порядка приравняем к постоянной величине:

$$gH_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{qH_0}} \right) + \sqrt{\frac{g}{H_0}} \frac{dH_0}{dx} + \sqrt{gH_0} \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} =: c_1. \quad (13)$$

Интегрируя с учетом (7) дифференциальное уравнение (13), получим

$$H_0(x) = \left(\frac{C_1}{s\sqrt{g}} + C_2 e^{-sx} \right)^2. \quad (14)$$

Постоянные интегрирования 1 и 2 можно подобрать так, чтобы выполнялись следующие условия на границах водохранилищ

$$H_0(x)|_{x=0} = H_0, \quad H_0(x)|_{x=L} = H_1.$$

В результате получим

$$H_0(x) = \left(\sqrt{H_0} - \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{1 - e^{-sL}} + \frac{(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1})e^{-sx}}{1 - e^{-sL}} \right)^2. \quad (15)$$

Итак, при задании ширины и глубины водоема в виде функции, представленных в выражениях (7) и (15), коэффициенты дифференциального уравнения (10) становятся постоянными, и начально-краевая задача

решается аналитически, а уравнение волновой поверхности получается в явном виде. При переходе к пределу при $s \rightarrow 0$ в выражениях (7) и (15) ширина водоема становится постоянной, а глубина – параболической функцией второго порядка

$$H_0(x) = \left(\sqrt{H_0} - \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{L} - \sqrt{H_0} \right)^2.$$

Итак, для (10) имеем

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - c_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{gH_0}s - \sqrt{gs} \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{1 - e^{-sL}}, \\ \xi(x) &= -\frac{A}{\sqrt{gs}(\sqrt{H_0}A - 1)} \ln \left| \frac{\sqrt{H_0}Ae^{-sx}}{\sqrt{H_0}A - 1 + e^{-sx}} \right|, \\ A &= \frac{1 - e^{-sL}}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}, \quad L_1 = \xi(L). \end{aligned}$$

Применим к равенствам (11), (12), (16) подстановку:

$$\phi(\xi, t) = \Phi(\xi, t) \exp(-c_1 \xi/2). \quad (17)$$

Начально-краевая задача для функции $\Phi(\xi, t)$ запишется следующим образом

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{c_1^2}{4} \Phi = 0, \quad (18)$$

$$\Phi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{c_1}{2} \Phi \right) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{c_1}{2} \Phi \right) \Big|_{\xi=L_1} = \sqrt{gH_1} \tilde{v}(t) e^{c_1 L_1/2}. \quad (20)$$

Далее, для упрощения граничных условий введем функцию $\Psi(\xi, t)$

$$\Psi(\xi, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - c_1 \frac{\Phi}{2}. \quad (21)$$

Тогда из (18) имеем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{c_1^2}{4} \Psi = 0. \quad (22)$$

Начальные и граничные условия (19) и (20) относительно функции Ψ запишутся следующим образом:

$$\Psi \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (23)$$

$$\Psi \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \Psi \Big|_{\xi=L_1} = \sqrt{gH_1} e^{\frac{c_1}{2} L_1} \tilde{v}(t). \quad (24)$$

Применим подстановку для того, чтобы обнулить граничные условия (20):

$$\bar{\Psi}(\xi, t) = \Psi(\xi, t) - \sqrt{gH_1} e^{\frac{c_1}{2} L_1} \tilde{v}(t) \frac{\xi}{L_1}.$$

Начально-краевая задача (22)-(24) относительно функции $\bar{\Psi}(\xi, t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \xi^2} + \frac{c_1^2}{4} \bar{\Psi} = -\sqrt{gH_1} e^{c_1 L_1/2} \frac{\xi}{L_1} \left(\tilde{v}''(t) - \frac{c_1^2}{4} \tilde{v}(t) \right), \quad (25)$$

$$\bar{\Psi} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (26)$$

$$\bar{\Psi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \bar{\Psi} \Big|_{\xi=L_1} = 0, \quad (27)$$

Правую часть выражения (25) представим как $f(t)\xi$, где

$$f(t) = -\sqrt{gH_1} e^{c_1 L_1/2} \frac{1}{L_1} \left(\tilde{v}''(t) - \frac{c_1^2}{4} \tilde{v}(t) \right).$$

Неизвестная функция $\bar{\Psi}(\xi, t)$ допускает представление в виде следующего тригонометрического ряда

$$\bar{\Psi}(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Psi}_n(t) \sin \left(\frac{\pi n}{L_1} \xi \right). \quad (28)$$

Функцию ξ разложим в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, L_1)$

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \left(\frac{\pi n}{L_1} \xi \right), \quad \alpha_n = \frac{2}{L_1} \int_0^t \xi \sin \left(\frac{\pi n}{L_1} \xi \right) d\xi. \quad (29)$$

Легко заметить, что граничные условия (27) автоматически удовлетворяются. Для нахождения функции $\bar{\Psi}_n(t)$ подставим выражения (29) и (28) в (25) и (26). В результате получим:

$$\frac{d^2 \bar{\Psi}_n}{dt^2} + \left(a_n^2 + \frac{c_1^2}{4} \right) \bar{\Psi}_n = \alpha_n f(t), \quad (30)$$

$$\bar{\Psi}_n(0) = 0, \quad \bar{\Psi}'_n(0) = 0. \quad (31)$$

При этом принимается, что $V(0) = V'(0) = 0$. Решение дифференциального уравнения (30) с начальными условиями (31) имеет следующий вид:

$$\bar{\Psi}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \int_0^t f(\tau) \sin(\gamma_n(t - \tau)) d\tau \cdot \sin(a_n \xi) + \sqrt{gH_1} e^{\frac{c_1}{2} L_1} \frac{\xi}{L_1} \tilde{v}(t),$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{a_n^2 + \frac{c_1^2}{4}}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L_1}.$$

При известной функции $\Psi(\xi, t)$ выражение (3.40) можно рассмотреть как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(\xi, t)$. Его общее решение имеет следующий вид

$$\Phi(\xi, t) = e^{\frac{c_1}{2} \xi} \left[c(t) + \int \Psi(\xi, t) e^{-\frac{c_1}{2} \xi} d\xi \right].$$

Функция $\phi(\xi, t)$ определяется из выражения (3.36)

$$\phi(\xi, t) = c(t) + \int \Psi(\xi, t) e^{-\frac{c_1}{2} \xi} d\xi.$$

Можно показать, что функция $\bar{\Psi}(t) = 0$. Тогда получим

$$\bar{\Psi}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \int_0^t f(\tau) \sin(\gamma_n(t - \tau)) d\tau \cdot \int e^{-\frac{c_1}{2} \xi} \sin(a_n \xi) d\xi,$$

$$\int e^{-\frac{c_1}{2} \xi} \sin(a_n \xi) d\xi = \frac{1}{\gamma_n^2} \left(-\frac{c_1}{2} \sin(a_n \xi) - a_n \cos(a_n \xi) \right) e^{-\frac{c_1}{2} \xi}$$

Если скорость вторжения $\tilde{v}(t)$ представим в виде функции Хевисайда (3.27), то интеграл $\int_0^t f(\tau) \sin \gamma_n(t - \tau) d\tau$ упрощается, и в результате его вычисления получим

$$\int_0^t f(\tau) \sin \gamma_n(t - \tau) d\tau = \begin{cases} \beta \left(\gamma_n v_0 + \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \frac{2v_0}{\gamma_n} \sin^2 \left(\frac{\gamma_n t}{2} \right) \right), & 0 < t < t_0, \\ \beta \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \frac{2v_0}{\gamma_n} \sin \left(\frac{\gamma_n(2t - t_0)}{2} \right) \sin \left(\gamma_n \frac{t_0}{2} \right), & t \geq t_0, \end{cases}$$

где

$$\beta = -\frac{\sqrt{gH_1} e^{-\frac{c_1}{2} L_1}}{L_1}$$

и для $t \geq t_0$

$$\phi(\xi, t) = -\frac{2v_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \cos \left(\frac{\gamma_n(2t - t_0)}{2} \right) \sin \left(\gamma_n \frac{t_0}{2} \right) \left(\frac{c_1}{2} \sin(a_n \xi) + a_n \cos(a_n \xi) \right),$$

для $t \leq t_0$ соответственно получим:

$$\phi(\xi, t) = \frac{2v_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \sin(\gamma_n t) \left(\frac{c_1}{2} \sin(a_n \xi) + a_n \cos(a_n \xi) \right).$$

Уравнение волновой поверхности определяется из равенств: для $t \geq t_0$

$$H(\xi, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow$$

$$H(\xi, t) = -\frac{2v_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \sin \left(\frac{\gamma_n(2t - t_0)}{2} \right) \sin \left(\gamma_n \frac{t_0}{2} \right) \left(\frac{c_1}{2} \sin(a_n \xi) + a_n \cos(a_n \xi) \right),$$

для $t \leq t_0$

$$H(\xi, t) = \frac{2v_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \cos(\gamma_n t) \left(\frac{c_1}{2} \sin(a_n \xi) + a_n \cos(a_n \xi) \right).$$

Полученные функциональные ряды позволяет определить высоту волны, образующей в водохранилище в результате вторжения селевых потоков. Исследование сходимости функционального ряда для $H(\xi, t)$ и численные расчеты (предлагаем провести читателю это самостоятельно) позволят выявить зависимость высоты волны от скорости вторжения, а также от различных геометрических характеристик водохранилища.

6.4 Численное (конечно-разностное) исследование модели