

ЗАДАНИЯ 3, 4

“ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ”

Выполнить программную реализацию математической модели с начальными и граничными условиями Дирихле **явным** (задание 3) и **неявным** (задание 4) конечно-разностным методом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t), & t \in [0, T], x \in [0, L], \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & x \in [0, L] \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(L, t) = \beta(t), & t \in [0, T] \end{cases} \quad (1)$$

Переход к дискретной модели. Явный метод расчета

Введем равномерное разбиение прямоугольника $[0, L] \times [0, T]$ на сетку с узлами (x_j, t_m) , где $x_j = j * \Delta x$, $t_m = m * \Delta t$, $j = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Здесь $\Delta x = L/N$, $\Delta t = T/M$ – шаги разбиения отрезка $[0, L]$ и $[0, T]$ соответственно.

Тогда известные непрерывно-дифференцируемые функции $\rho(x)$, $k(x)$, $f(x)$ становятся известными дискретными функциями

$$\rho_j := \rho(x_j) = \rho(j * \Delta x),$$

$$k_j := k(j * \Delta x),$$

$$F_j^m := F(j * \Delta x, m * \Delta t).$$

Искомой величиной в дискретной задаче будет двумерный массив

$$u_j^m \approx u(x_j, t_m)$$

Для дискретизации основного уравнения перепишем его, раскрывая производную произведения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k'(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t). \quad (2)$$

Уравнение (2) заменяется на дискретный аналог:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho_j} \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} \\ + \frac{k_j}{\rho_j} \cdot \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + F_j^m, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Начальные условия в дискретном случае будут выглядеть:

$$u_j^0 = f_j, u_j^1 = f_j + g_j \Delta t, \quad j = \overline{0, N} \quad (4)$$

граничные условия Дирихле:

$$u_0^m = \alpha(t_m) := \alpha_m, \quad u_N^m = \beta(t_m) := \beta_m, \quad m = \overline{0, M}, \quad (5)$$

Заметим, что в уравнении (3) в расчете участвует пять точек $u_j^m, u_{j-1}^m, u_{j+1}^m, u_j^{m-1}, u_j^{m+1}$. На первом шаге благодаря начальным условиям, оказываются известными значения 4-х значений на $m-1, m$ временном слое, а неизвестной является из них одна точка u_j^{m+1} . Выражая ее явно из (3), мы получим рекуррентную формулу для расчета смещения в точке (x_j, t_{m+1}) :

$$u_j^{m+1} = \left(2 - 2 \frac{k_j}{\rho_j} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_j^m - u_j^{m-1} + \dots \quad (6)$$

здесь самостоятельно дописать! Эта формула пойдет в программу!

Явный метод расчета обладает одним недостатком: он условно устойчив. Иначе говоря, не при всяких шагах дискретизации $\Delta t, \Delta x$ он работает. То есть метод чувствителен к размерности массива $M \times N$. Условием устойчивости здесь является *условие Куранта*:

$$\left| 2 - 2 \frac{k_j}{\rho_j} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right| \leq 1$$

Необходимо его проверять в программе в цикле перед расчетом по формуле (6).

Неявный метод расчета

задача для **неявного метода** будет иметь вид

$$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$+f(x_j, t_m), j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M-1}. \quad (21)$$

Начальные и граничные условия остаются без изменения, то есть такие же, как в (20).

В уравнении (21) неизвестными являются три точки u_{j+1}^{m+1} , u_j^{m+1} , u_{j-1}^{m+1} . То есть матрица для неизвестных получается трехдиагональная. Перепишем (21), выделяя коэффициенты при этих трех неизвестных:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j-1}^{m+1} - \left(\frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) u_j^{m+1} + \\ &\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j+1}^{m+1} = \frac{u_j^{m-1} - 2u_j^m}{(\Delta t)^2} - F(x_j, t_m). \end{aligned} \quad (22)$$

Введя обозначение

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad b_j = \frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2}, \\ c_j &= \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad \tilde{F}_j^m = \frac{u_j^{m-1} - 2u_j^m}{(\Delta t)^2} - F(x_j, t_m), \end{aligned}$$

получим задачу для неявного метода

$$\begin{cases} a_j u_{j-1}^{m+1} - b_j u_j^{m+1} + c_j u_{j+1}^{m+1} = \tilde{F}_j^m, \\ u_j^0 = f(x_j), \quad u_j^1 = f(x_j) + g(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \\ u_0^{m+1} = \alpha(t_{m+1}), \quad u_N^m = \beta(t_{m+1}), \quad m = \overline{0, M-1}. \end{cases} \quad (23)$$

Метод прогонки заключается в представлении (гипотезе), что

$$u_j^{m+1} = A_{j+1} u_{j+1}^{m+1} + B_{j+1}, \quad j = 0, \dots, N-1; m = 0, \dots, M-1. \quad (24)$$

На первом этапе (прямой ход) определяются коэффициенты

$$A_{j+1} = \frac{c_j}{b_j - A_j a_j}, \quad B_{j+1} = \frac{a_j B_j - \tilde{F}_j^m}{b_j - A_j a_j}. \quad (25)$$

Для расчета по формулам (25) необходимо знать начальные значения A_1, B_1 :

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \alpha_{m+1}.$$

так как $u_0^{m+1} = A_1 u_1^{m+1} + B_1$.

То есть для задания A_1, B_1 берем граничные условия на левом конце.

На втором этапе обратный ход представляет равенство (24), для которого нужно знать начальное значение - u_N^{m+1} .

Граничные условия на правом конце используем для задания u_N^{m+1} , которое необходимо знать перед выполнением обратного хода (15):

$$u_N^{m+1} = \beta_{m+1}.$$

Заметим, что условием существования, единственности и устойчивости решения по методу прогонки является условие, выполняемое при любом m :

$$|b_j| \geq |a_j| + |c_j|,$$

которое очевидно выполняется в нашем случае.

Алгоритм для неявного метода прогонки.

До пятого пункта предыдущего алгоритма все остается, то есть до цикла, который задает граничные условия. Этот цикл исключается в методе прогонки.

6. Открытие цикла по $m = 0, \dots, M - 1$, который закроется в самом конце алгоритма.

7. Задание A_1, B_1

8. Открытие цикла по $j = 1, \dots, N - 1$ выполнение прямого хода - расчет по формулам (25), после цикл закрывается.

9. Задание u_N^{m+1}

10. Открытие цикла с обратным ходом - формула (24), будет только одна формула в этом цикле

11. Закрытие цикла по времени и вывод графика.

Варианты:

1. $L = 10$, $k(x) = x^2$, $\rho(x) = x + 1$, $F(x, t) = \sin(x)$, $f(x) = x$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = 0$.

2. $L = 10$, $k(x) = x^3 + 1$, $\rho(x) = (x + 1)^2$, $F(x, t) = \cos(x)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t^2$.

3. $L = 10$, $k(x) = 1 \frac{1}{x+1}$, $\rho(x) = 1$, $F(x, t) = \cos(x)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = t$.

4. $L = 10$, $k(x) = x^3 + 1$, $\rho(x) = (x + 1)^2$, $F(x, t) = \sin(x)$, $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = -x$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 0$.

5. $L = 10$, $k(x) = x^5 + x$, $\rho(x) = 2$, $F(x, t) = e^{\cos(x)}$, $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t + 1$.

6. $L = 10$, $k(x) = 1$, $\rho(x) = (x + 1)^2$, $F(x, t) = 0$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t + 1$, $\beta(t) = 0$.

7. $L = 10$, $k(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $\rho(x) = x$, $F(x, t) = \cos^2(x)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 0$.

8. $L = 10$, $k(x) = x^2 + x + 1$, $\rho(x) = 1$, $F(x, t) = e^{-x^2}$, $f(x) = \cos(x^2)$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = 1$, $\beta(t) = t^2$.

9. $L = 10$, $k(x) = 2x$, $\rho(x) = \ln(x+1)^2$, $F(x, t) = e^x$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t$, $\beta(t) = t^2$.

10. $L = 10$, $k(x) = e^x + 1$, $\rho(x) = (x + 1)^2$, $F(x, t) = e^{-x}$, $f(x) = \sin(x)^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t^2$, $\beta(t) = -t$.

ЗАДАНИЕ 5

“МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА”

Задание 5.

1, 5. Имеется неоднородный теплоизолированный стержень с коэффициентом температуропроводности $k(x)$ и плотностью $\rho(x)$, концы которого нагреваются по закону (изменение температуры по времени) $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Считая начальное в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня известным и равным $g(x)$, требуется найти температуру для любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$ и построить ее график. Считать удельную теплоемкость заданной величиной $s(x)$.

2, 6. Имеется неоднородный теплоизолированный стержень с коэффициентом температуропроводности $k(x)$ и плотностью $\rho(x)$, концы которого теплоизолированы. Считая начальное в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня известным и равным $g(x)$, требуется найти температуру для любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$ и построить ее график. Считать удельную теплоемкость заданной величиной $s(x)$.

3, 7, 9. Имеется неоднородный теплоизолированный стержень с коэффициентом температуропроводности $k(x)$ и плотностью $\rho(x)$, правый конец которого теплоизолирован, а левый подвергается нагреву по закону $\alpha(t)$. Считая начальное в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня известным и равным $g(x)$, требуется найти температуру для любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$ и построить ее график. Считать удельную теплоемкость заданной величиной $s(x)$.

4, 8, 10. Имеется неоднородный теплоизолированный стержень с коэффициентом температуропроводности $k(x)$ и плотностью $\rho(x)$, правый конец которого нагревается по закону $\beta(t)$, а левый конец теплоизолирован. Считая начальное в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня известным и равным $g(x)$, требуется найти температуру для любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$ и построить ее график. Считать удельную теплоемкость заданной величиной $s(x)$.

Входящие (заданные функции):

1. $L = 10, k(x) = x^2, \rho(x) = x + 1, s(x) = x, g(x) = x, \alpha(t) = t, \beta(t) = 0$.

2. $L = 10, k(x) = x^3 + 1, \rho(x) = (x + 1)^2, s(x) = x^2, g(x) = x, \alpha(t) = t, \beta(t) = t^2$.

3. $L = 10, k(x) = 1 \frac{1}{x+1}, \rho(x) = 1, s(x) = x^2, g(x) = x, \alpha(t) = 0, \beta(t) = t$.

4. $L = 10, k(x) = x^3 + 1, \rho(x) = (x + 1)^2, s(x) = x^3 - x, g(x) = -x, \alpha(t) = 0, \beta(t) = 0$.

5. $L = 10, k(x) = x^5 + x, \rho(x) = 2, s(x) = 0, g(x) = 0, \alpha(t) = t, \beta(t) = t + 1$.

6. $L = 10, k(x) = 1, \rho(x) = (x + 1)^2, s(x) = x^2 + 1, g(x) = x, \alpha(t) = t + 1, \beta(t) = 0$.

7. $L = 10, k(x) = x^3 - x^2 + x + 1, \rho(x) = x, s(x) = x^2, g(x) = x, \alpha(t) = 0, \beta(t) = 0$.

8. $L = 10, k(x) = x^2 + x + 1, \rho(x) = 1, s(x) = \cos(x^2), g(x) = x, \alpha(t) = 1, \beta(t) = t^2$.

9. $L = 10, k(x) = 2x, \rho(x) = \ln(x + 1)^2, s(x) = x, \alpha(t) = t, \beta(t) = t^2$.

10. $L = 10, k(x) = e^x + 1, \rho(x) = (x + 1)^2, s(x) = \sin(x)^2, g(x) = x, \alpha(t) = t^2, \beta(t) = -t$.