

1 Введение

Решение большинства современных проблем, возникающих при различных видах человеческой деятельности, неразрывно связаны с научным прогнозированием. Научное прогнозирование является исследованием, имеющим свою методологию и технику, проводимым с целью повышения уровня его обоснованности и эффективности. Компьютеризация данного исследования – это предел, достигнутый наукой при построении математических моделей живой природы. Например, экология на данный момент оперирует практически всеми средствами теории динамических систем – обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, интегральными и интегродифференциальными уравнениями и т.д., в основе которых лежат хорошо известные физические законы сохранения массы, количества движения, энергии и т.д. Математические методы проникли в самые разные области экологии: в анализ взаимоотношения видов в сообществе, в исследование процессов миграции, территориального поведения, в анализ потоков вещества и энергии в экосистемах, а также в изучение оценок влияния различных антропогенных факторов на природные системы, в исследование проблем оптимального управления природными ресурсами.

Как известно, моделирование представляет собой один из основных методов познания, является формой отражения действительности и заключается в выяснении или воспроизведении тех или иных свойств реальных объектов, предметов и явлений с помощью абстрактного описания в виде изображения, планы, карты, совокупности уравнений, алгоритмов, программ. Возможности моделирования основаны на том, что модель в определенном смысле воспроизводит некоторые интересующие исследователя черты объекта.

В последние годы, благодаря развитию графического интерфейса и графических пакетов, широкое развитие получило компьютерное (имитационное) моделирование – метод решения задачи анализа или синтеза системы на основе использования ее компьютерной модели. Под компьютерной моделью понимается либо программный комплекс, имитирующий процессы функционирования объекта при условии воздействия на объект различных случайных факторов, либо условный образ объекта, описан-

ный компьютерными таблицами, диаграммами, графиками, рисунками. Имитационные компьютерные модели включают представления о компонентах систем и их взаимосвязях как в виде собственно математических объектов: формул, уравнений, матриц, логических процедур, так и в виде графиков, таблиц, баз данных, оперативной информации экологического мониторинга. Такие многомерные модели позволяют объединить разнородную информацию об экологической или эколого-экономической системе, “проигрывать” различные сценарии развития и вырабатывать на модели оптимальные стратегии управления, что невозможно делать на реальной системе в силу ее уникальности и ограниченности времени. Таким образом, компьютерное моделирование заключается в получении количественных и качественных результатов по имеющейся модели.

Первые работы по компьютерному моделированию, или, как говорили раньше, моделированию на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ), были связаны с физикой, где с помощью моделирования решался целый ряд задач гидравлики, фильтрации, теплопереноса и теплообмена, механики твердого тела и т.д. Моделирование в основном представляло собой решение сложных нелинейных задач математической физики с помощью итерационных схем. Успехи математического моделирования в физике способствовали распространению его на задачи химии, электроэнергетики, биологии и некоторые другие дисциплины. Сложность решаемых задач всегда ограничивалась лишь мощностью имеющихся ЭВМ. Подобный вид моделирования весьма широко распространен и в настоящее время. Более того, за время развития методов моделирования на ЭВМ при решении задач фундаментальных дисциплин и смежных предметных областей накоплены целые библиотеки подпрограмм и функций, облегчающих применение и расширяющих возможности моделирования. Кроме того, математическое и компьютерное моделирование представляет собой один из самых экономичных методов исследования. Как известно, проведение натурных экспериментов требует огромных затрат, но зачастую проведение экспериментов просто невозможно или небезопасно (например, моделирование волн цунами, расчеты процессов, происходящих в ядерных реакторах).

2 Понятие математической модели. Основные требования

2.1 Понятие математической модели

Пример. Пусть груз массы m колеблется на горизонтальной плоскости под действием пружины нулевой массы с жесткостью k . Предположим, что противодействующие силы (в частности, сила трения) пренебрежимо малы, и нас интересуют характер и частота колебаний.

Для решения направим ось вдоль линии колебаний и выберем на ней начало отсчета, отвечающее равновесному положению груза, при котором пружина находится в нейтральном состоянии, т.е. ни сжата, ни растянута. Тогда, если положению груза соответствует координата x , то на него действует сила $-kx$. Применяя второй закон Ньютона, получаем дифференциальное уравнение

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1.1)$$

с общим решением (проверьте!)

$$x = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Здесь C_1 , C_2 – произвольные постоянные, определяемые, например, из начальных условий. Таким образом, груз совершает гармонические колебания с центром в точке $x = 0$, с произвольной амплитудой и с угловой частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Уравнение (1.1) является математической записью физических условий и законов, определяющих процесс колебания системы, и потому называется математической моделью рассматриваемой системы (или процесса ее колебаний).

Конечно, уравнение (1.1) описывает не все стороны рассматриваемого процесса. Так, из него нельзя найти амплитуду колебаний: для этого требуются добавочные данные – например, начальные условия. Далее, в реальной системе колебания все-таки затухают, но никаких сведений об этом мы получить из уравнения (1.1) не можем.

Перейдем к общему определению. Пусть мы собираемся исследовать некоторую совокупность S свойств реального объекта a с помощью ма-

тематики (здесь термин *объект* понимается в наиболее широком смысле: объектом может служить не только то, что обычно именуется этим словом, но и любая ситуация, явление, процесс и т.д.). Для этого мы выбираем (как говорят, строим) “математический объект” a' – систему уравнений, или арифметических соотношений, или геометрических фигур, или комбинацию того и другого и т.д., – исследование которого средствами математики и должно ответить на поставленные вопросы о свойствах S . В этих условиях a' называется *математической моделью объекта a относительно совокупности S его свойств*. Так, в разобранном примере объектом a' – уравнение (1.1), совокупностью S – характер и частота колебаний.

2.2 Общая схема применения математики

Итак, математика применяется не непосредственно к реальному объекту, а к его математической модели.

Общая схема построения модели:

1. Изучение реального объекта, анализ его свойств. Строим механическую, либо физическую, либо биологическую, либо социальную и т.п. модель объекта. Такую модель мы будем называть *содержательной* моделью. Здесь формулируются гипотезы (постулаты модели). Например, в нашем примере, это гипотеза о линейной зависимости силы упругости пружины от ее растяжения, о равенстве нулю массы пружины, а также об отсутствии противодействующих сил. Кроме того, включение модели в ту или иную науку дает возможность применять законы этой науки. Естественно, что на этом этапе мы переходим к упрощенному, схематическому описанию. На основе содержательной модели мы выписываем соответствующие уравнения или как-то иначе переводим ее на формальный математический язык и тем самым переходим к математической модели.

2. Решение полученной математической задачи. Выбираем метод решения и реализуем его, проводим все необходимые вычисления. Здесь не следует забывать о том, что все элементы математической модели являются как бы метками соответствующих реальных объектов. Это дает возможность в процессе решения математической задачи привлекать

дополнительные сведения, которые могут упростить этот процесс, либо выделяют из нескольких решений то, которое нужно.

3. Анализ решения, выводы. Интерпретируем (истолковываем) результат исследования математической модели. В третий этап может входить и контроль правильности (или *верификация*) модели на основе сравнения результата с другими известными фактами, в частности с экспериментальными данными, и т.д.

Описанные этапы тесно связаны между собой, и их разделение является до некоторой степени искусственным. Математическая модель обычно строится с ориентацией на метод решения - в частности, будем ли мы привлекать компьютерные вычисления и если будет, какой мощности компьютер нам будет нужен. С другой стороны, при интерпретации (на третьем этапе) может понадобиться уточнить или даже существенно изменить математическую модель.

2.3 Требования, предъявляемые к моделям

1. **Требование адекватности** - важнейшее требование, состоящее в правильном соответствии модели изучаемому реальному объекту a относительно выбранной системы S его свойств. Под это понимается:

а) правильное качественное описание свойств объекта: возможность на основании исследования модели сделать правильный вывод о направлении изменения каких-либо количественных характеристик этих свойств, о их взаимосвязи, о характере колебаний объекта, об устойчивости его состояния или эволюции и т.п.

б) правильное количественное описание этих свойств с некоторой разумной точностью.

В соответствии с тем, ставится условие б) или нет, говорят соответственно о *количественных* или *качественных моделях*. Вместо количественной адекватности говорят о *точности модели*.

В областях, еще не подготовленных для применения развитых количественных математических методов, либо в тех областях, где количественные закономерности проявляются не вполне четко (например, в социальных или биологических науках), математические модели являются лишь качественными.

Естественно говорить не просто об адекватности модели, но также о большей или меньшей адекватности. Для нашего примера модель (1.1) адекватна по отношению к частоте колебаний и в определенной степени к характеру колебаний, так как на небольшом интервале времени затуханием колебаний можно пренебречь. Однако если нас интересует скорость этого затухания, то (1.1) неадекватная, а в качестве адекватной модели можно взять уравнение

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.2)$$

с малым коэффициентом трения f . Здесь принимается довольно гипотеза вязкого трения, согласно которой противодействующая сила пропорциональна скорости.

Следует всегда помнить, что *всякая адекватность математической модели реальному объекту лишь относительна и имеет свои рамки применимости*. Забывая об этом, мы можем допустить грубые ошибки, основанные на бесконтрольном приписывании реальному объекту свойств его модели.

2. Требование достаточной простоты

Если ориентироваться только на требование адекватности, то сложные модели следует предпочитать простым. В самом деле, усложняя модель, мы можем учесть большее число факторов, которые могут так или иначе повлиять на изучаемые свойства. Так, в нашем примере при рассмотрении частоты колебаний модель (1.2) имеет более высокую адекватность, чем (1.1), так как из уравнения (1.2) мы получаем значение угловой частоты с учетом малого трения (проверьте!):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4m^2}} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 - \frac{f^2}{8mk} \right).$$

В данном примере решение усложненного уравнения не вызвало затруднений. Но в иных, особенно нестандартных, ситуациях чрезмерное усложнение модели может привести к громоздким системам уравнений, не поддающимся изучению и решению.

Таким образом, мы приходим к требованию достаточной простоты модели: модель является достаточной простой, если имеющиеся в нашем распоряжении средства исследования дают возможность провести в

приемлемые сроки и экономно по затратам труда и средств, но с разумной точностью качественные или количественные анализ исследуемых свойств и осмыслить результат.

При упрощении можно изменять либо содержательную модель объекта, либо математическую модель. Опытный специалист обычно идет по первому пути, так как при этом мы не меняем физических соотношений.

3. Требование полноты и продуктивности

Существенным является свойство *полноты* математической модели, состоящее в том, что эта модель дает принципиальную возможность с помощью математических методов получить интересующие нас утверждения. В нашем примере, если мы в качестве модели ограничиваемся уравнением (1.1), то для определения частоты колебаний эта модель является полной, а для определения амплитуды неполной, так как для последнего нужны дополнительные данные (например, данные Коши).

Еще одно требование к математической модели - ее *продуктивность*. Оно связано с тем, что изучаемый объект может включать различные параметры (масса, длина и т.п.), функциональные зависимости, которые считаются заданными и описывают связи между величинами (например, связь между усилием и перемещением в случае нелинейного закона упругости). Все эти задаваемые параметры и зависимости, называемые *исходными данными* модели, влияют на значения величин, получаемых в результате решения математической задачи. Требование продуктивности состоит в том, чтобы в реальных ситуациях исходные данные можно было бы действительно считать заданными (измеримыми, рассчитываемыми, находящимися в справочниках и т.д.).

4. Требование робастности и наглядности

Робастность модели – это ее устойчивость относительно погрешностей в исходных данных. Всегда надо иметь в виду, что эти данные могут быть известны лишь с большей или меньшей точностью и такая неопределенность не должна существенно влиять на результат исследования. Имеется ряд правил, способствующих этой устойчивости. Так, следует избегать вычитания близких друг к другу приближенных значений величины, потому что при таком вычитании относительная погрешность резко возрастает. Например, $a = 275,1 \pm 0,1$ и $b = 272,3 \pm 0,1$. Тогда

$a - b = 2,8 \pm 0,2$. Здесь a и b известны с точностью до 0,04%, а $a - b$ до 7%. Точность ухудшилась в 200 раз!

То есть не следует вычитать массу шляпы, взвесившись сначала в шляпе, а затем без нее и взяв разность результатов. Выражения, содержащие такие разности, следует преобразовывать. Например, вычислив на микрокалькуляторе значение $l = \sqrt{a^2 + \alpha} - a$ при $a = 15721$, $\alpha = 0,3$, получим, считая значения a и α точными, $l = 9 \cdot 10^{-6}$; если же преобразовать эту формулу к виду $l = \frac{\alpha}{\sqrt{a^2 + \alpha} + a}$, то получим существенно более информативное значение $l = 9,5413778 \cdot 10^{-6}$. Неустойчивость математической модели может получиться из-за включения в нее функций, быстро изменяющихся на участке, где значение аргумента известно лишь с невысокой точностью и т.д.

Желательным, хотя и не обязательным является свойство *наглядности* математической модели. Под этим обычно понимают более или менее непосредственный, ясный и содержательный смысл ее компонент, который дает возможность не только проконтролировать модель, но и наметить план решения математической задачи, а также предвидеть результат решения. Так, в уравнении (1.2) левая часть – последовательные слагаемые – это силы инерции, трения и упругости, а само уравнение является записью известного принципа механики – сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю.

Практическое занятие. Модели, представляющие собой задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (далее ОДУ). Первая модель – из области экологии, вторая – из области авиации.

1. Модель типа “хищник–жертва”.

Рассмотрим динамику популяции двух видов, взаимодействующих между собой по типу хищник – жертва. При этом предполагается, что жертва может найти достаточно пищи для пропитания, но при каждой встрече с хищником последний убивает жертву. Примеры таких межвидовых взаимоотношений дают волки и кролики; паразиты и некоторые организмы, на которых они паразитируют. Наша цель – исследовать изменение во времени популяций хищников и жертв.

Обозначим соответственно через $x = x(t)$ и $y = y(t)$ количество жертв и хищников в момент времени t . Чтобы получить математические уравнения, которые приближенно описывают динамику популяций, мы сделаем несколько упрощающих предположений. Во-первых, предположим,

что норма рождаемости жертв x_b и норма естественной смертности (т.е. без учета уничтожения хищниками) x_d являются константами, причем $x_b > x_d$. Таким образом, в отсутствие хищников популяция жертв будет расти со скоростью $(x_b - x_d)x$. Во-вторых, предположим, что число случаев, когда хищник убивает жертву, зависит от вероятности их встречи и, следовательно, пропорционально произведению xy . Объединяя эти два предположения, получаем, что популяция жертв подчиняется обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta xy, \quad (1.3)$$

где $\alpha = x_b - x_d > 0$, $\beta < 0$.

Чтобы вывести уравнение, описывающее популяцию хищников, предположим, что при отсутствии жертв число хищников по естественным причинам убывает, что задается членом γy . В то же время в результате встреч с жертвами число хищников увеличивается, что ведет к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y + \delta xy, \quad (1.4)$$

с $\gamma < 0$, $\delta > 0$.

Таким образом, мы пришли к нелинейной системе двух ОДУ (1.3)–(1.4). Эти уравнения были впервые выведены в 1925 году и известны как *уравнения Лотки–Вольтерра*. Однако задача пока сформулирована не полностью; мы должны начать процесс в некоторый момент времени (например, $t = 0$) с заданными значениями начальных популяций $x(0)$, $y(0)$. Таким образом, дополняем дифференциальные уравнения двумя *начальными условиями*

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

2. Задача о траектории.

Предположим, что ракета запускается под заданным углом наклона к поверхности (угол запуска). На какую высоту поднимется ракета? Ответ на этот вопрос зависит от целого ряда факторов: характеристик ракеты и ее двигателя, сопротивления воздуха, гравитационных сил и т.д.

Чтобы построить математическую модель этой задачи, мы должны сделать ряд упрощающих предположений. Во-первых, ограничимся рассмотрением ракет, поднимающихся вверх и перемещающихся вдоль по-

верхности Земли на расстояния, не превышающие 100 км. В этом случае без существенной потери точности можем считать, что Земля плоская. Во-вторых, предположим, что вся траектория ракеты лежит в одной плоскости, то есть предполагается отсутствие бокового ветра и т.д. Используя эти два предположения, выбираем двумерную систему координат с началом в месте старта. Пусть $x(t)$, $y(t)$ обозначают координаты ракеты в момент времени t , причем считаем, что ракета стартует при $t = 0$, так что

$$x(0) = y(0) = 0. \quad (1.5)$$

Если обозначить производные по времени как $\dot{x}=dx/dt$ и $\dot{y}=dy/dt$, то вектор скорости ракеты в момент t представится в виде $\mathbf{v}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Будем обозначать величину вектора скорости через $v(t)$, а его угол с горизонтом через $\theta(t)$. Эти величины тогда определяются выражениями

$$v(t) = [(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2]^{1/2}, \quad \theta(t) = \arctg(\dot{y}(t)/\dot{x}(t)). \quad (1.6)$$

Основная математическая модель траектории выводится из второго закона Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}. \quad (1.7)$$

Здесь $m(t)$ – масса ракеты, \mathbf{F} – результирующая действующих на ракету сил, которая состоит из трех слагаемых: (1) силы тяги при работе двигателя, $T(t)$; (2) силы сопротивления

$$c\rho s v^2/2, \quad (1.8)$$

где c – коэффициент сопротивления, ρ – плотность воздуха и s – поперечное сечение ракеты; (3) силы гравитации mg , где g – ускорение свободного падения.

Чтобы записать уравнение (1.7) в переменных x , y , заметим, что сила тяги и сила сопротивления действуют вдоль оси ракеты. Если мы обозначим эту часть результирующей силы через \mathbf{F}_1 , то

$$\mathbf{F}_1 = T - c\rho s v^2/2. \quad (1.9)$$

Так как сила гравитации действует только в вертикальном направлении, уравнение (1.7) можно записать по координатам

$$m\ddot{x} + m\ddot{y} = \mathbf{F}_1 \cos \theta, \quad m\dot{x} + m\dot{y} = \mathbf{F}_1 \sin \theta - mg. \quad (1.10)$$

Используя (1.9) и меняя порядок членов, перепишем уравнения (1.10) в виде

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{1}{m} \left(T - \frac{1}{2} c \rho s v^2 \right) \cos \theta - \frac{\dot{m}}{m} \dot{x}, \\ \ddot{y} &= \frac{1}{m} \left(T - \frac{1}{2} c \rho s v^2 \right) \sin \theta - \frac{\dot{m}}{m} \dot{y} - g.\end{aligned}\tag{1.11}$$

‘Эта связанная система двух нелинейных ДУ второго порядка. Мы предполагаем, что c и s – известные постоянные, ρ – известная функция y (т.е. высоты над поверхностью), T и m – известные функции t .

Решение системы (1.11) должно удовлетворять (1.5), что дает два из четырех необходимых начальных условий. Другие два условия даются соотношениями

$$v(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0.\tag{1.12}$$

Таким образом, при заданных характеристиках ракеты имеется только один свободный параметр – угол запуска θ_0 , причем его изменение будет, очевидно, приводить к изменению траектории.

Уравнения (1.11) могут служить математической моделью и для таких баллистических задач, как полет снаряда, выстреленного из артиллерийского орудия, или камня, запущенного из рогатки. В таком случае предполагается, что тело стартует с заданной скоростью v_0 , так что условия (1.12) заменяются на условия

$$v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0.\tag{1.13}$$

В этом случае отсутствует сила тяги и, следовательно, нет изменения массы, так что уравнения (1.11) упрощаются и принимают вид

$$\ddot{x} = \frac{-c \rho s v^2}{2m} \cos \theta, \quad \ddot{y} = \frac{-c \rho s v^2}{2m} \sin \theta - \frac{\dot{m}}{m} \dot{y} - g,\tag{1.14}$$

который показывает, что в упрощенной модели траектория ракеты зависит только от сопротивления воздуха и силы земного притяжения.

Теперь перейдем к решению (1.11) с начальными условиями (1.5) и (1.13). В дальнейшем будем использовать условия (1.13), поскольку они как частный случай $v_0 = 0$ включают условия (1.12). В тривиальном случае, когда отсутствуют как сила тяги, так и сопротивление воздуха, эти уравнения допускают явное решение (упражнение 3). Однако при любом сколько-нибудь реальном задании плотности воздуха ρ и силы тяги

такое решение оказывается невозможным и возникает необходимость в приближенном численном решении.

Для численного решения удобно преобразовать два уравнения второго порядка (1.11) в систему четырех уравнений первого порядка. Дифференцируя соотношения

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad (1.15)$$

имеем

$$\ddot{x} = \dot{v} \cos \theta - v \dot{\theta} \sin \theta, \quad \ddot{y} = \dot{v} \sin \theta + v \dot{\theta} \cos \theta. \quad (1.16)$$

Подставляя теперь (1.15) и (1.16) в уравнения (1.11) и разрешая последние относительно \dot{v} и $\dot{\theta}$, получаем

$$\dot{v} = \frac{1}{m} \left(T - \frac{1}{2} c \rho s v^2 \right) - g \sin \theta - \frac{\dot{m}}{m} v, \quad (1.17)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{v} \cos \theta. \quad (1.18)$$

Уравнения (1.17) и (1.18) вместе с (1.15) составляют систему четырех уравнений первого порядка относительно функций x, y, v, θ . Начальные условия по-прежнему считаются задаются соотношениями (1.5), (1.13).

Упражнения.

1. При каком соотношении коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и каких уровнях популяций x, y в (1.3) будет обеспечена стабильность популяций (т.е. $x(t + \Delta t) = x(t)$ и $y(t + \Delta t) = y(t)$ при всех $\Delta t > 0$)?

2. Выведите формулы (1.6).

3. Покажите, что решение системы уравнений $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = -mg$ с начальными условиями $x(0) = y(0) = 0, v(0) = v_0, \theta(0) = \theta_0$ выражается формулами $x(t) = (v_0 \cos \theta_0)t, y(t) = -mgt^2/2 + (v_0 \sin \theta_0)t$.

3 Типы математических моделей

3.1 Структурные и функциональные модели

Обычно в математической модели отражается структура (устройство) моделируемого объекта, существенные для целей исследования свойства и взаимосвязи компонентов этого объекта. Такая модель называется

структурной. Если же модель отражает только то, как объект функционирует – например, как он реагирует на внешние воздействия, – то она называется *функциональной* или, образно, *черным ящиком*. Возможны и модели комбинированного типа.

Рассмотрим пример. Пусть на платформе массы m_1 упруго закреплен груз массы $m_2 \ll m_1$ (т.е. m_2 значительно меньше m_1). Платформа, столкнувшись со стенкой, под действием буфера откатывается назад. Нас интересует зависимость амплитуды A колебаний груза после взаимодействия платформы со стенкой от скорости v накатывания платформы. Жесткости k_1 буфера и k_2 упругого закрепления считаем заданными; силами трения и учетом вращательного движения колес пренебрегаем.

Будем отсчитывать время t от момента столкновения и обозначим буквой T время взаимодействия платформы со стенкой, а символами $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно координаты платформы и груза относительно платформы, отсчитываемые от их положений при $t = 0$. С учетом сделанных предположений (в частности, условия $m_2 \ll m_1$) получаем систему дифференциальных уравнений и начальные условия

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 &= 0, & m_2 \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} + k_2 x_2 &= 0 & (0 \leq t \leq T), \\ x_1 &= 0, & \frac{dx_1}{dt} &= v, & x_2 &= 0, & \frac{dx_2}{dt} &= 0 & (t = 0), \end{aligned} \quad (2.1)$$

которые и составляют математическую модель рассматриваемой задачи. Из уравнения и начальных условий для x_1 находим

$$x_1 = \frac{v}{\omega_1} \sin \omega_1 t \quad \left(\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \right), \quad T = \frac{\pi}{\omega_1}$$

(взаимодействие со стенкой заканчивается при первом значении $t > 0$, для которого $x_1 = 0$). Подставляя x_1 в уравнение для x_2 , получаем (проверьте!)

$$x_2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v \left(\frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} - \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right) \quad \left(\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \right).$$

Отсюда при $t = T$ имеем

$$x_2 = (x_2)_T = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \frac{v}{\omega_2} \sin \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \left(\frac{dx_2}{dt} \right)_T = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} v \left(1 + \cos \frac{\omega_2}{\omega_1} \pi \right).$$

Начиная с момента $t = T$ груз совершает гармонические колебания с амплитудой A , определяемой этими начальными условиями. Из сохранения полной (т.е. суммы потенциальной и кинетической) энергии колебательной системы получаем после простых преобразований

$$\frac{k_2}{2} A^2 = \frac{k_2}{2} (x_2)_T^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)_T^2 = 2k_2 \frac{v^2}{\omega_2^2} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \right)^2 \cos^2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$A = hv, \text{ где } h = \frac{2}{\omega_2} \frac{\omega_1^2}{|\omega_1^2 - \omega_2^2|} \left| \cos \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\pi}{2} \right|. \quad (2.2)$$

Таким образом, с помощью структурной модели мы получили явную формулу для коэффициента пропорциональности между скоростью платформы и амплитудой колебаний груза, возникающих после взаимодействия платформы со стенкой. Для каждой конкретной системы подобного типа мы можем, зная значения параметров m_1, m_2, k_1, k_2 подсчитать значения этого коэффициента. Так для

$$\begin{aligned} m_1 &= 10 \text{ т} = 10^4 \text{ кг}, \quad k_1 = 1 \text{ т с} / \text{см} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ н} / \text{м}, \\ m_2 &= 200 \text{ кг} = 10^4 \text{ кг}, \quad k_2 = 200 \text{ кг с} / \text{см} = 1,96 \cdot 10^5 \text{ н} / \text{м} \end{aligned} \quad (2.3)$$

получаем $h = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, откуда окончательно

$$A(\text{м}) = 1,79 \cdot 10^{-3} v(\text{м/с}),$$

или

$$A(\text{см}) = 4,97 \cdot 10^{-2} v(\text{км/ч}). \quad (2.4)$$

Последнюю формулу можно рассматривать как функциональную модель рассматриваемой системы при значения (2.3) параметров. Эту формулу для конкретных значений параметров можно было бы получить и непосредственно: в самом деле, пропорциональность величин v и A вытекает из линейности задачи, а значение коэффициента пропорциональности h можно найти, проведя физический эксперимент для какого-либо одного значения v . Однако явное выражение (2.2) коэффициента h через параметры системы может оказаться полезным при ее проектировании.

3.2 Дискретные и непрерывные модели

Как известно, величины могут быть двух типов – дискретные, то есть принимающие “оторванные” друг от друга значения, допускающие естественную нумерацию, и непрерывные, принимающие все значения из некоторого интервала. Возможен также смешанный случай, например, когда величина на каком-то интервале своих значений ведет себя как дискретная, а на другом – как непрерывная.

Подобным образом, модели – как содержательные, так и математические – могут быть либо дискретными, либо непрерывными, либо смешанными. Между этими типами нет принципиального барьера и при уточнении или видоизменении модели дискретная картина может стать непрерывной и обратно.

Пусть, например, изучается прогиб балки от груза, расположенного на интервале сравнительно малой длины. Хотя это распределение непрерывно, мы можем без существенной ошибки, переходя к модели, значительно упростить картину, заменив распределенный (имеющим длину) груз сосредоточенным (то есть точечным).

Рассмотрим этот переход более подробно. Будем для простоты считать балку прямолинейной и направим ось x вдоль нее. Тогда, если груз распределен с плотностью $q(x)$ на малом интервале (l) , расположенном вблизи точки $x = a$, то после замены мы получаем груз

$$Q = \int_{(l)} q(x) dx,$$

сосредоточенный в этой точке. Как известно, такой сосредоточенный груз можно рассматривать как распределенный с плотностью

$$\tilde{q}(x) = Q\delta(x - a),$$

где δ – дельта-функция Дирака.

Дельта-функция. Сделаем небольшое отступление от темы и поговорим о дельта-функции. Эта функция была введена английским физиком, Нобелевским лауреатом в области квантовой физики Полем Дираком около 75 лет назад и в последние десятилетия широко применяется в математике и ее приложениях. Дельта-функцию можно получить, от-

правляясь от любой функции $\delta_1(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$), для которой $\delta_1(0) > 0$, $x\delta_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_1(x)dx = 1$.

Преобразуем график функции $\delta_1(x)$: сожмем его в N раз к оси y и растянем во столько же раз от оси x . Мы получим функцию $\delta_N(x) = N\delta_1(Nx)$, примерный график которой при большом N показан на рис. Площадь под графиком равна 1.

Дельта-функция $\delta(x)$ получается из $\delta_N(x)$ при $N \rightarrow \infty$. Правда, этот предел понимается в некотором обобщенном смысле, который мы здесь не будем уточнять. Из определения следует, что $\delta(x) = 0$ ($x \neq 0$), $\delta(0) = \infty$, однако указание только этих значений не определяет дельта-функцию полностью. Этим она отличается от обычных функций, которые полностью определяются указанием своих значений; $\delta(x)$ – простейший пример так называемой “обобщенной функции”. Обобщенная функция является обобщением классического понятия функции. Это обобщение, с одной стороны, дает возможность выразить в математической форме такие идеализированные понятия, как плотность материальной точки, плотность точечного заряда, интенсивность мгновенного точечного источника, интенсивность сиовы, приложенной в точке и т.д. С другой стороны, в понятии обобщенной функции находит отражение тот факт, что реально нельзя, например, измерить плотность вещества в точке, а можно измерить лишь его среднюю плотность в достаточно малой окрестности этой точки и объявить это плотностью в данной точке: грубо говоря, обобщенная функция определяется своими “средними значениями” в окрестности каждой точки.

Поэтому надежнее относиться к дельта-функции, помня о ее происхождении, то есть рассматривать $\delta(x)$ как $\delta_\infty(x)$. Иногда это выражают словами: все отличные от нуля значения функции $\delta(x)$ принимаются в бесконечно малой окрестности точки $x = 0$, причем эти значения положительны и таковы, что $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.

Физический смысл дельта-функции вытекает из ее определения. Если x – декартова координата, отсчитываемая вдоль некоторой оси, то $\delta(x)$ есть плотность единичной массы (единичная масса безразмерна, она равна числу 1), распределенной по бесконечно малому интервалу, содержащему начало координат. Короче говорят, что это плотность единичной массы, сосредоточенной в начале координат. Поэтому $m\delta(x - a)$

есть плотность массы m , сосредоточенной в точке $x = a$. Если же мы рассматриваем закон $F(t)$ изменения силы во времени, то зависимость $F = \delta(t)$ описывает единичный импульс (удар) в момент $t = 0$. Поэтому дельта-функцию называют также *импульсной функцией*.

Из определения δ -функции сразу следует, что

$$\int_{a < 0}^x \delta(s) ds = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ 1 & (x > 0). \end{cases} \quad (*)$$

Полученная функция аргумента x называется *единичной* или *функцией Хевисайда*; будем ее обозначать $H(x)$. Это обычная (нре обобщенная) кусочно-постоянная функция, заданная как таковая двумя формулами. Ее значение при $x = 0$ чаще всего бывает несущественно; впрочем, иногда полагают $H(0) = 1/2$.

Из (*) следует, что

$$\delta(x) = H'(x).$$

И действительно, в теории обобщенных функций это равенство обосновывается. Его неформальный смысл легко понять. В самом деле, вспомним о том, что в реальных ситуациях скачок у функции – это идеализация ее конечного изменения на протяжении весьма малого интервала изменения аргумента. В частности, функцию $H(x)$ можно считать идеализацией, упрощенным представлением функции $H_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg Nx$ при весьма большом N . Но производная последней, т.е.

$$\delta_N(x) := H'_N(x) = \frac{N}{\pi[1 + (Nx)^2]}$$

при таком N приближенно представляет функцию $\delta(x)$, что и объясняет формулу (*). (Постройте графики функций $H_N(x)$ и $\delta_N(x)$ при $N = 10$.)

Вернемся к примеру о прогибе балки. Такой подход (с применением дельта-функции) как бы перекидывает мост между дискретными и непрерывными моделями и, в частности, дает возможность в случае сосредоточенной нагрузки пользоваться формулами, выведенными для нагрузки распределенной.

Описанный подход особенно целесообразен, если конкретный вид функции $q(x)$ нам неизвестен, но суммарное значение Q мы знаем.

На пусть таких грузов, замененных на сосредоточенные, много. Тогда может оказаться удобнее перейти к непрерывной модели нагрузки (с непрерывной плотностью). Эта плотность получается с помощью осреднения исходного распределения следующим образом. Для каждого значения x мы подсчитываем нагрузку $Q(x; \Delta x)$, приходящуюся на интервал некоторой длины Δx с центром в точке x , а затем полагаем плотность $q(x)$ равной

$$q(x)(= q(x; \Delta x)) = \frac{1}{\Delta} Q(x; \Delta x).$$

Переход от дискретной модели к непрерывной, равно как и обратный переход, может существенно упростить исследование, но порой может внести и неадекватность, за чем необходимо следить.

Рассмотрим еще один способ перехода от непрерывной модели к дискретной и решение “дискретной задачи”. Мотивацией здесь может являться невозможность получения решения задачи аналитическими методами. Путь, который мы выберем, используется в теории численных методов решения задач для дифференциальных уравнений, в частности, *конечно-разностных методов*.

Рассмотрим задачи (1.3)-(1.4), (1.15), (1.17)-(1.18) в общей постановке:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \quad i = 1, \dots, n, \quad a \leq x \leq b, \quad (2.5)$$

$$y_i(a) = \hat{y}_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Здесь f_i – заданные функции, x – неизвестная переменная, \hat{y}_i – заданные начальные условия. Надо найти функции y_i , являющиеся решением задачи (2.5)–(2.6) на отрезке $a \leq x \leq b$. Как мы выдели в предыдущем материале (практическое занятие 1), задача хищник-жертва приводит к двум, а задача о траектории – к четырем уравнениям первого порядка.

Для простоты изложения ограничимся одним уравнением

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.7)$$

с одной неизвестной y и начальным условием

$$y(a) = \hat{y}. \quad (2.8)$$

Первый шаг на пути дискретизации (или численного решения) состоит в разбиении отрезка $[a, b]$ на конечное число частей введением *узловых*

точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Разбиение может быть равномерным – с одинаковым интервалом (шагом) разбиения, так и неравномерным. Хотя неравномерное разбиение отрезка не ведет к каим-либо особым трудностям, для простоты изложения и анализа будем предполагать, что узловые точки делят отрезок на равные отрезки. Если обозначить через h расстояние между узлами (шаг сетки), то $h = (b - a)/N$ и $x_k = a + kh$, ($k = 0, 1, \dots, N$), где N – число отрезков разбиения. В дальнейшем будем через y_k обозначать значение точного решения (2.7) в точке x_k , а через y_k – соответствующее приближенное решение значение, построенное с помощью рассматриваемого численного метода.

Вероятно, простейшей численной схемой является *метод Эйлера*, который определяется формулами

$$y_0 = \hat{y}, \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (2.9)$$

Выход метода Эйлера очевиден. Из разложения Тейлора функции y в окрестности точки x_k имеем

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(z_k) = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2}y''(z_k), \quad (2.10)$$

где z_k лежит внутри отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Мы всегда будем считать, что все выписываемые производные действительно существуют. Если производная y'' ограничена, а шаг h мал, то можем отбросить последний член и, используя обозначение \approx в смысле “приближенно равно”, написать

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hf(x_k, y_k).$$

Это и служит основой для (2.9). Геометрический смысл метода Эйлера заключается в аппроксимации решения на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ отрезком касательной, проведенной к графику решения в точке x_k .

Метод Эйлера очень прост для реализации на ЭВМ: на шаге k вычисляется значение $f(x_k, y_k)$, которое затем подставляется в (2.9). Таким образом, все необходимые операции, по существу, сводятся к вычислению $f(x_k, y_k)$.

Поговорим теперь о погрешности вычисления значений искомой функции. Вообще говоря, существуют два источника погрешности этих приближений: (1) ошибка дискретизации, возникающая в результате замены дифференциального уравнения (2.7) разностной аппроксимацией

(2.9); (2) ошибка округления, накопившаяся при выполнении арифметических операций по формулам (2.9). Мы рассмотрим ошибку округления позднее, а сейчас будем считать, что значения y_k в (2.9) вычисляются точно, так что погрешности обусловлены только ошибкой дискретизации. Введем величину

$$E(h) = \max_{1 \leq k \leq N} |y_k - y(x_k)|, \quad (2.11)$$

называемую *глобальной ошибкой дискретизации* (иногда эту величину называют *глобальной ошибкой усечения*). Отметим, что $E(h)$ зависит от величины шага h , поскольку предполагается, что приближения y_k вычисляются при заданном значении h . Интуитивно ожидаем и определенно надеемся, что при уменьшении h ошибка дискретизации будет убывать и, в частности, при стремлении h к нулю также будет стремиться к нулю.

Мы не будем здесь давать полный анализ глобальной ошибки дискретизации, а удовлетворимся лишь тем, что покажем, как такой анализ обычно проводится. Во-первых, предположим, что точное решение y имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную вторую производную y'' :

$$\max_{a \leq x \leq b} |y''(x)| = M. \quad (2.12)$$

Далее рассмотрим величину

$$L(x, h) = \frac{1}{h} [y(x+h) - y(x)] - f(x, y(x)), \quad (2.13)$$

которая называется *локальной ошибкой дискретизации метода Эйлера в точке x* и служит мерой того, насколько разностная аппроксимация $y'(x)$ отличается от $f(x, y(x))$. Предположим теперь, что y_k равно значению точного решения $y(x_k)$. Тогда разность между аппроксимацией по Эйлерау y_{k+1} и точным решением $y(x_{k+1})$ выражается формулой

$$y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - hf(x_k, y(x_k)) = hL(x_k, h). \quad (2.14)$$

Таким образом, умноженная на h локальная ошибка дискретизации равна ошибке на одном шаге метода Эйлера, стартовавшего с точного решения.

Нас интересует максимум $L(x, h)$ по x , так что определим локальную ошибку дискретизации метода Эйлера как

$$L(h) = \max_{a \leq x \leq b-h} |L(x, h)|. \quad (2.15)$$

Отметим, что величина $L(h)$ зависит как от величины шага h , так и от вида правой части дифференциального уравнения и от отрезка $[a, b]$. Мы, однако, выделили явно только зависимость от h , поскольку в предположении (2.12) с помощью разложения Тейлора, аналогичного (2.10), можно получить оценку

$$L(h) \leq \frac{h}{2}M = O(h). \quad (2.16)$$

Мы здесь воспользовались стандартным обозначением $O(h)$ для величины, стремящейся к нулю при $h \rightarrow 0$ с той же скоростью, что и h . В общем случае будем говорить, что функция $g(h)$ равна $O(h^p)$, если при $h \rightarrow 0$ величина $\frac{g(h)}{h^p}$ ограничена.

Задачи теперь состоит в том, чтобы связать локальную ошибку дискретизации с глобальной ошибкой. Если обозначить ошибку $y(x_k) - y_k$ через e_k , то, согласно (2.9) и (2.14), получим

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y(x_{k+1}) - y_{k+1} = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k)) + hL(x_k, h) - y_k - hf(x_k, y_k) = \\ &= e_k + h[f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)] + hL(x_k, h). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Предположим теперь, что функция f имеет ограниченную частную производную по второй переменной:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M_1, \quad a \leq x \leq b, \quad |y| < \infty. \quad (2.16)$$

Тогда по теореме Лагранжа о среднем значении при некотором $0 < \theta < 1$ имеем

$$|f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, \theta y(x_k) + (1 - \theta)y_k)(y(x_k) - y_k) \right| \leq M_1 e_k.$$

Используя эту оценку и заменяя $L(x_k, h)$ на $L(h)$, из (2.17) получаем

$$|e_{k+1}| \leq (1 + hM_1)|e_k| + h|L(h)|. \quad (2.18)$$

Полагая здесь $c = 1 + hM_1$ и раскрывая последовательность в (2.18), получаем

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leq c|e_k| + h|L(h)| \leq c^2|e_{k-1}| + ch|L(h)| + |e_{k+1}| + h|L(h)| \\ &\leq \dots c^k|e_1| + c^{k-1}h|L(h)| + \dots + ch|L(h)| + h|L(h)|. \end{aligned}$$

. В частности, оценка ошибки e_N в конечной точке интервала будет содержать сумму N членов $c^k h L(h)$, каждый из которых равен $O(h^2)$. Так как $N = (b - a)/h$, то сумма будет равна $O(h)$. Таким образом, у нас есть основания ожидать, что будет справедлива следующая

Теорема (ошибка дискретизации метода Эйлера). Если функция f имеет ограниченную частную производную по второй переменной и если решение задачи (2.7)-(2.8) имеет ограниченную вторую производную, то глобальная ошибка дискретизации метода Эйлера $E(h) = O(h)$.

Чтобы эта теорема бывла доказана полностью, следует показать, что величина c^N органичена при $h \rightarrow 0$. Докаательство этого факта мы опускаем.

Об устойчивости схемы.

При постановке и решении любой задачи ставятся одни и те же вопросы:

- 1) существует ли у нее решение (то есть задача разрешима)?
- 2) если ответ на первый вопрос положительный, то единственно ли это решение?
- 3) как зависит решение от входных данных?

Возможны два случая:

1. Задача поставлена корректно (задача корректна). Это значит, что задача разрешима при любых допустимых входных данных; имеется единственное решение; решение задачи непрерывно зависит от входных данных (малому изменению входных данных соответствует малое изменение малое изменение решения) — иными словами, задача устойчива.

2. Задача некорректна, если не выполняется хотя бы одно из вышеперечисленных условий. Обычно не выполняется третье условие - малому изменению входных данных может соответствовать большое изменение решения.

Примером корректной задачи может служить задача интегрирования, а примером некорректной задачи – дифференцирование.

Для изучения устойчивости по начальным данным нелинейного уравнения (2.7) будем рассматривать модельное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad x > 0, \quad y(0) = y_0. \quad (2.19)$$

Его решение $y(t) = y_0 e^{-\lambda x}$ убывает при $\lambda > 0$ и

$$|u(t)| \leq |u_0| \text{ при } \lambda \geq 0 \text{ для всех } t \geq 0, \quad (2.20)$$

т.е. уравнение (2.19) *устойчиво* при $\lambda \geq 0$, что соответствует условию $\frac{\partial f}{\partial y} \leq 0$.

Вводится естественное требование: для разностных схем, аппроксимирующих (приближающих с некоторой погрешностью) модельные уравнения, должен выполняться аналог неравенства (2.20):

$$|y_k| \leq |y_0|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Мы увидим ниже, что это не всегда выполняется.

Рассмотрим ряд примеров.

1) Явная схема Эйлера:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_k = 0, \quad y_{k+1} = (1 - h\lambda)y_k. \quad (2.21)$$

Отсюда видно, что условие

$$|y_{k+1}| \leq |y_k| \leq \dots \leq |y_0| \quad (2.22)$$

выполнено при $|1 - h\lambda| \leq 1$ или $-1 \leq 1 - h\lambda \leq 1$, то есть при

$$h\lambda \leq 2.$$

Если, например, $h\lambda \geq 3$, то

$$|y_{k+1}| = |h\lambda - 1||y_k| \geq 2|y_k| \geq \dots \geq 2^{k+1}|y_0|,$$

$$|y_k| \geq 2^k|y_0| \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Схема неустойчива, условие (2.22) не выполнено. Таким образом, схема Эйлера (2.21) *условно устойчива* при $h \leq 2\lambda$, $\lambda > 0$.

2) Неявная схема Эйлера:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_{k+1} = 0, \quad y_{k+1} = \frac{1}{1 + h\lambda} y_k. \quad (2.23)$$

Так как $\frac{1}{1+h\lambda} \leq 1$ при любых $h\lambda \geq 0$, то схема *безусловно устойчива*.

3) Схема с весами:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda(\sigma y_{k+1} + (1 - \sigma)y_k) = 0, \quad y_{k+1} = q y_k.$$

Схема устойчива при

$$|q| \leq 1, \quad q = \frac{1 - (1 - \sigma)h\lambda}{1 + \sigma h\lambda}.$$

Видим, что $|q| \leq 1$, если $-1 - \sigma h\lambda \leq 1 - (1 - \sigma)h\lambda \leq 1 + \sigma h\lambda$ или $1 + h(\sigma - 1/2)\lambda \geq 0$, так что $1 + \sigma h\lambda \geq h\lambda/2 > 0$. Таким образом, схема с весами безусловно устойчива (при любых h) при $\sigma > 1/2$ и условно устойчива в случае $\sigma < 1/2$, если $h \leq \frac{1}{(1/2 - \sigma)\lambda}$.

Приближенное вычисление определенных интегралов

Речь пойдет о дискретизации задач, приводящихся к решению так называемых интегральных уравнений, когда неизвестная функция может входить под знаком интеграла. Теория интегральных уравнений подробно изложена в ряде источников. Здесь нас интересуют способы приближенного вычисления интегралов (*квадратурные формулы*) для получения численных решений интегральных уравнений.

Квадратурная формула прямоугольников

Если функция $y = y(x)$ непрерывна и дифференцируема достаточное число раз на $[a, b]$ и $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), $y_i = y(x_i)$, то

$$\int_a^b y(x)dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

где $R_n = \frac{(b-a)h}{2}y'(\xi)$ ($a \leq \xi \leq b$).

Квадратурная формула трапеций

$$\int_a^b y(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right) + R_n,$$

где $R_n = -\frac{(b-a)h^2}{12}y''(\xi')$ ($a \leq \xi' \leq b$).

Квадратурная формула Симпсона Полагая $n = 2k$, получим

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{3}([y_0 + y_{2k}] + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}) +$$

$$+2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2}) + R_n$$

где $R_n = -\frac{(b-a)h^4}{180}y^{IV}(\xi'')$ ($a \leq \xi'' \leq b$).

Практическое занятие.

Пусть по прямой движется частица единичной массы. Движение обусловлено тем, что на частицу действует сила $q(t)$, которая меняется во времени. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$ и имела нулевую скорость, то в соответствии с законом Ньютона движение частицы будет описываться функцией $u(t)$, удовлетворяющей задаче Коши:

Поставим задачу Коши для $u(t)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = q(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.23)$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dt}|_{t=0} = 0. \quad (2.24)$$

Здесь $u(t)$ — положение частицы в момент времени t .

Решить задачу.

Покажем неустойчивость обратной задачи. Пусть $u(t)$ — решение прямой задачи для некоторого $q(t)$. Рассмотрим следующие возмущения решения прямой задачи:

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n}\cos(nt).$$

Этим возмущениям соответствуют правые части

$$q_n(t) = q(t) - n\cos(nt).$$

Очевидно, что $\|u - u_n\|_{C[0,T]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, а $\|q - q_n\|_{C[0,T]} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Упражнения.

С помощью формулы трапеции вычислить интегралы и оценить их погрешности

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} (n = 8)$.
2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} (n = 12)$.

С помощью формулы Симпсона вычислить интегралы

3. $\int_1^9 \sqrt{x} dx (n = 4)$.
4. $\int_0^\pi \sqrt{3 + \cos x} dx (n = 6)$.
5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx (n = 10)$.
6. $\int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} dx (n = 6)$.
7. Построить по точкам график функции

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi), \quad \Delta x = \pi/3.$$

Полиномиальная интерполяция. Переход от дискретного к непрерывному

Пусть на заданы набор точек (узлов) x_0, x_1, \dots, x_n и соответствующий набор чисел y_0, y_1, \dots, y_n . *Задача интерполяции* заключается в построении такой функции g , которая удовлетворяет соотношениям

$$g(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Существует много типов аппроксимирующих функций, но интерес для нас будут представлять полиномы.

Непосредственно не вполне очевидно, что полиномами можно интерполировать данные в заданных узлах. Если, например, данные заданы в трех различных, то никакой полином первой степени (линейная функция) не сможет интерполировать эти данные, если только они не лежат на одной прямой. В то же время существует полином второй степени и множество полиномов третьей степени, которые будут интерполировать эти данные. Основной результат для задачи полиномиальной интерполяции дает следующая

Теорема (существование и единственность интерполяционного полинома). Если узлы x_0, x_1, \dots, x_n различны, то для любых y_0, y_1, \dots, y_n существует единственный полином $p(x)$ степени не выше n такой, что

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.26)$$

Доказательство. Существование может быть доказано построением полиномов Лагранжа, определяемых формулами.

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

$$= \prod_{k=0, k \neq j}^n \left(\frac{x - x_k}{x_j - x_k} \right), \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (2.27)$$

Легко убедиться, что эти полиномы, каждый из которых имеет степень n , удовлетворяют соотношениям

$$L_j(x_i) = 1, \quad i = j, \quad \text{else } L_j(x_i) = 0.$$

Следовательно, полином $L_j(x)y_j$ равен нулю во всех узлах x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) за исключением узла x_j , где $L_j(x_j)y_j = y_j$. Полагая теперь

$$p(x) = \sum_{j=0}^n L_j(x)y_j, \quad (2.28)$$

получаем полином степени не выше n , который интерполирует исходные данные.

Для доказательства единственности предположим противное, то есть предположим существование другого интерполяционного полинома $q(x)$ степени не выше n . Полагая $r(x) = p(x) - q(x)$, получаем полином степени не выше n , который обращается в нуль в $n + 1$ различных точках x_0, x_1, \dots, x_n . По основной теореме алгебры такой полином должен быть тождественно равен нулю и, следовательно, $p(x) = q(x)$. Единственность доказана.

Пример. Построим полином не выше второй степени, такой, что $p(-1) = 4$, $p(0) = 1$, $p(1) = 0$. Соответствующий полином имеет (2.28) вид

$$p(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}4 + \frac{(x-(-1))(x-1)}{(0-(-1))(0-1)}1 + \frac{(x-(-1))(x-0)}{(-1-(-1))(-1-0)}0 = \\ 2x^2 - 2x + 1 - x^2 + 0 = x^2 - 2x + 1.$$

Возникает вопрос о точности полиномиальной интерполяции. Но сначала мы должны сформулировать, что мы здесь будем понимать под точностью.

Обычно необходимость интерполяции возникает в ситуации, когда некоторая функция f определена на всем интересующем нас интервале, но ее значения известны только на дискретном множестве точек. В этом случае интересно рассмотреть отличие $p(x)$ от $f(x)$ при значениях x лежащих между узлами. Следующая теорема дает выражение ошибки через старшие производные функции f .

Теорема 2 (ошибка полиномиальной интерполяции). Пусть функция $f(x)$ имеет $n + 1$ непрерывную производную на некотором интервале, содержащем $[x_0, x_n]$, где $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ - различные узлы. Тогда, если $p(x)$ - единственный полином степени не выше n , удовлетворяющий соотношениям

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

то для любого x из указанного интервала

$$f(x) - p(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(z), \quad (2.29)$$

где z - некоторая точка из интервала, содержащего x_0, x_n, x .

Может оказаться, что очень сложно найти производную указанного порядка, либо формула (2.29) оказывается непригодной ввиду того, что функция $f(x)$ неизвестна. Тем не менее она часто оказывается полезной для понимания внутренней природы возникающих ошибок. Предположим, что узлы x_i расположены равномерно с шагом h . Тогда, для любого x из $[x_0, x_n]$

$$|(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \leq (n + 1)! h^{n+1},$$

а из (2.29) имеем

$$|f(x) - p(x)| \leq M h^{n+1}, \quad (2.30)$$

где $M = \max_{x_0 \leq z \leq x_n} |f^{(n+1)}(z)|$.

Оценку (2.30) по-прежнему трудно использовать из-за входящей в нее величины M , но она оказывается полезной в следующем смысле. Предположим, что мы хотим аппроксимировать функцию f на заданном отрезке $[a, b]$ последствием *кусочных полиномов*, то есть функций, являющихся полиномами на заданных подотрезках $[a, b]$. Если, например, $a = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_{p+1} = b$ - некоторое разбиение отрезка $[a, b]$ и g - некоторая функция, непрерывная на $[a, b]$ и являющаяся полиномом на каждом интервале (γ_i, γ_{i+1}) ($i = 0, 1, \dots, p$), то функция g называется *кусочно-полиномиальной* на $[a, b]$.

Приведем пример кусочно-квадратичной функции. Предположим, что функция F на отрезке $[0, 1]$ задана значениями

$$f(0) = 1, \quad f(1/6) = 3, \quad f(1/3) = 2, \quad f(1/2) = 1, \quad f(2/3) = 0, \quad f(5/6) = 2, \quad f(1) = 1.$$

Тогда функция g , определенная равенствами

$$g(x) = \begin{cases} -54x^2 + 21x + 1, & 0 \leq x \leq 1/3, \\ -6x + 4, & 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ -54x^2 + 93x - 38, & 2/3 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (2.31)$$

является кусочно-непрерывной на $[0, 1]$ и совпадающей с f в заданных узлах.

Рассмотрим теперь ошибку аппроксимации функции f функцией g из (2.31). Пусть M - оценка сверху абсолютной величины третьей производной от f на всем отрезке $[0, 1]$. Тогда на каждой из его частей $[0, 1/3]$, $[1/3, 2/3]$, $[2/3, 1]$ можно применить ошибки (2.30); здесь $h = 1/6$, $n = 2$. поэтому

$$|f(x) - g(x)| \leq h^3 M \leq M/6^3, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad |(2.32)$$

Без дальнейшей информации относительно M эта оценка мало что дает в количественном отношении. Но она, тем не менее, показывает, как влияет на оценку погрешности шаг h между узлами интерполяции. Действительно, если разбить отрезок на шесть частей и составить кусочно-квадратичную функцию g , то шаг h будет равен $1/12$ и оценка (2.32) примет вид

$$|f(x) - g(x)| \leq h^3 M \leq M/12^3, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad |(2.32)$$

Величина оценки уменьшится в восемь раз по сравнению с оценкой в случае трех разбиений. Конечно, это не означает, что фактическая ошибка при этом уменьшается в восемь раз.

Хотя, как показывает теорема, интерполяционный полином является единственным, имеется несколько других способов получения или представления того полинома, не опирающиеся на полиномы Лагранжа. Вероятно, наиболее фундаментальный подход состоит в следующем. Представим интерполяционный полином в виде

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

и потребуем, чтобы

$$a_0 + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Неизвестными здесь являются коэффициенты полинома. Запишем систему в матричной форме

$$VA = Y,$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов системы, которую мы обозначили через V , называется матрицей Вандермонда. Если все x_i различны, то она невырожденная. В этом случае система уравнений имеет единственное решение, дающее нам искомый полином.

Подход на основе матрицы Вандермонда иногда полезен для теоретических рассуждений, но для практического построения полинома он мало пригоден. Для этих целей обычно лучше использовать полиномы Лагранжа, но и они оказываются неудобными, если к набору данных нужно добавить или удалить из него какой-либо узел (нам придется пересчитывать все полиномы ЛАгранжа). Поэтому, имеется еще другое представление интерполяционного полинома, которое полезно именно в этом случае. Это **представление Ньютона**. Предположим, что точки x_i расположены равномерно с шагом h . Определим разности данных y_i как $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, а разности более высокого порядка как результат повторного применения этой операции:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,$$

.....

$$\Delta^n y_0 = y_n - C_n^1 y_{n-1} + C_n^2 y_{n-2} - \dots + (-1)^n y_0,$$

где, как обычно, биномиальные коэффициенты задаются формулами

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

С помощью разностей определим наш полином степени n как

$$p_n(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} \Delta^2 y_0 + \dots$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{n!h^n} \Delta^n y_0.$$

Если мы доавим к набору данных дополнительную точку (x_{n+1}, y_{n+1}) , тогда полином $p_{n+1}(x)$ запишется в виде

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!h^{n+1}} \Delta^{n+1} y_0.$$

Именно выражаемое этой формулой свойство представления Ньютона для интерполяционного полинома делает в ряде случаев это представление особенно полезным для практики.

3.3 Линейные и нелинейные модели

Линейная зависимость одной величины от другой - это пропорциональность их приращений, то есть зависимость вида $y = ax + b$, откуда получаем $\Delta y = a\Delta x$; аналогично, линейная зависимость величины от двух других - это зависимость вида $z = ax + by + c$, откуда $\Delta y = a\Delta x + b\Delta y$ и т.д. Типичные линейные зависимости между физическими величинами - закон Гука (удлинение пропорционально силе растяжения), закон Ома, закон теплового расширения и т.д. В действительности все эти зависимости являются линейными лишь приближенно, но в соответствующих, обычно устанавливаемых эмпирически диапазонах изменения величин предположение о линейности выполняется с хорошей точностью и в то же время упрощает исследование.

Аналогично определяется понятие линейно модели. Оно применяется для моделей объектов, рассматриваемых как преобразователи, для которых каждому входу соответствует некоторый выход. Так, если мы изучаем задачу о траектории, то входом можно считать закон изменения силы $F(t)$, а выходом - закон изменения координат ракеты как материальной точки $(x(t), y(t))$. В математике такой преобразователь называется оператором. Кстати, и любую функцию можно трактовать как преобразователь.

Будем считать, что начала отсчета входа и выхода выбраны так, что нулевому входу отвечает нулевой выход. Тогда модель называется *линейной*, если в ней выполнен *принцип суперпозиции (наложения)*, то есть при сложении входов складываются и выходы, а при умножении входа

на любое число выход умножается на то же число. Если этот принцип не выполнен, модель называется нелинейной. Линейные модели обычно описываются линейными неоднородными уравнениями – алгебраическими, дифференциальными и т.д., в которых неоднородный член отвечает входу, а решение – выходу.

Свойство линейности существенно упрощает построение и исследование решения математической задачи. Целый ряд методов решения дифференциальных уравнений и иных уравнений был впервые разработан и наиболее эффективно применяется для случая, когда эти уравнения линейны. Метод Фурье (метод разделения переменных), фундаментальная система решений, преобразование Фурье, Лапласа и т.д.

В качестве примера рассмотрим линейные экономические модели.

1. Модель межотраслевого баланса

Основным инструментом построения и сохранения необходимых пропорций в многоотраслевой экономике (да и в целом народном хозяйстве) является балансовый метод и создаваемые на его основе различные балансовые модели.

Принципиальная схема многоотраслевого баланса производства и распределения совокупного продукта в стоимостном выражении может быть построена следующим образом.

Пусть рассматриваемая производственная сфера хозяйства состоит из n отраслей. Изучим их работу за некоторый промежуток времени (например, за отчетный год). С этой целью введем следующие обозначения:

x_i – общий (валовой) объем продукции i -й отрасли, $i = 1, \dots, n$;

x_{ij} – объем продукции i -й отрасли, потребляемой j -й отраслью при производстве объема продукции ;

y_i – объем продукции i -й отрасли, используемый в непроизводственной сфере (так называемый продукт конечного потребления).

Балансовый метод многоотраслевой связи состоит в том, что валовой выпуск i -й отрасли должен быть равен сумме объемов продукции, потребляемой в производственной и непроизводственной сферах, т.е.

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) называются *соотношениями баланса*.

Введя так называемые коэффициенты прямых материальных затрат по формуле

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

выражающие затраты продукции i -й отрасли на производство единицы продукции j -й отрасли, уравнения баланса (3.1) можно записать в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

или в более компактной (матричной) форме

$$X = AX + Y$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор валового продукта, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор конечного продукта; $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$ – матрица прямых материальных затрат (технологическая или структурная матрица, элементы которой постоянны в рамках одной модели).

Более подробно см. файл “econmatmodels.pdf” – Тема “СТАТИЧЕСКАЯ n - СЕКТОРНАЯ БАЛАНСОВАЯ МОДЕЛЬ В. ЛЕОНТЬЕВА”

2. Модель международной торговли

См. файл “econmatmodels.pdf” – Тема “ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ”

3. Модели макроэкономической динамики

Следующие модели относятся к моделям макроэкономической динамики и могут быть как линейными, так и нелинейными.

Дифференциальные уравнения находят достаточно широкое применение в моделях экономической динамики, в которых отражается не только зависимость переменных от времени, но и их взаимосвязь во времени. Рассмотрим некоторые (простейшие) задачи макроэкономической динамики.

Модель 1. Пусть $y(t)$ – объем продукции некоторой отрасли, реализованный к моменту времени t . Будем полагать, что вся производимая отраслью продукция реализуется по некоторой фиксированной цене p , то

есть выполнено условие ненасыщаемости рынка. Тогда доход к моменту времени t составит

$$Y(t) = py(t).$$

Обозначим через $I(t)$ – величину инвестиций, направляемых на расширение производства. В модели естественного роста полагают, что скорость выпуска продукции (акселерация) пропорциональна величине инвестиций, то есть

$$y'(t) = lI(t). \quad (3.2)$$

Здесь мы пренебрегаем временем между окончанием производства продукции и ее реализацией. Полагая, что величина инвестиций $I(t)$ составляет фиксированную часть дохода, получим

$$i(t) = mY(t) = mpy(t), \quad (3.3)$$

где коэффициент пропорциональности m (так называемая норма инвестиций) – постоянная величина, $0 < m < 1$. Подставляя (3.3) в (3.2), приходим к уравнению

$$y' = ky, \quad k = mpl. \quad (3.4)$$

Полученное дифференциальное уравнение – с разделяющимися переменными. Решая его, приходим к функции $y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}$, где $y_0 = y(t_0)$.

Заметим, что уравнение (3.4) описывает также рост народонаселения (демографический процесс), динамику роста цен при постоянной инфляции, процесс радиоактивного распада и т.д.

На практике условие насыщаемости рынка может быть принято только для достаточно узкого временного интервала. В общем случае кривая спроса, то есть зависимость цены p реализованной продукции от ее объема y является убывающей функцией $p = p(y)$ (с увеличением объема произведенной продукции ее цена падает в результате насыщения рынка). Поэтому модель роста в условиях конкурентного рынка имеет вид

$$y' = mlp(y)y, \quad (3.5)$$

оставаясь по-прежнему уравнением с разделяющимися переменными и уже нелинейным.

Так как все сомножители в правой части уравнения (3.5) положительны, то $y' > 0$, и это уравнение описывает возрастающую функцию $y(t)$.

При исследовании функции $y(t)$ на выпуклость естественно используется понятие эластичности функции. Действительно, из (3.5) следует, что

$$y'' = mly' \left(\frac{dp}{dy} y + p \right).$$

Напомним (файл “econmatmodels.pdf”, тема “Модель одного товара” - почитать, что такое эластичность, функции спроса и предложения!), что эластичность спроса (относительно цены) определяется формулой

$$E_p(y) = \frac{p}{y} \frac{dy}{dp}.$$

Тогда выражение для y'' можно записать в виде

$$y'' = mly'p \left(\frac{1}{E_p(y)} + 1 \right)$$

и условие $y'' = 0$ равносильно равенству $E_p(y) = -1$.

Таким образом, если спрос эластичен, то есть $|E_p(y)| > 1$ или $E_p(y) < -1$, то $y'' > 0$ и функция $y(t)$ выпукла вниз; в случае, если спрос не эластичен, то есть $|E_p(y)| < 1$ или $-1 < E_p(y) < 1$, то $y'' < 0$ и функция $y(t)$ выпукла вверх.

Пример. Найти выражение для объема реализованной продукции $y = y(t)$, если известно, что кривая спроса $p(y)$ задается уравнением $p(y) = 2 - y$, норма акселерации $1/l = 2$, норма инвестиций $m = 0,5$, $y(0) = 0,5$.

Решение. Уравнение (3.5) в этом случае принимает вид

$$y' = (2 - y)y$$

или

$$\frac{dy}{(2 - y)y} = dt.$$

Выполняя почленное интегрирование, получаем

$$\ln \left| \frac{y - 2}{y} \right| = -2t + C_1$$

или

$$\frac{y - 2}{y} = Ce^{-2t}, \quad C = \pm e^{C_1}. \quad (3.6)$$

Учитывая, что $y(0) = 0,5$, получаем, что $C = -3$. Выражая теперь y из (3.6), окончательно имеем

$$y = \frac{2}{1 + 3e^{-2t}}.$$

Начертить график данной функции (самостоятельно). В данном случае эластичность спроса задается функцией $E_p(y) = \frac{y-2}{y}$ и условие $E_p(y) = -1$, определяющее положение перегиба на кривой, дает $y = 1$. Данная кривая графика называется *логистической кривой*. Подобные кривые описывают процесс распространения информации (рекламы), динамику эпидемий, процесс размножения бактерий в ограниченной среде и др.

Модель 2. Доход $Y(t)$, полученный к моменту времени t некоторой отраслью, является суммой инвестиций $I(t)$ и величины потребления $C(t)$, то есть

$$Y(t) = I(t) + C(t). \quad (3.7)$$

Как и ранее в модели естественного роста, будем предполагать, что скорость увеличения дохода пропорциональна величине инвестиций, то есть

$$bY'(t) = I(t), \quad (3.8)$$

где b – коэффициент капиталоемкости прироста дохода (что равносильно (3.2) при постоянной цене на продукцию p и $l = 1/(pb)$).

Рассмотрим поведение функции дохода $Y(t)$ в зависимости от функции $C(t)$.

Пусть $C(t)$ представляет фиксированную часть получаемого дохода: $C(t) = (1 - m)Y(t)$, где m – норма инвестиций. Тогда из (3.7) и (3.8) получаем

$$Y' = \frac{m}{b}Y,$$

что равносильно уравнению (3.4) при $p = \text{const}$. В ряде случаев вид функции потребления $C(t)$ бывает известен (из некоторых дополнительных соображений).

Пример. Найти функцию дохода $Y = Y(t)$, если известно, что величина потребления задается функцией $C = 2t$; коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 1/2$, $Y(0) = 2$.

Решение. Из соотношений (3.7) и (3.8) имеем уравнение

$$Y(t) = \frac{1}{2}Y'(t) + 2t, \quad (3.9)$$

то есть функция дохода удовлетворяет линейному неоднородному уравнению первого порядка. Для его решения воспользуемся следующим методом. Будем искать решение в виде $Y(t) = u(t)v(t)$, одна из которых может быть выбрана произвольно, а другая – должна определяться из заданного уравнения. Так как $Y' = u'v + uv'$, то

$$u(t)v(t) = \frac{1}{2}(u'v + uv') + 2t, \quad (3.10)$$

Можно выделить коэффициент при u и подобрать функцию v так, чтобы этот коэффициент обратился в нуль, то есть

$$v(t) - \frac{1}{2}v' = 0 \rightarrow v = e^{2t}.$$

Тогда из (3.10)

$$\frac{1}{2}u'e^{2t} + 2t = 0.$$

Отсюда

$$u(t) = 2te^{-2t} + e^{-2t} + C.$$

Значение C находим из начальных условий. Тогда $Y(t) = 2t + e^{2t} + 1$.

Можно решать уравнение (3.9) численным методом Эйлера или Рунге-Кутты (можете самостоятельно его изучить).

Упражнения

1. Известно, что рост числа жителей $y = y(t)$ жителей некоторого района описывается уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0,2y}{m}(m - y),$$

где m – максимально возможное число жителей для данного района. В начальный момент времени число жителей составляло 1% от максимального. Через какой промежуток времени число жителей составит 80% от максимального?

2. В поселке с населением 3000 человек распространение эпидемии гриппа (без применения экстренных санитарно-профилактических мер) описывается уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = 0,0001y(3000 - y),$$

где y – число заболевших в момент времени t ; t – число недель. Сколько больных будет в поселке через две недели, если в начальный момент было трое больных?

3. Предполагая, что цена на товар задается функцией $p(y) = (5 + 3e^{-y})\frac{1}{y}$, $m = 0,6$, $l = 0,4$, $y(0) = 1$, найти зависимость $y = y(t)$ объема реализованной продукции от времени.

Эти задачи можно решать как численно, так и аналитически методом разделения переменных.

Вопросы к коллоквиуму

1. Понятие математической модели.
2. Общая схема построения модели.
3. Требования, предъявляемые к моделям.
4. Модель “хищник-жертва” (дать описание, входные и выходные параметры, методы решения).
5. Модель траектории ракеты (дать описание, входные и выходные параметры, методы решения).
6. Структурные и функциональные модели. Определения, примеры.
7. Дискретизация моделей (от непрерывного к дискретному). Метод Эйлера. Глобальная ошибка дискретизации.
8. Об устойчивости (дать определение корректности задачи, рассмотреть на модельном уравнении условия устойчивости). Абсолютная и условная устойчивость конечно-разностной схемы.
9. Полиномиальная интерполяция (переход от дискретного к непрерывному). Метод множителей Лагранжа. Теорема об ошибке полиномиальной интерполяции.
10. Матрица Вандермонда как один из способов интерполяции. Представление Ньютона (было на практическом занятии).
11. Определение линейной и нелинейной модели.
12. Модель межотраслевого баланса. Структурная матрица

13. Модель международной торговли. Что называется структурной матрицей международной торговли? Что называется условием бездефицитной торговли? Какие предположения лежат в основе модели международной торговли?

14. Коэффициентом эластичности функции.

15. Что называется равновесной ценой на рынке одного товара?

16. Что называется средним значением функции? Что называется предельным значением функции в экономике?

17. Какие предположения лежат в основе модели Эванса с непрерывным временем?

18. Производственная функция. Что называется производственной функцией Кобба-Дугласа?

3.4 Линеаризация

Выгоды линейности бывают столь велики, что приближенная замена нелинейных соотношений на линейные, нелинейных моделей на линейные, то есть *линеаризация* соотношений, моделей и т.д. весьма распространена. Такая линеаризация обычно проводится в двух случаях: либо если эксперимент показывает (как, например, для закона Гука), что отклонение от линейности в рассматриваемых диапазонах изменения переменных невелико и несущественно, либо же, если эти диапазоны малы и мы заменяем приращения переменных на их дифференциалы, отбрасывая члены высшего порядка малости:

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow \Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x := df(x).$$

Покажем последнюю процедуру на формальном примере.

Пусть величины x , y , z связаны уравнением

$$\frac{x^3 + xy}{y^3 - xz} + e^{2x} + 5 = 0. \quad (3.11)$$

Эти уравнения при $x = 2$, $y = -1$, $z = 0$ удовлетворяются. Пусть теперь эти величины мало изменились, то есть стало $x = 2 + \xi$, $y = -1 + \tau$, $z = \eta$, где $|\xi|$, $|\tau|$, $|\eta|$ малы. Требуется найти линейное соотношение между $|\xi|$, $|\tau|$, $|\eta|$, справедливое с точностью до членов высшего

порядка малости; другими словами, требуется провести линеаризацию уравнения (3.11) вблизи указанных значений x , y , z . Для этого продифференцируем обе части уравнения (3.11):

$$\frac{(3x^2dx + ydx + xdy)(y^3 - xz)}{(y^3 - xz)^2} - \frac{(3y^2dy - zdx - xdz)(y^3 - xz)}{(x^3 + xy)^2} + e^{2z}(2dz) = 0.$$

Подставив сюда вместо x , y , z их исходные значения, а вместо дифференциалов – приращения соответствующих переменных (при этом мы пренебрегаем величинами высшего порядка малости – в этом и состоит линеаризация), получим

$$(11\xi + 2\tau)(-1) - 6(3\tau - 2\eta) + 2\eta = 0,$$

т.е.

$$11\xi + 20\tau - 14\eta = 0.$$

Геометрический смысл проведенной линеаризации таков: мы получили уравнение касательной плоскости к поверхности (3.11) в пространстве x , y , z в заданной точке (2,-1,0).

На последовательной линеаризации основан один из самых эффективных методов приближенного решения нелинейных уравнений различных типов – *метод Ньютона*. Опишем его сначала на примере решения уравнения вида

$$f(x) = 0. \tag{3.12}$$

Метод имеет итерационный характер. Пусть мы отправляемся от некоторого нулевого приближения решения: $x = x_0$. Проведем линеаризацию функции $f(x)$ при $x = x_0$, для чего разложим ее в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ и отбросим в разложении все нелинейные члены. Тогда взамен (3.12) мы получим линеаризованное уравнение

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

Его решение назовем приближением x_1 решения уравнения (3.12), то есть

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Затем то же сделаем с x_1 и т.д. Общая рекуррентная формула для построения последовательных приближений по методу Ньютона такова:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} := \varphi(x_n). \quad (3.13)$$

Теоретически мы можем, вообще говоря, продолжать этот процесс бесконечно. Если он сходится, то есть последовательность x_n имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$, то в пределе получается решение уравнения (3.12). На практике сходимость обычно обнаруживается уже после нескольких итераций и вычисления прекращаются, когда x_{n+1} отличается от x_n меньше чем на некоторое разумно выбранное заранее малое число. Если процесс расходится, то это не значит, что и решения нет: может быть, оно есть, но x_0 выбрано неудачно.

Таким образом, метод Ньютона состоит в применении метода итераций к уравнению (3.12), переписанному в равносильной форме:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)} := \varphi(x).$$

Почему полезна именно такая форма? Для ответа, обозначив правую часть $\varphi(x)$, вычислим производную:

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Таким образом, для точного решения \bar{x} уравнения (3.12) получаем при $f'(\bar{x}) \neq 0$, что $\varphi'(\bar{x}) = 0$.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$x^3 - x + 0,3 = 0.$$

Для его решения перепишем его в виде

$$x = x^3 + 0,3$$

и проведем итерации, начиная с $x_0 = 0$. Получим

$$x_1 = 0^3 + 0,3 = 0,3, \quad x_2 = 0,3^3 + 0,3 = 0,327, \dots$$

Вычисления с точностью до 10^{-7} , которые можно провести самостоятельно, показывают, что $x_{14} = x_{13} = 0,3389361$. Считая последнюю цифру сомнительной вследствие округлений, можем написать $x = 0,338936$.

Рисунок. Если $|\varphi'(\bar{x})| < q < 1$ и x_0 выбрано не слишком далеко от \bar{x} , то процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии, $|x_n - \bar{x}| < \text{const} \cdot q^n$. Наиболее благоприятен случай, когда $\varphi'(\bar{x}) = 0$: тогда процесс сходится со сверхгеометрической скоростью, то есть быстрее геометрической прогрессии с любым знаменателем. Если $|\varphi'(\bar{x})| > 1$, то процесс итераций либо расходится либо сходится, но не к \bar{x} .

Упражнение 1. Проведите итерации для равносильных уравнений: $x = 1 + 0,1x$ и $x = 10x - 10$ и объясните результат.

Методы последовательных приближений применяются также при решении систем уравнений, дифференциальных, интегральных и других уравнений, при нахождении экстремумов функций и т.д. Метод Ньютона сводится к методу последовательных приближений и распространяется и на нелинейные уравнения других типов – на задачи для нелинейных дифференциальных уравнений, путем сведения их к последовательному решению линейных задач.

Имеются и другие способы линеаризации уравнений и моделей.

1. Рассмотрим нелинейную модель “хищник-жертва”:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \beta xy, \quad (1.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y + \delta xy, \quad (1.4)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Здесь линеаризовать можно так:

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t), \quad y(t) = y_0 + \tilde{y}(t), \quad (3.14)$$

где $\tilde{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ новые неизвестные функции, которые малы по сравнению с x_0 , y_0 . Это означает, что можно пренебречь слагаемыми порядка 2 и выше ($\tilde{x}^n(t)$, $\tilde{y}^n(t)$, $n = 2, 3, \dots$), если таковые будут встречаться в уравнениях. Иными словами, вклад этих слагаемых пренебрежимо мал, и мы можем удалить их из уравнений. Обратим внимание на тот факт, что слагаемые $\tilde{x}(t)\tilde{y}(t)$ составляют второй порядок, поэтому они также удаляются.

Подставим (3.14) в (1.3)-(1.4):

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \alpha x_0 + \alpha \tilde{x} + \beta(x_0 + \tilde{x})(y_0 + \tilde{y}),$$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \gamma y_0 + \gamma \tilde{y} + \delta(x_0 + \tilde{x})(y_0 + \tilde{y}),$$

Раскрывая скобки и пренебрегая слагаемыми второго порядка, получим линейную модель относительно новых неизвестных функций:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \alpha x_0 + \alpha \tilde{x} + \beta(x_0 y_0 + y_0 \tilde{x} + x_0 \tilde{y}),$$

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = \gamma y_0 + \gamma \tilde{y} + \delta(x_0 y_0 + y_0 \tilde{x} + x_0 \tilde{y}).$$

2. Обратимся к задаче о траектории, когда сила тяги $T = 0$, $m = \text{const}$:

$$v(0) = v_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad x(0) = y(0) = 0. \quad (1.13)$$

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad (1.15)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{2m} c \rho s v^2 - g \sin \theta, \quad (1.17)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{v} \cos \theta. \quad (1.18)$$

Уравнения (1.15), (1.17), (1.18) вместе с (1.13) составляют систему четырех уравнений первого порядка относительно функций x , y , v , θ . Начальные условия задаются соотношениями (1.13).

Упражнение 2. Численно реализовать (1.15), (1.17), (1.18) по следующим данным: $m = 15$ кг, $c = 0.2$, $\rho = 1.29$ кг/м, $s = 0.25$ м², $g = 9.81$ м/с², начальное значение скорости $v_0 = 50$ м/с. Использовать два различных значения начального угла: $\theta_0 = 0.6$ и $\theta_0 = 1.2$ рад. Сделать графики траекторий полета.

Указания. Переписать уравнения (1.15), (1.17), (1.18) в дискретном виде (конечно-разностная схема)

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} = v_i \cos \theta_i, \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = v_i \sin \theta_i, \quad (1.15)$$

$$\frac{v_{i+1} - v_i}{h} = -\frac{1}{2m} c \rho s v_i^2 - g \sin \theta_i, \quad (1.17)$$

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{h} = -\frac{g}{v_i} \cos \theta_i, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (1.18)$$

Затем выразить из каждого уравнения x_{i+1} , y_{i+1} , v_{i+1} , θ_{i+1} и получить рекуррентные соотношения, задав начальные значения $x_0 = y_0 = 0$.

Упражнение 3. Линеаризовать и выписать линеаризованные уравнения (1.15), (1.17), (1.18) аналогично тому, как это было сделано для модели “хищник-жертва”:

$$v(t) = v_0 + \tilde{v}(t), \quad \theta(t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(t), \quad x(t) = \tilde{x}(t), \quad y(t) = \tilde{y}(t).$$

Указания. а) Для тригонометрических функций, например, для $\sin(\theta_0 + \tilde{\theta}(t))$ использовать разложение в ряд Тейлора (здесь это получается как первый замечательный предел $\sin x \approx x$):

$$\sin(\theta_0 + \tilde{\theta}(t)) \approx \theta_0 + \tilde{\theta}(t).$$

б) Для дроби $-\frac{g}{v}$ имеем

$$-\frac{g}{v} = -\frac{g}{v_0 + \tilde{v}} = -\frac{g(v_0 - \tilde{v})}{v_0^2 - \tilde{v}^2} \approx -\frac{g(v_0 - \tilde{v})}{v_0^2}.$$

3.5 Детерминированные и вероятностные модели. Статические и динамические модели

Математическая модель может включать случайные компоненты – случайные скалярные или векторные величины, случайные последовательности или функции, случайные структуры и т.п., удовлетворяющие статистическим законам. Случайная величина является одним из основных понятий теории вероятностей. Это величина, принимающая в результате испытания одно из возможных значений, при этом появление того или иного значения является случайным событием. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Модели, использующие случайные величины, называются *вероятностными* или *стохастическими* (от греческого слова “стохастикос” – умеющий отгадывать), в отличие от *детерминированных* (от латинского слова “детермино” – определено), которые не содержат случайные компоненты. Так, если какой-либо элемент изучаемого объекта является изделием массового производства и на интересующие нас свойства могут заметно повлиять отклонения параметров от их номинальных значений, то эти параметры часто считают случайными величинами. Случайные

функции появляются, например, при рассмотрении воздействия ветра на какие-либо сооружения, сигналов на фоне шума, шерховатых поверхностей и т.д.

Вероятностные модели изучаются с помощью методов теории вероятностей. К сожалению, довольно часто бывает, что вероятностные характеристики случайных компонентов (математическое ожидание и дисперсия случайных величин, тем более законы распределения последних, а также аналогичные характеристики случайных функций) оказываются известными с весьма невысокой точностью или даже вовсе неизвестными, то есть модель не удовлетворяет требованию продуктивности. Методы математической статистики направлены на определение таких характеристик, но и эти методы не всегда удается эффективно применить. Поэтому при построении вероятностных моделей надо уделять существенное внимание источнику таких характеристик. Если они не поддаются определению с необходимой точностью, то можно попытаться поискать другую модель, быть может более грубую, но и более устойчивую относительно пробелов в знании исходных данных.

Приведем пример. Пусть x – решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} + a(t; \omega)x = 0 \quad (0 \leq t < \infty), \quad x(0) = 1,$$

где a – случайная величина (переменная ω , как это принято в теории вероятностей, имеет смысл элементарного исхода). Тогда и $x = x(t; \omega)$ – случайная величина-функция, характеристики которой существенно зависят от характеристик функции a . Но пусть не предоставляется возможным детально узнать характеристики функции a , известно только, что всегда $1 \leq a \leq 2$. Тогда, подставляя крайние возможные значения, мы получаем гарантированную оценку решения: $e^{-2t} \leq x \leq e^{-t}$; из нее, например, следует, что $x(t; \omega) \rightarrow 0$ с экспоненциальной скоростью при $t \rightarrow \infty$.

Применяется классификация моделей и по другим признакам. Так, различают *статические* и *динамические (эволюционные)* модели; для второго типа моделей предметом изучения является изменение рассматриваемого объекта во времени. В статических моделях система представляется неизменной во времени. Такие модели удобны, когда нужно описать структуру системы, то есть из каких объектов она состоит, как эти объекты связаны с друг с другом и каковы свойства этих объектов.

Образно говоря, статическая модель представляет собой как бы “фотографию” существенных свойств системы в некоторый момент времени. Примеры статических моделей: карта местности, схема персонального компьютера, перечень планет Солнечной системы с указанием их массы. Динамические модели содержат информацию о поведении системы и ее составных частей. Для описания поведения обычно используются записанные в виде формул, схем или компьютерных программ соотношения, позволяющие вычислить параметры системы и ее объектов, как функции времени. Примеры динамических моделей: набор формул небесной механики, описывающий движение планет Солнечной системы; график изменения температуры в помещении в течение суток; видеозапись извержения вулкана. В зависимости от цели моделирования для одной и той же системы могут создаваться как статические, так и динамические модели. Построение динамических моделей обычно сложнее, чем статических, поэтому, если значения свойств системы изменяются редко или медленно, то лучше построить статическую модель системы и при необходимости вносить в нее коррективы.

Промежуточное место занимают *квазистатические, стационарные и нестационарные* модели. В квазистатической модели принимается, что изменение объекта происходит столь медленно, что при рассмотрении ситуации в каждый момент можно в первом приближении объект считать статическим (грубо говоря, пренебречь инерционными силами), а время считать как параметр. Стационарность и нестационарность присуще динамическим моделям. Чаще всего стационарность выражается в неизменности во времени некоторых физических величин: стационарным является поток жидкости с постоянной скоростью, стационарна механическая система, в которой силы зависят только от координат и не зависят от времени. В стационарной модели считается, что процессы происходят, но изучаемый объект во времени не меняется; простейший пример – электрическая цепь с постоянным током.

В связи с перечисленными сейчас типами моделей упомянем еще о применяемых в математическом моделировании терминах: *установившимся* процессом обычно называют стационарный или периодический процесс; *переходным процессом* называют процесс перехода от одного статического состояния или установившегося процесса к другому.

4 О построении математической модели

1. О содержательной модели.

Очевидный, но важнейший начальный этап построения или выбора математической модели – это получение более четкого представления о моделируемом объекте и уточнение его содержательной модели (механическая, физическая, биологическая, социальная), основанное на неформальных обсуждениях. Нельзя жалеть времени и усилий на этот этап, от него в значительной мере зависит успех всего исследования. Не раз бывало, что значительный труд, затраченный на решение математической задачи, оказывался малоэффективным или даже потраченным впустую из-за недостаточного внимания к этой стороне дела.

Если мы, например, изучаем действие некоторого механического устройства, то, во-первых, выясняем, из каких частей оно состоит. Во-вторых, каковы их свойства, как эти части взаимодействуют, какие силы при этом возникают.

Содержательную модель на первоначальном исследовании желательно упростить без искажения качественной картины явления. Выясняем, нельзя ли принять тот или иной элемент устройства за материальную точку; если форма этого элемента существенна, то нельзя ли ее считать простой и т.п. При таком упрощении надо использовать аналогии с другим опытом. Но при этом не забываем, что решение каждой новой задачи требует новых, порой принципиально новых, соображений.

2. Формулирование математической задачи. Задачи анализа и синтеза.

Далеко не всегда вопрос о том, какого типа математическую задачу мы будем решать, бывает ясен с самого начала. Задача может быть поставлена не в конкретной форме (“Найти частоту колебаний такой-то системы”), а в форме не столь определенной (“Исследовать поведение такой-то системы”, “Оптимизировать такое-то устройства путем подбора его параметров” и т.п.). Тогда требуется хотя бы предварительное уточнение плана действий: какие величины было бы желательно найти, какие зависимости исследовать и откуда их можно было бы получить, по какому критерию проводить оптимизацию. Такой план желательно обдумать и на более ранней стадии, поскольку он может повлиять на

формулировку математической модели. В итоге, уточняя план действий, мы четко формулируем математическую задачу (хотя и здесь в процессе дальнейшего исследования четко поставленная задача может видоизмениться).

Прикладные математические задачи можно условно разделить на два класса. В задачах одного класса речь идет об исследовании свойств заданного объекта – это *задачи анализа*. Задачи другого класса имеют целью выбор объекта из некоторой совокупности на основании таких-то требований – это *задачи синтеза*. Из содержательной постановки задачи чаще всего бывает ясно, о задаче какого класса идет речь.

Для задач анализа, которые мы будем в дальнейшем рассматривать, математическая модель обычно сводится к уравнениям того или иного вида. Математическая модель задачи синтеза тоже может свестись к решению уравнений, если условия, на основании которых требуется выбрать объект, имеют вид некоторых неравенств. Но часто условие выбора имеет другой характер: для выбираемого объекта некоторая скалярная функция (целевая функция) должна принять наименьшее или наибольшее значение. Тогда математическая модель сведется к задаче на экстремум.

3. Определяющие соотношения

Основными “конструкциями” математической модели являются те или иные постоянные и переменные величины и функциональные зависимости одних величин от других. Некоторые постоянные величины могут быть заданы (это *параметры задачи*), другие – искомыми; то же относится и к функциям. Модель составляется с таким расчетом, чтобы, найдя искомые величины и функции, мы могли дать ответ на поставленные вопросы.

Заданные и искомые величины и функции в математической модели обычно связываются уравнениями и неравенствами. Уравнения, включаемые в математическую модель, выписываются на основе *определяющих соотношений* между величинами, вытекающих из постулатов содержательной модели: универсальных физических законов – законов сохранения энергии, второй закон Ньютона. Однако универсальных законов недостаточно и поэтому приходится также пользоваться *феноменологическими законами* – закон Гука – т.е. достаточно хорошо эмпирически обоснованный закон с ограниченной областью действия.

Еще менее универсальный характер имеют *полуэмпирические соотношения*, получающиеся в результате сочетания качественных соображений (соображений размерности) и обработки результатов эксперимента или иной статистики либо выведенные из других соотношений такого же характера. Так, в прикладной аэродинамике хорошо известна формула для подъемной силы P при плоском дозвуковом обтекании крыла:

$$P = c_y \frac{\rho v^2}{2} b, \quad (4.1)$$

где ρ , v – соответственно плотность и скорость набегающего потока, b – хорда профиля крыла, а c_y – безразмерный коэффициент, зависящий от формы профиля и направления набегающего потока. То, что формула должна иметь такой вид, вытекает из соображений размерности. Но для конкретных расчетов очень важно знать, чему равно c_y для различных реальных профилей и “углов атаки” α , характеризующих направление набегающего потока. Это теоретически сделать в принципе можно, но не просто; проще это сделать эмпирически путем продувки модели в аэродинамической трубе. В результате были получены графики зависимости $c_y(\alpha)$ для многих наиболее интересных профилей.

Интересно сравнить формулу (4.1) с формулой Жуковского для этой же задачи: $P = \rho v \Gamma$, где Γ – циркуляция вектора скорости воздуха по контуру, охватывающему профиль крыла. Последняя формула в теоретическом отношении более совершенна, так как не содержит эмпирического коэффициента c_y . Но как в реальной ситуации найти значение Γ ? Теоретически это удастся в редких случаях, а получить Γ с помощью измерения еще сложнее, чем c_y . Таким образом, формула (4.1) обладает существенным преимуществом в продуктивности.

Применяются также и *чисто эмпирические соотношения*, получаемые с помощью прямой обработки данных наблюдения или эксперимента, зачастую привязанные к определенным единицам измерения.

К сожалению, и этих соотношений порой оказывается мало, и приходится идти на определенный риск, применяя известные формулы вне рамок, где они были установлены. Порой приходится выводить новые формулы на основании недостаточных данных. В таких случаях не стоит скрывать слабые места в рассуждениях, так как здесь возникает опасность грубых ошибок и подгонки решения под желаемый результат, который после применения компьютера, получает видимость математики.

ческого обоснования. В таких случаях математика может принести не пользу, а вред!

4. Подбор эмпирической формулы

Пусть мы знаем, что некоторая величина y является функцией другой величины x , то есть $y = y(x)$, но аналитическое выражение этой функции нам неизвестно и мы хотим подобрать для нее формулу $y = f(x)$, с достаточной для нас точностью описывающую зависимость. Пусть в результате эксперимента или наблюдения мы получили ряд значений x и соответствующих значений y :

$$x = x_1, x_2, \dots, x_N;$$

$$y = y_1, y_2, \dots, y_N.$$

Тогда, если N не слишком велико, обычно начинают с нанесения этих данных на координатную ось в виде отдельных точек. При этом становятся видны точки, выпадающие из общего хода зависимости. Они могут свидетельствовать о каких-то важных эффектах, требующих специального исследования, но чаще получаются из-за существенных ошибок при эксперименте или вычислениях – тогда эти точки просто игнорируются.

Затем нужно выбрать вид формулы, которой мы будем пользоваться. Если этот вид не вытекает из каких-либо общих соображений, то обычно выбирают одну из простейших элементарных функций или их простую комбинацию (сумму степенных или показательных функций). Необходимо следить за тем, чтобы подбираемая функция $f(x)$ имела те же характерные особенности, что и изучаемая функция $y(x)$ (четность, асимптотика, возможная смена знака и другие существенные черты). На малом интервале x часто применяют наиболее простую – линейную функцию, а вблизи точки экстремума – квадратичную функцию. Иногда не удается подобрать единую формулу на всем интервале изменения x и приходится разбивать этот интервал на части и на каждой подбирать свою формулу.

После выбора вида формулы нужно определить значения входящих в нее параметров. Если $f(x) = ax + b$, то нужно определить a , b . Для этого используется *метод наименьших квадратов*. Он состоит в минимизации суммы квадратов разностей между эмпирическими значениями функции и соответствующими ее значениями, полученными из прибли-

женной формулы,

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^N [y_i - (ax_i + b)]^2 \rightarrow \min.$$

Применение необходимого условия экстремума (равенство нулю производных первого порядка по каждому аргументу) к этой сумме, рассматриваемой как функции величин a , b , приводит к простой системе уравнений для определения a и b :

$$\begin{aligned} \left(\sum_i x_i^2 \right) a + \left(\sum_i x_i \right) b &= \sum_i x_i y_i, \\ \left(\sum_i x_i \right) a + Nb &= \sum_i y_i, \end{aligned}$$

Этот метод можно применить и к формулам другого вида, даже содержащим более одной независимой переменной и (или) любое число параметров, если эти параметры входят линейно в искомую формулу.

5 Об упрощении и уточнении математических моделей

Часто бывает, что после построения сложной модели ее оказывается можно упростить, иными словами, перейти к новой, более простой (и обычно более грубой, то есть менее адекватной) модели. Эта упрощенная модель может оказаться достаточной для целей исследования. Если же это не так, то результат ее рассмотрения можно применить для изучения более сложной модели. Иногда мы сразу строим грубую модель, подразумевая, что она в дальнейшем будет уточняться. В связи с этим отметим, что прикладной математическое исследование часто имеет характер последовательных приближений, при которых предыдущее приближение (к удовлетворяющему нас результату) применяется для построения последующего, более точного. Как мы уже видели ранее упрощение производится с помощью выдвижения *рабочих гипотез*, которые относятся

к ожидаемым свойствам решения задачи. На мотивировку гипотез и последующее их обоснование нужно обращать серьезное внимание, так как гипотезы иногда открывают возможности для необоснованных выводов.

5.1 Метод малого параметра

Этот метод называется также *методом возмущений* и широко применяется в прикладной математике, в частности, для уточнения решения, полученного из упрощенной модели, а также для выяснения погрешности этого решения. Удачный выбор формы для невозмущенного и возмущенного решений позволяет во многих случаях даже с помощью первого приближения получить решение с удовлетворительной точностью.

Задачи, при решении которых применяется метод малого параметра, бывают двух типов. В задачах первого типа малый параметр входит в саму их постановку и цель исследования состоит в выяснении влияния этого параметра на решение; метод приводит к так называемым *асимптотическим формулам*, из которых видно это влияние.

Рассмотрим первый тип на примере задачи колебания системы (1.2) (раздел 2, п. 2.1), состоящей из груза массой m с пружиной жесткости k с учетом вязкого трения с коэффициентом f . Без учета сил трения для более грубой модели имеем уравнение (1.1). Характеристическое уравнение, соответствующее (1.2) имеет вид

$$mp^2 + fp + k = 0, \quad (5.1)$$

и нас интересует влияние коэффициента трения f на его решение. Без учета трения для уравнения (1.1) мы получим:

$$p_{1,2} = \pm \omega i, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Теперь, чтобы оценить влияние трения, рассмотрим более точную модель с помощью метода малого параметра в простейшем варианте, а именно строя решение в виде суммы ряда по степеням малого параметра f :

$$p = a + bf + cf^2 + \dots \quad (5.2)$$

Так как $p = a$ получается при $f = 0$, то $a = \pm\omega i$. Это наше нулевое приближение. Отсюда

$$p^2 = -\omega^2 \pm 2\omega b i f + (b^2 \pm 2\omega c i) f^2 + \dots \quad (5.3)$$

Подставляя выражения (5.2) и (5.3) в (5.1) и раскрывая скобки, получаем послегруппировки членов с одинаковыми степенями f

$$\pm(2mb + 1)\omega i f + (m(b^2 \pm 2\omega c i) + b) f^2 + \dots = 0. \quad (5.4)$$

Но если сумма степенного ряда равна нулю, то и все его коэффициенты равны нулю. Приравнявая нулю коэффициент при f , находим $b = -\frac{1}{2m}$, то есть первое приближение имеет вид

$$p = \pm\omega i - \frac{f}{2m}.$$

Мы видим, что в первом приближении малое трение, не влияя на частоту колебаний, порождает их экспоненциальное затухание.

Найдем следующую поправку. Для этого приравняем коэффициент при f^2 в (5.4), подставив в него найденное значение b . После простых преобразований получаем

$$c = \pm \frac{1}{8m^2\omega} i.$$

Подставляя значение ω , находим соответствующее значение c , откуда получаем второе приближение для корней характеристического уравнения:

$$p = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i - \frac{f}{2m} \pm \frac{f^2}{8m^2 \sqrt{\frac{k}{m}}} i.$$

При желании разложение можно продолжить.

Тот же результат можно получить, применяя формулу Тейлора

$$p(f) = (p)_0 + \frac{1}{1!}(p')_0 f + \frac{1}{2!}(p'')_0 f^2 + \dots,$$

где штрихами обозначены производные по f , а индекс нуль означает подстановку значения $f = 0$. В силу нулевого приближения имеем $(p)_0 = \pm\omega i$. Взяв производную от обеих частей (5.1) по f , получаем

$$2m p p' + p + f p' = 0, \quad (5.5)$$

подставив значение $f = 0$, приходим к равенству

$$2m(p)_0(p')_0 + (p)_0 = 0 \Rightarrow (p')_0 = -\frac{1}{2m}.$$

Аналогично, взяв производную обеих частей (5.5) по f и подставив $f = 0$, находим $(p'')_0$ и т.д.

Задачи второго типа, в которых применяется метод малого параметра, в своей постановке такого параметра не содержат и его приходится ввести, чтобы можно было применить данный метод. Для этого надо сначала “организовать” нулевое приближение, то есть постараться так видоизменить задачу, по возможности мало, чтобы ее решение можно было найти легко. После этого нужно ввести параметр, например, α , чтобы при $\alpha = 0$ получилась видоизмененная задача, а при некотором $\alpha = \alpha_0$ — исходная. Затем надо решение задачи, включающей α , разложить по степеням этого параметра, после чего в полученном решении положить $\alpha = \alpha_0$.

Приведем пример. Пусть надо решить уравнение

$$x^4 - 12x^3 + 10x - 1 = 0, \quad (5.6)$$

коэффициенты которого считаются точными. Продемонстрируем схему применения метода малого параметра (хотя стандартный метод Ньютона в этом конкретном случае эффективнее). Для этого заметим, что при x , близких к нулю, первые два члена сравнительно малы и поэтому для таких x в качестве уравнения для нулевого приближения можно взять

$$10x - 1 = 0$$

с очевидным решением $x_0 = 0, 1$. Тогда возмущенное уравнение можно записать в виде

$$\alpha(x^4 - 12x^3) + 10x - 1 = 0, \quad (5.7)$$

из которого уравнение (5.6) получается при $\alpha = 1$.

Замечание. Малость параметра относительна и то, что значение $\alpha = 1$ считается малым, не должно вызывать недоумения: например, вместо α можно было написать 10β , тогда β менялось бы до 0,1. Истинным критерием малости параметра является практическая сходимость разложения, полученного в результате данного метода.

Уравнение (5.7) определяет зависимость $x(\alpha)$ как неявную функцию. Имея в виду применение формулы Тейлора, проведем при $x = x(\alpha)$ дифференцирование обеих частей уравнения по α :

$$x^4 - 12x^3 + \alpha(4x^3 - 36x^2)x' + 10x' = 0,$$

$$2(4x^3 - 36x^2)x' + \alpha(12x^2 - 72x)x'^2 + \alpha(4x^3 - 36x^2)x'' + 10x'' = 0.$$

При $\alpha = 0$, $x = x_0 = 0,1$ получаем $x'_0 = 1,19 \cdot 10^{-3}$, $x''_0 = 8,4728 \cdot 10^{-5}$. Отсюда по формуле Тейлора

$$x(\alpha) = 0,1 + 1,19 \cdot 10^{-3}\alpha + 4,2364 \cdot 10^{-5}\alpha^2 + \dots$$

При $\alpha = 1$ получаем разложение искомого решения

$$x = x_1 = 0,1 + 1,19 \cdot 10^{-3} + 4,2364 \cdot 10^{-5} + \dots \quad (5.8)$$

Хорошая практическая сходимость полученного разложения (что распознается по его первым членам) подтверждает возможность считать значение $\alpha = 1$ малым, и мы получаем значение корня $x_1 = 0,101232$.

При больших x в уравнении (5.6) сравнительно малыми оказываются два последних члена, поэтому за невозмущенное уравнение можно принять

$$x^4 - 12x^3 = 0$$

с решением $x_0 = 12$, а за возмущенное

$$x^4 - 12x^3 + \alpha(10x - 1) = 0,$$

Аналогично предыдущему после дифференцирования по α находим при $\alpha = 0$, $x_0 = 12$ значения $x'_0 = -119/1728 = -0,068866$, $x''_0 = -0,001574$. Применив формулу Тейлора и положив $\alpha = 1$, получаем второй корень уравнения (5.6): $x_2 = 11,9303$.

Упражнение. Проверить (с помощью метода Ньютона), что два остальных корня уравнения (5.6) “средние” по величине, они равны 0,89429 и -0,92585.

В качестве другого примера рассмотрим нелинейную краевую задачу

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 0,2y^3 = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \quad (5.9)$$

Здесь естественно считать второй член в правой части возмущением задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

имеющей очевидное решение $y = x$. Введем параметр в возмущенную задачу, записав ее в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha y^3 = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad (5.10)$$

и будем искать ее решения как сумму ряда

$$y = x + z(x)\alpha + u(x)\alpha^2 + \dots \quad (5.11)$$

Подстановка его в уравнение и граничные условия (5.10) дают

$$\frac{d^2 z}{dx^2} \alpha + \frac{d^2 u}{dx^2} \alpha^2 + \dots + \alpha(x + z\alpha + \dots)^3 = 0,$$

$$z(0)\alpha + u(0)\alpha^2 + \dots = 0, \quad z(1)\alpha + u(1)\alpha^2 + \dots = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α , получаем последовательность линейных краевых задач:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + x^3 = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0,$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 3x^2 z = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \dots$$

С помощью непосредственного интегрирования находим (проверьте!)

$$z = \frac{1}{20}(x - x^5), \quad u = \frac{1}{2400}(13x - 18x^5 + 5x^9).$$

Подстановка этих выражений в (5.11) дает при $\alpha = 0, 2$ искомое решение задачи (5.9):

$$y = x + \frac{1}{100}(x - x^5) + \frac{1}{60000}(13x - 18x^5 + 5x^9) + \dots$$

Полученные ряд при $0 \leq x \leq 1$ хорошо сходятся.

Мы рассмотрели здесь только самые простые примеры применения метода малого параметра. Далеко не всегда оказывается целесообразным разлагать решение по целым положительным степеням этого параметра. Так, если в невозмущенном решении содержалось слагаемое вида

$A \sin \omega t$, перешедшее после возмущения задачи в $A \sin (\omega + c\alpha)t$ (т.е. параметр повлиял на частоту, но не на амплитуду) б то при построении решения в виде ряда по степеням α первая поправка превращает это слагаемое в

$$A \sin \omega t + (Act \cos \omega t)\alpha$$

и потому дает неправильное качественное представление о поведении возмущенного решения при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, неудачный выбор формы возмущенного решения может привести к ошибочным выводам. Правильный выбор осуществляется с учетом предполагаемых свойств решения, обычно на основе аналогии с уже известными примерами.

Для контроля качества приближенного решения можно сравнивать последовательные приближения друг с другом.

5.2 Регулярные и сингулярные возмущения

В методе малого параметра (основной метод теории возмущений) иногда возникают особые случаи при некотором $\alpha = \alpha_0$. То есть, задача может оказаться *вырожденной* (чуть ниже рассмотрим определение).

Как мы уже говорили, задача при $\alpha = 0$ называется *невозмущенной*, а при $\alpha \neq 0$ – *возмущенной* как говорят, в задачу введено возмущение.

Если задача при $\alpha = 0$ невырожденная, то возмущение называется *регулярным*, а в противном случае – *сингулярным*. Регулярные возмущения более просты и обычно изучаются с помощью того или иного стандартного метода; сингулярные возмущения более сложны.

Само понятие вырожденности зависит от типа изучаемой задачи. Так, если рассматривается система из n алгебраических уравнений 1-й степени с n неизвестными, коэффициенты которой зависят от параметра α , то она обычно считается вырожденной при некотором значении $\alpha = \alpha_0$, если при этом значении определитель системы обращается в нуль. Тогда при α , близком к α_0 , этот определитель мал, и потому система становится, как правило, плохо обусловленной, что вносит естественные осложнения в характер зависимости решения от α . Если же $\alpha = \alpha_0$, то система либо не имеет решений, либо имеет их бесконечное количество. Решение возмущенной системы при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ в первом случае уходит на бе-

конечность, а во втором, как правило, переходит в одно из бесконечных решений вырожденной системы.

Рассмотрим более простой случай вырожденности на примере алгебраического уравнения произвольной степени, коэффициенты которого зависят от параметра. Здесь вырожденность обычно означает обращение в нуль коэффициенты при старшей неизвестной, то есть понижение степени уравнения. Что при это происходит, легко понять на примере квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (5.12)$$

с коэффициентами a , b , c , зависящими от некоторого параметра α . Если $a(\alpha_0) = 0$, то есть при $\alpha = \alpha_0$ уравнение (5.12) вырождается, то из формулы для корней

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

мы видим, что если $b(\alpha_0) \neq 0$, то при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ один из корней уходит на бесконечность, тогда как другой стремится к $-c/b$, то есть к решению вырожденного уравнения; если же $b(\alpha_0) = 0$, но $c(\alpha_0) \neq 0$, то при $\alpha \rightarrow \alpha_0$ оба корня уходят в бесконечность.

Оказывается, что в общем случае картина аналогичная. Если алгебраическое уравнение степени n , вырождаясь, переходит в уравнение степени $k < n$, то в процессе вырождения $n - k$ корней уходят в бесконечность, тогда как остальные k корней переходят в корни вырожденного уравнения. Например, при $\alpha \rightarrow 0$ три корня уравнения

$$\alpha(x^4 - 12x^3) + 10x - 1 = 0, \quad (5.7)$$

уходят в бесконечность, а один стремится к 0,1 (сингулярное возмущение), тогда как у уравнения

$$x^4 - 12x^3 + \alpha(10x - 1) = 0$$

все корни остаются конечными (оно при $\alpha = 0$ не вырождается): три из них стремятся к нулю, а один к 12. То есть регулярное возмущение.

С помощью приведенного общего утверждения анализируется и случай, когда некоторые их коэффициентов алгебраического уравнения обращаются в бесконечность. Пусть, например, для уравнения (5.7) $|b| \rightarrow \infty$, тогда как a, c остаются ограниченными; как ведут себя при этом корни? Перепишав уравнение в равносильной форме

$$\frac{a}{b}x^2 + x + \frac{c}{b} = 0,$$

мы видим, что один из корней стремится к бесконечности, а другой к нулю:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4ac/(b^2)}}{2a/b} = \frac{2c/b}{-1 - \sqrt{1 - 4ac/(b^2)}},$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4ac/(b^2)}}{2(a/b)} = \frac{2c/b}{-1 + \sqrt{1 - 4ac/(b^2)}}$$

Для дифференциального уравнения, включающего некоторый параметр, вырождением обычно называют понижение порядка этого уравнения.

5.3 Анализ влияния упрощений

Упрощенные математические модели, упрощенные формулы обладают целым рядом очевидных преимуществ. Однако довольно часто бывает неясно, можно ли применять данную упрощенную модель или формулу в той или иной ситуации. Чтобы выснить границы применимости упрощенного метода, можно провести контрольное сравнение получающегося решения с более точным.

Приведем пример. Пусть для колебательной системы мы собираемся пользоваться формулой

$$p = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}i - \frac{f}{2m}. \quad (5.13)$$

Насколько малым для этого должен быть коэффициент трения f ? Ответ зависит от допустимой погрешности. Пусть, например, нас устраивает погрешность, не превышающая 5%. Примем (так часто бывает при применении метода малого параметра и в других “классических” случаях

хорошо сходящихся последовательных приближений), что каждое приближение отличается от точного решения примерно на столько же, на сколько и от последующего приближения. Отсюда, сравнивая формулы (5.13) и (5/14)

$$p = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}i - \frac{f}{2m} \pm \frac{f^2}{8m^2 \sqrt{\frac{k}{m}}}i. \quad (5.14)$$

мы видим, что устраивающая нас погрешность формулы (5.13) получится при

$$\frac{f^2}{8m^2 \sqrt{\frac{k}{m}}} < 0,05 \Rightarrow f^2 < 0,4m^2 \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

6 О решениях

6.1 Методы построения и исследования решений

Мы будем рассматривать для определенности математические модели, имеющие вид дифференциальных уравнений. С необходимыми изменениями наше обсуждение можно распространить и на другие типы моделей.

Методы математического анализа можно грубо подразделить на:

1. качественные;
2. аналитические;
3. численные.

С помощью *качественных методов* свойства решения изучаются без его построения, путем анализа свойств заданного уравнения. Применение этих методов требует большой математической подготовки и наименее поддается алгоритмизации.

Приведем пример качественного исследования. Рассмотрим нелинейный аналог уравнения (1.2):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f(t) \frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \quad (6.1)$$

описывающий колебания с нелинейными законами упругости и трения. Будем предполагать, что обе функции f , g непрерывные и возрастающие, причем $f(0) = g(0) = 0$, и докажем, что все решения уравнения (6.1) стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Доказательство будем проводить на наглядном уровне, принимая, что если какая-либо функция φ при $t \rightarrow \infty$ стремится к постоянной, то $\varphi'(t) \rightarrow 0$.

Пусть $x(t)$ – какое-либо решение уравнения (6.1). Введем функцию

$$E(t) = \frac{m}{2}[x'(t)]^2 + \int_0^{x(t)} g(\tau)d\tau,$$

представляющую собой математический аналог полной энергии системы. Тогда

$$\frac{dE}{dt} = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + g(x) \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \left[-f(x) \frac{dx}{dt} \right] \leq 0 \quad (5.2)$$

(последнее равенство вытекает из уравнения (6.1), а неравенство – из свойств функции $f(x)$). Значит, функция $E(t)$ убывающая, а так как $E(t) \geq 0$, то $E(t)$ имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$. Но тогда по нашему допущению $dE/dt \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда из выражения (5.2) получаем, что и $dx/dt \rightarrow 0$ в этом процессе. Значит, по нашему допущению и $d^2x/dt^2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда из уравнения (5.1) получаем, что $f(x) \rightarrow 0$, а потому и $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать. Как видим, в процессе доказательства мы нигде не пользовались ни точным, ни приближенным выражением для решения $x(t)$.

Аналитические методы направлены в основном на построение точных или асимптотических формул для решения и изучения свойств решений с помощью этих формул. Точные формулы могут либо охватывать совокупность всех решений заданного дифференциального уравнения (тогда говорят о его общем решении), либо представлять отдельные, частные решения, удовлетворяющие определенным свойствам: удовлетворяющие заданным начальным или граничным условиям, стационарные, периодические и т.д.

Решение, построенное аналитически, может иметь вид либо конечной формулы, либо суммы бесконечного ряда, либо интеграла. Такая форма решения может оказаться особенно полезной, если задача содержит параметры и нам интересует зависимость решения от них, либо если

требуется выяснить поведение решения, когда время или координаты стремятся к бесконечности (и потому применение численных методов не очень удобно). В последнем случае, а также если параметры задачи стремятся к нулю либо к бесконечности, от точных формул обычно переходят к *асимптотическим формулам*, дающим приближенное представление решения (говорят также – дающим асимптотическое решение), справедливое с точностью до членов, малых по сравнению с выписанными.

Приведем простой пример исследования точного решения. Например, вынужденные гармонические колебания системы

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + f \frac{dx}{dt} + kx = Ae^{i\omega t}, \quad (6.2)$$

Решение ищется в виде

$$x = Be^{i\omega t}. \quad (6.3)$$

Отсюда

$$|B| = \frac{A}{|m(i\omega)^2 + fi\omega + k|} = \frac{A}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2}}. \quad (6.4)$$

Пусть параметры A , k , m , f фиксированы, а ω произвольно. При каком значении ω эта амплитуда максимальна, то есть на какой частоте система (осциллятор) возбуждается сильнее всего? Для этого вычислим производную

$$\frac{d|B|}{d\omega} = A[(k - m\omega^2)^2 + f^2\omega^2]^{-3/2}(2km - f^2 - 2m^2\omega^2)\omega.$$

Мы видим, что если трение велико, точнее, если $f \geq \sqrt{2km}$, то $\frac{d|B|}{d\omega} < 0$ при всех $\omega > 0$ и потому максимум $|B|$ достигается при $\omega = 0$, то есть при статическом воздействии. Если же $f < \sqrt{2km}$, то при росте ω , начиная с $\omega = 0$, значение $|B|$ сначала растет, достигает максимума (“квазирезонанс”) при $\omega = \omega_{kvr} := \sqrt{km - f^2/2}/m$, равного

$$|B|_{max} = \frac{2mA}{f\sqrt{4km - f^2}}.$$

В частности, при $f \rightarrow 0$ с помощью следствия из формулы Тейлора

$$(1 + \alpha)^{\pm 1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}\alpha + \dots \quad (|\alpha| < 1)$$

получаем асимптотические формулы

$$\omega_{kvr} \sim \sqrt{\frac{k}{m}} \left(1 - \frac{f^2}{4km}\right), \quad |B|_{max} \sim \frac{2mA}{f\sqrt{4km}} = \frac{A}{f} \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (f \rightarrow 0)$$

(\sim означает асимптотическое равенство). При $\omega \rightarrow 0$ из (6.4) получаем асимптотическую формулу

$$|B| = \frac{A}{k} \left(1 + \frac{f^2 - 2km}{k^2} \omega^2 + \frac{m^2}{k^2} \omega^4\right)^{-1/2} \sim \frac{A}{k} \left(1 - \frac{f^2 - 2km}{k^2} \omega^2\right)$$

а при $\omega \rightarrow \infty$ – асимптотическую формулу

$$|B| \sim \frac{A}{m\omega^2}.$$

Эти асимптотические формулы наглядно описывают зависимость $|B|(\omega)$ при близких к экстремальным значениям параметров.

По поводу *численных* (приближенных методов) методов решения задач математического анализа мы уже говорили ранее. В частности, о грубом подразделении этих методов на непрерывные и дискретные. Отметим, что между этими двумя типами методов нет резкой грани. Так, непрерывные методы часто сопровождаются вычислением интегралов, которое осуществляется с помощью перехода к узловым значениям участвующих функций. Естественным, что подавляющее большинство современных численных методов ориентировано на применение компьютеров. Далее (в параграфе 6.4) мы рассмотрим один из самых популярных численных методов – проекционный (вариационный) метод решения (метод Галеркина).

Применение дискретного численного метода к решению дифференциального уравнения по существу означает, что из-за чисто вычислительных соображений мы заменяем исходную непрерывную математическую модель на новую, дискретную.

Отметим в заключение, что мы описывали здесь традиционные математические методы построения решений.

6.2 Асимптотические разложения

Асимптотические разложения заданных и искомых функций широко распространены при применении аналитических методов построения ре-

шения. Обычно – это разложения по целым положительным или отрицательным степеням независимой переменной либо параметра, входящего в уравнение. Такие разложения используются как для вычисления значений решения, так и для исследования его поведения (например, на бесконечности).

Будем здесь рассматривать разложение решения по степеням независимой переменной. При разложении вблизи конечного значения $t = t_0$ по положительным степеням $t - t_0$ часто применяются формула Тейлора или метод неопределенных коэффициентов. Приведем простой пример: пусть мы хотим получить разложение решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t^2, \quad x(0) = 1 \quad (6.5)$$

по степеням t . Для этого воспользуемся формулой Тейлора

$$x = x_0 + \frac{1}{1!} \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 t + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_0 t^2 + \dots, \quad (6.6)$$

где индекс нуль означает подстановку значения $t = 0$. Из начального условия и уравнения (6.5) имеем $x_0 = 1$,

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Дифференцируя обе части уравнения (6.5) по t , получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2x \frac{dx}{dt} - 2t, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 2 \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 2x \frac{d^2x}{dt^2} - 2,$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = 6 \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + 2x \frac{d^3x}{dt^3}, \dots,$$

откуда, подставляя значение $t = 0$, находим последовательно

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2, \quad \left(\frac{d^3x}{dt^3} \right)_0 = 4, \quad \left(\frac{d^4x}{dt^4} \right)_0 = 20, \dots$$

Подставляя эти значения в формулу (6.5), приходим к разложению

$$x = 1 + t + t^2 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{6}t^4 + \dots \quad (6.7)$$

При желании его нетрудно продолжить. Им удобно пользоваться при сравнительно малых $|t|$, например, при $|t| < 0,1$. При дальнейшем увеличении t уравнение надо решать численно с помощью какого-либо из дискретных методов. При некотором значении $t = T > 1$ происходит обострение решения – оно обращается в бесконечность. Это обнаруживается по переполнению ячеек в памяти компьютера; чтобы найти значение T , можно также, сделав в задаче (6.5) замену $x = 1/y$, подсчитать, при каком значении t функция $y(t)$ перейдет через значение $y = 0$.

Разложение (6.7) можно получить также по методу неопределенных коэффициентов. Для этого надо подставить выражение

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

в уравнение и начальное условие (6.5) и, раскрыв скобки, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях t . (проделать самостоятельно!)

Асимптотические разложения при $t \rightarrow \infty$ обычно имеют вид

$$x(t) \sim g(t) \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n} + \dots \right), \quad (6.8)$$

где g – некоторая известная функция, а ряд, стоящий в скобках, вообще говоря, *сходится асимптотически*. Последнее означает, что для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ при всех достаточно больших t имеет место неравенство

$$\left| x(t) - g(t) \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \dots + \frac{a_n}{t^n} \right) \right| \leq \frac{\text{const}}{t^{n+1}} |g(t)|$$

(постоянная в правой части зависит от n). При этом не требуется, чтобы ряд был сходящимся в обычном смысле, а если он сходится, то чтобы его сумма, умноженная на $g(t)$, равнялась $x(t)$; поэтому в формуле (6.8) применен не знак “=”, а знак “ \sim ” (который, правда, в математическом анализе применяется и в другом смысле). Тем не менее, оставляя у ряда лишь конечное число первых членов, мы получаем асимптотические формулы для $x(t)$, тем более точные при больших t , чем больше членов взято.

Приведем в качестве примера асимптотическое разложение так называемой функции ошибок:

$$\text{erf} x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-s^2} ds,$$

появляющейся во многих приложениях математики. Для этого проведем интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-s^2} ds &= \int_x^\infty \frac{-1}{2s} de^{-s^2} = \frac{-1}{2s} e^{-s^2} \Big|_x^\infty - \int_x^\infty e^{-s^2} \frac{1}{2s^2} ds = \\ &= \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \int_x^\infty e^{-s^2} \frac{1}{2s^2} ds,\end{aligned}$$

откуда

$$1 - \operatorname{erf} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - e^{x^2} \int_x^\infty e^{-s^2} \frac{1}{s^2} ds \right).$$

Повторение этой процедуры приводит к равенствам

$$\begin{aligned}1 - \operatorname{erf} x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + e^{x^2} \int_x^\infty e^{-s^2} \frac{1 \cdot 3}{2s^4} ds \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - e^{x^2} \int_x^\infty e^{-s^2} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 s^6} ds \right) = \dots\end{aligned}\quad (6.9)$$

С помощью правила Лопиталя нетрудно проверить, что последнее слагаемое внутри скобок при $x \rightarrow \infty$ имеет порядок очередной отрицательной степени x ; например,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{x^2} \int_x^\infty e^{-s^2} \frac{1}{s^6} ds : \frac{1}{x^7} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_x^\infty e^{-s^2} \frac{1}{s^6} ds : e^{-x^2} \frac{1}{x^7} \right) = \\ &= (0 : 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x^6} e^{-x^2} : (-2xe^{-x^2} x^{-7} - 7e^{-x^2} x^{-8}) \right] = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Таким образом, в пределе из (6.9) получается асимптотическое разложение

$$1 - \operatorname{erf} x \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^7} + \dots \right) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (6.10)$$

Применяя признак Даламбера сходимости рядов, легко проверить, что полученный ряд расходится для всех x . Однако это не мешает применению формулы (6.10) как для получения асимптотических формул для $\operatorname{erf} x$ (например,

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + O\left(\frac{1}{x^3} e^{-x^2}\right) \quad (x \rightarrow \infty),$$

так и для вычисления значений этой функции. Отметим, что, как это следует из равенства (6.9), обрывая ряд в (6.10) все дальше и дальше, мы получаем в правой части значения попеременно то большие, то меньшие левой части. Например, при $x = 2,5$ частичные суммы ряда последовательно равны 0,4; 0,37568; 0,372608; 0,3743283; 0,3730897; 0,3730462; 0,3744062; Мы видим, что эти суммы сначала как бы сходятся, но потом разбалтываются, и чем дальше, тем разбалтывание сильнее. Для последовательных пар из приведенных значений наиболее близки к друг другу 6-е и 7-е; руководствуясь ими, получаем значение $0,3736 \pm 0,006$; что приводит к результату

$$\operatorname{erf} 2,5 = 1 - \frac{1}{2,5\sqrt{\pi}} e^{-2,5^2} \cdot 0,3736 = 0,999837$$

с погрешностью, меньшей единицы последнего разряда.

Приведем еще один полезный пример. Пусть нас интересует ненулевое решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{t^2}{1+t^2}x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 1, \quad (6.11)$$

ограниченное при $t \rightarrow \infty$. Записав разложение при $t = 0$:

$$\frac{t^2}{1+t^2} = t^2 - t^4 + t^6 - t^8 + \dots, \quad (*)$$

можно с помощью метода неопределенных коэффициентов построить разложение решения уравнения с начальными данными (6.11):

$$x(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2a_2 + 6a_3t + \dots \quad (**)$$

Упражнение 1. Показать с помощью (*), (**), что решение (6.11) имеет вид:

$$x_1(t) = 1 + t + \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{20}t^5 - \frac{1}{30}t^6 - \frac{1}{42}t^7 + \frac{13}{672}t^8 + \frac{21}{1440}t^9 - \dots \quad (6.12)$$

С другой стороны, из разложения при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{t^2}{1+t^2} = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^6} + \dots, \quad (6.14)$$

мы видим, что при больших t уравнение (6.11) близко к уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0,$$

которое имеет линейно независимые решения e^t , e^{-t} . Это дает основание для того, чтобы искать асимптотическое разложение решения, ограниченного при $t \rightarrow \infty$, в форме

$$x = e^{-t} \left(a_0 + \frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \frac{a_3}{t^3} + \dots \right). \quad (6.15)$$

Подстановка этого разложения в уравнение (6.11) с учетом (6.14) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях t приводит к разложению искомого решения (проверьте! - **Упражнение 2**):

$$x = e^{-t} \left(1 - \frac{1}{2t} + \frac{3}{8t^2} - \frac{13}{48t^3} + \frac{145}{348t^4} \dots \right). \quad (6.16)$$

Отметим, что полученный ряд сходится к решению лишь асимптотически, так что более правильно в (6.16) писать знак \sim .

6.3 Решения типа бегущих и стоячих волн

Если при математическом описании какого-либо явления переменная величина зависит не только от временной, но и от пространственной переменной (хотя бы одной), то законы сохранения представляют собой уже уравнения математической физики, или уравнения в частных производных. В частности, если рассмотреть распространение звуковых (акустических), электромагнитных, сейсмических волн при некотором внешнем воздействии на среду, то в качестве математической модели выбираем волновое уравнение.

Поясним оба понятия на примере уравнения продольных упругих колебаний прямоугольного стержня при линейном законе упругости.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.17)$$

Это *одномерное волновое уравнение* – одно из основных уравнений математической физики, относится к гиперболическому типу. Оно описывает

волновые процессы в одномерных средах: колебание газа в трубке, поперечные колебания струны, грунтовой толщи и т.д.

Решением типа *типа бегущей волны* называется решение вида

$$u = f(x - ct), \quad (6.18)$$

где f – какая-либо функция одного аргумента, вместо которого подставлено выражение $x - ct$, $c = \text{const}$. Нетрудно понять смысл такого решения. Ведь при фиксированном значении t график функции $u = f(x - ct)$ получается из графика $u = f(x)$ с помощью параллельного переноса в положительном направлении оси x на ct (если $ct < 0$, то направление переноса отрицательно). Пусть теперь t меняется непрерывно, как это и происходит на самом деле. Тогда мы видим, что график зависимости (6.18) u от x , не меняя своей формы, перемещается как жесткий шаблон вдоль оси x , причем в момент t перемещение равно ct , то есть c есть скорость перемещения графика. Таким образом, бегущая волна проходит вдоль по стержню, не меняя своей формы, с постоянной скоростью c .

Чтобы найти такие решения, подставим выражение (6.18) в уравнение (6.17). При этом надо пользоваться правилом вычисления сложной функции: например, если $u = f(\xi)$, $\xi = x - ct$, то $u'_t = f'(\xi)\xi'_t = f'(x - ct)(-c)$; здесь f' – это производная функции f по ее единственному аргументу. Аналогично получаем $u''_{tt} = f''(x - ct)(-c)^2$, $u''_{xx} = f''(x - ct) \cdot 1^2$ и подстановка в (6.17) дает

$$c^2 f''(x - ct) = a^2 f''(x - ct), \quad (c^2 - a^2) f''(x - ct) = 0.$$

Так как равенство $f''(\xi) = 0$ приводит к неинтересному решению $f(\xi) = A\xi + B$ ($A, B = \text{const}$), то

$$c^2 - a^2 = 0, \quad c = \pm a,$$

тогда как функция f остается произвольной. Итак, вдоль стержня могут проходить бегущие волны любой формы в обоих направлениях со скоростью a .

Так как уравнение (6.17) линейное однородное, то сумма его решений всегда является решением того же уравнения. Поэтому сумма

$$u = f_1(x - at) + f_2(x + at) \quad (6.19)$$

волн, бегущих в положительном и отрицательном направлениях, является решением уравнения (6.17). Подобрав функции f_1, f_2 , можно представить любое решение этого уравнения, то есть формула (6.19) дает общее решение уравнения (6.17).

Решением типа *стоячей волны* называется решение вида

$$u = \varphi(t)\psi(x). \quad (6.20)$$

Смысл такого решения также легко уяснить. Если известен график функции $\psi(x)$ (*моды колебаний* – это собственные (свободные) гармонические колебания линейных динамических систем с постоянными параметрами, в которых отсутствуют как потери, так и приток извне колебательной энергии), то в каждый момент времени t график зависимости u от x получается из него растяжением вдоль оси u . Коэффициент растяжения $\varphi(t)$ меняется во времени, но точки, в которых $\psi(x) = 0$ (“узлы”), все время остаются на месте.

Для нахождения стоячих волн подставим выражение (6.20) в (6.17). Получим

$$\varphi''(t)\psi(x) = a^2\varphi(t)\psi''(x), \quad \frac{\varphi''(t)}{a^2\varphi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -\lambda. \quad (6.21)$$

Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\psi''(x) + \lambda\psi(x) = 0, \quad \varphi''(t) + a^2\lambda\varphi(t) = 0;$$

как говорят, мы произвели *разделение переменных*. Из первого уравнения получаем

$$\begin{aligned} \psi(x) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x = A_1 \sin(\sqrt{\lambda}x + \alpha), \\ A_1 &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \cos \alpha = \frac{C_1}{A_1}, \quad \sin \alpha = \frac{C_2}{A_1}. \end{aligned}$$

а из второго уравнения

$$\varphi(t) = A_2 \sin(a\sqrt{\lambda}t + \beta).$$

Обозначив $A := A_1 A_2$, приходим к общему виду решения уравнения (6.17) типа стоячей волны:

$$u = A \sin(\sqrt{\lambda}x + \alpha) \sin(a\sqrt{\lambda}t + \beta),$$

где параметры $A, \lambda(> 0), \alpha, \beta$ остаются произвольными.

Можно проверить, что если дроби в равенстве (6.21) положительны, то временной множитель $\varphi(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится либо к бесконечности либо к нулю. Действительно,

$$\varphi(t) = C_1 e^{a\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-a\sqrt{\lambda}t}.$$

Оба эти варианта противоречат закону сохранения полной энергии рассматриваемой колебательной системы.

Итак, мы рассмотрели методы аналитического исследования моделей. Перейдем к рассмотрению наиболее популярных численных методов, используемых в математическом моделировании. Все численные методы можно грубо подразделить на конечно-разностные и проекционные. О конечно-разностных методах мы говорили в пункте, касающийся дискретных моделей (метод Эйлера, пункт 3.2). Далее поговорим о проекционных методах.

6.4 Метод Галеркина. Проекционные методы

Термин *метод Галеркина* объединяет несколько родственных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. Мы приведем здесь один из наиболее простых вариантов на примере задачи

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}) \quad (a \leq x \leq b), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (6.21)$$

Для ее приближенного решения выберем какую-либо последовательность *координатных функций*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots (a \leq x \leq b). \quad (6.22)$$

то есть последовательность функций, удовлетворяющих соответствующим однородным краевым условиям

$$\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

и обладающих свойством *полноты*. Последнее означает, что любую функцию из достаточно широкого класса, удовлетворяющую указанным

однородным краевым условиям, можно разложить в ряд по функциям (6.22). Чаще всего полагают

$$\varphi_i(x) = x^{i-1}(x-a)(b-x) \quad \text{или} \quad \varphi_i(x) = \sin \frac{i\pi}{b-a}(x-a).$$

Кроме того, надо выбрать какую-нибудь функцию $\varphi_0(x)$, удовлетворяющую краевым условиям, указанным в (6.21), например,

$$\varphi_0(x) = y_a + (y_b - y_a) \frac{x-a}{b-a}$$

или

$$\varphi_0(x) = y_a + (y_b - y_a) \sin \frac{i\pi}{b-a}(x-a).$$

приближенное решение задачи (6.21) ищется в виде

$$y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x), \quad (6.23)$$

где значением $n \geq 1$ мы задаем, а постоянные C_1, C_2, \dots, C_n подбираем. Тогда краевые условия, указанные в (6.21), заведомо удовлетворяются, а при подстановке выражения (6.23) в дифференциальное уравнение получается невязка (это разность между левой и правой частями уравнения)

$$h_n(x; C_1, C_2, \dots, C_n) := \varphi_0'' + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i'' - f(x, \varphi_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i, \varphi_0' + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i').$$

С ее помощью получаем уравнения для определения C_1, C_2, \dots, C_n :

$$\int_a^b h_n(x; C_1, C_2, \dots, C_n) \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.24)$$

Эта система из n конечных уравнений с n неизвестными, которую можно решать известными нам методами. Особенно просто она решается, если краевая задача (6.21) линейна, так как тогда и система (6.24) линейная.

Рассмотрим в качестве примера краевую задачу

$$y'' + y = 1 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad (6.25)$$

точное решение которой $y_T = 1 - \cos x + (\operatorname{ctg} 1) \sin x$. При решении по методу Галеркина положим

$$\varphi_0(x) = x, \quad \varphi_i(x) = x^i(1-x) \quad (i = 1, 2, \dots). \quad n = 2,$$

то есть будем искать приближенное решение в виде

$$y_{\Pi} = x + C_1 x(1 - x) + C_2 x^2(1 - x).$$

Тогда невязка оказывается равной

$$h_2(x; C_1, C_2) = C_1(-2 + x - x^2) + C_2(2 - 6x + x^2 - x^3) - 1 + x.$$

Система уравнений после вычисления интегралов приобретает вид

$$-\frac{3}{10}C_1 - \frac{3}{20}C_2 - \frac{1}{12} = 0, \quad -\frac{3}{20}C_1 - \frac{13}{105}C_2 - \frac{1}{30} = 0$$

и имеет решение

$$C_1 = -\frac{134}{369} = -0,3631, \quad C_2 = \frac{7}{41} = 0,1707.$$

Таким образом, приближенное решение оказывается равным

$$y_{\Pi} = 0,6369x + 0,5338x^2 - 0,1707x^3.$$

Сравним значения точного и приближенного решений при $X = 0,5$:

$$y_T(0,5) = 0,4303, \quad y_{\Pi}(0,5) = 0,4304.$$

погрешность близка к 0,02%.

Отметим, что сейчас принято трактовать множество функций, заданных на одном и том же интервале, как пространство обобщенных вето-ров, а интеграл от произведения двух функций по данному интегралу – как скалярное произведение этих векторов. При таком подходе последовательность координатных функций трактуется как базис в рассматриваемом пространстве, а уравнения (6.24) означают приравнивание к нулю проекций невязки h_n на первые n векторов из этого базиса. Поэтому методы описанного типа называются *проекционными*.

Проекционным называется и метод *конечных элементов*, широко распространившийся за последние годы. Его мы также поясним на примере задачи (6.21). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей с помощью точек деления

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad (6.26)$$

и будем считать, что i -ый конечный элемент ($0 \leq i \leq n$) – это непрерывная функция $\varphi_i(x)$ ($a \leq x \leq b$), линейная на каждом интервале $[x_{j-1}, x_j]$,

причем $\varphi_i(x_i) = 1$, $\varphi_i(x_j) = 0$ ($j \neq i$). Тогда любую непрерывную функцию $y(x)$ ($a \leq x \leq b$), линейную на каждом интервале $[x_{j-1}, x_j]$, можно и притом единственным образом представить в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x); \quad (6.27)$$

для этого надо просто взять $C_i = y(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Замечание. Легко вывести уравнение $\varphi_i(x)$, как уравнения прямых, проходящих через две заданные точки (вообще говоря, это будут отрезки прямых, заключенные между x_{i-1} и x_{i+1}):

$$\varphi_0(x) = 1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \quad \varphi_1(x) = 1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{или} \quad \varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \dots$$

Если мы хотим, чтобы сумма (6.27) удовлетворяла краевым условиям из (6.21), то надо положить

$$C_0 = y_a, \quad C_n = y_b. \quad (6.28)$$

Остальные постоянные C_i находим из проекционного условия, аналогичного (6.24):

$$\int_a^b \left[\frac{d^2 y}{dx^2} - f(x, y, y') \right] \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (6.29)$$

Если раскрыть квадратные скобки и представить левую часть в виде разности двух интегралов, то при вычислении первого полезно провести интегрирование по частям. Подставляя значения производных и отбрасывая нулевые слагаемые, получим, обозначая $x_{j+1} - x_j = \Delta x_j$,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dy^2}{dx^2} \varphi_i(x) dx &= \frac{dy}{dx} \varphi_i(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dy}{dx} \varphi'_i(x) dx = \\ &= 0 - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[C_{i-1} \left(-\frac{1}{\Delta x_{i-1}} \right) + C_i \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \right] \frac{1}{\Delta x_{i-1}} dx - \\ &\quad - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[C_i \left(-\frac{1}{\Delta x_i} \right) + C_{i+1} \frac{1}{\Delta x_i} \right] \frac{1}{\Delta x_i} dx = \\ &= \frac{C_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} - C_i \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} - \frac{1}{\Delta x_i} \right) + \frac{C_{i+1}}{\Delta x_i}. \end{aligned}$$

Таким образом, из (6.29) мы получаем систему уравнений для нахождения C_1, C_2, \dots, C_{n-1} :

$$\begin{aligned} & \frac{C_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} - C_i \left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} - \frac{1}{\Delta x_i} \right) + \frac{C_{i+1}}{\Delta x_i} - \\ & - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \left(x, C_{i-1}\varphi_{i-1}(x) + C_i\varphi_i(x), \frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} \right) \varphi_i(x) dx - \\ & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f \left(x, C_i\varphi_i(x) + C_{i+1}\varphi_{i+1}(x), \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x_i} \right) \varphi_i(x) dx = 0 \\ & (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (6.30)$$

где $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$.

Применим для примера описанный метод к задаче (6.25), приняв $n = 5$, $x_i = 0, 2i$ ($i = 0, 1, \dots, 5$). Равенства (6.28) приобретают вид

$$\frac{C_{i-1}}{0,2} - \frac{2C_i}{0,2} + \frac{C_{i+1}}{0,2} + \frac{0,2C_{i-1}}{6} + \frac{0,2C_i}{3} - \frac{0,2}{2} + \frac{0,2C_1}{3} + \frac{0,2C_{i+1}}{6} - \frac{0,2}{2} = 0,$$

то есть после упрощений

$$30,2C_{i-1} - 59,2C_i + 30,2C_{i+1} = 1,2 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Решение этой системы по методу Гаусса с учетом значений C_0, C_5 приводит к значениям

$$C_1 = 0,1477, \quad C_2 = 0,3292, \quad C_3 = 0,5375, \quad C_4 = 0,7640.$$

В частности, приближенное значение решения при $x = 0,5$ получается равным 0,4333 с погрешностью 0,7%.

Конечно, в данном примере первый метод и проще второго и дает более высокую точность. Однако метод конечных элементов оказывается весьма эффективным при решении уравнений с частными производными, когда число пространственных переменных не менее двух, а область, в которой строится решение, имеет сложную форму. Пусть, например, область (D) имеет вид восьмиугольника, показанного на **рисунке**, а на ее границе (∂D) поставлены однородные условия первого рода: $u \Big|_{(\partial D)}$

задано. Произведем триангуляцию этой области, то есть разобьем ее на треугольники так, что любые два из них либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо общую сторону (штриховые линии). Занумеруем все вершины (их 50) и поставим каждой A_i из них в соответствии конечный элемент $\varphi_i(x, y)$. Это непрерывная функция, линейная в каждом треугольнике выбранной триангуляции и равная единице в точке A_i и нулю во всех прочих вершинах. На рисунке заштрихована область, в которой $\varphi_i(x, y)$ отлична от нуля (ее график напоминает шатер). Дальнейшее построение приближенного решения проходит аналогично тому, как в одномерном случае.

Сейчас метод конечных элементов имеет большое число вариантов, приспособленных к решению разнообразных задач. Все эти методы основаны на применении функций – “конечных элементов”, каждая из которых отлична от нуля лишь в небольшой области.

6.5 О применении компьютеров. Компьютерное и имитационное моделирование

Компьютерные вычислительные мощности превратились сейчас в повседневное орудие прикладной математики. Они не только повышают на много порядков скорость и точность вычислений для известных ранее классов задач, но и впервые сделали возможным решение огромного числа других задач. Однако компьютеры потребовали существенного изменения многих вычислительных методов и даже всей “вычислительной идеологии”.

Значительную роль приобрел вычислительный эксперимент. В ряде случаев вместо попытки аналитического исследования свойств решений оказалось более целесообразным выяснить эти свойства, построив решения с помощью компьютерных программ. Это относится, в частности, к решениям дифференциальных уравнений, включая свойства, связанные с асимптотическим поведением решений, например, с выяснением устойчивости.

Компьютерное моделирование – это процесс математического моделирования, выполняемый на компьютере, который предназначен для прогнозирования поведения или результатов реальной или физической

системы. Поскольку вычислительные системы позволяют проверить надежность выбранных математических моделей, компьютерное моделирование стало полезным инструментом для математического моделирования многих природных систем в физике, астрофизике, климатологии, химии, биологии и производстве, а также человеческих систем в экономике, психологии, социальные науки, здравоохранение и инженерия.

Компьютерное моделирование реализуется путем запуска компьютерных программ, которые могут быть либо небольшими, работающими почти мгновенно на небольших устройствах, либо крупномасштабными программами, которые работают часами или днями на сетевых группах компьютеров. Масштаб событий, моделируемых компьютерным моделированием, намного превосходит все возможное с использованием традиционного математического моделирования, основанного на бумаге и карандаше.

В 1997 году симуляция сражения в пустыне, когда одна сила вторглась в другую, включала моделирование 66 239 танков, грузовиков и других транспортных средств на имитируемой местности вокруг Кувейта с использованием нескольких суперкомпьютеров в рамках программы модернизации высокопроизводительных компьютеров Министерства обороны. Другие примеры включают модель деформации материала в 1 миллиард атомов; полное моделирование жизненного цикла *Mycoplasma genitalium* в 2012 г.; и проект Blue Brain в EPFL (Швейцария), начатый в мае 2005 года с целью создания первого компьютерного моделирования всего человеческого мозга, вплоть до молекулярного уровня.

Разновидностью вычислительного эксперимента является так называемое *имитационное моделирование*, применяемое для анализа поведения сложных экономических и т.п. задач, для которых математическую модель в виде системы уравнений даже записать затруднительно.

В качестве примера перестройки подходов, вызванной компьютерным моделированием, укажем на вычисление сумм числовых рядов. Ранее для этого широко применялись разнообразные искусственные преобразования, некоторые из них и сейчас не потеряли актуальности; однако при применении компьютеров нередко более эффективным оказывается непосредственное суммирование членов ряда. Но при этом, как и в других подобных случаях, весьма ответственным этапом является *подготовка задачи к программированию*, то есть выбор алгоритма, наиболее

эффективного для решения конкретной задачи.

Пусть мы хотим вычислить сумму бесконечного ряда

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots,$$

причем, понадеявшись на мощь компьютеров, не будем применять никаких ухищрений, а просто подсчитаем и сложим члены ряда, пока они не обратятся в машинный нуль. Однако на такой компьютерный расчет уйдет около часа. Описанная схема вычислений крайне нерациональна. Результат получится гораздо быстрее и точнее, если, например, просуммировать 10^4 первых членов ряда (это займет доли секунды), а остаток заменить по приближенной формуле

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots \approx \int_{n+\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{ds}{s^2} = \frac{2}{2n+1},$$

точность которой имеет порядок $0,1n^{-3}$.

В качестве еще одного примера неразумной и разумной организаций алгоритма приведем вычисление значения e^{-10} , которое с точностью до 10^{-7} равно $4,54 \cdot 10^{-5}$. Вычисление на калькуляторе по тейлоровскому разложению

$$e^{-10} = 1 - 10 + \frac{1}{2!} \cdot 10^2 - \frac{1}{3!} \cdot 10^3 + \dots$$

дает значение $1,112 \cdot 10^{-4}$, то есть ошибку в 140%! Причину этого нетрудно понять: хотя члены ряда в конечном счете стремятся к нулю, они перед этим успевают сильно возрасти, а так как вся сумма мала, то есть эти возросшие члены почти взаимно уничтожаются, то погрешности в них оставляют существенный вклад. Простая перестройка алгоритма в соответствии с формулой

$$e^{-10} = (e^{10})^{-1} = (1 + 10 + \frac{1}{2!}10^2 + \frac{1}{3!}10^3 + \dots)^{-1}$$

устраняет эту трудность и приводит к значению $4,57 \cdot 10^{-5}$ с погрешностью 0,7%.

Если решение математической задачи не сводится к указанию одного или небольшого набора чисел, то возникает еще *проблема представления результатов*, чтобы можно было их обзреть и ими пользоваться.

Такая проблема возникает, в частности, для задач, содержащих параметры. Приведем простой пример: пусть мы хотим составить таблицу, с помощью которой можно было бы решать полное кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (6.31)$$

при любых задаваемых коэффициентах a, b, c, d . Тогда, если допустить, что каждый из них может принимать 50 значений – а это не так уж много, – то всего получится $50^4 \approx 6 \cdot 10^6$ комбинаций этих значений. Средний компьютер для выдачи результатов потратит несколько часов непрерывной работы. Поэтому весьма актуальным является один из основных тезисов, неоднократно подчеркиваемый Р.Хеммингом в книге “Численные методы для научных работников и инженеров”: прежде чем решать задачу, подумай, что сделать с ее решением.

На самом деле положение с таблицей для решения уравнения (6.31) не такое уж печальное. Сделав подстановку $x = \alpha u + \beta$, получаем уравнение для u :

$$a\alpha^3 u^3 + (3a\alpha^2\beta + b\alpha^2)u^2 + (3a\alpha\beta^2 + 2b\alpha\beta + c\alpha)u + (a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d) = 0. \quad (6.32)$$

Выберем α, β так, чтобы между новыми коэффициентами имели место такие соотношения:

$$3a\alpha^2\beta + b\alpha^2 = 0, \quad a\alpha^3 = a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d.$$

Отсюда находим

$$\beta = -\frac{b}{3a}, \quad \alpha = q^{1/3}, \quad q := \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

При таких α, β уравнение (6.32) после деления на $a\alpha^3$ приобретает вид

$$u^3 + ru + 1 = 0, \quad r := \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \right) / \alpha^2. \quad (6.33)$$

Это уравнение содержит всего один параметр r . Таблицу решений уравнения (6.33) в зависимости от r уже нетрудно составить, даже если приписать r не 50, а 5000 значений. В результате решение уравнения (6.31) можно будет найти с помощью построенной таблицы $u(r)$, извлечения

корня (для чего потребуется еще одна таблица или калькулятор) и простых арифметических действий.

Заключая этот параграф о применении компьютеров к математическим моделям рассматриваемых нами типов, приведем слова В.И. Феофанова из книги “Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов”: “компьютерное моделирование, освобождая нас от многих ...обязанностей, не освобождает во всяком случае от двух: от необходимости владеть математическим аппаратом и творчески мыслить.”

7 Распространенные ошибки

7.1 О верификации модели

Проблема верификации, то есть выяснения ее адекватности, значительно выходит за рамки самоконтроля, но о ней нельзя упомянуть. Действительно ли, составляя уравнения и выбирая исходные данные, мы правильно учли все существенные для нас факторы, причем с необходимой точностью? Ответ на этот вопрос имеет кардинальное значение для проводимого исследования или расчета.

Если речь идет о модели, достаточно проверенной (апробированной) в некоторой области приложений, то вопрос о верификации обычно не возникает, мы полностью полагаемся на предшественников.

Основным подтверждением адекватности модели является хорошее соответствие расчетных данных с данными эксперимента или с данными из независимых теоретических исследований свойств моделируемого объекта. Последнее означает соответствие расчетных данных аналитическому решению этих же, но упрощенных уравнений. Правильность модели может подтверждаться и предсказанием с ее помощью какого-либо эффекта, относящегося к известному прошлому (“предсказанием прошлого по прерпрошлому”).

Если обнаружено существенное расхождение между рассчитанными и известными свойствами, то модель необходимо изменить. Это можно делать, либо привлекая дополнительные теоретические соображения, либо путем подгонки, либо с помощью комбинаций того и другого.

Рассмотрим в качестве примера процесс падения дождевой капли среднего размера с высота $H = 300$ м с нулевой начальной скоростью.

Применение “школьной формулы” формулы $s = gt^2/2$ дает время падения $T = \sqrt{2H/g} = 7,8$ с. Однако фактически капля падает около 40 с., что показывает неадекватность “школьной” модели в данных условиях. Причина неадекватности здесь ясна: не учтено сопротивление воздуха, которое в данной ситуации оказывает весьма существенное воздействие. Попробуем учесть это сопротивление. Известно, что сила сопротивления пропорциональна скорости движения капли. При этом предположении уравнение движения приобретает вид

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k \frac{dx}{dt}$$

(x отсчитывается вниз от точки начала падения), где m – масса капли, а $k > 0$ – коэффициент трения. Отсюда при нулевых начальных условиях получим решение

$$x = \frac{gm^2}{k^2} \left(\frac{k}{m}t - 1 + e^{-(k/m)t} \right) \quad (7.1)$$

и при $x = H$, $t = T$ получим соотношение:

$$H \left(\frac{k}{m} \right)^2 = g \left(\frac{k}{m}T - 1 + e^{-(k/m)T} \right). \quad (7.2)$$

Если k/m известно, то при заданном H отсюда можно найти T , решив трансцендентное уравнение

$$\alpha = 1 + \frac{H}{g} \left(\frac{k}{m} \right)^2 - e^{-\alpha}$$

и положив затем $T = \alpha m/k$.

Расчет по (7.1) показывает, что после 2-3 секунд падения скорость оказывается почти равной своему предельному значению 7,7 м/с, что является уже адекватным результатом.

7.2 Ошибки в выборе модели

Эти ошибки могут происходить от разнообразных причин. Самой очевидной является непонимание ситуации, приводящее к выбору неадекватных гипотез. Яркий пример привел английский астроном А. Эддингтон: рыбак, который ловил рыбу только одной сетью, решил, разглядывая свои

уловы, что наименьшее среди пойманных рыб – это самые маленькие рыбы в море; он допустил грубую ошибку, не учитывая важную особенность ситуации – определенные размер ячеек сети.

Сходный характер имеют случаи, когда не учитывается влияние факторов, которые по тем или иным причинам (например, из-за относительной малости характеризующих их параметров) считаются второстепенными, но на самом деле являются существенными, иногда даже определяющими для изучаемого свойства. Так, расчет, например, балки, лежащей на трех жестких опорах, был невозможен, пока не поняли, что математическая модель такой системы должна существенно учитывать возникающие в ней малые деформации.

Всякое сколько-нибудь существенно новое исследование требует выхода за рамки уже испытанной области и это влечет за собой некоторую возможность ошибки; разумный риск здесь необходим. Но нужно видеть слабые места в рассуждении, чтобы в случае необходимости произвести соответствующие коррективы или даже полностью изменить модель.

Неадекватность, особенно, количественная, математической модели может проистекать также от чрезмерных упрощений моделируемого объекта – упрощений геометрической формы, исходных зависимостей одних величин от других и т.п. Трудность состоит в том, что упрощения необходимы, но заранее не ясно, допустимы ли такие упрощения.

7.3 Влияние интерполяции и экстраполяции

Самые грубые задачи интерполяции возникают при подборе эмпирических формул по данным измерения. Выбор вида формулы (многочлен, степенная функция, экспонента и т.д.) должен опираться на теоретическое обсуждение различных свойств изучаемой зависимости. После этого выбора параметры (коэффициенты), входящие в формулу, можно найти по методу наименьших квадратов или как-либо иначе. При этом применяемый метод должен быть устойчивым относительно возможных ошибок измерения.

Приведем пример. Пусть измерение величины y в зависимости от величины x дала следующие результаты:

$$y(0, 0) = 0, 42; \quad y(0, 1) = 0, 50; \quad y(0, 2) = 0, 52; \quad y(1, 0) = 1, 25;$$

Как известно, по четырем значениям можно подобрать многочлен 3-ей степени, который точно принимает эти значения. В данном случае этот многочлен $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = 3,79x^3 - 4,14x^2 + 1,18x + 0,42,$$

а его график показан на рис. 24 штриховой линией (прилагается к лекции). Как видим, поведение этого многочлена при $0,2 < x < 1,0$ совершенно не вытекает в качественном отношении из заданных условий. Существенно большее доверие в данном примере вызывает многочлен первой степени $f_1(x)$, найденный по методу наименьших квадратов. Подсчет дает, что

$$f_1(x) = 0,84x + 0,40;$$

соответствующий график показан на рис. 24 сплошной линией.

Специального внимания требуют возможные особенности изучаемой зависимости – разрывы, острые экстремумы и т.п., которые могут оказаться определяющими, тогда как при “слепом” интерполировании их можно не заметить. (Например: пусть известно количество писем, доставленных в городе 15 ноября, 15 декабря, 15 янв и 15 фев.; можно ли с помощью простой интерполяции приблизительно определить количество писем, доставленных 31 декабря?) Это также делает существенным предварительный анализ реальной зависимости. Отметим, что во многих задачах оказывается удобным использовать в качестве интерполирующих функции, заданные не единой формулой, а двумя или несколькими формулами, действующими на различных интервалах изменения аргумента. Такой характер имеет, в частности, широко распространившийся в последние годы интерполирование тс помощью *сплайнов*.

Если при интерполяции обсуждение реального смысла исследуемой зависимости во многих случаях весьма полезно, то при экстраполяции такое обсуждение всегда является центральным, решающим элементом процедуры. *Экстраполяция, экстраполирование* – в математике и статистике особый тип аппроксимации, при котором функция аппроксимируется вне заданного интервала, а не между заданными значениями. Поэтому необоснованное распространение формул с исходного на существенно более широкие интервалы может приводить к вопиющим ошибкам. Особенно распространена формальная экстраполяция с помощью линейной функции или экспоненты.

7.4 Ошибки в выборе метода исследования

Одна из распространенных ошибок состоит в недостаточной целеустремленности исследования. Это касается как случаев, когда исследователь не представляет себе четко, что он собирается искать, так и случаев, когда такое представление имеется, но движение к цели происходит по слишком извилистому пути и при этом добывается слишком много информации (часто ненужной). Еще Лаплас сказал: чтобы выяснить, что после дождя трава будет мокрой, нет надобности вычислять траектории всех капель...

Для уменьшения объема информации часто бывает полезным прямой изучение и применение различных интегральных соотношений – таких, как закон сохранения энергии и т.п.

В качестве другой распространенной ошибки укажем на недостаточное внимание к доброкачественности исходных данных. Большой труд, потраченный на реализацию самого точного численного метода, будет в значительной мере обесценен, если воспользоваться неверными или чересчур неточными исходными данными.

Печальную роль может сыграть ошибка в выборе вычислительного алгоритма. Метод, корректный в “домашинном” понимании, может оказаться неустойчивым относительно ошибок округления, что довольно часто бывает при решении краевых задач на компьютере. Это может привести даже к неправильным выводам о свойствах моделируемого объекта, так как чисто вычислительный эффект можно принять за физический.

Задания для самостоятельной работы, который нужно сдать (тем, кто еще не сдал) до экзамена:

1. Модель “хищник-жертва”
2. Задача о траектории (упр. 2 на стр. 43)
3. Задача на модель международной торговли (определение соотношения доходов торгующих стран)
4. Дифференциальные уравнения в экономической динамике (стр.37, любое упражнение)
5. Метод Ньютона (упр. на стр. 55)
6. Асимптотические разложения (упр.2 на стр. 68, упр.1 решенное скидываю для образца)

Вопросы к экзамену

1. Понятие математической модели.
2. Общая схема построения модели.
3. Требования, предъявляемые к моделям.
4. Модель “хищник-жертва” (дать описание, входные и выходные параметры, методы решения).
5. Модель траектории ракеты (дать описание, входные и выходные параметры, методы решения).
6. Структурные и функциональные модели. Определения, примеры.
7. Дискретизация моделей. Глобальная ошибка дискретизации.
8. Об устойчивости (дать определение корректности задачи, рассмотреть на модельном уравнении условия устойчивости). Абсолютная и условная устойчивость конечно-разностной схемы.
9. Полиномиальная интерполяция (переход от дискретного к непрерывному). Метод множителей Лагранжа. Теорема об ошибке полиномиальной интерполяции. Матрица Вандермонда как один из способов интерполяции.
10. Представление Ньютона (было на практическом занятии).
11. Определение линейной и нелинейной модели.
12. Модель межотраслевого баланса. Структурная матрица
13. Модель международной торговли.
14. Коэффициент эластичности функции.
15. Средние и предельные значения функции.
16. Производственная функция.
17. Об упрощении и уточнении математических моделей.
18. Метод малого параметра.
19. Регулярные и сингулярные возмущения.
20. Методы построения и исследования решений.
21. Асимптотические разложения.
22. Решения типа бегущих и стоячих волн.
23. Метод Галеркина. Проекционные методы.
24. Компьютерное и имитационное моделирование.
25. Верификация модели. О распространенных ошибках в моделировании.