

04.03.2025 (Лекция 3)

3. ТЕМА: “КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ”

3.1 Корректность задачи

При постановке и решении любой задачи ставятся одни и те же вопросы:

- а) существует ли у нее решение (то есть задача разрешима)?
- б) если ответ на первый вопрос положительный, то единственно ли это решение?
- с) как зависит решение от входных данных?

Возможны два случая:

1). Задача поставлена *корректно* (задача корректна):

- задача разрешима при любых допустимых входных данных;
- имеется единственное решение;
- **решение задачи непрерывно зависит от входных данных (малому изменению входных данных соответствует малое изменение малое изменение решения)** — тогда говорят, что задача устойчива.

2). Задача *некорректна*, если не выполняется хотя бы одно из вышеперечисленных условий. Обычно не выполняется третье условие - малому изменению входных данных может соответствовать неограниченно большое изменение решения.

Примером корректной задачи может служить задача интегрирования, а примером некорректной задачи – дифференцирование.

Пример. Пусть по прямой движется частица единичной массы. Движение обусловлено тем, что на частицу действует сила $q(t)$, которая меняется во времени. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$ и имела нулевую скорость, то в соответствии с законом Ньютона движение частицы будет описываться функцией $u(t)$, удовлетворяющей задаче Коши:

Поставим задачу Коши для $u(t)$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = q(t), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dt}|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь $u(t)$ — положение частицы в момент времени t .

Задача определения $u(t)$ решается двойным интегрированием функции $q(t)$:

$$u(t) = \int_0^t \int_0^s q(\tau) d\tau + C_1 t + C_2$$

и является устойчивой при $u \in C^2[0, T]$, $q(t) \in C[0, T]$ (корректно поставленной).

Рассмотрим *обратную задачу*: требуется определить $q(t)$ по известной функции $u(t)$.

Покажем неустойчивость задачи определения $q(t)$. Пусть $u(t)$ — решение прямой задачи для некоторого $q(t)$. Рассмотрим следующие возмущения решения прямой задачи:

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n} \cos(nt).$$

Этим возмущениям соответствуют правые части

$$q_n(t) = q(t) - n \cos(nt),$$

т.к. $u''(t) = q(t)$.

Очевидно, что

$$\|u - u_n\|_{C[0, T]} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, а

$$\|q - q_n\|_{C[0, T]} \rightarrow \infty$$

при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, малое возмущение функции $u(t)$ соответствуют сколь угодно большому изменению функции $q(t)$.

3.2 Устойчивость задачи

Для изучения устойчивости дифференциального уравнения по начальным данным будем рассматривать модельное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad x > 0, \quad y(0) = y_0.$$

а именно, рассмотрим модель радиоактивного распада вещества

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad \lambda = \text{const} > 0, \quad x > 0, \quad y(0) = y_0. \quad (3)$$

Его решение $y(t) = y_0 e^{-\lambda x}$ убывает при $\lambda > 0$ и

$$|y(t)| \leq |y_0| \quad \text{при } \lambda \geq 0 \text{ для всех } t \geq 0, \quad (4)$$

т.е. уравнение (3) *устойчиво* при $\lambda \geq 0$, что соответствует условию

$$\frac{\partial f}{\partial y} \leq 0.$$

В этом случае при выполнении (4) малым изменениям начальных данных будет соответствовать малое изменение самого решения. Такие условия в дальнейшем мы будем называть *условием устойчивости*.

При дискретизации вводится естественное требование: для дискретных моделей, аппроксимирующих (приближающих с некоторой погрешностью) модельные уравнения, для корректности должен выполняться аналог неравенства (4):

$$|y_k| \leq |y_0|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Мы увидим ниже, что это не всегда выполняется.

Рассмотрим ряд примеров.

1) Явная схема Эйлера (когда правая часть, зависящая от y , проектируется в известный узел сетки):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_k = 0, \quad y_{k+1} = (1 - h\lambda)y_k. \quad (5)$$

Отсюда видно, что условие

$$|y_{k+1}| \leq |y_k| \leq \dots \leq |y_0| \quad (6)$$

выполнено при $|1 - h\lambda| \leq 1$ или $-1 \leq 1 - h\lambda \leq 1$, то есть при

$$h\lambda \leq 2.$$

Если, например, $h\lambda \geq 3$, то

$$\begin{aligned} |y_{k+1}| &= |h\lambda - 1||y_k| \geq 2|y_k| \geq \dots \geq 2^{k+1}|y_0|, \\ |y_k| &\geq 2^k|y_0| \rightarrow \infty \text{ при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Схема неустойчива, условие (6) не выполнено. Таким образом, в этом случае говорят, что явная схема Эйлера (5) *условно устойчива* с условием устойчивости $h \leq 2\lambda$, $\lambda > 0$.

2) Неявная схема Эйлера (когда правая часть, зависящая от y , проектируется в неизвестный узел сетки):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_{k+1} = 0, \quad y_{k+1} = \frac{1}{1 + h\lambda} y_k. \quad (7)$$

Так как $\frac{1}{1+h\lambda} \leq 1$ при любых $h\lambda \geq 0$, то говорят, что схема *безусловно устойчива*.

3) Схема с весами:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda(\sigma y_{k+1} + (1 - \sigma)y_k) = 0,$$

отсюда приводим к виду

$$y_{k+1} = qy_k.$$

Для выполнения условия $|y_{k+1}| \leq |y_k| \leq \dots \leq |y_0|$, то есть для выполнения требования устойчивости необходимо и достаточно, чтобы

$$|q| \leq 1, \quad q = \frac{1 - (1 - \sigma)h\lambda}{1 + \sigma h\lambda}.$$

Видим, что $|q| \leq 1$, если

$$-1 - \sigma h\lambda \leq 1 - (1 - \sigma)h\lambda \leq 1 + \sigma h\lambda$$

или

$$1 + h(\sigma - 1/2)\lambda \geq 0,$$

так что

$$1 + \sigma h\lambda \geq h\lambda/2 > 0.$$

Таким образом, схема с весами безусловно (или абсолютно) устойчива (при любых h) при $\sigma > 1/2$ и условно устойчива в случае $\sigma < 1/2$, если $h \leq \frac{1}{(1/2 - \sigma)\lambda}$.

11.03.2025 (Лекция 4)

4. ТЕМА: “ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ (ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ 1+1)”

До сих пор мы рассматривали либо:

- динамические (эволюционные) модели, не зависящие от пространства;
- стационарные модели, имеющие место в определенный момент времени и рассматривающие искомые величины в зависимости только от пространственной переменной.

4.1 Построение модели. Постановка корректной задачи

Построим одномерную модель продольных упругих колебаний стержня длины L , которые рассматриваются с течением времени в промежутке $[0, T]$.

Пусть ось x направлена вдоль стержня, $u(x, t)$ – смещение вдоль этой оси в момент t поперечного сечения, которое в свободном равновесном состоянии стержня имело абсциссу x . продольное начальное положение стержня.

При воздействии внешних сил возникает деформация ε , при этом $u(x, t)$ получает приращение $\Delta u(x, t)$ при изменении $x + \Delta x$, тогда относительное удлинение (деформация) будет в среднем по длине Δx :

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как процесс происходит во временном континууме неравномерно, то имеет место ускорение

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Согласно второму закону Ньютона, применяемому к элементу Δx :

$$ma = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + \Delta x, t) = \Delta F(x, t), \quad (1)$$

$m = \rho(x)S\Delta x$, S – площадь поперечного неоднородного сечения стержня (плотность зависит от x), F – действующие силы.

Пренебрегая силой трения, деформация порождает упругую силу F :

$$F(x, t) = S\sigma(\varepsilon), \quad (2)$$

$\sigma(\varepsilon)$ – упругое напряжение (сила, направленная противоположно силе внешнего давления).

По закону Гука

$$\sigma(\varepsilon) = k(x)\varepsilon, \quad (3)$$

$k(x)$ – коэффициент жесткости (модуль Юнга, приводится в специальных таблицах и зависит от материала стержня).

Таким образом, с учетом (2), (3)

$$F = Sk(x)\varepsilon.$$

В уравнении (1) с учетом вышесказанного имеем:

$$\rho(x)S\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + \Delta x, t) = \Delta F \rightarrow \rho(x)S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + \Delta x, t) = \frac{1}{\rho(x)S} \frac{1}{\Delta x} \Delta(Sk(x)\varepsilon) \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)S} \frac{1}{\Delta x} \Delta(Sk(x) \frac{\Delta u}{\Delta x})$$

Переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, получим математическую модель:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}). \quad (4)$$

Если $k(x), \rho(x)$ являются постоянными (стержень является однородным по всей длине), то из (4) следует классическое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5)$$

$$a^2 = \frac{k}{\rho} \rightarrow a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

называется *скоростью распространения упругих волн* (продольных колебаний). В общем случае

$$a^2(x) = \frac{k(x)}{\rho(x)}.$$

Добавляя к (4) или (5) действие внешней силы $f(x, t)$ по всей длине стержня, получаем модель с учетом внешнего воздействия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x, t). \quad (4')$$

Для получения единственного решения (4), необходимо дополнить модель начальными (задача Коши по времени) и граничными или краевыми условиями.

Пусть в начальный момент времени имеем (*задача Коши*):

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (6)$$

Граничные условия первого рода (носят название *условия Дирихле*)

$$u(0, t) = g(t), \quad u(L, t) = q(t). \quad (7)$$

Граничные условия второго рода (*задача Неймана*)

$$u_x(0, t) = G(t), \quad u_x(L, t) = Q(t). \quad (8)$$

Таким образом, корректная постановка задачи для моделирования волнового процесса будет выглядеть как решение уравнения (4') вместе с условиями (6)-(7) или (6), (8):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial u}{\partial x}) + f(x, t), & t \in [0, T], x \in [0, L], \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in [0, L] \\ u(0, t) = g(t), \quad u(L, t) = q(t), & t \in [0, T] \end{cases} \quad (9)$$

4.2 Переход к дискретной модели (конечно-разностный метод). Явный метод расчета

Введем равномерное разбиение прямоугольника $[0, L] \times [0, T]$ на сетку с узлами (x_j, t_m) , где $x_j = j * \Delta x$, $t_m = m * \Delta t$, $j = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Здесь $\Delta x = L/N$, $\Delta t = T/M$ – шаги разбиения отрезка $[0, L]$ и $[0, T]$ соответственно.

Тогда известные непрерывно-дифференцируемые функции $\rho(x)$, $k(x)$, $f(x)$ становятся известными дискретными функциями

$$\rho_j := \rho(x_j) = \rho(j * \Delta x),$$

$$k_j := k(j * \Delta x),$$

$$f_j^m := f(j * \Delta x, m * \Delta t).$$

Искомой величиной в дискретной задаче будет двумерный массив

$$u_j^m \approx u(x_j, t_m)$$

Для дискретизации основного уравнения перепишем его, раскрывая производную произведения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k'(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (4'')$$

Для дискретизации частных производных воспользуемся формулой Тейлора аналогично тому, как это было для обычных производных, например, для дискретизации второй производной по x :

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2!}u_{xx}(x, t)(\Delta x)^2 \\ &+ \frac{1}{3!}u_{xxx}(x, t)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u(x - \Delta x, t) &= u(x, t) - u_x(x, t)\Delta x + \frac{1}{2!}u_{xx}(x, t)(\Delta x)^2 \\ &- \frac{1}{3!}u_{xxx}(x, t)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \quad (11)$$

Складывая равенства (10) и (11), получим

$$u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) = 2u(x, t) + u_{xx}(x, t)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^4).$$

Отсюда, разделив на $(\Delta x)^2$, получаем конечно-разностную аппроксимацию $u_{xx}(x, t)$ с порядком точности $O((\Delta x)^2)$:

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2),$$

$$u_{xx}(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, M} \quad (12)$$

Аналогично, вторая производная по времени

$$u_{tt}(x_j, t_m) \approx \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2}, \quad j = \overline{0, N}, \quad k = \overline{1, M-1} \quad (13)$$

Первая производная по x может быть заменена на правую (14a), левую (14b) и центральную разности (14c) соответственно:

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - u_j^m}{\Delta x}, \quad (14a)$$

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x}, \quad (14b)$$

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x}, \quad (14c)$$

Например, выбирая центральную разность (14c), уравнение (4'') заменяется на дискретный аналог с помощью (12) и (13):

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} \\ & + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + f(x_j, t_m), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Начальные условия в дискретном случае будут выглядеть:

$$u_j^0 = g(t_j), \quad \frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = q(t_j) \rightarrow u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N} \quad (16)$$

граничные условия Дирихле:

$$u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}, \quad (17)$$

граничные условия Неймана:

$$\frac{u_1^m - u_0^m}{\Delta x} = G(t_m), \quad \frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{\Delta x} = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}, \quad (18)$$

Заметим, что в уравнении (15) в расчете участвует пять точек $u_j^m, u_{j-1}^m, u_{j+1}^m, u_j^{m-1}, u_j^{m+1}$. На первом шаге благодаря начальным условиям, оказываются известными значения 4-х значений на $m-1, m$ временном слое,

а неизвестной является из них одна точка u_j^{m+1} . Выражая ее явно из (15), мы получим рекуррентную формулу для расчета смещения в точке (x_j, t_{m+1}) :

$$u_j^{m+1} = \left(2 - 2 \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right) u_j^m - u_j^{m-1} + \dots \quad (19)$$

здесь самостоятельно дописать!

Определение 1. Если в дискретной модели пространственные производные по x берутся на известном временном слое m , то такой расчетный метод называется *явным*.

Определение 2. Если в дискретной модели пространственные производные по x берутся на неизвестном временном слое $m + 1$, то такой расчетный метод называется *неявным*.

Явный метод расчета обладает одним недостатком: он условно устойчив. Иначе говоря, не при всяких шагах дискретизации $\Delta t, \Delta x$ он работает. То есть метод чувствителен к размерности массива $M \times N$. Условием устойчивости здесь является *условие Куранта*:

$$\left| 2 - 2 \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right| \leq 1$$

19.03.2025 (Лекция 5)

4.3 Неявный метод расчета

Обобщая выводы из предыдущего параграфа дискретная задача для **явного метода** имеет вид (граничные условия Дирихле)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + \\ \quad + f(x_j, t_m), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \\ u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}. \end{array} \right. \quad (20)$$

Тогда, используя *Определение 2* задача для **неявного метода** будет иметь вид

$$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} + f(x_j, t_m), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}. \quad (21)$$

Начальные и граничные условия остаются без изменения, то есть такие же, как в (20).

В уравнении (21) неизвестными являются три точки u_{j+1}^{m+1} , u_j^{m+1} , u_{j-1}^{m+1} . То есть матрица для неизвестных получается трехдиагональная. Перепишем (21), выделяя коэффициенты при этих трех неизвестных:

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j-1}^{m+1} - \left(\frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) u_j^{m+1} + \left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j+1}^{m+1} = \frac{u_j^{m-1} - 2u_j^m}{(\Delta t)^2} - f(x_j, t_m). \quad (22)$$

Введя обозначение

$$a_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad b_j = \frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2},$$

$$c_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad \tilde{f}_j^m = \frac{u_j^{m-1} - 2u_j^m}{(\Delta t)^2} - f(x_j, t_m),$$

получим задачу для неявного метода

$$\begin{cases} a_j u_{j-1}^{m+1} - b_j u_j^{m+1} + c_j u_{j+1}^{m+1} = \tilde{f}, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \\ u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}. \end{cases} \quad (23)$$

Метод прогонки заключается в представлении (гипотезе), что

$$u_j^{m+1} = A_{j+1} u_{j+1}^{m+1} + B_{j+1}, \quad j = 0, \dots, N-1; m = 0, \dots, M-1. \quad (24)$$

На первом этапе (прямой ход) определяются коэффициенты

$$A_{j+1} = \frac{c_j}{b_j - A_j a_j}, \quad B_{j+1} = \frac{a_j B_j - \tilde{f}}{b_j - A_j a_j}. \quad (25)$$

На втором этапе обратный ход представляет равенство (24).

5. ТЕМА: “МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ИЛИ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЕЩЕСТВА (ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ) 1+1”

Рассмотрим, какое уравнение возникает в качестве математической модели распространения тепла в стержне. Рассмотрим тонкий стержень, вытянутый вдоль оси x , как показано на рис.1. Мы предполагаем, что стержень полностью изолирован, за исключением, может быть, концов, и поток тепла может распространяться только в направлении x (т.е. у нас одномерная модель).

5.1 Вывод уравнения

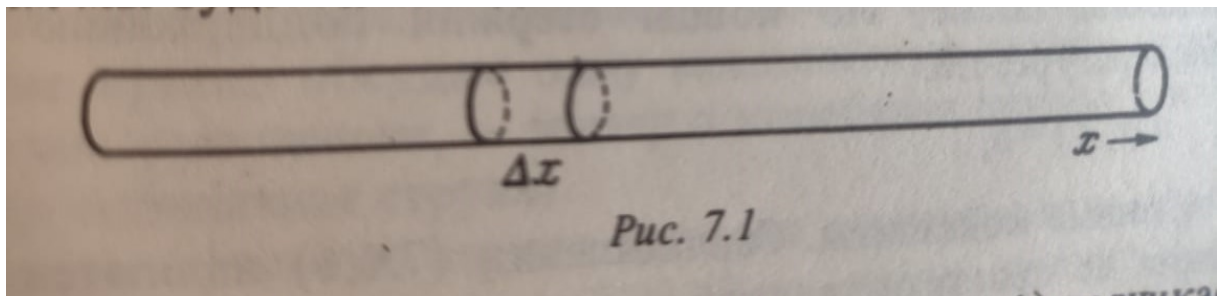


Рис. 1:

Пусть $u(x, t)$ – температура стержня (в кельвинах) длиной L в точке x в момент времени t и a – площадь поперечного сечения стержня. Из элементарной физики известно, что количество тепла, которое протекает в единицу времени через сечение, перпендикулярное оси стержня есть $-kau_x$, где $k > 0$ – коэффициент теплопроводности. Таким образом, если градиент температуры u_x в данном сечении отрицателен, то есть температура слева выше, чем справа, то в полном соответствии с интуитивными представлениями тепло через это сечение будет течь слева направо. След-но, если мы рассмотрим элемент стержня длины Δx , то в единицу времени в этот элемент через сечение x втекает количество тепла, равное

$$(-kau_x)|_x,$$

и вытекает через сечение $x + \Delta x$ количество тепла, равное

$$(-kau_x)|_{x+\Delta x},$$

то есть количество тепла в элементе изменяется на

$$(-kau_x)|_x - (-kau_x)|_{x+\Delta x}. \quad (1)$$

С другой стороны, из элементарной физики также известно, что количество тепла, которым обладает элемент, пропорционально массе элемента и его температуре; более точно, оно равно

$$sa\Delta x\rho u,$$

где s – удельная теплоемкость материала (это физическая величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо передать веществу массой 1 кг для того, чтобы его температура изменилась на 1°C). Другими словами, это способность вещества поглощать и отдавать тепло); ρ – плотность.

Из этого следует, что производная по времени от количества тепла в элементе равна (1):

$$sa\Delta x\rho u_t = (kau_x)|_{x+\Delta x} - (kau_x)|_x.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получим

$$u_t = \frac{1}{s\rho}(ku_x)_x. \quad (2)$$

Если k не зависит от x , то это уравнение сводится к классическому уравнению теплопроводности:

$$u_t = \frac{k}{s\rho}u_{xx} =: cu_{xx}. \quad (3)$$

То есть производная от температуры по времени пропорциональна второй производной от температуры по пространственной переменной.

Далее, как это бывает в теории дифференциальных уравнений, необходимо задать начальные и (или) граничные условия. Посмотрим, какие условия мы можем наложить на решение уравнений теплопроводности в задаче о стержне.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ нам известно распределение $g(x)$ температуры в стержне.

Предположим также, что концы стержня поддерживаются при постоянной температуре, то есть

$$u(0, t) = \alpha, \quad u(L, t) = \beta, \quad (4)$$

где α, β – заданные константы. Соотношения (4) являются граничными условиями по переменной x .

В качестве начального условия мы используем заданное начальное распределение температуры

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5)$$

Таким образом, приходим к следующей физической формулировке задачи:

Имеется стержень, концы которого поддерживаются при фиксированных температурах α и β . Считая начальное распределение температуры вдоль стержня известным, требуется найти температуру любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$.

Вывод: математической моделью этой проблемы служит дифференциальное уравнение в частных производных (2) или (3) с граничными условиями (4) и начальным условием (5).

Некоторые варианты этой постановки задачи можно моделировать, меняя граничные условия или само уравнение. Если, например, правый конец стержня будет теплоизолирован, то через этот конец тепло теряться не будет, поток обратиться в нуль:

$$u(0, t) = \alpha, \quad u_x(L, t) = 0, \quad (6)$$

Уравнение (2) или (3) служит также математической моделью и для целого ряда других физических явлений, как, например, диффузия газа. В этом случае $u(x, t)$ есть концентрация газа.

26.03.2025 (Лекция 6)

5.2 Переход к дискретной модели (конечно-разностный метод). Явный метод расчета

Введем равномерное разбиение прямоугольника $[0, L] \times [0, T]$ на сетку с узлами (x_j, t_m) , где $x_j = j * \Delta x$, $t_m = m * \Delta t$, $j = 1, 2, \dots, N$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Здесь $\Delta x = L/N$, $\Delta t = T/M$ – шаги разбиения отрезка $[0, L]$ и $[0, T]$ соответственно.

Тогда известные непрерывно-дифференцируемые функции $\rho(x)$, $k(x)$, $f(x)$ становятся известными дискретными функциями

$$\rho_j := \rho(x_j) = \rho(j * \Delta x),$$

$$s_j := s(x_j) = s(j * \Delta x),$$

$$k_j := k(j * \Delta x),$$

$$f_j^m := f(j * \Delta x, m * \Delta t).$$

Искомой величиной в дискретной задаче будет двумерный массив

$$u_j^m : \approx u(x_j, t_m)$$

Для дискретизации основного уравнения перепишем его, раскрывая производную произведения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{s(x)} \left[\frac{k'(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + f(x, t). \quad (7)$$

Выбирая центральную разность (14с) для первой производной по x и правую разность для производной по t уравнение (7) заменяется на дискретный аналог:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} &= \frac{1}{s_j} \left[\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} \right. \\ &\left. + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} \right] + f(x_j, t_m), j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Начальные условия в дискретном случае будут выглядеть:

$$u_j^0 = g(t_j), j = \overline{0, N} \quad (9)$$

граничные условия Дирихле (если концы подвергаются нагреву):

$$u_0^m = \alpha(t_m), \quad u_N^m = \beta(t_m), m = \overline{0, M}, \quad (10)$$

граничные условия Неймана (если концы стержня теплоизолированы):

$$\frac{u_1^m - u_0^m}{\Delta x} = 0, \quad \frac{u_N^m - u_{N-1}^m}{\Delta x} = 0, m = \overline{0, M}, \quad (11)$$

Задача для дискретной функции u_j^m (8)-(11) аппроксимирует исходную задачу (2)-(6) с порядком $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$. Для волнового уравнения порядок аппроксимации $O((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$.

Заметим, что в уравнении (8) в расчете участвуют четыре точки u_j^m , u_{j-1}^m , u_{j+1}^m , u_j^{m+1} . На первом шаге благодаря начальным условиям, оказываются известными значения четыре значения на m временном слое, а неизвестной является из них одна точка u_j^{m+1} . Выражая ее явно из (8), мы получим рекуррентную формулу для расчета смещения в точке (x_j, t_{m+1}) :

$$u_j^{m+1} = \left(1 - 2 \frac{k(x_j)}{s_j \rho(x_j)} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) u_j^m + \dots \quad (12)$$

здесь самостоятельно дописать!

Условием устойчивости здесь является *условие Куранта*:

$$\left|1 - 2 \frac{k(x_j)}{s_j \rho(x_j)} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right| \leq 1$$

5.3 Неявный метод расчета

Дискретная задача для **неявного метода** имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \frac{1}{s_j} \left[\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} \right] \\ \quad + f(x_j, t_m), j = \overline{1, N-1}, k = \overline{1, M-1}, \\ \\ u_j^0 = g(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \text{ - начальное условие} \\ \\ u_0^m = \alpha(t_m), \quad u_N^m = \beta(t_m), \quad m = \overline{0, M} \text{ - условия нагрева концов,} \\ \text{или} \\ \frac{u_1^{m+1} - u_0^{m+1}}{\Delta x} = 0, \quad \frac{u_N^{m+1} - u_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} = 0, \text{ - условие теплоизоляции} \end{array} \right. \quad (13)$$

В уравнении (13) неизвестными являются три точки u_{j+1}^{m+1} , u_j^{m+1} , u_{j-1}^{m+1} . То есть матрица для неизвестных получается трехдиагональная. Перепишем (13), выделяя коэффициенты при этих трех неизвестных:

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j-1}^{m+1} - \left(\frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{\Delta t} \right) u_j^{m+1} +$$

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x} \right) u_{j+1}^{m+1} = \frac{-s_j u_j^m}{\Delta t} - s_j f(x_j, t_m). \quad (14)$$

Введя обозначение

$$a_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad b_j = \frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2},$$

$$c_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}, \quad \tilde{f}_j^m = \frac{-s_j u_j^m}{(\Delta t)^2} - s_j f(x_j, t_m),$$

получим задачу для неявного метода

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j u_{j-1}^{m+1} - b_j u_j^{m+1} + c_j u_{j+1}^{m+1} = \tilde{f}, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \text{ - начальные условия,} \\ \text{условия нагрева концов:} \\ u_0^{m+1} = \alpha(t_{m+1}) =: \alpha_{m+1}, \quad u_N^{m+1} = \beta(t_{m+1}) =: \beta_{m+1}, \quad m = \overline{0, M-1}, \\ \text{или} \\ \frac{u_1^{m+1} - u_0^{m+1}}{\Delta x} = 0, \quad \frac{u_N^{m+1} - u_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} = 0, \text{ - условие теплоизоляции} \end{array} \right. \quad (14)$$

Метод прогонки заключается в представлении (гипотезе), что

$$u_j^{m+1} = A_{j+1} u_{j+1}^{m+1} + B_{j+1}, \quad j = 0, \dots, N-1; m = 0, \dots, M-1. \quad (15)$$

На первом этапе (прямой ход) определяются коэффициенты

$$A_{j+1} = \frac{c_j}{b_j - A_j a_j}, \quad B_{j+1} = \frac{a_j B_j - \tilde{f}}{b_j - A_j a_j}. \quad (16)$$

На втором этапе обратный ход представляет равенство (15).

В зависимости от того, как ставятся граничные условия (нагреваются или наоборот теплоизолированы), начальные значения A_1, B_1 задаются соответственно:

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \alpha_{m+1} \text{ нагрев}$$

или

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 0 \text{ теплоизоляция,}$$

так как $u_0^{m+1} = u_1^{m+1}$.

То есть для задания A_1, B_1 берем граничные условия на левом конце.

Граничные условия на правом конце используем для задания u_N^{m+1} , которое необходимо знать перед выполнением обратного хода (15). Здесь также в зависимости от того, нагреваются ли концы либо теплоизолированы, мы задаем u_N^{m+1} соответственно

$$u_N^{m+1} = \beta_{m+1}, \text{ нагрев}$$

или для случая теплоизоляции, решая систему из двух уравнений

$$u_{N-1}^{m+1} = A_N u_N^{m+1} + B_N,$$

$$\frac{u_N^{m+1} - u_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} = 0,$$

получаем

$$u_N^{m+1} = \frac{B_N}{1 - A_N}.$$

Примеры задания 5.

1. Имеется неоднородный стержень с коэффициентом температуропроводности $k(x)$ и плотностью $\rho(x)$, концы которого нагреваются по закону (изменение температуры по времени) $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Считая начальное в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня известным и равным $g(x)$, требуется найти температуру и построить ее график для любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$. Считать удельную теплоемкость заданной величиной $s(x)$.

2. Имеется неоднородный стержень с коэффициентом температуропроводности $k(x)$ и плотностью $\rho(x)$, концы которого теплоизолированы. Считая начальное в момент времени $t = 0$ распределение температуры вдоль стержня известным и равным $g(x)$, требуется найти температуру и построить ее график любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$. Считать удельную теплоемкость заданной величиной $s(x)$.

02.04.2025 (Лекция 7)

6. ТЕМА: “МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ВОЛНЫ ПРОРЫВА В ГОРНОМ ВОДОХРАНИЛИЩЕ”

6.1 Основные понятия гидравлики

Определение 1. *Линия тока* – это линия, проведенная через точки движения жидкости таким образом, что в каждой из этих точек вектор скорости \vec{v} направлен по касательной в момент времени t .

Определение 2. *Гидродинамическое давление* – это внутреннее давление, развивающееся при движении жидкости.

Определение 3. *Установившееся движение жидкости* – это такое движение, при котором скорость потока жидкости \vec{v} и гидродинамическое давление p в любой точке **не** изменяются с течением времени, а зависят только от положения в потоке жидкости (то есть могут быть функциями только от пространственных координат или константами вообще).

В противном случае течение называется *неустановившимся*.

Например, течение жидкости в реке или в трубе, канале – установившееся. Но, если будет осуществляться приток в русло при интенсивном снеготаянии или дождевых осадках, то прогноз изменения объема жидкости, а также ее скорости по времен – актуальная проблема экологического характера.

Определение 4. Если плотность жидкости $\rho = const$, то жидкость называется *идеальной несжимаемой*.

Определение 5. Сечение потока жидкости, перпендикулярное линиям тока, называется *живым сечением* и обозначается w .

Определение 6. Величина $Q = \frac{V}{t}$, где V – объем жидкости, протекаемый через живое сечение за время t , называется *средним расходом жидкости*. Если $V = V(t)$, то $Q(t) = V'(t)$ – мгновенный расход.

Можно вычислять средний расход по другой формуле

$$Q = v \cdot w.$$

Закон сохранения массы для средних величин:

$$Q = const, \quad w_1 v_1 = w_2 v_2$$

Различают два вида естественных русел: призматическое и непризматическое.

Определение 7. *Призматическое русло* – это такое русло, форма и размеры которого постоянны вдоль всего потока. В противном случае русло *непризматическое*.

6.2 Гидродинамическая постановка задачи

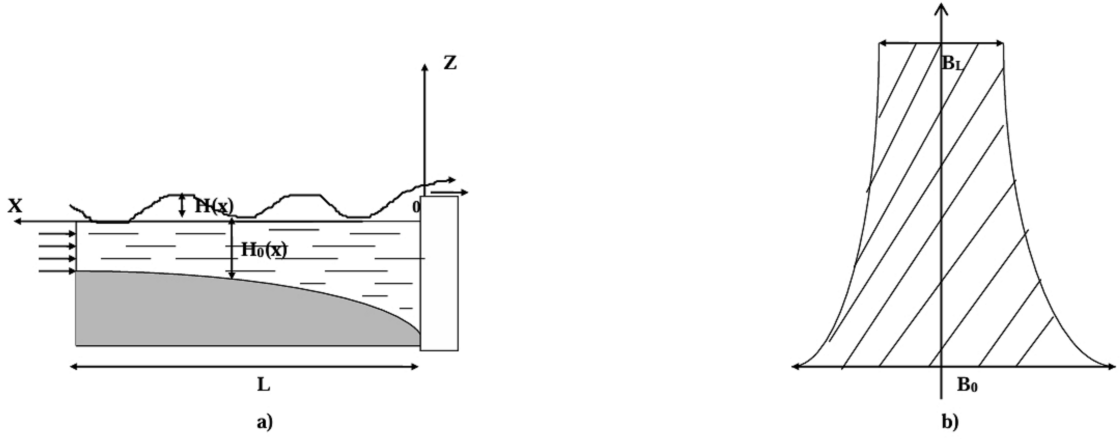


Рис. 2:

Предположим, что в прямоугольной системе координат $xoyz$ часть пространства, ограниченная условиями $0 \leq x \leq L$, $-B(x)/2 \leq y \leq B(x)/2$, $-H_0(x) \leq z \leq 0$ и заполненная водой, представляет горное водохранилище непризматического очертания в плане и с переменной в продольном направлении глубиной $H_0(x)$. В створе $x = 0$ расположена плотина, $B(x)$ – представляет переменную ширину водохранилища.

Рассмотрим волновое движение воды, вызванное тем, что с берега $x = L$ в водохранилище вторгся обвально-оползневый массив или поток селевого либо лавинного характера. В линейном приближении теории мелкой воды волновое движение описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (1)$$

$$B \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (B H_0 v) = 0, \quad (2)$$

где $v(x, t)$ – средняя по ширине каньона скорость движения воды, $B = B(x)$ – ширина каньона, $H_0(x)$ – глубина воды в водохранилище при невозмущенном состоянии, $H(x, t)$ – возмущение глубины в результате вторжения с берега $x = L$.

Введем функцию $\phi = \phi(x, t)$, подобную потенциалу скорости, следующим образом

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x}, H = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (3)$$

Легко заметить, что дифференциальное уравнение (1) относительно функции $\phi(x, t)$ превращается в тождество, а уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - g H_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - g \left[\frac{dH_0}{dx} + H_0(x) \frac{1}{B(x)} \frac{dB}{dx} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи запишутся следующим образом:

$$\phi(x, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(L, t) = \tilde{v}(t), \quad (6)$$

где $\tilde{v}(t)$ – скорость вторжения.

Таким образом, модель представляет начально-краевую задачу (4)-(6) для дифференциальных уравнений теории «мелкой» воды в линейном приближении. В дифференциальном уравнении (4) коэффициенты представляют переменные величины и по этой причине его решение для произвольных функций $H_0(x)$ и $B(x)$ связано со значительными математическими трудностями. Но, если представить очертания водохранилища математическими функциями, то вопрос аналитического решения решается эффективно.

К примеру, ширина водохранилища аппроксимируется экспоненциальной функцией вида

$$B(x) = B_0 e^{sx}. \quad (7)$$

Скорость вторжения представим в виде функции Хевисайда

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v_0, & 0 < t < t_0, \\ 0, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (8)$$

6.3 Аналитическое исследование математической модели

Вместо независимой переменной x введем новую переменную ξ с помощью следующей подстановки (преобразование годографа)

$$\xi = \int \frac{dx}{\sqrt{gH_0(x)}}. \quad (9)$$

При такой подстановке начально-краевая задача (4)-(6) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \left[gH_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{qH_0}} \right) + \sqrt{\frac{g}{H_0}} \frac{dH_0}{dx} + \sqrt{gH_0} \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \right] \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\phi(\xi, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\xi, 0) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(L_1, t) = \sqrt{gH_0(L)} \tilde{v}(t), \quad (12)$$

где L_1 – значение длины водохранилища в системе координат (ξ, t) .

Далее, для упрощения в уравнении (10) коэффициент при производной первого порядка приравняем к постоянной величине:

$$gH_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{qH_0}} \right) + \sqrt{\frac{g}{H_0}} \frac{dH_0}{dx} + \sqrt{gH_0} \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} =: c_1. \quad (13)$$

Интегрируя с учетом (7) дифференциальное уравнение (13), получим

$$H_0(x) = \left(\frac{C_1}{s\sqrt{g}} + C_2 e^{-sx} \right)^2. \quad (14)$$

Постоянные интегрирования 1 и 2 можно подобрать так, чтобы выполнялись следующие условия на границах водохранилищ

$$H_0(x)|_{x=0} = H_0, \quad H_0(x)|_{x=L} = H_1.$$

В результате получим

$$H_0(x) = \left(\sqrt{H_0} - \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{1 - e^{-sL}} + \frac{(\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1})e^{-sx}}{1 - e^{-sL}} \right)^2. \quad (15)$$

Итак, при задании ширины и глубины водоема в виде функции, представленных в выражениях (7) и (15), коэффициенты дифференциального уравнения (10) становятся постоянными, и начально-краевая задача

решается аналитически, а уравнение волновой поверхности получается в явном виде. При переходе к пределу при $s \rightarrow 0$ в выражениях (7) и (15) ширина водоема становится постоянной, а глубина – параболической функцией второго порядка

$$H_0(x) = \left(\sqrt{H_0} - \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{L} - \sqrt{H_0} \right)^2.$$

Итак, для (10) имеем

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - c_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{gH_0}s - \sqrt{gs} \frac{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}{1 - e^{-sL}}, \\ \xi(x) &= -\frac{A}{\sqrt{gs}(\sqrt{H_0}A - 1)} \ln \left| \frac{\sqrt{H_0}Ae^{-sx}}{\sqrt{H_0}A - 1 + e^{-sx}} \right|, \\ A &= \frac{1 - e^{-sL}}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H_1}}, \quad L_1 = \xi(L). \end{aligned}$$

Применим к равенствам (11), (12), (16) подстановку:

$$\phi(\xi, t) = \Phi(\xi, t) \exp(-c_1 \xi/2). \quad (17)$$

Начально-краевая задача для функции $\Phi(\xi, t)$ запишется следующим образом

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{c_1^2}{4} \Phi = 0, \quad (18)$$

$$\Phi|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{c_1}{2} \Phi \right) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{c_1}{2} \Phi \right) \Big|_{\xi=L_1} = \sqrt{gH_1} \tilde{v}(t) e^{c_1 L_1/2}. \quad (20)$$

Далее, для упрощения граничных условий введем функцию $\Psi(\xi, t)$

$$\Psi(\xi, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - c_1 \frac{\Phi}{2}. \quad (21)$$

Тогда из (18) имеем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{c_1^2}{4} \Psi = 0. \quad (22)$$

Начальные и граничные условия (19) и (20) относительно функции Ψ запишутся следующим образом:

$$\Psi \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (23)$$

$$\Psi \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \Psi \Big|_{\xi=L_1} = \sqrt{gH_1} e^{\frac{c_1}{2} L_1} \tilde{v}(t). \quad (24)$$

Применим подстановку для того, чтобы обнулить граничные условия (20):

$$\bar{\Psi}(\xi, t) = \Psi(\xi, t) - \sqrt{gH_1} e^{\frac{c_1}{2} L_1} \tilde{v}(t) \frac{\xi}{L_1}.$$

Начально-краевая задача (22)-(24) относительно функции $\bar{\Psi}(\xi, t)$ имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \xi^2} + \frac{c_1^2}{4} \bar{\Psi} = -\sqrt{gH_1} e^{c_1 L_1/2} \frac{\xi}{L_1} \left(\tilde{v}''(t) - \frac{c_1^2}{4} \tilde{v}(t) \right), \quad (25)$$

$$\bar{\Psi} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (26)$$

$$\bar{\Psi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \bar{\Psi} \Big|_{\xi=L_1} = 0, \quad (27)$$

Правую часть выражения (25) представим как $f(t)\xi$, где

$$f(t) = -\sqrt{gH_1} e^{c_1 L_1/2} \frac{1}{L_1} \left(\tilde{v}''(t) - \frac{c_1^2}{4} \tilde{v}(t) \right).$$

Неизвестная функция $\bar{\Psi}(\xi, t)$ допускает представление в виде следующего тригонометрического ряда

$$\bar{\Psi}(\xi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\Psi}_n(t) \sin \left(\frac{\pi n}{L_1} \xi \right). \quad (28)$$

Функцию ξ разложим в ряд Фурье по синусам в интервале $(0, L_1)$

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \left(\frac{\pi n}{L_1} \xi \right), \quad \alpha_n = \frac{2}{L_1} \int_0^t \xi \sin \left(\frac{\pi n}{L_1} \xi \right) d\xi. \quad (29)$$

Легко заметить, что граничные условия (27) автоматически удовлетворяются. Для нахождения функции $\bar{\Psi}_n(t)$ подставим выражения (29) и (28) в (25) и (26). В результате получим:

$$\frac{d^2 \bar{\Psi}_n}{dt^2} + \left(a_n^2 + \frac{c_1^2}{4} \right) \bar{\Psi}_n = \alpha_n f(t), \quad (30)$$

$$\bar{\Psi}_n(0) = 0, \quad \bar{\Psi}'_n(0) = 0. \quad (31)$$

При этом принимается, что $V(0) = V'(0) = 0$. Решение дифференциального уравнения (30) с начальными условиями (31) имеет следующий вид:

$$\bar{\Psi}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \int_0^t f(\tau) \sin(\gamma_n(t - \tau)) d\tau \cdot \sin(a_n \xi) + \sqrt{gH_1} e^{\frac{c_1}{2} L_1} \frac{\xi}{L_1} \tilde{v}(t),$$

где

$$\gamma_n = \sqrt{a_n^2 + \frac{c_1^2}{4}}, \quad a_n = \frac{n\pi}{L_1}.$$

При известной функции $\Psi(\xi, t)$ выражение (28) можно рассмотреть как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi(\xi, t)$. Его общее решение имеет следующий вид

$$\Phi(\xi, t) = e^{\frac{c_1}{2}\xi} \left[c(t) + \int \Psi(\xi, t) e^{-\frac{c_1}{2}\xi} d\xi \right].$$

Функция $\phi(\xi, t)$ определяется из выражения (17)

$$\phi(\xi, t) = c(t) + \int \Psi(\xi, t) e^{-\frac{c_1}{2}\xi} d\xi.$$

Можно показать, что функция $\bar{\Psi}(t) = 0$. Тогда получим

$$\bar{\Psi}_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n} \int_0^t f(\tau) \sin(\gamma_n(t - \tau)) d\tau \cdot \int e^{-\frac{c_1}{2}\xi} \sin(a_n \xi) d\xi,$$

$$\int e^{-\frac{c_1}{2}\xi} \sin(a_n \xi) d\xi = \frac{1}{\gamma_n^2} \left(-\frac{c_1}{2} \sin(a_n \xi) - a_n \cos(a_n \xi) \right) e^{-\frac{c_1}{2}\xi}$$

Если скорость вторжения $\tilde{v}(t)$ представим в виде функции Хевисайда (8), то интеграл $\int_0^t f(\tau) \sin \gamma_n(t - \tau) d\tau$ упрощается, и в результате его вычисления получим

$$\int_0^t f(\tau) \sin \gamma_n(t - \tau) d\tau = \begin{cases} \beta \left(\gamma_n v_0 + \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \frac{2v_0}{\gamma_n} \sin^2 \left(\frac{\gamma_n t}{2} \right) \right), & 0 < t < t_0, \\ \beta \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \frac{2v_0}{\gamma_n} \sin \left(\frac{\gamma_n(2t - t_0)}{2} \right) \sin \left(\gamma_n \frac{t_0}{2} \right), & t \geq t_0, \end{cases}$$

где

$$\beta = -\frac{\sqrt{gH_1} e^{-\frac{c_1}{2} L_1}}{L_1}$$

и для $t \geq t_0$

$$\phi(\xi, t) = -\frac{2v_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \cos \left(\frac{\gamma_n(2t-t_0)}{2} \right) \sin \left(\gamma_n \frac{t_0}{2} \right) \left(\frac{c_1}{2} \sin(a_n\xi) + a_n \cos(a_n\xi) \right),$$

для $t \leq t_0$ соответственно получим:

$$\phi(\xi, t) = \frac{2v_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \sin(\gamma_n t) \left(\frac{c_1}{2} \sin(a_n\xi) + a_n \cos(a_n\xi) \right).$$

Уравнение волновой поверхности определяется из равенств: для $t \geq t_0$

$$H(\xi, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \rightarrow$$

$$H(\xi, t) = -\frac{2v_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \sin \left(\frac{\gamma_n(2t-t_0)}{2} \right) \sin \left(\gamma_n \frac{t_0}{2} \right) \left(\frac{c_1}{2} \sin(a_n\xi) + a_n \cos(a_n\xi) \right),$$

для $t \leq t_0$

$$H(\xi, t) = \frac{2v_0\sqrt{gH_1}e^{-\frac{c_1}{2}(L_1-\xi)}}{L_1} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\gamma_n^3} \left(\frac{c_1^2}{4} - \gamma_n^2 \right) \cos(\gamma_n t) \left(\frac{c_1}{2} \sin(a_n\xi) + a_n \cos(a_n\xi) \right).$$

Полученные функциональные ряды позволяет определить высоту волны, образующей в водохранилище в результате вторжения селевых потоков. Исследование сходимости функционального ряда для $H(\xi, t)$ и численные расчеты (предлагаем провести читателю это самостоятельно) позволят выявить зависимость высоты волны от скорости вторжения, а также от различных геометрических характеристик водохранилища.

Задание на экзамен! Реализовать программно вычисление функции высоты волны прорыва $H(\xi, t)$.

09.04.2025 (Лекция 8)

6.4 Численное (конечно-разностное) исследование модели (4)-(6)

Для численной реализации (4)-(6) введем разбиение области $[0, L] \times [0, T]$ на точки-узлы (x_j, t_m) , $j = 0, \dots, N$; $m = 0, \dots, M$, как это было сделано в предыдущих разделах для волнового уравнения. Тогда для дискретной функции (аналога $\phi(x, t)$) ϕ_j^m получим дискретную модель:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_j^{m+1} - 2\phi_j^m + \phi_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = g \left[\frac{dH_0}{dx}(x_j) + H_0(x_j) \frac{1}{B(x_j)} \frac{dB}{dx}(x_j) \right] \cdot \frac{\phi_{j+1}^{m+1} - \phi_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x} \\ - gH_0(x_j) \cdot \frac{\phi_{j+1}^{m+1} - 2\phi_j^{m+1} + \phi_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2}, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Начальные и граничные условия для дискретной задачи запишутся следующим образом:

$$\phi_j^0 = 0, \quad \phi_j^1 = \phi_j^0, \quad (33)$$

$$\frac{\phi_1^{m+1} - \phi_0^{m+1}}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\phi_N^{m+1} - \phi_{N-1}^{m+1}}{\Delta x} = \tilde{v}(t_{m+1}), \quad (34)$$

Задание на экзамен! Реализовать программно задачу (32)-(34) неявным методом прогонки. Для этого нужно самостоятельно вывести формулы для a_j, b_j, c_j и далее по алгоритму. После построить график функции высоты волны прорыва по формуле $H(x_j, t_m) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}$.

7. ТЕМА: “КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННАЯ МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ ПАВОДКОВЫХ ПОТОКОВ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗЛИВА ВОДЫ ИЗ ВОДОХРАНИЛИЩА”

7.1 Гидродинамическая постановка задачи

Рассмотрим водохранилище, заполненной водой, с плотиной в верхнем бьефе. Предположим, что в силу разных причин техногенного характера произошло разрушение плотины и излив воды из водохранилища



Рис. 3:

в русло реки (нижний бьеф). При этом образуется волна прорыва. Есть риск, что плотина может не выдержать силы напора волны и разрушиться. В этом случае весь объем жидкости попадает в русло реки. Течение становится неустановившимся и необходим более сложный расчет нового расхода $Q(x, t)$ и глубины потока $H(x, t)$ в русле реки, которые являются функциями как продольной координаты, так и времени. Математической моделью здесь является система нелинейных уравнений Сен-Венана.

Впервые уравнения движения воды в руслах рек были выведены французским ученым Сен-Венаном в 1871 году. Период 30-40 годов XX века характеризовался широким применением физических моделей для решения инженерных задач гидравлики открытых потоков. Первоначально предназначенные для качественного анализа изучаемых явлений, в дальнейшем модели стали применяться в качестве основ для принятия проектных решений. В 1938 году фундаментальное исследование неустановившихся движений в открытых руслах было выполнено академиком АН СССР С.А. Христиановичем. В работе детально изучены математические вопросы применения метода характеристик и возможности его обобщения. Чуть позже были выполнены новые исследования системы уравнений Сен-Венана по адаптации численных решений. Стимулом для

крупных исследований по неустановившемуся движению послужила проблема затопления земель из-за наводнения реки Миссури в конце сороковых годов.

В 60-70-е годы над методами расчета неустановившихся течений в системах открытых русел активно работают ученые Института гидродинамики СО АН СССР под руководством академика Васильева О.Ф. Одновременно проводились работы и аналитического характера по построению приближенных решений уравнений Сен-Венана (МИСИ, ВНИИГ имени Веденеева, Груз НИИЭГС и др). Получены различные результаты, касающиеся образования гравитационных волн в горных водоемах в случае оползней, обвалов и поступлений потоков лавинного характера.

Далее в 80-90-х годах была проведена большая работа в развитии численных методов гидродинамики учеными Института вычислительных технологий СО РАН под руководством академика Шокина Ю.И. и др.

Что касается современного состояния проблемы образования гравитационных волн, то сейчас можно говорить именно о качественном развитии численных методов математического моделирования природных и антропогенных катастроф, основанном на использовании современных вычислительных машин. Здесь можно отметить, например, работы лаборатории математического моделирования волн цунами Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН.

Ввиду большого числа используемых гидравлических характеристик и расчетных формул, приведем их перечень непосредственно перед постановкой задач:

$w(x, t)$ – площадь поперечного сечения («живое» сечение) водотока, русла реки.

$v(x, t)$ – скорость течения жидкости.

$H(x, t)$ – глубина водотока.

$i = \text{const}$ – уклон дна русла, g – ускорение свободного падения.

$Q(x, t) = vw$ – расход (объем жидкости, протекающий за единицу времени через поперечное сечение русла).

$K(x, t)$ – модуль расхода, причем при установившемся течении $Q = K\sqrt{i}$.

$R(x, t) = w/\chi$ – гидравлический радиус, $\chi = B + 2H$ – смоченный периметр, $B(x, t)$ – ширина водотока.

$q(x, t)$ – путевой приток или интенсивность боковой приточности водотока (может быть обусловлена снеготаянием и дождевыми осадками), иными словами, объем жидкости, притекающий на единицу длины водотока (русла реки).

Система уравнений Сен-Венана имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{w} \right) = gw \left(i - \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{Q^2}{K^2} \right). \end{cases} \quad (35)$$

Первое уравнение – закон сохранения массы (уравнение неразрывности). Второе уравнение – динамическое, закон сохранения импульса. Каждый член второго уравнения – некоторая сила (вектор), поэтому можно говорить о ней как о некотором уклоне силы.

В данной системе искомыми величинами являются расход Q , глубина H и площадь живого сечения w . Предположим, что естественное русло потока жидкости будет прямоугольным, то есть $w = BH$, где $B = \text{const}$ – известная ширина потока по свободной поверхности. Это предположение уменьшает количество неизвестных. Этому же способствует применение некоторых гидравлических формул, а именно, модуль расхода, например, выражается формулой

$$K = wC\sqrt{R},$$

где $C = \frac{1}{n}R^{1/6}$ – коэффициент Шези (по формуле Маннинга), n – коэффициент шероховатости дна, заданный в специальных таблицах. Также предполагаем, что русло широкое, то есть $\gg B$. Исходя из этого предположения, справедлива цепочка равенств

$$R = \frac{w}{\chi} = \frac{BH}{B + 2H} = H \frac{1}{1 + 2H/B} \approx H.$$

Тогда, $K = \frac{1}{n}\omega H^{2/3} = \frac{1}{n}BH^{5/3}$.

Таким образом, вышеизложенные выкладки позволили сузить множество неизвестных функций до двух, описывающих изменение расхода жидкости и глубины.

7.2 Постановка начально-краевой задачи и методы решения

В качестве верхнего граничного условия воспользуемся дифференциальным уравнением опорожнения водохранилища

$$\frac{dW}{dt} = -q^*(t),$$

где $W = W(h)$ – объем водохранилища, $h(t)$ – глубина водохранилища при невозмущенной поверхности, $B_0 = \text{const}$ – ширина водохранилища в нижнем бьефе, $q^*(t)$ – расход воды через створ разрушенной плотины. Из теории гидравлики известно, что излив воды из водохранилища происходит по следующему закону

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dh} \frac{dh}{dt} = -m\sqrt{2gh}^{3/2} B_0, m = 0.43.$$

Установим вид функций $W = W(h)$ и dW/dh . Для простоты рассмотрим призматическое водохранилище с уклоном дна i_0 и шириной в нижнем бьефе B_1 :

$$W(h) = \frac{B_1}{2i_0} h^2, \quad \frac{dW}{dh} = \frac{B_1}{2i_0} 2h = \frac{B_1 h}{i_0},$$

отсюда

$$\frac{B_1}{i_0} h \frac{dh}{dt} = -m\sqrt{2gh}^{3/2} B_0.$$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{mi_0\sqrt{2g}B_0}{2B_1} t \right)^2. \quad (36)$$

где h_0 – глубина водохранилища в начальный момент времени. Из (3.1) можно вывести, что время полного опорожнения водохранилища определится по зависимости

$$T_0 = \frac{2B_1\sqrt{h_0}}{mi_0\sqrt{2g}B_0}.$$

Используя (36) легко выводится, что расход воды $Q(x, t)$ (x – продольная координата) через створ разрушенной плотины (створ $x = 0$) определится по зависимости

$$q^*(t) =: Q(0, t) = m\sqrt{2g}B_0 \left(\sqrt{h_0} - \frac{mi_0\sqrt{2g}B_0}{2B_1} t \right)^2, \quad 0 \leq t \leq T_0,$$

$$q^*(t) = 0, \quad t > T_0.$$

Для постановки начально-краевой задачи обычно систему (35) линеаризуют:

$$Q(x, t) = Q_0 + \tilde{Q}(x, t), \quad H(x, t) = H_0 + \tilde{H}(x, t),$$

Q_0, H_0 – известные постоянные значения расхода и глубины при установившемся течении.

Далее модель упрощают, а именно, пренебрегают инерционными слагаемыми (левая часть динамического уравнения (35)), вклад которых незначителен по сравнению с остальными слагаемыми. Два первых члена это – инерционные члены или уклон линии энергии, соответствующий ускорению. Эти слагаемые для различных условий течения имеют различную относительную значимость. Предположим, что за 3 часа скорость течения в реке изменяется от 1,0 до 2,0 м/сек (весьма большое изменение) и на расстоянии 10 км вследствие расширения потока скорость изменяется от 1,5 до 1,0 м/сек. Тогда два первых члена уравнения (2.2) будут равны соответственно

$$\frac{1}{9,81} \cdot \frac{1}{3600} \approx 1,0 \cdot 10^{-5}, \quad \frac{1}{9,81} \cdot 1,5 \cdot \frac{0,5}{10000} \approx 0,75 \cdot 10^{-5}$$

Уклон дна $i = \sin \alpha$ реки Терек между городами Владикавказ и Беслан имеет порядок 10^{-2} . Этот типичный пример указывает о возможности пренебрегать параметрами ускорения при исследовании волны прорыва вдали от разрушенного ограждающего водный поток сооружения.

После отбрасывания инерционных слагаемых и линеаризации, систему сводят к одному уравнению для $Q(x, t)$, но уже второго порядка.

В результате постановка начально-краевой задачи для расхода при образовании волны прорыва ($0 \leq x \leq L$):

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - D_0 \frac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial x^2} = 0,$$

$$\tilde{Q}(x, 0) = 0,$$

$$\tilde{Q}(0, t) = q^*(t),$$

$$\tilde{Q}(L, t) = 0.$$

Коэффициенты U_0 , D_0 являются постоянными величинами, зависящими от средних характеристик потока в русле. Уравнение представляет собой так называемое *уравнение конвекции-диффузии*. Коэффициент U_0 является коэффициентом конвекции (процесс переноса вещества), а коэффициент D_0 – коэффициент диффузии. Эту задачу можно решать как аналитически, так и численно.