04.03.2025

ТЕМА: “КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ”

Корректность задачи

При постановке и решении любой задачи ставятся одни и те же вопросы:

a) существует ли у нее решение (то есть задача разрешима)?

b) если ответ на первый вопрос положительный, то единственно ли это решение?

c) как зависит решение от входных данных?

Возможны два случая:

1). Задача поставлена *корректно* (задача корректна):

- задача разрешима при любых допустимых входных данных;

- имеется единственное решение;

- **решение задачи непрерывно зависит от входных данных (малому изменению входных данных соответствует малое изменение малое изменение решения)** — тогда говорят, что задача устойчива.

2). Задача *некорректна*, если не выполняется хотя бы одно из вышеперечисленных условий. Обычно не выполняется третье условие - малому изменениею входных данных может соответствовать неограниченно большое изменение решения.

Примером корректной задачи может служить задача интегрирования, а примером некорректной задачи – дифференцирование.

Пример. Пусть по прямой движется частица единичной массы. Движение обусловлено тем, что на частицу действует сила $q(t)$, которая меняется во времени. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$ и имела нулевую скорость, то в соответствии с законом Ньютона движение частицы будет описываться функцией $u(t)$, удовлетворяющей задаче Коши:

Поставим задачу Коши для $u(t)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = q(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dt}|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Здесь $u(t)$ — положение частицы в момент времени t.

Задача определения $u(t)$ решается двойным интегрированием функции $q(t)$:

$$u(t) = \int_0^t \int_0^s q(\tau) d\tau + C_1 t + C_2$$

и является устойчивой при $u \in C^2[0, T]$, $q(t) \in C[0, T]$ (корректно поставленной).

Рассмотрим *обратную задачу*: требуется определить $q(t)$ по известной функции $u(t)$.

Покажем неустойчивость задачи определения $q(t)$. Пусть $u(t)$ — решение прямой задачи для некоторого $q(t)$. Рассмотрим следующие возмущения решения прямой задачи:

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n} cos(nt).$$

Этим возмущениям соответствуют правые части

$$q_n(t) = q(t) - ncos(nt),$$

т.к. $u''(t) = q(t)$.

Очевидно, что

$$\|u - u_n\|_{C[0,T]} \to 0$$

при $n \to \infty$, а

$$\|q - q_n\|_{C[0,T]} \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, малое возмущение функции $u(t)$ соответствуют сколь угодно большому изменению функции $q(t)$.

Устойчивость задачи

Для изучения устойчивости дифференциального уравнения по начальным данным будем рассматривать модельное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ x > 0,\ y(0) = y_0.$$

а именно, рассмотрим модель радиоактивного распада вещества

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad \lambda = const > 0,\ x > 0,\ y(0) = y_0. \tag{3}$$

Его решение $y(t) = y_0 e^{-\lambda x}$ убывает при $\lambda > 0$ и

$$|y(t)| \leq |y_0| \text{ при } \lambda \geq 0 \text{ для всех } t \geq 0, \tag{4}$$

т.е. уравнение (3) *устойчиво* при $\lambda \geq 0$, что соответствует условию

$$\frac{\partial f}{\partial y} \leq 0.$$

В этом случае при выполнении (4) малым изменениям начальных данных будет соответствовать малое изменение самого решения. Такие условия в дальнейшем мы будем называть *условием устойчивости.*

При дискретизации вводится естественное требование: для дискретных моделей, аппроксимирующих (приближающих с некоторой погрешностью) модельные уравнения, для корректности должен выполняться аналог неравенства (4):

$$|y_k| \leq |y_0|, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Мы увидим ниже, что это не всегда выполняется.

Рассмотрим ряд примеров.

1) Явная схема Эйлера (когда правая часть, зависящая от y, проектируется в известный узел сетки):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_k = 0, \quad y_{k+1} = (1 - h\lambda) y_k. \tag{5}$$

Отсюда видно, что условие

$$|y_{k+1}| \leq |y_k| \leq \ldots \leq |y_0| \tag{6}$$

выполнено при $|1-h\lambda| \le 1$ или $-1 \le 1-h\lambda \le 1$, то есть при

$$h\lambda \le 2.$$

Если, например, $h\lambda \ge 3$, то

$$|y_{k+1}| = |h\lambda - 1||y_k| \ge 2|y_k| \ge \ldots \ge 2^{k+1}|y_0|,$$
$$|y_k| \ge 2^k|y_0| \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Схема неустойчива, условие (6) не выполнено. Таким образом, в этом случае говорят, что явная схема Эйлера (5) *условно устойчива* с условием устойчивости $h \le 2\lambda,\ \lambda > 0$.

2) Неявная схема Эйлера (когда правая часть, зависящая от y, проектируется в неизвестный узел сетки):

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + \lambda y_{k+1} = 0, \quad y_{k+1} = \frac{1}{1+h\lambda} y_k. \tag{7}$$

Так как $\frac{1}{1+h\lambda} \le 1$ при любых $h\lambda \ge 0$, то говорят, что схема *безусловно устойчива*.

3) Схема с весами:

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h} + \lambda(\sigma y_{k+1} + (1-\sigma)y_k) = 0,$$

отсюда приводим к виду

$$y_{k+1} = q y_k.$$

Для выполнения условия $|y_{k+1}| \le |y_k| \le ... \le |y_0|$, то есть для выполнения требования устойчивости необходимо и достаточно, чтобы

$$|q| \le 1, \quad q = \frac{1-(1-\sigma)h\lambda}{1+\sigma h\lambda}.$$

Видим, что $|q| \le 1$, если

$$-1-\sigma h\lambda \le 1-(1-\sigma)h\lambda \le 1+\sigma h\lambda$$

или

$$1 + h(\sigma - 1/2)\lambda \ge 0,$$

так что

$$1 + \sigma h\lambda \ge h\lambda/2 > 0.$$

Таким образом, схема с весами беусловно (или абсолютно) устойчива (при любых h) при $\sigma > 1/2$ и условно устойчива в случае $\sigma < 1/2$, если $h \le \frac{1}{(1/2-\sigma)\lambda}$.

11.03.2025

ТЕМА: “ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ (ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ 1+1)”

До сих пор мы рассматривали либо:

- динамические (эволюционные) модели, не зависящие от пространства;

- стационарные модели, имеющие место в определенный момент времени и рассматривающие искомые величины в зависимости только от пространственной переменной.

Построение модели. Постановка корректной задачи

Построим одномерную модель продольных упругих колебаний стержня длины L, которые рассматриваются с течением времени в промежутке $[0, T]$.

Пусть ось x направлена вдоль стержня, $u(x,t)$ – смещение вдоль этой оси в момент t поперечного сечения, которое в свободном равновесном состоянии стержня имело абсциссу x. продольное начальное положение стержня.

При воздействии внешних сил возникает деформация ε, при этом $u(x,t)$ получает приращение $\Delta u(x,t)$ при изменении $x+\Delta x$, тогда относительное удлинение (деформация) будет в среднем по длине Δx:

$$\varepsilon = \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Так как процесс происходит во временном континууме неравномерно, то имеет место ускорение

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Согласно второму закону Ньютона, применяемому к элементу Δx:

$$ma = m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+\Delta x, t) = \Delta F(x,t), \tag{1}$$

$m = \rho(x) S \Delta x$, S – площадь поперечного неоднородного сечения стержня (плотность зависит от x), F – действующие силы.

Пренебрегая силой трения, деформация порождает упругую силу F:

$$F(x,t) = S\sigma(\varepsilon), \tag{2}$$

$\sigma(\epsilon)$ – упругое напряжение (сила, направленная противоположно силе внешнего давления).

По закону Гука

$$\sigma(\varepsilon) = k(x)\varepsilon, \tag{3}$$

$k(x)$ – коэффициент жесткости (модуль Юнга, приводится в специальных таблицах и зависит от материала стержня).

Таким образом, с учетом (2), (3)

$$F = Sk(x)\varepsilon.$$

В уравнении (1) с учетом вышесказанного имеем:

$$\rho(x)S\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+\Delta x,t) = \Delta F \quad \to \rho(x)S\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x+\Delta x,t) = \frac{1}{\rho(x)S}\frac{1}{\Delta x}\Delta(Sk(x)\varepsilon) \to \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)S}\frac{1}{\Delta x}\Delta(Sk(x)\frac{\Delta u}{\Delta x})$$

Переходя к пределу $\Delta x \to 0$, получим математическую модель:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}). \tag{4}$$

Если $k(x), \rho(x)$ являются постоянными (стержень является однородным по всей длине), то из (4) следует классическое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$a^2 = \frac{k}{\rho} \to a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$$

называется *скоростью распространения упругих волн* (продольных колебаний). В общем случае

$$a^2(x) = \frac{k(x)}{\rho(x)}.$$

Добавляя к (4) или (5) действие внешней силы $f(x,t)$ по всей длине стержня, получаем модель с учетом внешнего воздействия:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + f(x,t). \tag{4'}$$

Для получения единственного решения (4), необходимо дополнить модель начальными (задача Коши по времени) и граничными или краевыми условиями.

Пусть в начальный момент времени имеем (*задача Коши*):

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{6}$$

Граничные условия первого рода (носят название *условия Дирихле*)

$$u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = q(t). \tag{7}$$

Граничные условия второго рода (*задача Неймана*)

$$u_x(0,t) = G(t), \quad u_x(L,t) = Q(t). \tag{8}$$

Таким образом, корректная постановка задачи для моделирования волнового процесса будет выглядеть как решение уравнения (4′) вместе с условиями (6)-(7) или (6), (8):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + f(x,t), & t \in [0,T], x \in [0,L], \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0,L] \\ u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = q(t), & t \in [0,T] \end{cases} \tag{9}$$

Переход к дискретной модели. Явный метод расчета

Введем равномерное разбиение прямоугольника $[0,L] \times [0,T]$ на сетку с узлами (x_j, t_m), где $x_j = j * \Delta x$, $t_m = m * \Delta t$, $j = 1, 2, ..., N$, $m = 1, 2, ..., M$.

Здесь $\Delta x = L/N$, $\Delta t = T/M$ – шаги разбиения отрезка $[0,L]$ и $[0,T]$ соответственно.

Тогда известные непрерывно-дифференцируемые функции $rho(x)$, $k(x)$, $f(x)$ становятся известными дискретными функциями

$$\rho_j := \rho(x_j) = \rho(j * \Delta x),$$

$$k_j := k(j * \Delta x),$$
$$f_j^m := f(j * \Delta x, m * \Delta t).$$

Искомой величиной в дискретной задаче будет двумерный массив

$$u_j^m :\approx u(x_j, t_m)$$

Для дискретизации основного уравнения перепишем его, раскрывая производную произведения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k'(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{4''}$$

Для дискретизации частных производных воспользуемся формулой Тейлора аналогично тому, как это было для обычных производных, например, для дискретизации второй производной по x:

$$\begin{aligned} u(x+\Delta x, t) = u(x,t) + u_x(x,t)\Delta x + \frac{1}{2!}u_{xx}(x,t)(\Delta x)^2 \\ + \frac{1}{3!}u_{xxx}(x,t)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} u(x-\Delta x, t) = u(x,t) - u_x(x,t)\Delta x + \frac{1}{2!}u_{xx}(x,t)(\Delta x)^2 \\ - \frac{1}{3!}u_{xxx}(x,t)(\Delta x)^3 + O((\Delta x)^4), \end{aligned} \tag{11}$$

Складывая равенства (10) и (11), получим

$$u(x+\Delta x, t) + u(x-\Delta x, t) = 2u(x,t) + u_{xx}(x,t)(\Delta x)^2 + O((\Delta x)^4).$$

Отсюда, разделив на $(\Delta x)^2$, получаем конечно-разностную аппроксимацию $u_{xx}(x,t)$ с порядком точности $O((\Delta x)^2)$:

$$u_{xx}(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2),$$

$$u_{xx}(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2},\ j = \overline{1, N-1},\ k = \overline{0, M} \tag{12}$$

Аналогично, вторая производная по времени

$$u_{tt}(x_j, t_m) \approx \frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2},\ j = \overline{0, N},\ k = \overline{1, M-1} \tag{13}$$

Первая производная по x может быть заменена на правую (14a), левую (14b) и центральную разности (14c) соответственно:

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - u_j^m}{\Delta x}, \tag{14a}$$

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{\Delta x}, \tag{14b}$$

$$u_x(x_j, t_m) \approx \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x}, \tag{14c}$$

Например, выбирая центральную разность (14c), уравнение ($4''$) заменяется на дискретный аналог с помощью (12) и (13):

$$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x}$$
$$+\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + f(x_j, t_m), j = \overline{1, N-1},\ k = \overline{1, M-1}. \tag{15}$$

Начальные условия в дискретном случае будут выглядеть:

$$u_j^0 = g(t_j), \frac{u_j^1 - u_j^0}{\Delta t} = q(t_j) \to u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t,\ j = \overline{0, N} \tag{16}$$

граничные условия Дирихле:

$$u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), m = \overline{0, M}, \tag{17}$$

граничные условия Неймана:

$$\frac{u_1^m - u_0^m}{\Delta x} = G(t_m), \quad \frac{u_N^m - u_{N-1}^n}{\Delta x} = Q(t_m), m = \overline{0, M}, \tag{18}$$

Заметим, что в уравнении (15) в расчете участвует пять точек u_j^m, u_{j-1}^m, u_{j+1}^m, u_j^{m-1}, u_j^{m+1}. На первом шаге благодаря начальным условиям, оказываются известными значения 4-е значения на $m-1, m$ временном слое, а неизвестной является из них одна точка u_j^{m+1}. Выражая ее явно из (15), мы получим рекуррентную формулу для расчета смещения в точке (x_j, t_{m+1}):

$$u_j^{m+1} = \left(2 - 2\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) u_j^m - u_j^{m+1} + ... \tag{19}$$

здесь самостоятельно дописать!

Определение 1. Если в дискретной модели пространственные производные по x берутся на известном временном слое m, то такой расчетный метод называется *явным.*

Определение 2. Если в дискретной модели пространственные производные по x берутся на неизвестном временном слое $m+1$, то такой расчетный метод называется *неявным.*

Явный метод расчета обладает одним недостатком: он условно устойчив. Иначе говоря, не при всяких шагах дискретизации $\Delta t, \Delta x$ он работает. То есть метод чувствителен к размерности массива $M \times N$. Условием устойчивости здесь является *условие Куранта:*

$$\left| 2 - 2\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right| \leq 1$$

18.03.2025

Неявный метод расчета

Обобщая выводы из предыдущего параграфа дискретная задача для **явного метода** имеет вид (граничные условия Дирихле)

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \dfrac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \dfrac{u_{j+1}^m - u_{j-1}^m}{2\Delta x} + \dfrac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \dfrac{u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2} + \\ \qquad + f(x_j, t_m), \quad j = \overline{1, N-1},\ k = \overline{1, M-1}, \\ u_j^0 = g(x_j), \quad u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \\ u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}. \end{cases} \tag{20}$$

Тогда, используя *Определение 2* задача для **неявного метода** будет иметь вид

$$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2} = \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - u_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)} \cdot \frac{u_{j+1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2}$$
$$+ f(x_j, t_m), j = \overline{1, N-1},\ k = \overline{1, M-1}. \tag{21}$$

Начальные и граничные условия остаются без изменения, то есть такие же, как в (20).

В уравнении (21) неизвестными являются три точки u_{j+1}^{m+1}, u_j^{m+1}, u_{j-1}^{m+1}. То есть матрица для неизвестных получается трехдиагональная. Перепишем (21), выделяя коэффициенты при этих трех неизвестных:

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}\right) u_{j-1}^{m+1} - \left(\frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2}\right) u_j^{m+1} +$$
$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}\right) u_{j+1}^{m+1} == \frac{u_g^{m-1} - 2u_j^m}{(\Delta t)^2} - f(x_j, t_m). \tag{22}$$

Введя обозначение

$$a_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x},\ b_j = \frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta t)^2},$$

$$c_j = \frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2} - \frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x},\ \widetilde{f}_j^m = \frac{u_g^{m-1} - 2u_j^m}{(\Delta t)^2} - f(x_j, t_m),$$

получим задачу для неявного метода

$$\begin{cases} a_j u_{j-1}^{m+1} - b_j u_j^{m+1} + c_j u_{j+1}^{m+1} = \tilde{f}, \\ \\ u_j^0 = g(x_j), \quad u_j^1 = g(x_j) + q(x_j)\Delta t, \quad j = \overline{0, N}, \\ \\ u_0^m = G(t_m), \quad u_N^m = Q(t_m), \quad m = \overline{0, M}. \end{cases} \tag{23}$$

Метод прогонки заключается в представлении (гипотезе), что

$$u_j^{m+1} = A_{j+1} u_{j+1}^{m+1} + B_{j+1}, \quad j = 0, ..., N-1; m = 0, ..., M-1. \tag{24}$$

На первом этапе (прямой ход) определяются коэффициенты

$$A_{j+1} = \frac{c_j}{b_j - A_j a_j}, \quad B_{j+1} = \frac{a_j B_j - \tilde{f}}{b_j - A_j a_j}. \tag{25}$$

На втором этапе обратный ход представляет равенство (24).

ТЕМА: "МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА ИЛИ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЕЩЕСТВА (ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ) 1+1"

Рассмотрим, какое уравнение возникает в качестве математической модели распространения тепла в стержне. Рассмотрим тонкий стержень, вытянутый вдоль оси x, как показано на рис.1. Мы предполагаем, что стержень полностью изолирован, за исключением, может быть, концов, и поток тепла может распространяться только в направлении x (т.е. у нас одномерная модель).

Вывод уравнения

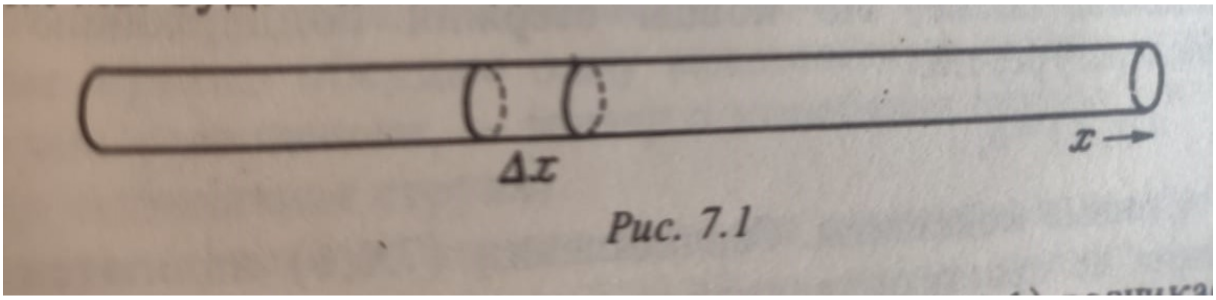

Рис. 1:

Пусть $u(x,t)$ – температура стержня (в кельвинах) длиной L в точке x в момент времени t и a – площадь поперечного сечения стержня. Из элементарной физики известно, что количество тепла, которое протекает в единицу времени через сечение, перпендикулярное оси стержня есть $-kau_x$, где $k > 0$ – коэффициент теплопроводности. Таким образом, если градиент температуры u_x в данном сечении отрицателен, то есть температура слева выше, чем справа, то в полном соответствии с интуитивными представлениями тепло через это сечение будет течь слева направо. След-но, если мы рассмотрим элемент стержня длины Δx, то в единицу времени в этот элемент через сечение x втекает количество тепла, равное

$$(-kau_x)|_x,$$

и вытекает через сечение $x + \Delta x$ количество тепла, равное

$$(-kau_x)|_{x+\Delta x},$$

то есть количество тепла в элементе изменяется на

$$(-kau_x)|_x - (-kau_x)|_{x+\Delta x}. \tag{1}$$

С другой стороны, из элементарной физики также известно, что количество тепла, которым обладает элемент, пропорционально массе элемента и его температуре; более точно, оно равно

$$sa\Delta x\rho u,$$

где s – удельная теплоемкость материала (это физическая величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо передать веществу массой 1 кг для того, чтобы его температура изменилась на 1°C. Другими словами, это способность вещества поглощать и отдавать тепло); ρ – плотность.

Из этого следует, что производная по времени от количества тепла в элементе равна (1):

$$sa\Delta x\rho u_t = (kau_x)|_{x+\Delta x} - (kau_x)|_x.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$u_t = \frac{1}{s\rho}(ku_x)_x. \tag{2}$$

Если k не зависит от x, то это уравнение сводится к классическому уравнению теплопроводности:

$$u_t = \frac{k}{s\rho}u_{xx} =: cu_{xx}. \tag{3}$$

То есть производная от температуры по времени пропорциональна второй производной от температуры по пространственной переменной.

Далее, как это бывает в теории дифференциальных уравнений, необходимо задать начальные и (или) граничные условия. Посмотрим, какие условия мы можем наложить на решение уравнений теплопроводности в задаче о стержне.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ нам известно распределение $g(x)$ температуры в стержне.

Предположим также, что концы стержня поддерживаются при постоянной температуре, то есть

$$u(0,t) = \alpha, \quad u(L,t) = \beta, \tag{4}$$

где α, β – заданные константы. Соотношения (4) являются граничными условиями по переменной x.

В качестве начального условия мы используем заданное начальное распроеделение температуры

$$u(x, 0) = g(x),\ 0 \leq x \leq L. \tag{5}$$

Таким образом, приходим к следующей физической формулировке задачи:

Имеется стержень, концы которого поддерживаются при фиксированных температурах α и β. Считая начальное распределение температуры вдоль стержня известным, требуется найти температуру любой точки стержня x в произвольный момент времени $t > 0$.

Вывод: математической моделью этой проблемы служит дифференциальное уравнение в частных производных (2) или (3) с граничными условиями (4) и начальным условием (5).

Некоторые варианты этой постановки задачи можно моделировать, меняя граничные условия или само уравнение. Если, например, правый конец стержня будет теплоизолирован, то через этот конец тепло теряться не будет, поток обратиться в нуль:

$$u(0, t) = \alpha, \quad u_x(L, t) = 0, \tag{6}$$

Уравнение (2) или (3) служит также математической моделью и для целого ряда других физических явлений, как, например, диффузия газа. В этом случае $u(x, t)$ есть концентрация газа.