1 Пространство и время

1.1 Волновые процессы.

При моделировании распротранения звуковых (акустических), электромагнитных, сейсмических волн при некотором внешнем воздействии на среду, то в качестве математической модели выбираем волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.1}$$

Это *одномерное волновое уравнение* – одно из основных уравнений математической физики, относится к гиперболическому типу. Оно описывает волновые процессы в одномерных средах: колебание газа в трубке, поперечные колебания струны, грунтовой толщи и т.д.

Поставим начальные и граничные условия:

$$u(0, x) = f(x), \quad u_t(0, x) = g(x), \quad 0 \le x \le L,$$

$$u(t, 0) = \alpha, \quad u(t, L) = \beta.$$

Введем на плоскости (x, t) равномерную сетку с шагами $\triangle x$ и $\triangle t$. В основе простейшего конечно-разностного метода для уравнения (1.1) лежит замена вторых производных в (1.1) центральной разностью по x и t.

Пусть

$$x_j = j\triangle x, \quad t_m = m\triangle t,$$

Тогда

$$u(t_m, x_j) = u_j^m.$$

Конечно-разностным аналогом для (1.1) будет уравнение

$$\frac{u_j^{m+1} - 2u_j^m + u_j^{m-1}}{(\triangle t)^2} = \frac{a^2}{(\triangle x)^2}(u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m) \tag{1.2}$$

Граничные условия:

$$u_0^m = \alpha, \quad u_{n+1}^m = \beta, \quad m = 0, 1, \ldots \tag{1.3}$$

начальные условия

$$u_j^0 = f(x_j), \quad u_j^1 = f(x_j) + \triangle t g(x_j), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{1.4}$$

Вторая формула возникла в результате аппроксимации начального условия $u_t(0,x) = g(x)$ разностным отношением $\frac{u(\triangle t,x) - u(0,x)}{\triangle t} = g(x)$.

Локальная ошибка дисркетизации схемы (1.2) есть $O[(\triangle t)^2 + (\triangle x)^2]$. В самом деле, из разложения Тейлора

$$u(t, x+\triangle x) = u(t,x) + u_x(t,x)\triangle x + \frac{1}{2!}u_{xx}(t,x)(\triangle x)^2 + \frac{1}{3!}u_{xxx}(t,x)(\triangle x)^3 + O((\triangle x)^4),$$

$$u(t, x-\triangle x) = u(t,x) - u_x(t,x)\triangle x + \frac{1}{2!}u_{xx}(t,x)(\triangle x)^2 - \frac{1}{3!}u_{xxx}(t,x)(\triangle x)^3 + O((\triangle x)^4),$$

Складывая эти два разложения, получим

$$u(t, x+\triangle x) + u(t, x-\triangle x) = 2u(t,x) + u_{xx}(t,x)(\triangle x)^2 + O((\triangle x)^4),$$

отсюда, разделив на $\triangle^2$, получаем конечно-разностную аппроксимацию второй производной по x в точке (t,x):

$$u_{xx}(t,x) = \frac{u(t,x+\triangle x) + u(t,x-\triangle x) - 2u(t,x)}{\triangle^2} + O((\triangle x)^2).$$

Или

$$u_{xx}(t,x) \approx \frac{a^2}{(\triangle x)^2}(u_{j+1}^m - 2u_j^m + u_{j-1}^m).$$

Аналогично аппроксимируется вторая производная по t.

Условие устойчивости

$$\triangle t \leq \triangle x / a \tag{1.5}$$

.

Задача 1. Составьте программу для решения волнового уравнения (1.1), $L = 1$, по разностной схеме (1.2). Используйте программу для случая $a^2 = 1$, $f(x) = \sin(\pi x)$ и различных значениях $\triangle t$ и $\triangle x$. Убедитесь, в частности, что при выполнении условия (1.5) счет идет устойчиво.

Алгоритм:

1. M=100; N=100 { Задаем размерность массива}

2. L=1; T=10 { Задаем значение длины по x и временного интервала}

3. dx=L/N; dt=T/M; { Расчет шага по x и по t}

4. alfa=0; beta=0 { Задаем значения данных на границе}

5. for j=0 to N { Организация цикла, который задает начальные условия}

u[0,j]=sin(pi*j*dx);

u[1,j]=u[0,j];

6. for m=0 to M { Организация цикла, который задает граничные условия}

u[m,0]=alfa;

u[m,N]=beta;

7. for m=1 to M-1 { Организация цикла, который считает значения неизвестной функции в узлах сетки}

for j=1 to N-1

$u[m+1,j] = 2u[m,j] - u[m-1,j] + a^2 * (dt)^2/dx^2 * (u[m,j+1] - 2u[m,j] + u[m,j-1])$

Вывод на экран мгновенных и пространственных профилей.

1.2 Процессы распространения тепла.

Рассматриваем одномерное пространство (ось OX), вдоль оси расположен стержень конечной длины. Предполагаем, что однородный (одинаковая плотность) стержень полностью теплоизолирован, за исключением, может быть, концов и поток тепла распространяется только в направлении оси OX.

Уравнение, представляющее математическую модель растпространения тепла:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.1}$$

где $u(t,x)$ – температура стержня (в кельвинах) в точке x в момент времени t, a^2 зависит от плотности, коэффициента теплопроводности и площади поперечного сечения стержня.

Иначе уравнение (2.1) называют уравнением теплопроводности (или уравнением диффузии).

Предположим, что концы стержня поддерживаются при постоянной температуре (**граничные условия**):

$$u(t,0) = \alpha, \quad u(t,L) = \beta. \tag{2.2}$$

В качестве начального условия используем заданное начальное распределение (**начальные условия**) температуры

$$u(0,x) = g(x), \quad 0 \le x \le L. \tag{2.3}$$

некоторые вариации этой постановки задачи можно моделировать, изменяя граничные условия или само уравнение. Если, например, правый конец стержня будет абсолютно изолирован, то через этот конец тепло теряться не будет, поток обратиться в нуль и граничные условия (2.2) примут вид:

$$u(t,0) = \alpha, \quad u_x(t,L) = 0. \tag{2.4}$$

Другой вариант постановки задачи связан с отказом от обнородности стрежня. То есть коэффициент a^2 тогда будет зависеть от x. Это уже будет уравнение не с постоянными, а с переменными коэффициентами.

Отметим, что уравнение (2.1) служит математической моделью и для целого ряда других физических явлений, например, диффузия газа.

Совершая дискретизацию, введем сетку на плоскости переменных (t,x) с шагами $\triangle t,\ \triangle x$ и перейдем к сеточной функции u_j^m.

Конечно-разностным аналогом для (2.1) будет уравнение

$$\frac{u_j^{m+1}-u_j^m}{(\triangle t)}=\frac{a^2}{(\triangle x)^2}(u_{j+1}^m-2u_j^m+u_{j-1}^m) \tag{2.5}$$

или

$$u_j^{m+1}=u_j^m+\frac{a^2\triangle t}{(\triangle x)^2}(u_{j+1}^m-2u_j^m+u_{j-1}^m),\ j=1,2,...,N-1$$

Граничные условия:

$$u_0^m=\alpha,\quad u_N^m=\beta,\quad m=0,1,\dots \tag{2.6}$$

начальные условия

$$u_j^0=g(x_j),\quad j=1,\dots,N-1. \tag{2.7}$$

Условие устойчивости

$$\triangle t\le(\triangle x)^2/(2a^2). \tag{2.8}$$

Локальная ошибка дискретизации $O(\triangle t)+O[(\triangle x)^2]$.

Задача 2. Составьте программу для решения уравнения теплопроводности(2.1), $L=1$, по разностной схеме (2.5). Используйте программу для случая $a^2=1,\ g(x)=\sin(\pi x)$ и значениях $\triangle t=0,005$ и $\triangle x=0,1$. Убедитесь, в частности, что при выполнении условия (2.8) счет идет устойчиво. Выведите на экран графики профилей.

1.3 Метод линейной факторизации (метод прогонки) для граничных условий (2.4). Неявная схема

Условие устойчивости (2.8) накладывает ограничения на выбор шагов сетки. Поэтому по возможности используют неявные схемы. В этом случае пространственная производная проектриуется в неизветсный временной слой $m+1$:

$$\frac{u_j^{m+1}-u_j^m}{(\triangle t)}=\frac{a^2}{(\triangle x)^2}(u_{j+1}^{m+1}-2u_j^{m+1}+u_{j-1}^{m+1}) \tag{2.9}$$

или

$$u_j^{m+1}=u_j^m+\frac{a^2\triangle t}{(\triangle x)^2}(u_{j+1}^{m+1}-2u_j^{m+1}+u_{j-1}^{m+1}),\ j=1,2,...,N-1,\ \forall m.$$

Граничные условия для одного конца ($x=0$), проводящего тепло, и другого теплоизолированного конца ($x=L$):

$$u_0^m=\alpha,\quad \frac{u_N^m-u_{N-1}^m}{\triangle x}=0\quad \forall m. \tag{2.4}$$

Для такой постановки задачи используется **метод линейной факторизации или метод прогонки**. Суть метода заключается в следующем. Предположим

$$u_j^{m+1}=A_{j+1}u_{j+1}^{m+1}+B_{j+1},\ j=1,2,..,N-1 \tag{2.10}$$

Отсюда видим, что с учетом (2.4)

$$u_0^m=A_1u_1^m+B_1=\alpha\ \Rightarrow A_1=0,\ B_1=\alpha.$$

$$\frac{u_N^m-A_Nu_N^m-B_N}{\triangle x}=0\ \Rightarrow u_N^m=\frac{B_N}{1-A_N},\quad m=1,2,...,M.$$

Первый этап - это определение самих коэффициентов $A_j,\ B_j$. Этот этап называется **прямой ход метода прогонки**.

Для этого подставим (2.10) в (2.9) вместо u_{j-1}^{m+1} :

$$u_j^{m+1}=u_j^m+ko*(u_{j+1}^{m+1}-2u_j^{m+1}+A_ju_j^{m+1}+B_j),\ j=1,2,...,N-1,\ \forall m.$$

$$(1-(A_j-2)*ko*u_j^{m+1}=ko*u_{j+1}^{m+1}+B_j*ko$$

где $ko := \frac{a^2 \triangle t}{(\triangle x)^2}$.

Тогда

$$u_j^{m+1} = \frac{ko}{1 - (A_j - 2) * ko} * u_{j+1}^{m+1} + \frac{u_j^m + B_j * ko}{1 - (A_j - 2) * ko},$$

отсюда, с учетом предположения (2.10), выводим

$$A_{j+1} = \frac{ko}{1 - (A_j - 2) * ko}, \quad B_{j+1} = \frac{u_j^m + B_j * ko}{1 - (A_j - 2) * ko}, \; j = 1, ..., N-1. \tag{2.11}$$

Таким образом, на первом этапе вычисляются неизвестные коэффициенты по рекурентным формулам (2.11), в которых $A_1 = 0, \; B_1 = \alpha$.

Второй этап - обратный ход по формулам (2.10). Заметим, что и прямой ход и обратный ход осуществляются внутри временного цикла.

Алгоритм:

1. M=100; N=100 { Задаем размерность массива}
2. L=1; T=10 { Задаем значение длины по x и временного интервала}
3. dx=L/N; dt=T/M; { Расчет шага по x и по t}
4. alfa=0; { Задаем значения данных на границе}
5. for j=0 to N { Организация цикла, который задает начальные условия}

u[0,j]=sin(pi*j*dx);

6. for m=0 to M { Открытие цикла по времени}

A[1]=0; B[1]=alpha;

7. for j=1 to N-1 { Открытие цикла по x - **прямой ход**}

A[j+1]=ko/(1-(A[j]-2)*ko);

B[j+1]=(u[m,j]+B[j]*ko)/(1-(A[j]-2)*ko);

{ Закрытие цикла по x}

8. u[m+1,N]=B[N]/(1-A[N]);
9. for j=N-1 downto 1 { Открытие цикла по x - **обратный ход**}

u[m+1,j]=A[j+1]*u[m+1,j+1]+B[j+1];

{ Закрытие цикла по t}

Вывод графиков.