§1. Метрические пространства

Всякое правильное рассуждение можно свести к систематическому применению небольшого числа неизменных правил, не зависящих от конкретной природы объектов, о которых идет речь.

Н. Бурбаки

Пусть X – произвольное непустое множество. Функция

$$\rho : X \times X \to [0; \infty),$$

определенная на декартовом произведении $X \times X$, принимающая неотрицательные вещественные значения и удовлетворяющая следующим условиям:

(**M1**) $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

(**M2**) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$;

(**M3**) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых x, y, $z \in X$,

называется *метрикой на множестве* X.

Условия (M1) – (M3) называются *аксиомами метрики*; (M1) – *аксиома тождества*; (M2) – *аксиома симметрии*; (M3) – *аксиома треугольника*, или *неравенство треугольника*.

Число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием между элементами* x и y, принадлежащими множеству X.

Метрическим пространством (сокращенно МП) называется пара (X, ρ), состоящая из множества X и заданной на нем метрики ρ. При этом элементы множества X (в соответствии с удобной геометрической терминологией) обычно называют *точками* пространства (X, ρ), а его подмножества – подмножествами пространства (X, ρ) или множествами в пространстве (или из пространства) (X, ρ).

Пусть (X, ρ) – МП, x_0 – некоторая точка из (X, ρ) и r – положительное число. Множество

$$B(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}$$

называется *открытым шаром* (или просто *шаром*) *с центром в точке* x_0 *радиуса* r. Множество

$$\overline{B}(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x_0, x) \leqslant r\}$$

называется *замкнутым шаром с центром в точке* x_0 *радиуса* r. Множество

$$S(x_0, r) := \{x \in X : \rho(x_0, x) = r\}$$

называется *сферой с центром в точке* x_0 *радиуса* r.

Для множества A из пространства (X, ρ) и $r > 0$ множество

$$B(A, r) := \cup\{B(x, r) : x \in A\}$$

называется *шаровой окрестностью множества* A, или *r-шаром множества* A. Так как для любой точки $x \in A$ справедливо соотношение $x \in B(A, r)$, то получаем включение $A \subset B(A, r)$.

Предложение 1.1. (*а*) *Для любой точки* $x_1 \in B(x_0, r)$ *существует положительное число* r_1, *такое, что* $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$.

(*б*) *Пусть* x_0 *есть точка пространства* (X, ρ). *Тогда для любых чисел* r_1 *и* r_2, *таких, что* $0 < r_1 < r_2$, *справедливо включение* $\overline{B}(x_0, r_1) \subset \subset B(x_0, r_2)$.

◀ (а) Положим $r_1 = r - \rho(x_1, x_0)$. Тогда для произвольной точки $x \in B(x_1, r_1)$, в силу неравенства треугольника, имеем

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x_1, x_0) + \rho(x_1, x) < \rho(x_1, x_0) + r_1 = r.$$

Итак, если $x \in B(x_1, r_1)$, то $\rho(x, x_0) < r$, и тем самым требуемое включение доказано.

(б) Возьмем произвольную точку $x \in \overline{B}(x_0, r_1)$. Тогда $\rho(x, x_0) \leqslant r_1$, и так как $r_1 < r_2$, то $\rho(x, x_0) < r_2$. Значит, $x \in B(x_0, r_2)$. ▶

Диаметром непустого множества A из пространства (X, ρ) называется число

$$d(A) := \sup\{\rho(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\},$$

причем полагают $d(\varnothing) := 0$.

Множество $A \subset X$ называется *ограниченным* в пространстве (X, ρ), если $d(A) < \infty$.

Метрика ρ на множестве X называется *ограниченной числом* r (*ограниченной*), если $d(X) \leqslant r$ (если $d(X) < \infty$).

Расстоянием $\rho(x_0, A)$ *от точки* x_0 *до множества* A в пространстве (X, ρ) называется величина

$$\rho(x_0, A) := \inf\{\rho(x_0, x) : x \in A\}, \text{ если } A \neq \varnothing \text{ и } \rho(x, \varnothing) := \infty.$$

Так как $\rho(x_0, x) = \rho(x, x_0)$, в силу аксиомы (M2), для каждого $x \in A$, то положим $\rho(x_0, A) = \rho(A, x_0)$.

Ясно, что если $x_0 \in A$, то $\rho(x_0, A) = 0$. Подобным образом для двух множеств A и B из пространства (X, ρ) *расстояние* $\rho(A, B)$ *от множества* A *до множества* B есть число

$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : \ x \in A, y \in B\}, \text{ если } A \neq \varnothing \neq B,$$

и полагаем

$$\rho(A, \varnothing) := \infty =: \rho(\varnothing, B).$$

Предложение 1.2. *Пусть* A, B *— произвольные непустые множества в пространстве* (X, ρ). *Тогда имеют место равенства*

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, B) : \ x \in A\} = \inf\{\rho(A, y) : \ y \in B\}.$$

◀ Покажем сперва, что для произвольной ограниченной снизу вещественной функции f, определенной на декартовом произведении $A \times B$ множеств A и B, справедливо соотношение

$$\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} f(x, y) = \inf_{x \in A}\left(\inf_{y \in B} f(x, y)\right) = \inf_{y \in B}\left(\inf_{x \in A} f(x, y)\right).$$

Действительно, поскольку $\inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} f(x, y) \leqslant \inf\limits_{y \in B} f(x, y)$ для произвольного $x \in A$, то $\inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} f(x, y) \leqslant \inf\limits_{x \in A}(\inf\limits_{y \in B} f(x, y))$. Далее, для каждого $\varepsilon > 0$ существует пара $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in A \times B$, такая, что $f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) < \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} f(x, y) + \varepsilon$.

С другой стороны, из неравенства

$$\inf_{x \in A}\left(\inf_{y \in B} f(x, y)\right) \leqslant \inf_{y \in B} f(x_\varepsilon, y) \leqslant f(x_\varepsilon, y_\varepsilon),$$

имеем: $\inf\limits_{x\in A}(\inf\limits_{y\in B} f(x,y)) \leqslant \inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y)+\varepsilon$. Отсюда, ввиду произвольного выбора ε, получаем, что

$$\inf_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x,y)\right) \leqslant \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y)$$

и (с учетом предыдущего)

$$\inf_{x\in A}\left(\inf_{y\in B} f(x,y)\right) = \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y).$$

Аналогично доказывается равенство

$$\inf_{y\in B}\left(\inf_{x\in A} f(x,y)\right) \leqslant \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} f(x,y).$$

Для получения утверждения рассматриваемого предложения достаточно положить $f(x,y)=\rho(x,y)$.▶

Предложение 1.3. *Пусть (X,ρ) — произвольное МП. Тогда для любых точек x, $y\in X$ и любого непустого множества $A\subset X$ справедливо неравенство*

$$|\rho(x,A)-\rho(y,A)| \leqslant \rho(x,y).$$

◀ Для каждой точки $z\in A$ в силу неравенства треугольника имеем $\rho(x,z)\leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)$, поэтому

$$\rho(x,A)=\inf_{z\in A}\rho(x,z)\leqslant \inf_{z\in A}(\rho(x,y)+\rho(y,z)) = \\ = \rho(x,y)+\inf_{z\in A}\rho(y,z)=\rho(x,y)+\rho(y,A).$$

Аналогично рассуждая, получаем, что $\rho(y,A)\leqslant\rho(x,y)+\rho(x,A)$. ▶

Отображение $\mathbb{N}\ni n\mapsto x_n\in X$, которое каждому числу $n\in\mathbb{N}$ ставит в соответствие точку x_n пространства (X,ρ), называется *последовательность точек* этого пространства и обозначается символом (x_n) или как семейство с индексом $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (см. 0.6).

Говорят, что *последовательность точек* (x_n) пространства (X,ρ) *сходится к точке* $x_0\in X$, если числовая последовательность $(\rho(x_n,x_0))$

сходится к нулю при $n \to \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$, и пишут $x_n \to x_0$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Точка x_0 называется *пределом последовательности* (x_n).

Из определения сходимости числовой последовательности имеем: последовательность (x_n) пространства (X, ρ) сходится к точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ при $n > n_0$.

Предложение 1.4. *Всякая сходящаяся последовательность точек МП ограничена и имеет не более одного предела.* ►

Предложение 1.5. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0$ *для любой подпоследовательности* (x_{n_k}) *последовательности* (x_n). ►

Две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются *эквивалентными*, если они индуцируют одну и ту же сходимость, т. е. для каждой точки $x_0 \in X$ и каждой последовательности (x_n) точек пространства (X, ρ_1) условие $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_1(x_n, x_0) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_2(x_n, x_0) = 0$.

Теорема 1.1. *Для каждого пространства* (X, ρ) *существует метрика* ρ_1 *на множестве* X, *эквивалентная метрике* ρ *и ограниченная числом 1.*

◄ Положим

$$\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}, \ \forall x, y \in X.$$

Покажем, что ρ_1 — метрика на множестве X. Ясно, что ρ_1 удовлетворяет условиям (M1) и (M2). Пусть x, y и z — произвольные точки множества X. Положим $a = \rho(x, y)$, $b = \rho(y, z)$, $c = \rho(x, z)$. Так как каждое из чисел 2, $1 + a$, $1 + b$ и $a + b$ больше или равно 1 либо c, то

$$\min(2, 1 + a, 1 + b, a + b) \geqslant \min(1, c),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) &= \min(1, a) + \min(1, b) = \\ &= \min(2, 1 + a, 1 + b, a + b) \geqslant \min(1, c) = \rho_1(x, z).\end{aligned}$$

Следовательно, ρ_1 удовлетворяет и условию (M3). Непосредственно из определения метрики ρ_1 заключаем, что она ограничена числом 1 и эквивалентна метрике ρ. ►

§2. Примеры метрических пространств

...полет в область абстрактной общности должен исходить из конкретного и частного и завершается конкретным и частным.

Р. Курант

Приведем примеры наиболее часто встречающихся пространств.

Пример 2.1. *Дискретное метрическое пространство* (или *пространство изолированных точек*) — произвольное множество X, для которого

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = y, \\ 1, \text{ если } x \neq y, \end{cases} \quad \forall\, x,\, y \in X.$$

Пример 2.2. *Числовая прямая*, или *пространство*, $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел с *евклидовой метрикой* ρ:

$$\rho(x,y) = |x - y|.$$

Пример 2.3. *Пространство* $\mathbb{R}^n$ — множество упорядоченных наборов из n действительных чисел с *евклидовой метрикой* ρ:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \eta_k)^2},$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Пример 2.4. *Пространство* m — множество всех ограниченных последовательностей, с расстоянием

$$\rho(x,y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n|,$$

где $x = (\xi_n)$ и $y = (\eta_n)$.

Пример 2.5. *Пространство* c — множество всех сходящихся числовых последовательностей, с расстоянием

$$\rho(x,y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n|,$$

где $x = (\xi_n)$ и $y = (\eta_n)$.

Пример 2.6. *Пространство* l_p ($1 \leqslant p < \infty$) состоит из всех числовых последовательностей $x = (\xi_n)$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$, а расстояние определяется по формуле

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

(В случае $p = \infty$ полагают $l_\infty := m$.)

Пример 2.7. *Пространство* l_p^m ($1 \leqslant p \leqslant \infty$) — множество упорядоченных наборов из m действительных (комплексных) чисел с расстоянием

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |\xi_i - \eta_i|^p\right)^{1/p}, & \text{при } 1 \leqslant p < \infty, \\ \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i - \eta_i|, & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

где $x = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$.

Пример 2.8. *Пространство* s — множество всех числовых последовательностей, в котором метрика определяется функцией

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\xi_n - \eta_n|}{1 + |\xi_n - \eta_n|},$$

где $x = (\xi_n)$ и $y = (\eta_n)$.

Пример 2.9. *Пространство* $C[a,b]$ — множество всех непрерывных действительных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, с *чебышевской метрикой*, которая определяется функцией

$$\rho(x,y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Пример 2.10. *Пространство* $C^k[a,b]$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций с расстоянием

$$\rho(x,y) = \sum_{i=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|.$$

Пример 2.11. *Пространство* $M[a,b]$ – множество всех ограниченных на отрезке $[a,b]$ функций с расстоянием

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Пример 2.12. *Пространство* $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ – множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с расстоянием

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

(Часто полагают, что $\widetilde{L}_\infty[a,b] := M[a,b]$.)

Пример 2.13. *Пространство* $\widetilde{W}_p^l[a,b]$ $(l \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant p < \infty)$ – множество l раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ с расстоянием

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=0}^{l} \int_a^b |x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Пример 2.14. Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) – два метрических пространства. Для любой пары точек $z_1 = (x_1,y_1)$, $z_2 = (x_2,y_2)$ декартова произведения $Z = X \times Y$ положим

$$\rho_Z(z_1,z_2) := \max\{\rho_X(x_1,x_2), \rho_Y(y_1,y_2)\}.$$

Функция $\rho_Z\colon Z \times Z \to [0,\infty)$ является метрикой на множестве Z и называется *произведением метрик* ρ_X, ρ_Y, и пишут $\rho_Z = \rho_X \times \rho_Y$. Полученное МП (Z,ρ_Z) называется *произведением пространств* (X,ρ_X) и (Y,ρ_Y).

Задачи и упражнения

2.1. Проверить аксиомы метрики в примерах 2.1–2.14 и показать, что сходимость по метрике в пространствах из примеров 2.2–2.8, 2.14 есть схо-

§3. Структура подмножеств метрического пространства

Структура вещи — совсем не что-то такое, что мы могли бы «изобрести». Мы можем лишь выводить ее на свет терпеливо, смиренно; знакомясь с ней, ее раскрывать.

А. Гротендик

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *внутренней точкой множества* $A \subset X$, если существует такое число $r > 0$, что $B(x_0, r) \subset A$.

Множество $A \subset X$ называется *открытым* в пространстве (X, ρ), если каждая точка из A является внутренней. Таким образом, то, что A — открытое множество пространства (X, ρ), означает, что с каждой точкой $x_0 \in A$ связано положительное число r, для которого из условий $\rho(x_0, x) < r$, $x \in X$, следует включение $x \in A$.

Пустое множество $\varnothing$ (вообще не содержит точек и поэтому может считаться удовлетворяющим определению открытого множества) и само множество X являются открытыми множествами в пространстве (X, ρ).

Свойства открытых множеств в МП описывает

Теорема 3.1. *В произвольном МП справедливы следующие утверждения:*

(а) любой открытый шар является открытым множеством;

(б) объединение любого семейства открытых множеств открыто;

(в) пересечение конечного числа открытых множеств открыто. ▶

Открытой окрестностью, или просто *окрестностью*, непустого *множества* $A \subset X$ (*точки* $x_0 \in X$) будем называть любое открытое множество в пространстве (X, ρ), содержащее множество A (точку x_0). Очевидно, что r-шар $B(A, r)$ множества A (открытый шар $B(x_0, r)$) является окрестностью множества A (точки x_0).

Замечание 3.1. Из определения окрестности точки и утверждения (a) теоремы 3.1 получаем, что x_0 — внутренняя точка множества A, если для нее существует окрестность, содержащаяся в A.

Теорема 3.2. *Для любого непустого множества A из пространства (X, ρ) и любого числа $r > 0$ множество*

$$V_r(A) = \{x \in X : \rho(x, A) < r\}$$

является окрестностью A.

◀ Непосредственно из определения множества $V_r(A)$ имеем включение $A \subset V_r(A)$. Покажем, что множество $V_r(A)$ открыто. Пусть x_0 — произвольная точка множества $V_r(A)$. Рассмотрим открытый шар $B(x_0, r_0)$, где $r_0 = r - \rho(x_0, A)$, и произвольную точку $y \in B(x_0, r_0)$. Используя неравенство

$$|\rho(x_0, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x_0, y)$$

из предложения 1.3 и определение числа r_0, получаем, что

$$\rho(y, A) \leqslant \rho(x_0, y) + \rho(x_0, A) < r.$$

Отсюда заключаем, что $B(x_0, r_0) \subset V_r(A)$, т. е. множество $V_r(A)$ открыто. ▶

Внутренняя точка множества $X \setminus A$ называется *внешней точкой множества* A. Ясно, что точка $x_0 \in X$ является внешней для множества A в (X, ρ) тогда и только тогда, когда $\rho(x_0, A) > 0$.

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *точкой прикосновения множества* $A \subset X$, если $\rho(x_0, A) = 0$. Совокупность всех точек прикосновения множества $A \subset X$ в пространстве (X, ρ) называется *замыканием множества* A и обозначается символом $\overline{A}$, т. е.

$$\overline{A} := \{x \in X : \rho(x, A) = 0\}.$$

Так как $\rho(x, A) = 0$ для любой точки $x \in A$, то заключаем, что $A \subset \overline{A}$, т. е. каждая точка множества A является для него точкой прикосновения.

Точка прикосновения множества A может не принадлежать A. Например, если $A = (0, 1)$ — интервал числовой прямой $\mathbb{R}$, то точки 0 и 1 являются точками прикосновения для A (в пространстве $\mathbb{R}$), причем они не принадлежат ему.

Теорема 3.3. *Пусть x_0 — точка прикосновения множества A и пусть $x_0 \notin A$. Тогда пересечение $V \cap A$ множества A с любой окрестностью V точки x_0 есть бесконечное множество.*

◄ Предположим противное, и пусть $V \cap A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — конечное множество. По предположению, число

$$r_0 = \min\{\rho(x_0, x_k) : k = \overline{1,n}\} > 0.$$

Тогда, в силу открытости V, найдется такое число $0 < r < r_0$, что шар $B(x_0, r) \subset V$ и $B(x_0, r) \cap A = \varnothing$, т.е. $\rho(x_0, A) > 0$, а это противоречит условию теоремы. ►

Непосредственно из определения замыкания множества и теоремы 3.3 следует

Предложение 3.1. *Имеют место следующие утверждения:*
(а) $(x_0 \in \overline{A}) \iff (\forall r > 0, B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing)$*;*
(б) $(x_0 \in \overline{A}) \iff (\exists\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A : x_n \to x_0$ *при* $n \to \infty)$.

◄ (б) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in A$ такая, что $\rho(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$. По произвольно заданному числу $\varepsilon > 0$ выберем n_0 так, чтобы $\varepsilon < 1$. Тогда $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ при всех $n > n_0$, т.е. $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. ►

Предложение 3.2. *Для любой точки $x_0 \in X$ и любого множества A из пространства (X, ρ) справедливо равенство*

$$\rho(x_0, A) = \rho(x_0, \overline{A}).$$

◄ Непосредственно из определения расстояния от точки x_0 до множества A и включения $A \subset \overline{A}$ имеем неравенство

$$\rho(x_0, \overline{A}) \leqslant \rho(x_0, A). \tag{3.1}$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\overline{a}_\varepsilon \in \overline{A}$, что

$$\rho(x_0, \overline{a}_\varepsilon) < \rho(x_0, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что $\overline{a}_\varepsilon$ является точкой прикосновения множества A, то найдется такая точка $a_\varepsilon \in A$, что $\rho(\overline{a}_\varepsilon, a_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\rho(x_0, a_\varepsilon) \leqslant \rho(x_0, \overline{a}_\varepsilon) + \rho(\overline{a}_\varepsilon, a_\varepsilon) < \rho(x_0, \overline{A}) + \varepsilon.$$

Отсюда, с учетом произвольного выбора числа $\varepsilon > 0$, заключаем, что

$$\rho(x_0, A) \leqslant \rho(x_0, \overline{A}). \tag{3.2}$$

Из полученных неравенств (3.1) и (3.2) следует справедливость нашего предложения. ►

Следствие 3.1. *Пусть A, B — произвольные множества из пространства (X, ρ). Тогда справедливы равенства*

$$\rho(A, B) = \rho(A, \overline{B}) = \rho(\overline{A}, B) = \rho(\overline{A}, \overline{B}).$$

◀ Непосредственно из предложений 1.2 и 3.2 имеем

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A} \rho(x, B) = \inf_{x \in A} \rho(x, \overline{B}) = \rho(A, \overline{B}),$$

и первое равенство доказано.

Аналогично устанавливается справедливость остальных равенств. ▶

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *предельной точкой* множества $A \subset X$, если $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$ (т.е. согласно предложению 3.1.(а), для любого числа $r > 0$ множество $B(x_0, r) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$). Совокупность всех предельных точек множества A называется *производным множеством* (или *производной*) *множества* A и обозначается A'.

Из определения предельной точки и предложения 3.1. (б) следует следующий к р и т е р и й п р и н а д л е ж н о с т и т о ч к и п р о и з в о д н о м у м н о ж е с т в у: точка $x_0 \in A' \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует последовательность точек (x_n) множества A такая, что $x_n \to x_0$, где $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $x_n \neq x_m$ для всех $n \neq m$.

Каждая предельная точка множества является его точкой прикосновения. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. При этом справедливо

Предложение 3.3. *Для любого множества A из МП (X, ρ) имеет место равенство*

$$\overline{A} = A \cup A'.$$

◀ Если $x_0 \in \overline{A}$, то либо $x_0 \in A$, либо $x_0 \notin A$, и тогда произвольная окрестность точки x_0 содержит точку из A, отличную от x_0, т. е. $x_0 \in A'$. Следовательно, $\overline{A} \subset A \cup A'$. Отсюда и из включения $A \cup A' \subset \overline{A}$ (так как $A \subset \overline{A}$ и $A' \subset \overline{A}$) получаем справедливость требуемого равенства. ▶

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *изолированной точкой множества* $A \subset X$, если существует открытый шар $B(x_0, r_0)$, такой, что $B(x_0, r_0) \cap A = \{x_0\}$. Множество, состоящее из изолированных точек, называется *дискретным*.

Ясно, что совокупность всех изолированных точек множества A совпадает с множеством $A \setminus A'$.

Очевидно, что если x_0 — изолированная точка множества A, то $x_0 \in \overline{A}$. Следовательно, с учетом определения предельной точки, заключаем, что замыкание $\overline{A}$ множества A состоит из точек трех типов: изолированные точки множества A; предельные точки множества A, принадлежащие A; предельные точки множества A, не принадлежащие A.

Множество $A \subset X$ называется *замкнутым* в пространстве (X, ρ), если $A = \overline{A}$. Например, из определения производной множества A имеем, что A' — замкнутое множество.

Замкнутое множество в МП характеризует

Теорема 3.4. *Множество $A \subset X$ замкнуто в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда его дополнение $X \setminus A$ открыто.*

◀ Пусть A — замкнутое множество и x_0 — произвольная точка из $X \setminus A$. Тогда из соотношения $x_0 \notin \overline{A}$, согласно предложению 3.1.(а), найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B(x_0, \varepsilon) \cap A = \varnothing$, т.е. $\rho(x_0, A) = \varepsilon > 0$. Покажем справедливость включения $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Допустим противное, т.е. существует элемент $y \in B(x_0, \varepsilon) \cap A$. Тогда имеем неравенство $\rho(x_0, y) \geqslant \rho(x_0, A) = \varepsilon$, которое противоречит тому, что $y \in B(x_0, \varepsilon)$. Следовательно, $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus A$, а значит, множество $X \setminus A$ — открыто.

Обратно, пусть $X \setminus A$ — открытое множество. Тогда для любой точки $x_0 \in X \setminus A$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что $B(x_0, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Следовательно, для каждой точки $y \in A$ имеем неравенство $\rho(x_0, y) \geqslant \varepsilon$, т.е. $\rho(x_0, A) \geqslant \varepsilon$, значит, $x_0 \notin \overline{A}$. Таким образом, если $x_0 \in \overline{A}$, то $x_0 \notin X \setminus A$, т.е. имеем включение $\overline{A} \subset A$. Отсюда, учитывая то, что $A \subset \overline{A}$, получаем равенство $A = \overline{A}$. ▶

Непосредственно из теоремы 3.4 получаем, что пустое множество $\varnothing$ и само множество X являются замкнутыми в (X, ρ).

Следствие 3.2. *Пересечение любого семейства и объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.* ▶

Точка x_0 пространства (X, ρ) называется *граничной точкой множества* $A \subset X$, если она является точкой прикосновения множеств A и $X \setminus A$. Совокупность всех граничных точек множества A называют *границей множества* A и обозначают $\operatorname{Fr} A$, т.е. $\operatorname{Fr} A := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

Из этого определения следует, что характеристическое свойство граничной точки множества состоит в том, что в любой ее окрестности имеются как точки этого множества, так и точки, ему не принадлежащие, а с учетом предложения 3.1 имеем

Предложение 3.4. *Условие $x_0 \in \operatorname{Fr} A$ эквивалентно тому, что существует последовательность (x_n) из $X \setminus A$, сходящаяся к x_0, и существует последовательность $(\tilde{x}_n)$ из A, сходящаяся к x_0.*

◀ Пусть выполнено условие $x_0 \in \operatorname{Fr} A$. Тогда для любого $r > 0$ $B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing$ и $B(x_0, r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$. Положим $r = r_n$, где $r_0 \to 0$. В результате получим последовательности $(x_n), x_n \in A$, и $(\tilde{x}_n), x_n \in X \setminus A$, такие, что $x_n \to x_0$ и $\tilde{x}_n \to x_0$.

Обратно, если $x_n \to x_0, x_n \in A$, и $\widetilde{x}_n \to x_0, \widetilde{x}_n \in X \setminus A$, то из определения предела последовательности следует, что любой открытый шар $B(x_0, r)$ содержит как точку x_n, так и точку $\widetilde{x}_n$ при достаточно большом $n = n(r)$. Отсюда и из определения $\operatorname{Fr} A$ следует, что $x \in \operatorname{Fr} A$. ▶

Задачи и упражнения

3.1. (а) Пусть M — произвольное непустое подмножество МП (X, ρ), для которого $\operatorname{Int} M \neq \varnothing$. Доказать, что для любой точки $x_0 \in \operatorname{Int} M$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что справедливо включение $\overline{B}(x_0, \varepsilon) \subset M$.

(б) Доказать, что множество $A = \{x \in C[a, b] : |x(t)| < x_0(t), t \in [a, b]\}$, где $x_0(t)$ — фиксированная функция из $C[a, b]$, является открытым множеством в пространстве $C[a, b]$.

(в) Пусть A — открытое множество в (X, ρ) и $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$. Показать, что множество $A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ также открыто.

3.2. Пусть A — произвольное непустое множество в пространстве (X, ρ) и пусть $0 < r_1 < r_2$. Показать, что множества

$$\{x \in X : \rho(x, A) > r_1\}, \quad \{x \in X : r_1 < \rho(x, A) < r_2\}$$

открыты, а множества

$$\begin{array}{ll} \{x \in X : \rho(x, A) \leqslant r_1\}, & \{x \in X : \rho(x, A) \geqslant r_2\}, \\ \{x \in X : r_1 \leqslant \rho(x, A) \leqslant r_2\}, & \{x \in X : \rho(x, A) = r_1\} \end{array}$$

замкнуты в пространстве (X, ρ).

3.3. Доказать, что (а) любое подмножество дискретного пространства (см. пример 2.1) является одновременно открытым и замкнутым; (б) в ультраметрическом пространстве любой открытый (замкнутый) шар является одновременно открытым и замкнутым множеством, причем выполнено равенство $B(x_0, r) = B(x, r)$ для любой точки $x \in B(x_0, r)$.

3.4. Доказать, что конечное множество открыто в МП тогда и только тогда, когда каждая его точка является изолированной.

3.5. На множестве X заданы две метрики ρ_1, ρ_2 и существует постоянная $c > 0$, такая, что $\rho_1(x, y) \leqslant c\rho_2(x, y)$ для любых $x, y \in X$. Доказать,

§4. Операторы взятия внутренности, замыкания и граничный оператор

Определение по существу сводится к тому, что вместо какой-то комбинации старых символов используется один новый символ.

Г. Штейнгауз

Пусть A – произвольное множество в пространстве (X, ρ). *Внутренностью* (или *открытой частью*) *множества* A в пространстве (X, ρ) называется совокупность всех внутренних точек множества A; это множество обозначается $\operatorname{Int} A$ или, подробнее, $\operatorname{Int}_X A$. Отсюда, с учетом замечания 3.1, имеем

$$\operatorname{Int} A := \cup\{U - \text{открыто} : U \subset A\}.$$

Так как объединение любого семейства открытых множеств открыто (см. теорему 3.1(б)), то получаем, что внутренность множества представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в A. Очевидно, что множество A открыто тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{Int} A$.

Отображение $A \mapsto \operatorname{Int} A$, в силу которого каждому множеству $A \subset X$ сопоставляется его внутренность $\operatorname{Int} A$ в пространстве (X, ρ), называется *оператором взятия внутренности.*

Теорема 4.1. *Оператор* Int *обладает следующими свойствами:*
(a) $\operatorname{Int} X = X$;
($б$) $\operatorname{Int} A \subset A$;
($в$) $(A \subset B) \Rightarrow (\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B)$ — *свойство монотонности;*
($г$) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$;
($д$) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

◄ (г) Из очевидных включений

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset A, \ \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset B,$$

имеем
$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset A \cap B.$$

Так как левая часть последнего соотношения – открытое множество, то
$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A \cap B). \tag{4.1}$$

С другой стороны, из свойства монотонности оператора Int получаем
$$\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A, \ \operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} B.$$

Отсюда следует
$$\operatorname{Int}(A \cap B) \subset \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B. \tag{4.2}$$

Из включений (4.1) и (4.2) получаем требуемое равенство. ►

Отображение $A \mapsto \overline{A}$, сопоставляющее каждому множеству $A \subset X$ его замыкание $\overline{A}$ в пространстве (X, ρ), называется *оператором замыкания*. Согласно теореме 3.4 и определении множества $\operatorname{Int} A$ имеем
$$\overline{A} = \cap\{F \subset X : F = \overline{F}, F \supset A\}.$$

Так как пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто (следствие 3.2), то получаем, что замыкание $\overline{A}$ множества A является наименьшим замкнутым множеством, содержащим A.

Теорема 4.2. *Оператор замыкания обладает следующими свойствами:*

(*а*) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;
(*б*) $A \subset \overline{A}$;
(*в*) $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$ – *свойство монотонности;*
(*г*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(*д*) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

◄ (г) Из очевидных включений
$$A \subset A \cup B, \ B \subset A \cup B$$

и монотонности оператора замыкания
$$\overline{A} \subset \overline{A \cup B}, \ \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$$

получаем
$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}. \tag{4.3}$$

С другой стороны, из включений $A \subset \overline{A}$ и $B \subset \overline{B}$ вытекает, что $A \cup B \subset \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Так как множество $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнуто, то из определения замыкания имеем

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}. \tag{4.4}$$

Из включений (4.3) и (4.4) следует справедливость равенства (г).

(д) Непосредственно из свойства монотонности оператора замыкания имеем: $\overline{A} \subset \overline{(\overline{A})}$. Покажем справедливость обратного включения: $\overline{(\overline{A})} \subset \overline{A}$. Пусть x_0 — произвольная точка множества $\overline{(\overline{A})}$, т.е. x_0 — точка прикосновения множества $\overline{A}$. Значит, в любом шаре $B(x_0, r)$ найдется точка $x_1 \in \overline{A}$ (в силу предложения 3.1). Пусть $r_1 = r - \rho(x_0, x_1)$. Рассмотрим шар $B(x_1, r_1)$. Для любого элемента y из $B(x_1, r_1)$, с учетом неравенства треугольника, имеем

$$\rho(x_0, y) \leqslant \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, y) = r - r_1 + \rho(x_1, y) < r.$$

Следовательно, $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r)$. Поскольку $x_1 \in \overline{A}$, то в множестве A найдется точка x_2, принадлежащая шару $B(x_1, r_1)$. Тогда $x_2 \in B(x_0, r)$. Таким образом, в произвольном шаре $B(x_0, r)$ содержится точка из A, т.е. $x_0 \in \overline{A}$. ►

Связь оператора взятия внутренности с оператором замыкания устанавливает

Теорема 4.3. *Для любого множества A из пространства (X, ρ) справедливо равенство*

$$\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{(X \setminus A)}.$$

◄ Из включения $X \setminus A \subset \overline{X \setminus A}$ следует, что $A \supset X \setminus \overline{(X \setminus A)}$. Так как множество $X \setminus \overline{(X \setminus A)}$ открыто, а $\operatorname{Int} A$ представляет собой наибольшее открытое множество, содержащееся в A, то получаем

$$\operatorname{Int} A \supset X \setminus \overline{(X \setminus A)}. \tag{4.5}$$

Пусть U — произвольное открытое множество в пространстве (X, ρ), содержащееся в A. Тогда $X \setminus A \subset X \setminus U$. Учитывая свойство монотонности оператора замыкания и замкнутость множества $X \setminus U$, имеем

$$\overline{X \setminus A} \subset \overline{X \setminus U} = X \setminus U.$$

Следовательно, справедливо включение

$$U \subset X \setminus \overline{(X \setminus A)}. \tag{4.6}$$

Положив $U = \operatorname{Int} A$ в соотношении (4.6), получим

$$\operatorname{Int} A \subset X \setminus \overline{(X \setminus A)}. \tag{4.7}$$

Итак, из включений (4.5) и (4.7) следует справедливость искомого равенства. ►

Следствие 4.1. *Для любого множества A из пространства (X, ρ) имеет место равенство*

$$\overline{A} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A). \ ►$$

Отображение $A \mapsto \operatorname{Fr} A$, сопоставляющее каждому множеству $A \subset X$ множество всех его граничных точек $\operatorname{Fr} A$ в пространстве (X, ρ), называется *граничным оператором.*

Теорема 4.4. *Оператор* Fr *обладает следующими свойствами:*
(*а*) $\operatorname{Fr} A = X \setminus (\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int}(X \setminus A))$;
(*б*) $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr}(X \setminus A)$;
(*в*) $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$;
(*г*) $\overline{A} = A \cup \operatorname{Fr} A$;
(*д*) $\operatorname{Int} A = A \setminus \operatorname{Fr} A$. ►

Задачи и упражнения

4.1. Найти в пространстве $\mathbb{R}$ замыкание, внутренность и границу следующих его подмножеств:

$$\{a\}; \quad (a,b); \quad (a,b]; \quad [a,b); \quad [a,b]; \quad [a,b) \cup \{c\}; \quad [a,b) \cup (b,c].$$

4.2. (а) Доказать, что в произвольном МП справедливо включение $\overline{B(x_0,r)} \subset \overline{B}(x_0,r)$. Приведите пример, когда $\overline{B(x_0,r)}$ не совпадает с $\overline{B}(x_0,r)$.

(б) Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ для всякой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого числа $r > 0$ справедливы следующие равенства:

$$\overline{B}(x_0,r) = \overline{B(x_0,r)} = (B(x_0,r))';$$
$$S(x_0,r) = \operatorname{Fr}(B(x_0,r)) = \operatorname{Fr}(\overline{B}(x_0,r)).$$

4.3. Доказать следующие свойства оператора взятия внутренности и оператора замыкания:

§5. Подпространство метрического пространства

Всякое рассуждение должно проводиться в определенной, четко ограниченной области предметов, которую следует заранее указать и которая не может быть всеобъемлющей.

Э. Шредер

Пусть (X, ρ) — произвольное МП и M — некоторое его непустое подмножество. Для всякой пары точек x, $y \in M$ положим

$$\rho_M(x, y) := \rho(x, y). \tag{5.1}$$

Тем самым на множестве $M \times M$ определена функция $\rho_M = \rho\big|_{M\times M}$, для которой, очевидным образом, выполнены все аксиомы метрики. Значит, ρ_M является метрикой на M и называется *индуцированной метрикой* на множестве M из пространства (X, ρ). Полученное МП (M, ρ_M) называется *подпространством пространства* (X, ρ). Если M — открытое (замкнутое) подмножество в (X, ρ), то (M, ρ_M) называется *открытым* (*замкнутым*) *подпространством*.

Открытый шар с центром в точке $x_0 \in M$ радиуса r в подпространстве (M, ρ_M) пространства (X, ρ) будем обозначать символом $B_M(x_0, r)$, т. е.

$$B_M(x_0, r) := \{x \in M : \rho_M(x_0, x) < r\}.$$

Отсюда, принимая во внимание определение индуцированной метрики ρ_M (5.1), следует

Предложение 5.1. *Пусть (M, ρ_M) — подпространство МП (X, ρ). Тогда для всякой точки $x_0 \in M$ и любого числа $r > 0$ открытый шар $B_M(x_0, r)$ в (M, ρ_M) допускает представление*

$$B_M(x_0, r) = M \cap B(x_0, r), \tag{5.2}$$

где $B(x_0, r)$ — открытый шар в (X, ρ).

◀ Для произвольной точки $x \in B_M(x_0, r)$ одновременно выполнены соотношения: $x \in M$, $\rho(x, x_0) < r$, т. е. $x \in M \cap B(x_0, r)$. Значит, справедливо включение

$$B_M(x_0, r) \subset B(x_0, r) \cap M. \tag{5.3}$$

Обратно, если $x \in B(x_0, r) \cap M$, то из определения шара $B_M(x_0, r)$ имеем, что $x \in B_M(x_0, r)$. Отсюда заключаем, что

$$B(x_0, r) \cap M \subset B_M(x_0, r). \tag{5.4}$$

Из полученных соотношений (5.3) и (5.4) следует равенство (5.2). ▶

Из определения открытого множества в МП имеем, что множество $A \subset M$ *открыто в подпространстве* (M, ρ_M) (или *относительно множества* M), если для всякой точки $x_0 \in A$ существует число $r > 0$, такое, что $B_M(x_0, r) \subset A$.

Критерии открытости множества в подпространстве устанавливает следующая

Теорема 5.1. *Для того чтобы множество $A \subset M$ было открыто в подпространстве (M, ρ_M) пространства (X, ρ), необходимо и достаточно, чтобы существовало такое множество G, открытое в пространстве (X, ρ), что $A = M \cap G$.*

◀ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть множество A открыто в (M, ρ_M). Тогда для любой точки $a \in A$ существует положительное число $r_a > 0$, такое, что $B_M(a, r_a) \subset A$, где $B_M(a, r_a)$ — открытый шар подпространства (M, ρ_M). Поэтому, принимая во внимание равенство (5.2), имеем

$$\cup\{B_M(a, r_a) : a \in A\} = [\cup\{B(a, r_a) : a \in A\}] \cap M.$$

Тогда из теоремы 3.1(б) заключаем, что множество $G = \cup\{B(a, r_a) : a \in A\}$ открыто в (X, ρ) и $A \subset G$. Следовательно, $M \cap G \supset A$. С другой стороны, согласно выбору шара $B(a, r_a)$ имеем $B(a, r_a) \cap M \subset A$ при каждом $a \in A$. Значит, $G \cap M \subset A$. Отсюда и из полученного выше включения, $M \cap G \supset A$, вытекает требуемое равенство: $A = M \cap G$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если G — открытое множество пространства (X, ρ) и $A = M \cap G$, то для каждой точки $a \in A$ найдется шар $B(a, r_a) \subset G$, в силу очевидного включения $A \subset G$. Тогда $B(a, r_a) \cap M \subset A$. Итак, для каждой точки $a \in A$ нашелся открытый шар $B_M(a, r_a) = B(a, r_a) \cap M$ в (M, ρ_M), такой, что $B_M(a, r_a) \subset A$, а это значит, что A — открытое множество в (M, ρ_M). ▶

Из критерия замкнутости множества в МП (теорема 3.4) и теоремы 5.1 следует

Теорема 5.2. *Для того чтобы множество $B \subset M$ было замкнутым в подпространстве (M, ρ_M) пространства (X, ρ), необходимо и достаточно, чтобы существовало замкнутое множество F пространства (X, ρ), такое, что $B = M \cap F$.* ►

Теорема 5.3. *Всякое открытое (замкнутое) множество A подпространства (M, ρ_M) открыто (замкнуто) в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда подпространство (M, ρ_M) открыто (замкнуто) в (X, ρ).*

◄ Необходимость очевидна, так как множество M само является открытым множеством в (M, ρ_M). Пусть теперь множество M открыто в (X, ρ) и пусть $A \subset M$ — произвольное открытое подмножество в (M, ρ_M), т. е. $A = M \cap G$, где G — некоторое открытое множество в (X, ρ). Таким образом, A есть пересечение двух открытых множеств в (X, ρ). Значит, в силу теоремы 3.1(в), множество A открыто в (X, ρ). ►

Замечание 5.1. Из доказанных теорем 5.1–5.3 заключаем, что множество A может быть открытым в подпространстве (M, ρ_M), не будучи открытым в самом пространстве (X, ρ) (например, если (X, ρ) совпадает с пространством $\mathbb{R}^2$, $M = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ и $A = \{(x, 0) : x \in (c, d)\}$, то множество A открыто в подпространстве (M, ρ_M), но не в $\mathbb{R}^2$). Следовательно, свойство множества A быть открытым зависит от пространства, в котором оно содержится. То же верно и в отношении свойства множества быть замкнутым.

Теорема 5.4. *Замыкание $\overline{B}^M$ множества $B \subset M$ в подпространстве (M, ρ_M) представимо в виде пересечения замыкания $\overline{B}^X$ множества B в пространстве (X, ρ) с множеством M, т. е. справедливо равенство $\overline{B}^M = \overline{B}^X \cap M$.*

◄ Согласно определению замыкания имеем, что

$$\overline{B}^M = \cap\{F - \text{замкнуто в } (M, \rho_M) : F \supset B\}.$$

Так как каждое множество F, замкнутое в подпространстве (M, ρ_M), представимо, в силу теоремы 5.2, в виде

$$F = F_1 \cap M,$$

где F_1 – замкнутое множество в пространстве (X, ρ), окончательно получаем:

$$\overline{B}^M = \cap\{F_1 \cap M = F : F_1 \supset B\} =$$
$$= M \cap [\cap\{F_1 - \text{замкнуто в } (X,\rho) : F_1 \supset B\}] = M \cap \overline{B}^X . \blacktriangleright$$

Задачи и упражнения

5.1. (а) Пусть $\overline{B}_M(x_0, r)$ $(S(x_0, r))$ – замкнутый шар (сфера) с центром в точке $x_0 \in M$ радиуса r в подпространстве (M, ρ_M). Установить справедливость следующих равенств:

$\overline{B}_M(x_0, r) = \overline{B}(x_0, r) \cap M,$
$S_M(x_0, r) = S(x_0, r) \cap M,$

где $\overline{B}(x_0, r)(S(x_0, r))$ – замкнутый шар (сфера) в пространстве (X, ρ).

(б) Пусть $[a, b]$ и (c, d) – подмножества пространства $\mathbb{R}$. Описать все замкнутые и открытые множества в подпространствах $((c, d), \rho_{(c,d)})$, $([c, d], \rho_{[c,d]})$, где $a < c < d < b$, и указать, какие из этих множеств будут открытыми (замкнутыми) в пространстве $\mathbb{R}$.

(в) Пусть $([a, b], \rho_{[a,b]})$ – подпространство пространства $\mathbb{R}$. Найти замыкание, границу и внутренность множеств $[c, d)$, (c, d), $\{c\}$, $[c, d\ ]$ $(a \leqslant c < d \leqslant b)$ в этом подпространстве.

5.2. Пусть (Z, d) – произведение пространств (X, ρ) и (Y, σ). Доказать, что для любой пары множеств $A \subset X$ и $B \subset Y$ имеют место следующие соотношения:

(а) $\mathrm{Int}_Z(A \times B) = \mathrm{Int}_X A \times \mathrm{Int}_Y B;$

(б) $\overline{A \times B}^Z = \overline{A}^X \times \overline{B}^Y;$

(в) $\mathrm{Fr}_Z(A \times B) = (\overline{A}^X \times \mathrm{Fr}_Y B) \cup \left(\mathrm{Fr}_X A \times \overline{B}^Y\right).$

Из соотношения (б), в частности, получаем, что для замкнутости множества $A \times B$ в пространстве (Z, d) необходимо и достаточно, чтобы A было замкнуто в (X, ρ) и B было замкнуто в (Y, σ).

5.3. Пусть A, B – два непустых множества из пространства (X, ρ) и U – подмножество множества $A \cap B$, открытое (или, соответственно, замкнутое) в подпространствах (A, ρ_A) и (B, ρ_B). Показать, что тогда множество U открыто (замкнуто) в подпространстве $(A \cap B, \rho_{A \cap B})$.

5.4. Пусть B – множество в подпространстве (M, ρ_M) пространства (X, ρ). Доказать следующие формулы:

§6. Различные классы подмножеств

Математики — как французы: все, что вы им говорите, они переводят на свой язык, и это тотчас же становится чем-то совершенно иным.

И. Гете

Множество, представимое в виде пересечения счетного числа открытых множеств пространства (X, ρ), называется *множеством типа* G_δ, или G_δ*-множеством*.

Множество, представимое в виде объединения счетного числа замкнутых множеств пространства (X, ρ), называется *множеством типа* F_σ, или F_σ*-множеством*. Очевидно, что дополнение к $F_\sigma(G_\delta)$-множеству относительно множества X является $G_\delta(F_\sigma)$-множеством в (X, ρ). Связь между замкнутыми (открытыми) множествами и $G_\delta(F_\sigma)$-множествами устанавливает

Теорема 6.1. *Всякое непустое замкнутое множество в МП есть множество типа* G_δ, *а всякое непустое открытое множество — множество типа* F_σ.

◄ Пусть F — замкнутое множество в (X, ρ). Для каждого натурального числа n рассмотрим окрестность $V_n = V_{\frac{1}{n}}(F)$ множества F (см. теорему 3.2). Так как при всяком n справедливо соотношение $F \subset V_n$, то получаем включение $F \subset \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. С другой стороны, произвольная точка $x \in \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ является точкой прикосновения множества F, а в силу замкнутости F заключаем, что $x \in F$. Отсюда, с учетом полученного выше включения, имеем равенство $F = \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, т.е. F есть множество типа G_δ.

Пусть U — открытое множество в (X, ρ). Тогда $X \setminus U = F$ замкнуто и является G_δ-множеством. Учитывая, что дополнение к G_δ-множеству есть F_σ-множество, получаем, что U есть F_σ-множество. ►

Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* (или просто *плотным*) в пространстве (X, ρ), если $\overline{A} = X$, т.е. если каждая точка из X является точкой прикосновения для A. Очевидно (см. теорему 4.3), что множество A всюду плотно в (X, ρ) в том и только в том случае, когда $\mathrm{Int}\overline{A} = X$.

Множество $A \subset X$ называется *коплотным* (или *граничным*) в пространстве (X, ρ), если $X \setminus A$ всюду плотно в (X, ρ), т. е. $\mathrm{Int}A = \varnothing$.

Множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным* (или *разреженным*) в пространстве (X, ρ), если его замыкание $\overline{A}$ коплотно в (X, ρ), т. е. $\mathrm{Int}\overline{A} = \varnothing$. Итак, множество A нигде не плотно в (X, ρ) тогда и только тогда, когда его замыкание не содержит никаких непустых открытых множеств пространства (X, ρ).

Теорема 6.2. *Пусть A — множество в пространстве (X, ρ). Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) *(A всюду плотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ (для любого непустого открытого множества U в (X, ρ) множество $A \cap U \neq \varnothing$);*

(б) *(A коплотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ (для любого непустого открытого множества U в (X, ρ) множество $U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$);*

(в) *(A нигде не плотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ (для любого непустого открытого множества U существует непустое открытое множество $V \subset U$, такое, что $V \cap A = \varnothing$);*

(г) *(A нигде не плотно в (X, ρ)) $\Rightarrow$ ($\overline{A}$ — нигде не плотно);*

(д) *(открытое множество A всюду плотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ ($X \setminus A$ — нигде не плотно);*

(е) *(замкнутое множество F нигде не плотно в (X, ρ)) $\Leftrightarrow$ (открытое множество $X \setminus F$ всюду плотно в (X, ρ)).*

◄ (а) Пусть $\overline{A} = X$, и пусть существует открытое непустое множество U, такое, что $A \cap U = \varnothing$. Тогда $A \subset X \setminus U$. Отсюда в силу замкнутости множества $X \setminus U$ имеем включение $\overline{A} \subset X \setminus U$, т. е. $X \subset X \setminus U$. Это противоречит тому, что $U \neq \varnothing$.

Обратно, для произвольной точки $x_0 \in X$ и произвольной ее окрестности U по условию имеем, что $A \cap U \neq \varnothing$. Следовательно, $x_0 \in \overline{A}$. Значит, в силу произвольного выбора точки x_0 получаем, что $\overline{A} \supset X$, т. е. $X = \overline{A}$.

(в) В силу определения нигде не плотного множества для любого непустого открытого множества U имеем: $(X \setminus \overline{A}) \cap U \neq \varnothing$. Положив $V = (X \setminus \overline{A}) \cap U$, получаем, что $V \subset U$ и $V \subset X \setminus \overline{A} \subset X \setminus A$, т. е. $V \cap A = \varnothing$.

Обратно, допустим, что $U = \operatorname{Int}\overline{A} \neq \varnothing$. По условию, существует такое непустое открытое подмножество V множества U, что $V \cap A = \varnothing$. Но тогда $V \cap \overline{A} = \varnothing$, что невозможно в силу определения множества U. ►

МП называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное и всюду плотное подмножество, или другими словами: в (X, ρ) существует последовательность точек (x_n), такая, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого $x \in X$ найдется элемент x_{n_0} последовательности (x_n), для которого выполняется неравенство $\rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$.

Семейство $\{G_t : t \in T\}$ непустых открытых множеств в (X, ρ) называется *базой пространства* (X, ρ), если любое непустое открытое множество в (X, ρ) можно представить в виде объединения некоторого подсемейства $\{G_t : t \in T_0\}$, $T_0 \subset T$, семейства $\{G_t : t \in T\}$. Ясно, что совокупность всех открытых шаров с центром во всевозможных точках из X является базой МП (X, ρ).

Предложение 6.1. *Семейство $\{G_t : t \in T\}$ непустых открытых множеств $G_t \subset X$ будет базой пространства (X, ρ) тогда и только тогда, когда для любой точки $x_0 \in X$ и любой ее окрестности V существует такой индекс $t_0 \in T$, что $x_0 \in G_{t_0} \subset V$.*

◄ Необходимость непосредственно следует из определения базы. Для доказательства достаточности рассмотрим произвольное открытое множество U в (X, ρ) и x — некоторую точку множества U. Тогда по условию найдется такой индекс $t(x) \in T$, что $x \in G_{t(x)} \subset U$. Следовательно, $U \subset \cup\{G_{t(x)} : x \in U\} \subset U$, т.е. U есть объединение подсемейства $\{G_{t(x)} : x \in U\}$ семейства $\{G_t : t \in T\}$, а это значит, что $\{G_t : t \in T\}$ — база пространства (X, ρ). ►

Теорема 6.3. *МП сепарабельно тогда и только тогда, когда оно обладает счетной базой.*

◄ Допустим, что (X, ρ) — сепарабельное МП и $M = \{a_n\}$ — счетное всюду плотное подмножество в (X, ρ). Рассмотрим семейство открытых шаров $\{B(a_n, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$. Это семейство счетно (так как множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно) и является базой пространства (X, ρ). Действительно, для любой точки $x \in X$ и каждого $r > 0$ существуют натуральное число m и элемент $a_n \in M$ (в силу плотности M в (X, ρ)), такие, что $\frac{1}{m} < \frac{r}{2}$ и $\rho(x, a_n) < \frac{1}{m}$, т.е. $x \in B(a_n, \frac{1}{m})$. Отсюда для произвольной точки $y \in B(a_n, \frac{1}{m})$ получим

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, a_n) + \rho(a_n, y) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} < r.$$

Таким образом, для произвольного шара $B(x,r)$ найдется шар $B(a_n, \frac{1}{m})$ из рассматриваемого семейства, такой, что $B(a_n, \frac{1}{m}) \subset B(x,r)$. Отсюда на основании предложения 6.1 заключаем, что семейство открытых шаров $\{B(a_n, \frac{1}{m}) : n, m \in \mathbb{N}\}$ является базой пространства (X,ρ).

Обратно, пусть $\{G_n\}$ — счетная база пространства (X,ρ). Образуем счетное множество $M = \{a_n\}$, выбрав по одной точке $a_n \in G_n$. Покажем, что множество M всюду плотно в (X,ρ). Пусть $x_0 \in X$ — произвольная точка и U_0 — произвольная ее окрестность. Тогда из определения базы пространства имеем, что существует такой элемент $G_{n_0} \in \{G_n\}$, что $G_{n_0} \subset U_0$, а потому $a_{n_0} \in U_0$. Таким образом, каждая окрестность точки $x_0 \in X$ содержит точку из M, т. е. $\overline{M} = X$. ►

Следствие 6.1. *Каждое открытое покрытие сепарабельного МП содержит счетное покрытие.*

◄ Пусть $U = \{U_\alpha\}$ — некоторое открытие сепарабельного МП (X,ρ). Тогда каждая точка $x \in X$ содержится в некотором U_α. Обозначим через $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ счетную базу МП (X,ρ). Согласно предположению 6.1, имеем соотношение $x \in G_{k(x)} \subset U_\alpha$. Тогда система множеств $\{G_{k(x)} : x \in X\}$ счетна как подмножество счетной системы $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$ (см. пункт 0.5), причем она образует открытое покрытие (X,ρ). Выберем для каждого $G_{k(x)}$ одно из содержащих его множеств $U_\alpha \in U$. В результате получим счетное подпокрытие покрытия U. ►

Следствие 6.2. *Любое подмножество сепарабельного МП сепарабельно.*

◄ Пусть (X,ρ) — сепарабельное МП, $M \subset X$, и пусть $\{G_n\}$ — счетная база в (X,ρ). Тогда, в силу теоремы 5.1, $\{G_n \cap M\} \setminus \{\varnothing\}$ — счетная база подпространства (M,ρ_M). Следовательно, на основании теоремы 6.3 получаем справедливость нашего утверждения. ►

Объединяя следствия 6.1 и 6.2, получаем

Следствие 6.3. *Любое открытое покрытие любого подмножества сепарабельного МП имеет счетное подпокрытие.* ►

Множество в МП называется *множеством первой категории* (или *тощим*), если оно представимо в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств в исходном МП. В противном случае оно называется *множеством второй категории*.

Теорема 6.4. *Всякое множество первой категории содержится в некотором F_σ-множестве первой категории.*

◀ Пусть M — произвольное множество первой категории в (X,ρ), и пусть $M = \bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, где каждое из A_n нигде не плотно в (X,ρ). Очевидно, что $M \subset \cup\{\overline{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Следовательно, M оказывается подмножеством множества $\bigcup\{\overline{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$, являющегося, в силу теоремы 6.2.(г), F_σ-множеством первой категории. ▶

Теорема 6.5. *Если дополнение к F_σ-множеству всюду плотно, то оно относится к первой категории.*

◀ Пусть $M = \bigcup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, F_n — замкнутые множества в (X,ρ), и пусть множество $X \setminus M$ всюду плотно в (X,ρ). Докажем, что каждое из множеств F_n нигде не плотно. В силу замкнутости множества F_n имеем, что $X \setminus F_n$ — открытое множество. Кроме того, из включения $X \setminus M \subset X \setminus F_n$ и монотонности оператора замыкания получаем равенство $\overline{X \setminus F_n} = X$. Следовательно, множество F_n нигде не плотно, а значит, M — множество первой категории. ▶

Задачи и упражнения

6.1. Доказать следующие свойства $F_\sigma(G_\delta)$-множеств:

(а) объединение счетного числа F_σ-множеств есть F_σ-множество;

(б) пересечение конечного числа F_σ-множеств есть F_σ-множество;

(в) всякое F_σ-множество есть объединение возрастающей последовательности замкнутых множеств;

(г) пересечение счетного числа и объединение конечного числа G_δ-множеств есть G_δ-множество;

(д) всякое G_δ-множество есть пересечение убывающей последовательности открытых множеств.

6.2. Доказать, что в произвольном МП всякое счетное множество есть F_σ-множество.

6.3. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}$

(а) множество $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ является одновременно F_σ-множеством и G_δ-множеством;

(б) множество рациональных чисел является F_σ-множеством;

(в) множество иррациональных чисел есть G_δ-множество.

§7. Непрерывные отображения

> *Для математики существенна лишь форма соответствия (связи) между двумя переменными величинами, которые она рассматривает.*
>
> *Р. Курант, Г. Роббинс. Что такое математика?*

Пусть (X, ρ), (Y, σ) — два произвольных метрических пространства. Говорят, что f — отображение пространства (X, ρ) в пространство (Y, σ), и пишут $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, имея в виду отображение f множества X в множество Y (обозначаемое $f\colon X \to Y$) с фиксированными на них метриками ρ и σ, соответственно.

Приведем следующие определения непрерывности отображения в точке:

(i) (на языке окрестностей) отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности V точки $f(x_0) \in Y$ существует такая окрестность U точки x_0, что $f(U) \subset V$;

(ii) (по Гейне) отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности точек (x_n), $x_n \in X$, сходящейся к x_0 в (X, ρ), последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x_0)$ в (Y, σ);

(iii) (по Коши) отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что из неравенства $\rho(x, x_0) < \delta$ следует $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Теорема 7.1. *Определения (i), (ii) и (iii) эквивалентны.*

◄ Пусть задано отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$; покажем справедливость следующих импликаций: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Докажем, что (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть x_0, $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $x_n \to x_0$. Для каждой окрестности $V \subset Y$ точки $f(x_0)$, существует окрестность $U \subset X$ точки x_0 такая, что $f(U) \subset V$. Так как $x_n \to x_0$, то все точки x_n, начиная с некоторого номера n_0, содержатся в окрестности U: $x_n \in U$ при $n \geqslant n_0$. Но тогда $f(x_n) \in f(U) \subset V$ для $n \geqslant n_0$, т. е. $f(x_n) \to f(x_0)$.

Теперь покажем, что (ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть определение (iii) не выполнено, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $x \in X$, для которой $\rho(x, x_0) < \delta$, однако $\sigma(f(x_0), f(x)) \geqslant \varepsilon$. Выбирая $\delta = \frac{1}{n}$, где $n = 1, 2, \ldots$, получим последовательность (x_n) в (X, ρ), которая сходится к точке x_0 и $\sigma(f(x_0), f(x_n)) \geqslant \varepsilon$. Это противоречит условию (ii).

Остается доказать, что (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть V — произвольная окрестность точки $f(x_0)$ в (Y, σ). Тогда найдется шар $B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Из (iii) имеем, что существует такое $\delta > 0$, что $\sigma(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$, как только $x \in B_X(x_0, \delta)$. Но тогда $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset V$, что означает непрерывность отображения f в точке x_0 в смысле определения (i). ▶

Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, непрерывное в каждой точке множества X, называется *непрерывным отображением* пространства (X, ρ) в пространство (Y, σ), или просто *непрерывным отображением* на пространстве (X, ρ). Множество всех непрерывных отображений из (X, ρ) в (Y, σ) обозначают символом $C(X, Y)$, причем при $Y = \mathbb{R}$ будем писать $C(X)$.

Теорема 7.2 (критерий непрерывности отображения). *Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(V)$ открыт в (X, ρ) для любого открытого множества V из пространства (Y, σ).*

◀ Необходимость. Пусть отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ непрерывно и V — произвольное открытое множество в (Y, σ). Если $f^{-1}(V) = \varnothing$, то открытость множества $f^{-1}(V)$ очевидна, так как пустое множество $\varnothing$ открыто.

Пусть $f^{-1}(V) \neq \varnothing$, и положим $U = f^{-1}(V)$. Для произвольной точки $x_0 \in U$ имеем, что $f(x_0) \in V$, следовательно, V можно рассматривать как окрестность точки $f(x_0)$. В силу непрерывности отображения f найдется окрестность U_{x_0} точки x_0, такая, что $f(U_{x_0}) \subset V$, т. е. $U_{x_0} \subset U$. Итак, для любой точки $x_0 \in U$ найдется окрестность U_{x_0}, такая, что $U_{x_0} \subset U$. Поскольку $U = \cup\{U_{x_0} : x_0 \in U\}$, то множество U открыто как объединение открытых множеств U_{x_0}. Таким образом, прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества из (Y, σ) открыт в (X, ρ).

Достаточность. Пусть x_0 — произвольная точка из (X, ρ). Положим, $y_0 = f(x_0)$ и V — произвольная окрестность точки y_0. Тогда $U = f^{-1}(V)$ будет, по условию, окрестностью точки x_0, причём $f(U) \subset V$.

Следовательно, отображение f непрерывно в точке x_0, а в силу произвольного выбора точки x_0 заключаем, что f — непрерывное отображение пространства (X,ρ) в (Y,σ). ►

Из определения замкнутого множества и теоремы 7.2 следует

Теорема 7.2′ (критерий непрерывности отображения). *Отображение $f\colon (X,\rho)\to(Y,\sigma)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(V)$ замкнут в (X,ρ) для любого замкнутого множества V из (Y,σ).* ►

Пусть задана функция $f\colon X\to\mathbb{R}$ и некоторое число $a\in\mathbb{R}$. Тогда множества вида

$$\begin{aligned}
&X(f>a):=\{x\in X: f(x)>a\},\\
&X(f<a):=\{x\in X: f(x)<a\},\\
&X(f=a):=\{x\in X: f(x)=a\},\\
&X(f\geqslant a):=X(f>a)\cup X(f=a),\\
&X(f\leqslant a):=X(f<a)\cup X(f=a)
\end{aligned}$$

называются *множествами Лебега функции* f, определенной на множестве X.

Теорема 7.3. *Для непрерывности функции $f\colon (X,\rho)\to\mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $a\in\mathbb{R}$ множества $X(f<a)$, $X(f>a)$ были открыты, а множества $X(f\leqslant a)$, $X(f\geqslant a)$ и $X(f=a)$ — замкнуты в (X,ρ).*

◄ Необходимость. Пусть x_0 — произвольная точка множества $X(f<a)$ и $\varepsilon=a-f(x_0)$. Так как отображение f непрерывно в точке x_0, то существует шар $B(x_0,\delta)$, в котором выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Для любой точки $x\in B(x_0,\delta)$, с учетом определения числа ε, имеем

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon=a.$$

Следовательно, справедливо включение $B(x_0,\delta)\subset X(f<a)$. Отсюда в силу произвольного выбора точки x_0 заключаем, что множество $X(f<a)$ открыто.

Достаточность. Для любой точки $x_0\in X$ и любого $\varepsilon>0$ рассмотрим множества $X(f<f(x_0)+\varepsilon)$ и $X(f>f(x_0)-\varepsilon)$, которые по условию открыты. Пересечение этих множеств

$$X(-\varepsilon<f(x)-f(x_0)<\varepsilon)=X(f(x_0)-\varepsilon<f<f(x_0)+\varepsilon)$$

также открыто и содержит точку x_0, а вместе с ней и некоторый шар $B(x_0, \delta)$, причем в нем выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для любой точки $x \in B(x_0, \delta)$, которое означает непрерывность f в точке x_0.

Доказательство замкнутости множеств $X(f \leqslant a)$, $X(f \geqslant a)$ и $X(f = a)$ получаем из теоремы 3.4 путем перехода к дополнениям. ►

Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *равномерно непрерывным относительно метрик* ρ и σ (или просто *равномерно непрерывным* на пространстве (X, ρ)), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ для любой пары точек x_1, $x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x_1, x_2) < \delta$.

Очевидно, что каждое равномерно непрерывное отображение непрерывно, однако обратное не имеет места.

З а м е ч а н и е 7.1. В отличие от понятия непрерывности, равномерная непрерывность есть, во-первых, свойство отображения на множестве X, тогда как непрерывность определяется в одной точке; во-вторых, если f непрерывно на (X, ρ), то для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки x_0 множества X можно найти $\delta > 0$, обладающее свойством, указанным в определении (iii) (т. е. δ зависит от ε и от точки x_0), а в случае равномерной непрерывности f на (X, ρ) для каждого $\varepsilon > 0$ найдется одно число $\delta > 0$, которое годится для всех точек x множества X.

Теорема 7.4. *Для любого непустого множества $A \subset X$ отображение $x \mapsto \rho(x, A)$ равномерно непрерывно.* ►

Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *изометрией* (X, ρ) на (Y, σ), если f — сюръективное отображение X на Y и $\rho(x_1, x_2) = \sigma(f(x_1), f(x_2))$ для любых $x_1, x_2 \in X$. Если существует изометрия (X, ρ) на (Y, σ), то говорят, что эти *пространства изометричны*.

Ясно, что изометрические пространства не отличимы по тем свойствам, которые определяются метрикой.

З а м е ч а н и е 7.2. Определение изометричности пространств (X, ρ) и (Y, σ) не исключает случай, когда $X = Y$ и $\rho = \sigma$. При этом изометрия называется *метрическим преобразованием* или *движением пространства* (X, ρ).

Отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ называется *ограниченным*, если множество $f(X)$ ограничено в (Y, σ). Множество всех непрерывных ограниченных отображений из (X, ρ) в (Y, σ) обозначают символом $C_b(X, Y)$.

Пусть f_n, $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, где $n \in \mathbb{N}$. Говорят, что последовательность (f_n) *сходится равномерно* на множестве $M \subset X$ к f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что $\sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$ для любого $x \in M$ и любого $n \geqslant n_0$.

Теорема 7.5. *Множество $C_b(X,Y)$ с метрикой*

$$\hat{\rho}(f,g) = \sup\{\sigma(f(x),g(x)) : x \in X\}$$

является МП, причем сходимость в нем совпадает с равномерной сходимостью. ►

Построенное МП в теореме 7.5 будем обозначать также символом $C_b(X,Y)$.

Теорема 7.6. *Если последовательность непрерывных отображений $f_n\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ сходится равномерно на множестве X к отображению f, то $f \in C(X,Y)$.*

◄ Пусть x_0 — произвольная точка из (X,ρ), ε — любое положительное число, а $B_Y(f(x_0),\varepsilon)$ — открытый шар в (Y,σ). Покажем, что существует окрестность U точки x_0, такая, что для всех $x \in U$ будем иметь $\sigma(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$, т. е. отображение f непрерывно в точке $x_0 \in X$. Действительно, из равномерной сходимости последовательности (f_n) существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что для всех $n \geqslant n_0$ и для всех $x \in X$ имеет место неравенство $\sigma(f(x),f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Зафиксировав некоторый номер $n_1 \geqslant n_0$ и пользуясь неравенством треугольника, получим

$$\begin{aligned}\sigma(f(x),f(x_0)) \leqslant \sigma(f(x),f_{n_1}(x)) &+ \\ + \sigma(f_{n_1}(x),f_{n_1}(x_0)) &+ \sigma(f_{n_1}(x_0),f(x_0)).\end{aligned} \qquad (*)$$

В силу непрерывности отображения f_{n_1} в точке x_0 существует такая окрестность U точки x_0, что справедливо включение $f_{n_1}(U) \subset B_Y(f(x_0),\frac{\varepsilon}{3})$ для всех $x \in U$, т. е. $\sigma\big(f_{n_1}(x),f_{n_1}(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$ для каждого $x \in U$. Таким образом, каждое слагаемое в правой части $(*)$ меньше $\frac{\varepsilon}{3}$ для всех $x \in U$, что равносильно включению $f(U) \subset B_Y(f(x_0),\varepsilon)$. ►

Следствие 7.1. *Если последовательность непрерывных ограниченных отображений $f_n\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ равномерно сходится на множестве X к f, то $f \in C_b(X,Y)$.* ►

Согласно теореме 7.2, если отображение f непрерывно, то прообраз открытого множества является открытым, а прообраз замкнутого множества — замкнутым. Однако для образов это утверждение неверно. В связи с этим рассматривают два важных класса непрерывных отображений: замкнутые и открытые.

Непрерывное отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ называется *открытым* (*замкнутым*), если образ открытого (замкнутого) множества из пространства (X,ρ) является открытым (замкнутым) в (Y,σ).

Отображение $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ называется *гомеоморфизмом* (или *взаимно непрерывным*), если оно биективно, $f \in C(X,Y)$ и $f^{-1} \in C(Y,X)$. Пространства (X,ρ) и (Y,σ) в этом случае называются *гомеоморфными*.

Предложение 7.1. *Гомеоморфное отображение является одновременно открытым и замкнутым отображением.*

◄ Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ – гомеоморфное отображение и $g\colon (Y,\sigma) \to (X,\rho)$ – обратное к нему отображение. Тогда для каждого множества $A \subset X$, очевидно, будем иметь $f(A) = g^{-1}(A)$, т. е. образ множества A при отображении f является прообразом A при отображении g и поэтому открытость (соответственно замкнутость) f следует из непрерывности отображений f и g. ►

Предложение 7.2. *Открытое* (*и, соответственно, замкнутое*) *биективное отображение является гомеоморфизмом.*

◄ Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ – открытое (замкнутое) биективное отображение и $g\colon (Y,\sigma) \to (X,\rho)$ – обратное к f отображение, существующее в силу биективности f. Тогда из равенства $g^{-1}(A) = f(A)$, справедливого для каждого множества A из (X,ρ), получаем, что прообразы открытых (и, соответственно, замкнутых) множеств из (X,ρ) при отображении g будут открытыми (и, соответственно, замкнутыми) в (Y,σ) по условию. Следовательно, из теоремы 7.2 получаем, что $g \in C(Y,X)$. ►

Задачи и упражнения

7.1. Пусть $(x,y) \mapsto \rho(x,y)$ – отображение пространства $(X \times X, \rho \times \rho)$ в пространство $\mathbb{R}$. Показать непрерывность этого отображения.

7.2. (а) Пусть отображения $f, g\colon (X,\rho) \to \mathbb{R}$ непрерывны. Доказать непрерывность следующих отображений:

$$f \pm g,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g}\ (g \neq 0),\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\}.$$

(б) Доказать, что композиция $f \circ g$ непрерывных отображений $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ и $g\colon (Y,\sigma) \to (Z,\tau)$ является непрерывным отображением пространства (X,ρ) в (Z,τ).

§8. Полные метрические пространства

О глубине идеи, заложенной в формулировке нового математического понятия, можно судить лишь впоследствии по тому, насколько искусно удается использовать это понятие.

Е. Вигнер. Этюды о симметрии

Последовательность (x_n) точек пространства (X, ρ) называется *фундаментальной последовательностью* (или *последовательностью Коши*, или *последовательностью, сходящейся в себе*), если она удовлетворяет условию Коши

$$\lim_{i\to\infty, j\to\infty} \rho(x_i, x_j) = 0,$$

которое означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер k_ε, что для всех номеров i и j, удовлетворяющих условию $i \geqslant k_\varepsilon$, $j \geqslant k_\varepsilon$, справедливо неравенство

$$\rho(x_i, x_j) < \varepsilon. \qquad (*)$$

Условие $(*)$ можно сформулировать в следующем виде: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех номеров $i > n_\varepsilon$ и всех целых неотрицательных чисел p имеет место неравенство

$$\rho(x_i, x_{i+p}) < \varepsilon. \qquad (**)$$

Для того чтобы убедиться в равносильности условий $(*)$ и $(**)$, достаточно положить $p = i - j$, если $i \geqslant j$, и $p = j - i$, если $j \geqslant i$.

Предложение 8.1. *Любая сходящаяся последовательность является фундаментальной последовательностью.* ►

Из последнего предложения заключаем, что понятие фундаментальной последовательности есть более общее понятие, чем сходящаяся последовательность (т. е. существуют фундаментальные последовательности, которые не являются сходящимися).

Предложение 8.2. *Пусть (x_n) — фундаментальная последовательность в (X, ρ). Тогда для любой последовательности (ε_n), $\varepsilon_n > 0$, найдется подпоследовательность (x_{k_n}), удовлетворяющая условию*

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \varepsilon_n, \ n = 1, 2, \dots .$$

◀ В силу фундаментальности последовательности (x_n) имеем:

$$\forall \varepsilon_n > 0 \ \exists k_n : \rho(x_m, x_{m'}) < \varepsilon_n, \ \forall m, m' \geqslant k_n.$$

Полагая в последней формуле $m = k_n$, $m' = k_{n+1}$ при $m' > m$, заключаем, что (x_{k_n}) – требуемая последовательность. ▶

Предложение 8.3. *Если фундаментальная последовательность (x_n) имеет сходящуюся подпоследовательность (x_{k_n}), $x_{k_n} \to x_0$, то и сама последовательность (x_n) сходится к $x_0 : x_n \to x_0$.*

◀ Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует натуральное число n_0, такое, что $\rho(x_i, x_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ для любых $i, j \geqslant n_0$. С другой стороны, из $x_{k_n} \to x_0$ следует, что найдется такой номер n_1, что $\rho(x_{k_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geqslant n_1$. Полагая $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ при $k_n \geqslant n \geqslant n_2$, получим

$$\rho(x_n, x_{k_n}) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \rho(x_{k_n}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, в силу неравенства треугольника, имеем

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \rho(x_n, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x_0) < \varepsilon, \ n > n_2.$$

Это означает, что $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. ▶

МП называется *полным* (сокращенно ПМП), если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к некоторой точке этого пространства. При этом если (X, ρ) – ПМП, то метрика ρ называется *полной*.

С учетом предложения 8.1 можно сказать, что МП является полным, если в нем имеется тождественность между фундаментальными и сходящимися последовательностями, или, другими словами, последовательность будет сходящейся в ПМП тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

З а м е ч а н и е 8.1. Важность понятия полноты проистекает из того, что нет необходимости в отыскании предела для последовательности, достаточно показать, что она фундаментальна.

Полноту пространства характеризует

Теорема Кантора. *МП (X, ρ) полно тогда и только тогда, когда каждая убывающая последовательность (F_n), $F_{n+1} \subset F_n$, непустых замкнутых множеств в (X, ρ), таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} d(F_n) = 0$, имеет непустое пересечение $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$.*

◄ Пусть (X, ρ) – ПМП и (F_n) – последовательность непустых замкнутых множеств в (X, ρ), таких, что

$$\lim_{n\to\infty} d(F_n) = 0,\ F_{n+1} \subset F_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{8.1}$$

Выберем точку $x_k \in F_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда все члены последовательности (x_k), начиная с n-го, содержатся в множестве F_n. Из соотношения $d(F_n) \to 0$ при $n \to \infty$ получаем, что (x_k) – фундаментальная последовательность и, в силу полноты (X, ρ), существует точка $x_0 \in X$, что $x_k \to x_0$. Так как множества F_n замкнуты, то $x_0 \in F_n$ для каждого номера $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$.

Обратно, пусть в пространстве (X, ρ) выполнено условие теоремы и (x_n) – фундаментальная последовательность в (X, ρ). Положим

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Учитывая, что множества F_n являются замкнутыми в (X, ρ) и удовлетворяют соотношениям (8.1), имеем $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$, т.е. существует точка $x_0 \in F_n$, для любого $n \in \mathbb{N}$, которая является пределом последовательности (x_{k_n}), где $x_{k_n} \in F_n$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, (x_{k_n}) есть подпоследовательность последовательности (x_n) и $x_n \to x_0 \in X$. Отсюда, согласно предложению 8.3, окончательно получаем, что (X, ρ) – ПМП. ►

Следствие 8.1. *Пространство $\mathbb{R}$ (т. е. множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ с евклидовой метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$) является полным.*

(Для доказательства достаточно воспользоваться замкнутостью отрезка $[a, b]$ в пространстве $\mathbb{R}$ и теоремой Кантора о стягивающейся системе отрезков (см., например, [13], [27]).)

Теорема 8.1. *Пусть (X, ρ) – ПМП. Для того чтобы подпространство (A, ρ_A) пространства (X, ρ) было полным, необходимо и достаточно, чтобы множество A было замкнутым в (X, ρ).*

◄ Необходимость. Пусть подпространство (A, ρ_A) полно и x — произвольная точка множества $\overline{A}$. Для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ положим

$$F_n = A \cap \overline{B_X(x, n^{-1})},$$

где $B_X(x, n^{-1})$ — открытый шар в пространстве (X, ρ).

Ясно, что последовательность (F_n) из (A, ρ_A) удовлетворяет условию теоремы Кантора. Следовательно, в силу полноты подпространства (A, ρ_A) имеем: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. Так как справедливо включение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \subset \{x\}$, то $x \in A$, и потому $\overline{A} \subset A$, т. е. имеет место равенство $A = \overline{A}$.

Достаточность. Пусть множество $A \subset X$ замкнуто в ПМП (X, ρ), т. е. $A = \overline{A}$. Из определения индуцированной метрики ρ_A имеем, что каждая последовательность Коши в подпространстве (A, ρ_A) является последовательностью Коши и в пространстве (X, ρ). Следовательно, в силу полноты (X, ρ) она будет сходится к некоторой точке $x \in X$, а в силу замкнутости множества A получим, что $x \in A$. ►

Замечание 8.2. Отметим, что при доказательстве необходимости теоремы 8.1 не использовали полноту пространства (X, ρ), т. е. доказано более сильное утверждение: если подпространство (A, ρ_A) пространства (X, ρ) полно, то множество A замкнуто в этом пространстве.

Теорема 8.2. *Если (Y, σ) — ПМП, то $C_b(X, Y)$ — ПМП.*

◄ Пусть (f_n) — последовательность Коши в пространстве $C_b(X, Y)$ (см. теорему 7.5). Тогда последовательность $(f_n(x))$ является фундаментальной последовательностью в полном пространстве (Y, σ) для любой точки $x \in X$ и, следовательно, имеет в нем предел. Тем самым определено отображение $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in Y$. Так как последовательность (f_n) равномерно сходится на пространстве (X, ρ) к f, то, в силу теоремы 7.6(б), получаем, что f — ограниченное и непрерывное отображение, т. е. $f \in C_b(X, Y)$. ►

Теорема 8.3 (теорема Куратовского). *Каждое МП изометрично подпространству ПМП.*

◄ Пусть (X, ρ) — произвольное МП. Зафиксируем некоторую точку $a \in X$. Поставим в соответствие каждой точке $x \in X$ функцию f_x, которая определена на множестве X и задана формулой

$$f_x(z) = \rho(z, x) - \rho(z, a), \; z \in X. \tag{8.2}$$

Так как $|f_x(z)| \leqslant \rho(a,x)$, то $f_x \in C_b(X,\mathbb{R})$ для любого $x \in X$, где $C_b(X,\mathbb{R})$ — ПМП, в силу следствия 8.1 и теоремы 8.2, с метрикой

$$\hat{\rho}(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}. \tag{8.3}$$

Докажем равенство

$$\hat{\rho}(f_x, f_y) = \rho(x,y) \text{ для всех } x,y \in X. \tag{8.4}$$

Для любого $z \in X$ имеет место неравенство

$$f_x(z) - f_y(z) = \rho(z,x) - \rho(z,a) - \rho(z,y) + \rho(z,a) \leqslant \rho(x,y).$$

Из условия симметрии вытекает, что

$$|f_x(z) - f_y(z)| \leqslant \rho(x,y).$$

Отсюда, в силу (8.3), получаем

$$\hat{\rho}(f_x, f_y) \leqslant \rho(x,y). \tag{8.5}$$

С другой стороны, так как

$$f_x(y) - f_y(y) = \rho(y,x) - \rho(y,a) + \rho(y,a) = \rho(x,y),$$

то из определения метрики $\hat{\rho}$ заключаем, что

$$\hat{\rho}(f_x, f_y) \geqslant \rho(x,y), \; x,y \in X. \tag{8.6}$$

Из неравенств (8.5) и (8.6) следует справедливость (8.4), т. е. изометричность (X,ρ) и подпространства функции из ПМП $C_b(X,\mathbb{R})$, представимых в виде равенства (8.2). ▶

Задачи и упражнения

8.1.(а) Установить следующие свойства фундаментальной последовательности (x_n):

(i) для любого положительного числа ε найдется элемент x_{n_0} фундаментальной последовательности (x_n), такой, что в открытом шаре $B(x_{n_0}, \varepsilon)$ находятся все элементы x_n этой последовательности с номерами n, удовлетворяющими условию $n \geqslant n_0$ (или другими словами: для любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент фундаментальной последовательности x_{n_0}, такой, что вне открытого шара $B(x_{n_0}, \varepsilon)$ лежит не более чем конечное число элементов этой последовательности);

§9. Теорема Бэра о категории

«Серьезность» теоремы кроется не в практических следствиях из нее (обычно они ничтожны), а в значимости математических идей, между которыми устанавливается взаимосвязь.

Г. Харди

В теории полных пространств важную роль играет следующая

Теорема 9.1. *Если (X, ρ) – ПМП и (G_n) – последовательность непустых открытых всюду плотных подмножеств пространства (X, ρ), то множество $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ непусто и всюду плотно в (X, ρ).*

◄ Заметим, что, согласно теореме 6.2(а), всюду плотное множество имеет непустое пересечение с любым открытым множеством (шаром). Рассмотрим шар $B(x_1, r_1) \subset G_1$, который существует в силу того, что множество G_1 открыто и непусто. В непустом открытом множестве $B(x_1, \frac{r_1}{2}) \cap G_2$ выберем шар $B(x_2, r_2)$, где $r_2 < \frac{r_1}{4}$. Аналогично, выберем шар $B(x_3, r_3)$ в пересечении $B(x_2, \frac{r_2}{4}) \cap G_3$, причем возьмем $r_3 < \frac{r_2}{8}$ и т. д. В результате получим убывающую последовательность замкнутых шаров $(\overline{B}(x_k, \frac{r_k}{2}))$, для которых выполнены включения

$$\overline{B}(x_k, \frac{r_k}{2}) \subset B(x_k, r_k) \subset \overline{B}(x_{k-1}, \frac{r_{k-1}}{2}), k = 2, 3, \ldots,$$

и их радиусы стремятся к нулю. Согласно теореме Кантора, существует точка $x_0 \in X$, такая, что $x_0 \in \overline{B}(x_k, \frac{r_k}{2})$ для любого $k = 1, 2, \ldots$, а в силу построения шаров $B(x_k, r_k)$ заключаем, что $x_0 \in G$, т.е. $G \neq \varnothing$.

Покажем, что множество G всюду плотно в (X, ρ). Предположим противное, т.е. существует открытый шар $B(x, r) \subset X$, для которого $G \cap B(x, r) = \varnothing$, а значит, $G \cap \overline{B}(x, r) = \varnothing$ (см. задачу 6.5). В полном подпространстве $(\overline{B}(x, \frac{r}{2}), \rho_{\overline{B}(x, \frac{r}{2})})$ множества $U_n = G_n \cap \overline{B}(x, \frac{r}{2})$ открыты и всюду плотны для каждого $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, по доказанному, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \varnothing$. Получили противоречие. ►

Так как дополнение открытого и всюду плотного множества есть замкнутое множество без внутренних точек, то, переходя к дополнениям, получим эквивалентную формулировку доказанной теоремы, а именно: справедлива

Теорема 9.2. *Пусть (X, ρ) — ПМП и (F_n) — последовательность замкнутых множеств без внутренних точек в (X, ρ). Тогда множество $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ также лишено внутренних точек.* ►

Теорема Бэра. *Если ПМП является счетным объединением замкнутых подмножеств, то хотя бы одно из этих подмножеств содержит непустое открытое множество.*

◄ Пусть (X, ρ) — ПМП и (F_n) — последовательность его замкнутых множеств, таких, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Предположим противное, т.е. $\operatorname{Int} F_n = \varnothing$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $(X \setminus F_n)$ — последовательность открытых всюду плотных подмножеств в (X, ρ), удовлетворяющих (согласно теореме 9.1) условию $\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) \neq \varnothing$. Но это противоречит равенству $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Значит, хотя бы одно из множеств $X \setminus F_n$ не является всюду плотным. Поэтому $\operatorname{Int} F_n \neq \varnothing$ для некоторого n. ►

Ответ на вопрос о существовании множеств второй категории дает следующая теорема, известная как

Теорема Бэра о категории. *ПМП (X, ρ) нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных его подмножеств, т.е. X есть множество второй категории.*

◄ Предположим противное: пусть X — непустое множество первой категории, т.е. $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k — нигде не плотные множества. Так как $\operatorname{Int} \overline{E}_k = \varnothing$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то последовательность $(\overline{E}_k)$ удовлетворяет условиям теоремы 9.2. Значит, $\operatorname{Int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{E}_k\right) = \varnothing$. С другой стороны, имеем

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{E}_k\right) \supset \operatorname{Int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right) = \operatorname{Int}X = X \neq \varnothing.$$

Получили противоречие. ►

Непосредственно самой теоремой Бэра редко приходится пользоваться. Обычно используют одно из ее следствий, известное как *принцип равномерной ограниченности*:

Теорема 9.3. *Пусть $\mathscr{F} = \{f : (X,\rho) \to \mathbb{R}\}$ — семейство непрерывных функций, определенных на ПМП (X,ρ), и пусть для каждого $x \in X$ существует такое число $m_x > 0$, что $|f(x)| \leqslant m_x$ для любого $f \in \mathscr{F}$. Тогда существуют непустое открытое множество $G \subset X$ и число $m > 0$, такие, что $|f(x)| \leqslant m$ для всех $x \in G$ и всех $f \in \mathscr{F}$.*

◄ Для функции $f \in \mathscr{F}$ рассмотрим множество Лебега (см. §7)

$$X_{k,f} = \{x \in X : |f(x)| \leqslant k\}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Так как функция $f \in C(X)$, то, *согласно* теореме 7.3, множества $X_{k,f}$ замкнуты. Значит, для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество

$$X_k = \bigcap\{X_{k,f} : f \in \mathscr{F}\}$$

замкнуто как пересечение замкнутых множеств.

По условию, для каждой точки $x \in X$ найдется натуральное число k, такое, что $|f(x)| \leqslant k$ при всех $f \in \mathscr{F}$. Следовательно, имеем представление

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k.$$

Отсюда, с учетом полноты МП (X,ρ), по теореме Бэра заключаем, что найдется по крайней мере одно множество X_m из системы множеств X_k, которое содержит непустое открытое множество $G \subset X_m$, такое, что неравенство $|f(x)| \leqslant m$ выполняется для всех $x \in G$ и всех $f \in \mathscr{F}$. ►

Задачи и упражнения

9.1. Приведите пример неполного пространства (X,ρ), где X является множеством первой категории.

§10. Принцип сжимающих отображений

Именно математика... дает надежнейшие правила; кто им следует — тому не опасен обман чувств.

Л. Эйлер

Отображение $f\colon (X,\rho) \to (X,\rho)$ называется *сжимающим*, если существует такое число $c \in (0,1)$, что для любых точек x, $y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x,y).$$

При этом число c называют *коэффициентом сжатия* отображения f.

Непосредственно из определения сжимающего отображения следует, что если для каждого $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, то для любых точек $x \in X$, $y \in X$, для которых $\rho(x,y) < \delta$, выполняется неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x,y) < c\delta = \varepsilon,$$

т. е. сжимающее отображение равномерно непрерывно, а следовательно, непрерывно в каждой точке пространства (X,ρ).

Точка x_0 пространства (X,ρ) называется *неподвижной точкой отображения* $f\colon (X,\rho) \to (X,\rho)$, если $f(x_0) = x_0$.

Теорема 10.1 (принцип сжимающих отображений). *Сжимающее отображение ПМП в себя имеет единственную неподвижную точку.*

◄ Пусть (X,ρ) — ПМП и f — сжимающее отображение пространства (X,ρ) в себя с коэффициентом сжатия $c \in (0,1)$. Возьмем произвольную точку $x \in X$ и положим

$$\begin{aligned}
&x_1 = f(x),\\
&x_2 = f(x_1) = (f \circ f)(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_n = f(x_{n-1}) = (\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}})(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ .
\end{aligned}$$

Покажем, что полученная последовательность (x_n) фундаментальна. Из определения сжимающего отображения имеем:

$$\begin{aligned}
&\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x), f(x_1)) \leqslant c\rho(x, x_1) = c\rho(x, f(x)),\\
&\rho(x_2, x_3) = \rho(f(x_1), f(x_2)) = \rho(f(x_1), f(f(x_1))) \leqslant\\
&\qquad \leqslant c\rho(x_1, f(x_1)) \leqslant c^2\rho(x, f(x)),\\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant c^n\rho(x, f(x)),\\
&\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .
\end{aligned}$$

Отсюда, для любого $p \in \mathbb{N}$, с помощью неравенства треугольника получаем

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{c^n - c^{n+p}}{1-c}\,\rho(x, f(x)).$$

Так как $c \in (0, 1)$, то

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leqslant \frac{c^n}{1-c}\,\rho(x, f(x)).$$

Итак, последовательность (x_n) фундаментальна и в силу полноты пространства (X, ρ) существует точка $x_0 \in X$, являющаяся пределом последовательности (x_n), причем x_0 — неподвижная точка отображения f. Действительно, с учетом непрерывности отображения f, имеем

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = f(x_0).$$

Покажем единственность неподвижной точки. Предположим, что существуют две точки x_0 и y_0, такие, что

$$f(x_0) = x_0,\ f(y_0) = y_0,\ x_0 \neq y_0.$$

Тогда имеем неравенство

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(f(x_0), f(y_0)) \leqslant c\rho(x_0, y_0) < \rho(x_0, y_0),$$

что невозможно. ►

З а м е ч а н и е 10.1. Так как неподвижные точки отображения f являются решениями уравнения $f(x) = x$, то принцип сжимающих отображений можно сформулировать в следующем виде: *если (X, ρ) — ПМП и f —*

сжимающее отображение (X,ρ) в себя с коэффициентом сжатия $c \in (0,1)$, то уравнение $f(x) = x$ имеет в пространстве (X,ρ) одно и только одно решение, которое может быть получено как предел итерационной последовательности

$$x_1 = f(x),\ x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots,$$

построенной при любом выборе исходного элемента x, причем оценка сходимости последовательности (x_n) к решению уравнения x_0 задается формулой

$$\rho(x_n, x_0) \leqslant \frac{c^n}{1-c}\,\rho(x, f(x)). \tag{10.2}$$

Построение последовательности (x_n) и исследование вопроса ее сходимости называют *методом последовательных приближений.*

Следствие 10.1 (локальный принцип сжимающих отображений). *Пусть (X,ρ) — ПМП и отображение $f\colon (X,\rho) \to (X,\rho)$ является сжимающим на некотором замкнутом шаре $\overline{B}(x_0,r)$ из (X,ρ), с коэффициентом сжатия $c \in (0,1)$, и выполнено неравенство $\rho(x_0, f(x_0)) \leqslant (1-c)r$. Тогда в замкнутом шаре $\overline{B}(x_0,r)$ существует единственная неподвижная точка отображения f.*

◄ Рассмотрим подпространство $(\overline{B}(x_0,r), \rho_{\overline{B}(x_0,r)})$ полного пространства (X,ρ). Так как $\overline{B}(x_0,r)$ — замкнутое множество, то рассматриваемое подпространство $(\overline{B}(x_0,r), \rho_{\overline{B}(x_0,r)})$ — полное, в силу теоремы 8.1.

Покажем, что f отображает $\overline{B}(x_0,r)$ в себя. Пусть x — произвольная точка замкнутого шара $\overline{B}(x_0,r)$, т. е. $\rho(x_0,x) \leqslant r$. Тогда, учитывая то, что f — сжимающее отображение на $\overline{B}(x_0,r)$, имеем следующую оценку

$$\begin{aligned}\rho(x_0, f(x)) &\leqslant \rho(x_0, f(x_0)) + \rho(f(x_0), f(x)) \leqslant \\ &\leqslant (1-c)r + c\rho(x_0,x) \leqslant (1-c)r + cr = r.\end{aligned}$$

Следовательно, $f(x) \in \overline{B}(x_0,r)$ и к отображению $f\colon \overline{B}(x_0,r) \to \overline{B}(x_0,r)$ применим принцип сжимающих отображений. ►

Следствие 10.2. *Если некоторая степень отображения ПМП в себя является сжимающей, то само отображение имеет единственную неподвижную точку.*

◄ Пусть (X,ρ) — ПМП и отображение $f\colon (X,\rho) \to (X,\rho)$ таково, что его n-я степень $f^n := f \circ f \circ \ldots \circ f$, $n \geqslant 1$, является сжимающим отображением. Предположим, что x_0 – неподвижная точка отображения f^n, т. е. $f^n(x_0) = x_0$. Тогда

$$f(x_0) = f(f^n(x_0)) = f^n(f(x_0)).$$

Таким образом, $f(x_0)$ – неподвижная точка отображения f^n. Но такая точка, согласно принципу сжимающих отображений, единственная и, следовательно, $f(x_0) = x_0$. ►

Следствие 10.3 (о непрерывной зависимости неподвижной точки). *Пусть (X, ρ) – ПМП и f, $g\colon (X, \rho) \to (X, \rho)$ – два сжимающих отображения с коэффициентами сжатия c_f и c_g, соответственно. Если $\rho(f(x), g(x)) < \varepsilon$ для любого $x \in X$, то неподвижные точки отображений f и g находятся друг от друга на расстоянии, не превышающем величину $\frac{\varepsilon}{1-c}$, где $\varepsilon = \sup\{\rho(f(x), g(x)) : x \in X\}$ и $c = \min\{c_f, c_g\}$.*

◄ Пусть x_0 – неподвижная точка отображения f и пусть $c = c_g$ (т. е. $c_f \geqslant c_g$). Положим $x_n = g^n(x_0)$. Тогда неподвижная точка x^* отображения g будет пределом последовательности (x_n), причем

$$\rho(x_0, x_n) \leqslant \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x_0, g(x_0))[1 + c_g + \ldots + c_g^{n-1}] \leqslant \frac{\rho(x_0, g(x_0))}{1 - c_g}.$$

Отсюда, при переходе $n \to \infty$ окончательно получаем, что

$$\rho(x_0, x^*) \leqslant \frac{\rho(x_0, g(x_0))}{1 - c_g} = \frac{\rho(f(x_0), g(x_0))}{1 - c_g} < \frac{\varepsilon}{1-c}. \ ►$$

В дополнение к доказанной теореме приведем следующее

Предложение 10.1 (об устойчивости неподвижной точки). *Пусть (X, ρ) – полное, а (T, σ) – произвольное МП (играющее роль пространства параметров), и пусть каждому значению $t \in T$ отвечает сжимающее отображение $f_t\colon (X, \rho) \to (X, \rho)$, причем выполнены следующие условия:*

(i) *семейство $\{f_t : t \in T\}$ равномерно сжимающее, т. е. существует такое число c, $0 < c < 1$, которая является коэффициентом сжатия каждого отображения f_t;*

(ii) *при каждом $x \in X$ отображение $f_t(x)\colon (T, \sigma) \to (X, \rho)$ как функция от t непрерывно в некоторой точке $t_0 \in T$, т. е. $f_t(x) \to f_{t_0}(x)$ (в (X, ρ)) при $t \to t_0$ (в (T, σ)).*

Тогда решение $a(t) \in X$ уравнения $x = f_t(x)$ в точке t_0 непрерывно зависит от t, т. е. $a(t) \to a(t_0)$ (в (X, ρ)) при $t \to t_0$ (в (T, σ)).

◄ Согласно замечанию 10.1, решение $a(t)$ уравнения $x = f_t(x)$ может быть получено как предел итерационной последовательности (x_{n+1}), где $x_{n+1} = f_t(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, исходя из произвольной точки $x_0 \in X$. Пусть $x_0 = a(t_0) = f_t(a(t_0))$. С учетом оценки (10.2) и условия (i), получаем

$$\rho(a(t), a(t_0)) = \rho(a(t), x_0) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1-c}\rho(x_1, x_0) = \frac{1}{1-c}\rho(f_t(a(t_0)), f_{t_0}(a(t_0))).$$

Последний член в этом соотоношении, в силу условия (б), стремится к нулю при $t \to t_0$. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{t\to t_0} \rho(a(t), a(t_0)) = 0, \text{ т. е. } \lim_{t\to 0} a(t) = a(t_0). \ ►$$

Задачи и упражнения

10.1. (а) Пусть f – отображение пространства $\mathbb{R}$ в себя, определенное формулой $f(x) = x^3$. Найти все его неподвижные точки и показать, в окрестности каких неподвижных точек отображение f будет сжимающим.

(б) Установить, что отображение $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное равенством $f(x) = \operatorname{sign} x + 2$, разрывно, а $f \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – сжимающее отображение, и найти его неподвижную точку.

(в) Доказать, что отображение $f(x) = Ax$ пространства $\mathbb{R}^2$ (см. пример 2.3) в себя, где матрица $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 10 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, не является сжимающим в $\mathbb{R}^2$, а его некоторая натуральная степень является сжимающим.

(г) Пусть $f(x) = Ax + b$ – отображение пространства $l_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \rho_1)$ в себя, где $\rho_1(x, y) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - y_i|$, заданное системой линейных уравнений

$$y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + b_k, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказать, что f – сжимающее отображение с коэффициентом сжатия $\alpha \in (0, 1)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \leqslant \alpha < 1, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

§11. Пополнение метрического пространства

Ценность утверждений математики заключается в их абстрактности и общности.

А. Уайтхед

В этом параграфе описывается конструкция, позволяющая для каждого неполного МП (X, ρ) построить соответствующее ему ПМП (Y, σ) с помощью присоединения к множеству X «недостающих» элементов, которые являются пределами фундаментальных последовательностей точек МП (X, ρ), не сходящимися в нем. При этом МП (X, ρ) рассматривается как подпространство полученного ПМП (Y, σ), что позволяет использовать все преимущества полноты.

МП (Y, σ) называется *пополнением пространства* (X, ρ), если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) (Y, σ) – ПМП;

(2) пространство (Y, σ) содержит подпространство (Y_0, σ_{Y_0}), изометричное пространству (X, ρ);

(3) множество Y_0 всюду плотно в пространстве (Y, σ).

Теорема 11.1. *Каждое МП имеет пополнение.*

◄ Рассмотрим множество $\mathscr{F}$ всех фундаментальных последовательностей в (X, ρ). Если $\xi = (x'_n)$ и $\eta = (x''_n)$ две точки из $\mathscr{F}$, то числовая последовательность $(\rho(x'_n, x''_n))$ будет фундаментальной в силу неравенства четырехугольника (см. задачу 1.2)

$$|\rho(x'_n, x''_n) - \rho(x'_m, x''_m)| \leqslant \rho(x'_n, x'_m) + \rho(x''_n, x''_m).$$

Поэтому, учитывая полноту пространства $\mathbb{R}$ имеем, что существует предел числовой последовательности $(\rho(x'_n, x''_n))$, который обозначим через $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$, т. е.

$$\tilde{\rho}(\xi, \eta) := \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, x''_n). \qquad (11.1)$$

Легко видеть, что величина $\tilde{\rho}(\xi,\eta)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\rho}(\xi,\eta) \geqslant 0,\\
&\tilde{\rho}(\xi,\xi) = 0,\\
&\tilde{\rho}(\xi,\eta) = \tilde{\rho}(\eta,\xi),\\
&\tilde{\rho}(\xi,\eta) \leqslant \tilde{\rho}(\xi,\zeta) + \tilde{\rho}(\zeta,\eta),
\end{aligned}$$

где ξ, η, ζ — произвольные точки множества $\mathscr{F}$. Заметим, что равенство $\tilde{\rho}(\xi,\eta) = 0$ не означает, вообще говоря, что $\xi = \eta$, т. е. $\tilde{\rho}$ не является метрикой на $\mathscr{F}$.

Введем на множестве $\mathscr{F}$ отношение $E = \{(\xi,\eta) : \tilde{\rho}(\xi,\eta) = 0\}$. Это отношение, в силу приведенных свойств $\tilde{\rho}(\xi,\eta)$, является отношением эквивалентности и, следовательно, разбивает множество $\mathscr{F}$ на непересекающиеся классы эквивалентных фундаментальных последовательностей.

Обозначим через $Y = \mathscr{F}/E$ фактор-множество множества $\mathscr{F}$ по отношению E (см. пункт 0.4). Введем на множестве Y метрику. Если $y = [(x_n)]$ и $y' = [(x'_n)]$ — классы эквивалентности, содержащие фундаментальные последовательности (x_n) и (x'_n), то положим

$$\sigma(y,y') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x'_n). \tag{11.2}$$

Как было доказано выше, предел в правой части (11.2) существует. Кроме того, он не зависит от выбора последовательностей в классах y и y'. Действительно, пусть $(\tilde{x}_n)$ и $(\tilde{x}'_n)$ — другие представители классов y и y', соответственно. Тогда из неравенства четырехугольника

$$|\rho(x_n,x'_n) - \rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}'_n)| \leqslant \rho(x_n,\tilde{x}'_n) + \rho(\tilde{x}_n,x'_n)$$

следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}'_n).$$

Далее из свойств величины $\tilde{\rho}(\xi,\eta)$, определенной равенством (11.1), получаем, что функция σ удовлетворяет аксиомам метрики. Таким образом, множество классов эквивалентных фундаментальных последовательностей из Y с метрикой σ является МП.

Рассмотрим отображение $p\colon X \to Y$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие класс эквивалентности $[(x)]$, содержащий стационарную последовательность (x). Этот класс будет содержать также все фундаментальные последовательности, сходящиеся к точке x. Положим $Y_0 = p(X)$. Тогда функция

$$\sigma_{Y_0}([(x)],[(x')]) = \rho(x,x')$$

определяет метрику, индуцированную метрикой σ на множество Y_0. Следовательно, (Y_0, σ_{Y_0}) – подпространство пространства (Y, σ), а отображение $p\colon (X, \rho) \to (Y_0, \sigma_{Y_0})$ является изометрией.

Покажем, что Y_0 – всюду плотное множество в (Y, σ). Пусть y – некоторый элемент множества Y и (x_n) – произвольная последовательность из класса y. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $k_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для всех номеров $n > k_0$ и $m > k_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.3}$$

Рассмотрим элемент $y_0 \in Y_0$, определенный равенством $y_0 = p(x_{m_0})$, где x_{m_0} – элемент последовательности (x_n) с номером $m_0 > k_0$. Тогда, переходя в неравенстве

$$\rho(x_n, x_{m_0}) < \frac{\varepsilon}{2}, \ n > k_0$$

к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\sigma(y, y_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

т. е. элемент y является точкой прикосновения множества Y_0. Таким образом, для каждого элемента $y \in Y$ существует последовательность (x_n) в пространстве (X, ρ), такая, что $\sigma(y, p(x_n)) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, $\overline{Y_0} = Y$.

Остается доказать полноту пространства (Y, σ). Пусть (y_n) – фундаментальная последовательность в (Y, σ). Возьмем последовательность положительных чисел (ε_n): $\varepsilon_n \to 0$. Так как множество Y_0 всюду плотно в (Y, σ), то для каждого $y_n \in Y$ найдется элемент $y_0^{(n)} \in Y_0$, такой, что $\sigma(y_n, y_0^{(n)}) < \varepsilon_n$. Из неравенства

$$\begin{aligned}\sigma(y_0^{(n)}, y_0^{(m)}) &\leqslant \sigma(y_0^{(n)}, y_n) + \sigma(y_m, y_0^{(m)}) + \sigma(y_n, y_m) < \\ &< \varepsilon_n + \varepsilon_m + \sigma(y_n, y_m)\end{aligned}$$

следует, что последовательность $(y_0^{(n)})$ фундаментальна в (Y, σ). Построим последовательность точек $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots$ множества X, где каждая из стационарных последовательностей $(x_0^{(1)})$, $(x_0^{(2)})$, ... принадлежит классу $y_0^{(1)}$, $y_0^{(2)}$, ... Эта последовательность фундаментальна в (X, ρ), и поэтому она определяет некоторый класс $y \in Y$. Используя неравенство треугольника, получаем

$$\sigma(y_n, y) \leqslant \sigma(y_n, y_0^{(n)}) + \sigma(y_0^{(n)}, y) < \varepsilon_n + \sigma(y_0^{(n)}, y).$$

Отсюда, с учетом соотношения $\sigma(y_0^{(n)}, y) \to 0$ при $n \to \infty$, заключаем, что $y_n \to y$ в (Y, σ) и полнота пространства (Y, σ) доказана. ▶

Теорема 11.2. *Пусть (Y_1, σ_1) и (Y_2, σ_2) — любые два пополнения пространства (X, ρ). Тогда существует изометрия $f\colon (Y_1, \sigma_1) \to (Y_2, \sigma_2)$ такая, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$ (т. е. изометрия f оставляет на месте точки из множества X).*

◀ Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через $p_i\colon X \to Y_i$ изометричное отображение, у которого образ $p_i(X)$ всюду плотно в (Y_i, σ_i). Из определения пополнения, для каждого $y_1 \in Y_1$ существует такая последовательность (x_n) из (X, ρ), что $\lim\limits_{n\to\infty} p_1(x_n) = y_1$ (в (Y_1, σ_1)). Положим $y_2 = \lim\limits_{n\to\infty} p_2(x_n)$ (в (Y_2, σ_2)). Определим по формуле $f(y_1) = y_2$ отображение $f\colon Y_1 \to Y_2$, которое является изометрией Y_1 на Y_2. Действительно, из непрерывности метрики как функции двух переменных получим равенства

$$\begin{aligned}\sigma_1(y_1, y_1') &= \lim_{n\to\infty} \sigma_1(p_1(x_n), p_2(x_n')) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n') = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sigma_2(p_2(x_n), p_2(x_n')) = \sigma_2(y_2, y_2') = \sigma_2(f(y_1), f(y_1')),\end{aligned}$$

где $f(y_1) = y_2$ и $f(y_1') = y_2'$. Отсюда следует, что отображение $f\colon Y_1 \to Y_2$ определено корректно. При этом f является взаимно однозначным соответствием. То, что отображение f оставляет на месте точки из множества X, непосредственно следует из его определения. ▶

З а м е ч а н и е 11.1. Рассмотрим *теорию иррациональных чисел*, известную как *канторовская теория вещественных чисел*. Возьмем неполное пространство рациональных чисел $(\mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{Q}})$ с евклидовой метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$, и пусть (Y, σ) — его пополнение. «Недостающие» точки пространства $(\mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{Q}})$ назовем *иррациональными числами*. Иначе говоря, согласно конструкции, приведенной в доказательстве теоремы 11.1, *иррациональным числом* считают класс эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел, не имеющих предела в пространстве $(\mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{Q}})$. Например, класс эквивалентных фундаментальных последовательностей, содержащий последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

есть иррациональное число e, а класс, содержащий последовательность рациональных чисел $x_1 = 3$; $x_2 = 3,1$; $x_3 = 3,141$; …, есть иррациональное число число $\pi = 3,1459259\ldots$ (т. е. запись иррационального числа в виде бесконечной непериодической десятичной дроби представляет собой выбор класса фундаментальных последовательностей).

В множестве действительных (иррациональных и рациональных) чисел введем отношение линейного порядка. Пусть $\xi \in Y$ и (x_n) – произвольная фундаментальная последовательность точек $x_n \in \mathbb{Q}$, при этом положим $\xi_x = x$, если класс ξ_x содержит стационарную последовательность (x), $x \in \mathbb{Q}$. Если ξ и ξ_x – различные классы, то из определения метрики σ (см. формулу (11.2)) получим, что либо $x_n > x$, либо $x_n < x$ для достаточно больших n. В этом случае полагаем $\xi > x$, а во втором – $\xi < x$, при этом результат не зависит от выбора последовательности (x_n).

Если ξ_1, ξ_2 – два иррациональных числа, то при любом выборе последовательностей $(x_n^{(1)})$ из ξ_1 и $(x_n^{(2)})$ из ξ_2 для достаточно больших n имеем либо $x_n^{(1)} < x_n^{(2)}$, либо $x_n^{(1)} > x_n^{(2)}$. В первом случае полагаем $\xi_1 < \xi_2$, а во втором $\xi_1 > \xi_2$.

Так как для каждого $\xi \in Y$ существует фундаментальная последовательность (x_n) точек из $(\mathbb{Q}, \rho_\mathbb{Q})$, такая, что $\sigma(\xi, p(x_n)) \to 0$ при $n \to \infty$ (т. е. всякое иррациональное число есть предел некоторой последовательности рациональных чисел), то это позволяет определить действия над действительными числами. Рассмотрим для примера сумму действительных чисел ξ_1 и ξ_2. Пусть $(\xi_n^{(1)})$, $(\xi_n^{(2)})$ – две последовательности из $(\mathbb{Q}, \rho_\mathbb{Q})$, такие, что $\sigma(\xi_1, p(x_n^{(1)})) \to 0$ и $\sigma(\xi_2, p(x_n^{(2)})) \to 0$. Из фундаментальности последовательности $(\xi_n^{(1)})+(\xi_n^{(2)})$ и полноты (Y, σ) имеем, что найдется элемент $\xi \in Y$, для которого $\sigma(\xi, p(x_n^{(1)} + x_n^{(2)})) \to 0$. Этот элемент называют суммой данных чисел ξ_1 и ξ_2.

Задачи и упражнения

11.1. Доказать, что если (X, ρ) – ПМП, то пополнением подпространства (A, ρ_A), $A \subset X$, является пространство $(\overline{A}, \rho_{\overline{A}})$.

11.2. Доказать неполноту и построить пополнения следующих пространств:

(а) множество $\mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;
(б) множество $\mathbb{R}$ с расстоянием $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$.

11.3. На множестве $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ отрезков пространства $\mathbb{R}$ определим расстояние формулой

$$\rho([a, b], [c, d]) = |a - c| + |b - d|.$$

Доказать неполноту и найти пополнение полученного пространства.

§12. Вполне ограниченные пространства

...свойство, общее для слишком многих обьектов, вряд ли может быть очень интересным, и математические идеи также становятся скучными, если не обладают индивидуальностью в достаточной мере.

Г. Харди

Система подмножеств $\mathscr{A} = \{U_s : s \in S\}$ множества X называется *покрытием пространства* (X, ρ), если $X = \bigcup\{U_s : s \in S\}$.

Покрытие $\mathscr{A}$ называется *открытым* (или, соответственно, *замкнутым*), если каждое из множеств $U_s \in \mathscr{A}$ открыто (или, соответственно, замкнуто) в пространстве (X, ρ).

Подсистема $\mathscr{A}_0$ покрытия $\mathscr{A}$ пространства (X, ρ) называется *подпокрытием покрытия* $\mathscr{A}$, если сама система $\mathscr{A}_0$ образует покрытие (X, ρ).

Пространство (X, ρ) называется *вполне ограниченным*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое покрытие пространства (X, ρ) множествами диаметра меньше ε, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное семейство открытых множеств $\{U_i^\varepsilon : i = \overline{1, k}\}$, таких, что $X = \bigcup\{U_i^\varepsilon : i = \overline{1, k}\}$ и $d(U_i^\varepsilon) < \varepsilon$ для любого $i = \overline{1, k}$.

Теорема 12.1. *Для того чтобы пространство (X, ρ) было вполне ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы каждому $\varepsilon > 0$ соответствовало конечное множество $A_\varepsilon \subset X$, такое, что $\rho(x, A_\varepsilon) < \varepsilon$, какова бы ни была точка $x \in X$.*

◄ Необходимость. Пусть (X, ρ) — вполне ограниченное МП и число $\varepsilon > 0$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется конечное семейство непустых открытых подмножеств $\{U_1^n, U_2^n, \ldots, U_{k_n}^n\}$ МП (X, ρ), такое, что

$$X = U_1^n \cup U_2^n \cup \ldots \cup U_{k_n}^n, \quad d(U_i^n) < \frac{1}{n} \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k_n.$$

Из каждого множества U_i^n выберем по одной точке x_i^n. Тогда множество $A_{\frac{1}{n}} = \{x_1^n, \ldots, x_{k_n}^n\}$ есть искомое множество (при $\varepsilon > \frac{1}{n}$).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если $A_{\frac{\varepsilon}{2}}$ — множество, удовлетворяющее условию теоремы, то система открытых шаров радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центрами, принадлежащими множеству $A_{\frac{\varepsilon}{2}}$, представляет собой искомое покрытие пространства (X, ρ). ►

Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью пространства* (X, ρ), или говорят, что множество A — *ε-плотно в пространстве* (X, ρ), если для любой точки $x \in X$ существует точка $a \in A$, такая, что $\rho(x, a) < \varepsilon$. При этом множество A называется *конечной ε-сетью*, если оно состоит из конечного числа точек.

На основании данного определения теорему 12.1 можно сформулировать в следующем виде: *МП (X, ρ) вполне ограниченное тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ в пространстве (X, ρ) существует конечная ε-сеть.*

Предложение 12.1. *Любое вполне ограниченное МП сепарабельно и ограничено.*

◄ Пусть (X, ρ) — произвольное вполне ограниченное МП. Тогда, в силу теоремы 12.1, для любого $k \in \mathbb{N}$ существует конечное подмножество $A_k \subset X$, такое, что $\rho(x, A_k) < \frac{1}{k}$ для любого $x \in X$.

Положим $B = \cup\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что множество B не более чем счетно, причем для каждой точки $x \in X$ при любом $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\rho(x, B) \leqslant \rho(x, A_k) < \frac{1}{k}.$$

Следовательно, $\rho(x, B) = 0$. Отсюда, с учетом произвольного выбора точки x, получаем равенство $X = \overline{B}$, что означает сепарабельность (X, ρ).

Покажем, что пространство (X, ρ) ограничено. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ есть 1-сеть пространства (X, ρ) и x_0 — фиксированный элемент из (X, ρ). Положим $d = \max\{\rho(x_0, x_i) : i = \overline{1, n}\}$. Отсюда для произвольной точки $x \in X$ имеем неравенство

$$\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, x_i) + \rho(x_i, x_0) < 1 + d,$$

где x_i — центр открытого шара $B(x_i, 1)$, который содержит точку x. ►

Непустое множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным* в пространстве (X, ρ), если подпространство (M, ρ_M) — вполне ограниченное МП.

Пусть M — некоторое непустое подмножество пространства (X, ρ) и ε — произвольно заданное положительное число. Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью для множества M* в (X, ρ), если для любой точки $x \in M$ существует $a \in A$, такое, что $\rho(x, a) < \varepsilon$.

Ясно, что множество $M \subset X$ вполне ограничено в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда для него при любом $\varepsilon > 0$ в (X, ρ) существует конечная ε-сеть. Следовательно, вполне ограниченное множество есть множество, к которому можно с любой степенью точности приблизиться конечными множествами.

Отметим, что если множество A есть конечная ε-сеть множества M, то оно не обязано содержаться в M и может даже не иметь с M ни одной общей точки (см. задачу 12.6(а)).

Примеры вполне ограниченных множеств доставляет

Предложение 12.2. *Если (X, ρ) — вполне ограниченное МП, то любое его подмножество M также вполне ограниченное.*

◄ Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. Согласно теореме 12.1 выберем конечное множество $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $\frac{\varepsilon}{2}$-плотное в пространстве (X, ρ). Пусть подмножество $\{x_{m_1}, \ldots, x_{m_l}\}$ множества A такое, что $\rho(x_{m_j}, M) < \frac{\varepsilon}{2}$ для каждого $j = \overline{1, l}$. Обозначим через $x'_1, x'_2, \ldots, x'_l$ точки из множества M, подчиненные условиям:

$$\rho(x_{m_j}, x'_j) < \frac{\varepsilon}{2}, \ j = \overline{1, l}. \tag{12.1}$$

Покажем, что $B = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_l\}$ — ε-сеть множества M. Принимая во внимание определение множества A, для произвольной точки $x \in M$ найдется такое $x_i \in A$, что

$$\rho(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12.2}$$

Следовательно, полагая $x_i = x_{m_j}$ для некоторого $j \leqslant l$ и учитывая неравенства (12.1), (12.2), окончательно получаем

$$\rho(x, x'_j) \leqslant \rho(x, x_i) + \rho(x_i, x'_j) < \varepsilon,$$

т. е. B является конечной ε-сетью для M. ►

Свойства вполне ограниченных множеств в МП характеризует следующее

Предложение 12.3. (*а*) *Всякое вполне ограниченное множество является ограниченным множеством.*

(*б*) *Если M — вполне ограниченное множество пространства (X, ρ), то его замыкание $\overline{M}$ также вполне ограниченное в (X, ρ).*

◄ (б) Достаточно заметить, что $\frac{\varepsilon}{2}$-плотное множество в подпространстве (M, ρ_M) будет ε-плотно в $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$. ►

Эквивалентное определение вполне ограниченных МП на языке последовательностей дает

Теорема 12.2. *МП будет вполне ограниченным тогда и только тогда, когда каждая последовательность его точек содержит фундаментальную подпоследовательность.*

◄ Пусть (X, ρ) — вполне ограниченное пространство и (x_n) — произвольная последовательность точек в (X, ρ). Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда в пространстве (X, ρ) существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, т. е.

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Выберем номер i таким, что шар $B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$ содержит бесконечно много элементов последовательности (x_n). Тогда существует подпоследовательность (x_{n_m}) последовательности (x_n), такая, что $x_{n_m} \in B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и тем самым удовлетворяет условию $d(\{x_{n_m} : m \in \mathbb{N}\}) < \varepsilon$.

Положим $\varepsilon = 1$ и из заданной последовательности выделим подпоследовательность

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m}, \ldots; \ d(\{x_{1m} : m \in \mathbb{N}\}) < 1, \tag{12.3}$$

где $x_{1m} = x_{n_m}$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Так как $B(a_i, \frac{1}{2})$ — вполне ограниченное множество (согласно предложнению 12.2), содержащее последовательность (12.3), то из (12.3) можно выделить подпоследовательность

$$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m}, \ldots; \ d(\{x_{2m} : m \in \mathbb{N}\}) < \frac{1}{2}.$$

Продолжая этот процесс, для каждого $p = 1, 2, \ldots$ получим последовательность

$$x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pm}, \ldots; \ d(\{x_{pm} : m \in \mathbb{N}\}) < \frac{1}{p}.$$

Составим диагональную последовательность

$$x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{mm}, \ldots\ . \tag{12.4}$$

Отсюда, в силу диагонального процесса Кантора (см. пункт 0.6), получаем, что последовательность (12.4) является подпоследовательностью каждой из построенных последовательностей. Поэтому каково бы ни было $\varepsilon > 0$, выбрав m_0 так, чтобы $\frac{1}{m_0} < \varepsilon$, получим, что для любых $m_1 > m_0$, $m_2 > m_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x_{m_1 m_1}, x_{m_2 m_2}) < \frac{1}{m_0} < \varepsilon,$$

т. е. последовательность (12.4) фундаментальна.

Обратно, пусть пространство (X, ρ) не является вполне ограниченным, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что пространство (X, ρ) не имеет конечной ε–сети. Пусть x_1 — произвольная точка множества X. По предположению, она не образует ε–сети. Поэтому существует такая точка $x_2 \in X$, что $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Пусть в (X, ρ) уже выбраны такие точки $x_1, \ldots, x_n$, что $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ при $i \neq j$. Так как множество этих точек не является ε-сетью для (X, ρ), то в множестве X существует такая точка (обозначим ее через x_{n+1}), что $\rho(x_i, x_{n+1}) \geqslant \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$. Продолжая этот процесс, получим последовательность точек $x_n \in X$, таких, что

$$\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon, \text{ при } n \neq m.$$

Ясно, что эта последовательность не содержит фундаментальной подпоследовательности. ►

Задачи и упражнения

12.1. (а) Пусть $\mathscr{A} = \{A_s : s \in S\}$ и $\mathscr{B} = \{B_t : t \in T\}$ — открытые покрытия пространства (X, ρ). Показать, что семейство множеств

$$\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \{A_s \cap B_t : (s, t) \in S \times T\}$$

является открытым покрытием пространства (X, ρ).

(б) Пусть (X, ρ), (Y, σ) — два произвольных пространства, и пусть $\mathscr{A} = \{A_s : s \in S\}$, $\mathscr{B} = \{B_t : t \in T\}$ — открытые покрытия пространств (X, ρ) и (Y, σ), соответственно. Показать, что

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{A_s \times B_t : (s, t) \in S \times T\}$$

§13. Компактные пространства

Почти бессмысленно говорить об открытых пространствах или о замкнутых пространствах, имеет смысл говорить о компактных метрических пространствах.

У. Рудин

МП называется *компактным*, если оно удовлетворяет *условию Бореля–Лебега*: всякое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие, т. е. если $\{U_s : s \in S\}$ — произвольное открытое покрытие пространства (X, ρ), то существует конечный набор индексов $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \subset S$, такой, что $X = \cup\{U_{s_k} : k = \overline{1, n}\}$.

Лемма 13.1. *Если МП полно и вполне ограничено, то оно компактно.*

◀ Пусть МП (X, ρ) полно и вполне ограничено. Допустим, что $\mathscr{U} = \{U_s : s \in S\}$ — произвольное открытое покрытие пространства (X, ρ), никакое конечное подсемейство которого не покрывает (X, ρ). Для положительного числа $\frac{1}{2^{n-1}}$, где $n \in \mathbb{N}$, существует, в силу того, что МП (X, ρ) вполне ограничено, конечная $\frac{1}{2^{n-1}}$-сеть $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Следовательно, $X = \cup\{B(x_i, \frac{1}{2^{n-1}}) : i = \overline{1, k}\}$. Обозначим через B_{n-1} тот из шаров $B(x_i, \frac{1}{2^{n-1}})$, который нельзя покрыть конечным семейством из $\mathscr{U}$. Для числа $\frac{1}{2^n}$ существует конечное покрытие (X, ρ) шарами $\{B(x_i^1, \frac{1}{2^n}) : i = \overline{1, m}\}$. Среди этих шаров, имеющих непустое пересечение с B_{n-1}, найдется по крайней мере один шар B_n, который нельзя покрыть конечным семейством множеств из $\mathscr{U}$. Действительно, поскольку

$$B_{n-1} \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i^1, \frac{1}{2^n}),$$

в противном случае нашлось бы конечное подсемейство семейства $\mathscr{U}$, покрывающее B_{n-1}.

Обозначим через x_n центр открытого шара B_n, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $B_n \cap B_{n-1} \neq \varnothing$ для каждого $n = 2, 3, \ldots$, то

$$\rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Поэтому, если $n \leqslant p \leqslant q$, то

$$\rho(x_p, x_q) \leqslant \rho(x_p, x_{p+1}) + \ldots + \rho(x_{q-1}, x_q) <$$
$$< \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{q-2}} < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Это значит, что (x_n) — фундаментальная последовательность в (X, ρ) и, следовательно, в силу полноты (X, ρ) сходится к точке $x_0 \in X$.

Пусть $s_0 \in S$ — индекс, при котором $x_0 \in U_{s_0}$. Так как U_{s_0} — открытое множество, то существует число $r > 0$, такое, что $B(x_0, r) \subset U_{s_0}$. Из определения точки x_0 следует, что найдется номер n, для которого

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{r}{2}, \ \frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}.$$

Отсюда для указанного n получаем соотношение

$$B_n \subset B(x_0, r) \subset U_{s_0},$$

что противоречит определению шара B_n. ►

Лемма 13.2. *Если (X, ρ) — компактное МП, то любая последовательность точек из (X, ρ) содержит сходящуюся в нем подпоследовательность.*

◄ Пусть (x_n) — произвольная последовательность в (X, ρ). Положим

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}}, \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Покажем, что $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$. Предположим противное, т. е. $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Тогда, полагая $X \backslash F_n = U_n$, получим, что семейство $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ является открытым покрытием пространства (X, ρ), которое, в силу компактности (X, ρ), содержит его конечное подпокрытие $\{U_{n_i} : i = \overline{1, k}\}$. Но это значит, что $\cap\{F_{n_i} : i = \overline{1, k}\} = \varnothing$, что невозможно, так как если $n > \max\{n_i : i = \overline{1, k}\}$, то непустое множество F_n содержится в F_{n_i} для каждого $i = \overline{1, k}$. Таким образом, $\cap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ содержит хотя бы одну точку x_0, т. е. x_0 является точкой прикосновения каждой последовательности $(x_n, x_{n+1}, \ldots), n = 1, 2, \ldots$. Возьмем последовательность шаров $B(x_0, \frac{1}{k})$ и в каждом шаре выберем входящую в него точку x_{n_k} так, чтобы выполнялось условие $n_k < n_{k+1}$ для каждого $k = 1, 2, \ldots$. В результате получим подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n). Так как $\rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon$ при любом $k \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, то заключаем, что эта подпоследовательность сходится к точке x_0. ►

Из доказанных лемм 13.1 и 13.2 следует критерий компактности МП на языке последовательностей, а именно: справедлива

Теорема 13.1. *МП (X, ρ) компактно тогда и только тогда, когда каждая последовательность точек из (X, ρ) содержит сходящуюся в нем подпоследовательность* (или другими словами: *МП компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограничено*). ►

Непосредственно из предложения 12.1 и теоремы 13.1 следует

Предложение 13.1. *Компактное МП сепарабельно и ограничено.* ►

Теорема 13.2. *Если f — непрерывное отображение компактного пространства (X, ρ) на пространство (Y, σ), то (Y, σ) — компактное пространство.*

◄ Рассмотрим произвольную последовательность точек (y_n) пространства (Y, σ). Для каждой точки $y_n \in Y$ возьмем один из его прообразов $x_n \in X$. Так как (X, ρ) компактно,то, в силу леммы 13.2, последовательность (x_n) содержит подпоследовательность (x_{n_k}), такую, что $x_{n_k} \to x_0 \in X$. Отсюда, с учетом того, что $f \in C(X, Y)$, имеем

$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \in f(X) = Y, \ k \to \infty.$$

Следовательно, подпоследовательность (y_{n_k}) последовательности (y_n) сходится к точке $y_0 \in Y$. Значит, согласно теореме 13.1, пространство (Y, σ) компактно. ►

Понятия непрерывности и равномерной непрерывности для отображения $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, в случае, когда (X, ρ) — компактное пространство, равносильны (см. замечание 7.1), а именно: имеет место

Теорема 13.3. *Пусть $f\colon (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ — непрерывное отображение компактного МП (X, ρ) в произвольное МП (Y, σ), тогда оно равномерно непрерывно на X.*

◀ Пусть $f\colon (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ не является равномерно непрерывным, т. е. существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $x, x' \in X$, для которых выполняются неравенства

$$\rho(x,x') < \delta, \quad \sigma(f(x),f(x')) \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим числовую последовательность (δ_n), $(\delta_n) > 0$, $\delta_n \to 0$, и для каждого δ_n выберем соответствующие точки $x_n, x'_n \in X$, такие, что $\rho(x_n, x'_n) < \delta_n$, $\sigma(f(x_n), f(x'_n)) \geqslant \varepsilon$. В силу компактности (X,ρ) из последовательности (x_n), выделим подпоследовательность (x_{n_k}) такую, что $x_{n_k} \to x_0 \in X$. Тогда согласно неравенству треугольника имеем

$$\rho(x_0, x'_{n_k}) \leqslant \rho(x_0, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x'_{n_k}) \to 0, \ k \to \infty.$$

Таким образом, $x'_{n_k} \to x_0$ и в силу непрерывности f получаем, что

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0), \ f(x'_{n_k}) \to f(x_0).$$

Следовательно, $\sigma(f(x_{n_k}), f(x'_{n_k})) \to 0$, а это противоречит неравенству $\sigma(f(x_n), f(x'_n)) \geqslant \varepsilon$, справедливому при любом n. ▶

Задачи и упражнения

13.1. Пусть (X,ρ) — компактное пространство и M — множество всех изометричных отображений пространства (X,ρ) в себя с метрикой $\hat\rho(x,y) = \max\{\rho(x(t),y(t)) : t \in X\}$. Доказать, что $(M,\hat\rho)$ — компактное пространство.

13.2. Доказать, что сепарабельное МП компактно тогда и только тогда, когда любая последовательность непустых замкнутых множеств, последовательно вложенных друг в друга, имеет непустое пересечение.

13.3. Доказать, что произведение двух пространств компактно тогда и только тогда, когда каждое из них компактно.

13.4. Пусть (X,ρ) — МП, в котором каждое бесконечное подмножество имеет предельную точку. Доказать, что пространство (X,ρ) компактно.

13.5. Установить справедливость следующих утверждений;

(а) если пространство (X,ρ) компактно, то существуют такие точки $a, b \in X$, что $\rho(a,b) = d(X)$;

(б) если для всякой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B пространства (X,ρ) выполняется неравенство $\rho(A,B) > 0$, то пространство (X,ρ) компактно.

§14. Компактные и предкомпактные множества

Для понятий, которые кажутся близкими к чувственной интуиции, соответствующие математические объекты, в сущности, очень отличаются от того, что мы о них думаем.

Ж. Дьедонне

Множество $M \subset X$ называется *компактным* в пространстве (X, ρ), если подпространство (M, ρ_M) — компактное МП.

Теорема 14.1. *Для компактности множества $M \subset X$ в пространстве (X, ρ) необходимо и достаточно, чтобы каждое покрытие множества M открытыми в (X, ρ) множествами содержало конечное подпокрытие.*

◀ Необходимость. Пусть M — компактное множество в (X, ρ) и $\{U_s : s \in S\}$ — произвольное его покрытие открытыми в (X, ρ) множествами, т. е. $M \subset \cup\{U_s : s \in S\}$. Положим $V_s = M \cap U_s$ для каждого $s \in S$. В силу теоремы 5.1, имеем, что $\{V_s : s \in S\}$ — открытое покрытие множествами из (M, ρ_M). Из компактности (M, ρ_M) получаем, что найдется конечное подпокрытие $\{V_{s_1}, \dots, V_{s_n}\} \subset \{V_s : s \in S\}$, а тогда система $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_n}\}$ будет служить конечным подпокрытием исходного покрытия $\{U_s : s \in S\}$.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы и $\{V_s : s \in S\}$ — произвольное открытое покрытие пространства (M, ρ_M). Из теоремы 5.1 имеем, что для каждого V_s найдется открытое множество U_s в (X, ρ), такое, что $V_s = M \cap U_s$. Ясно, что $\{U_s : s \in S\}$ образует покрытие пространства (M, ρ_M) открытыми в (X, ρ) множествами. По условию, существует конечное подпокрытие $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_n}\}$. Тогда $\{V_{s_1}, \dots, V_{s_n}\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\{V_s : s \in S\}$, поэтому пространство (M, ρ_M) — компактно. ▶

Предложение 14.1. *Пусть $M \subset A \subset X$. Множество M компактно в пространстве (X, ρ) в том и только том случае, когда оно компактно в подпространстве (A, ρ_A).* ►

Замечание 14.1. Из предложения 14.1 имеем, что свойство множества быть компактным не зависит от пространства, в которое оно положено.

Предложение 14.2. (*а*) *Пусть $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ — семейство замкнутых множеств в пространстве (X, ρ). Множество $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ компактно в пространстве (X, ρ) тогда и только тогда, когда все множества F_k компактны.*

(*б*) *Любое компактное множество в ПМП замкнуто.*

(*в*) *В компактном пространстве всякое замкнутое множество компактно.*

◄ (б) Пусть M — компактное множество в (X, ρ), т. е. МП (M, ρ_M) компактно. Тогда, в силу теоремы 13.1, оно полно, а из теоремы 8.1 имеем, что M — замкнутое множество в (X, ρ).

(в) Согласно теореме 13.1, компактное МП (X, ρ) является вполне ограниченным, а тогда множество $M \subset X$ также вполне ограничено (см. предложение 12.2). С учетом замкнутости множества M, из теоремы 8.1 имеем, что (M, ρ_M) — ПМП. Таким образом, (M, ρ_M) есть вполне ограниченное и полное МП, т. е. (M, ρ_M) — компактное МП. ►

Теорема 14.2. *Для того, чтобы множество в ПМП было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и вполне ограниченным.* ►

Из теоремы 14.2, в частности, получаем следующее утверждение: *подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.*

Предложение 14.3. *Всякое непустое компактное множество в пространстве $\mathbb{R}$ ограничено и имеет наименьший и наибольший элементы.*

◄ Допустим, что M — непустое компактное множество в $\mathbb{R}$. Тогда в силу частного случая теоремы 14.2 имеем, что множество M ограничено, т. е. существуют $a = \inf M$, $b = \sup M$.

Из определения чисел a и b, для каждого числа $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие точки $x_n \in M$ и $y_n \in M$, что выполняются следующие неравенства

$$a \leqslant x_n < a + \frac{1}{n}, \quad b - \frac{1}{n} < y_n \leqslant b.$$

Отсюда, при $n \to \infty$, получаем: $x_n \to a$, $y_n \to b$. Теперь, учитывая замкнутость множества M, имеем, что $a \in M$ и $b \in M$. ►

Множество $M \subset X$ называется *предкомпактным* (или *относительно компактным*) в пространстве (X, ρ), если его замыкание $\overline{M}$ компактно в пространстве (X, ρ).

Свойства предкомпактных множеств в МП характеризует

Предложение 14.4. (*а*) *Любое подмножество предкомпактного множества предкомпактно.*

(*б*) *Предкомпактное множество вполне ограничено.*

(*в*) *Вполне ограниченное множество в полном пространстве предкомпактно.*

(*г*) *Объединение двух предкомпактных множеств предкомпактно.*

◄ (а) Пусть $A \subset M \subset X$, где множество M предкомпактно. Тогда множество $\overline{A}$ замкнуто в компактном пространстве $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$. Отсюда, с учетом предложения 14.2(в), заключаем, что оно компактно в $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$, а в силу предложения 14.1(б), оно будет компактным в (X, ρ). Значит, множество A предкомпактно в (X, ρ).

(б) Если множество M предкомпактно в (X, ρ), то из компактности подпространства $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$, в силу теоремы 13.1, получаем, что $(\overline{M}, \rho_{\overline{M}})$ — вполне ограничено, а тогда M как подмножество вполне ограниченного пространства (см. предложение 12.2(а)) также вполне ограничено.

(в) Пусть множество A вполне ограничено в ПМП (X, ρ). Тогда (в силу теоремы 8.1) $(\overline{A}, \rho_{\overline{A}})$ есть ПМП, а из предложения 12.2(б) заключаем, что пространство $(\overline{A}, \rho_{\overline{A}})$ вполне ограничено. Таким образом, согласно лемме 13.1, имеем, что множество A предкомпактно.

(г) Утверждение вытекает из предложения 14.2(а). ►

Теорема 14.3 (критерий Хаусдорфа). *Подмножество M полного пространства (X, ρ) предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено* (или другими словами: *для предкомпактности подмножества M полного пространства (X, ρ) необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовала конечная ε-сеть для множества M в (X, ρ)*). ►

Грубо говоря, критерий Хаусдорфа о предкомпактности подмножества ПМП устанавливает, что предкомпактное множество можно представлять как «приближенно конечномерное» множество в том смысле, что для всякого $\varepsilon > 0$ имеется конечное множество точек $x_1, \ldots, x_n$, такое, что каждая точка M лежит не дальше чем на ε от одной точки x_i.

Аналогом теоремы Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значениях непрерывной функции на отрезке $[a,b]$ множества $\mathbb{R}$ (см., например, [20], т. 1, стр. 193) является следующая

Теорема 14.4. *Если $f\colon (X,\rho) \to \mathbb{R}$ — непрерывная действительная функция, определенная на компактном множестве $M \subset X$ МП (X,ρ), то она ограничена на M и принимает на нем наибольшее и наименьшее значения, т. е. множество $f(M)$ ограничено в пространстве $\mathbb{R}$ и существуют две точки $a, b \in M$, такие, что*

$$f(a) = \min_{x\in M} f(x), \ \ f(b) = \max_{x\in M} f(x).$$

◄ Из теоремы 13.2(а) следует, что множество $f(M)$ компактно в пространстве $\mathbb{R}$, а тогда, согласно предложению 14.3, множество $f(M)$ имеет наименьший и наибольший элементы.

Пусть $p = \min\limits_{x\in M} f(x)$, $q = \max\limits_{x\in M} f(x)$, и пусть $a \in M$ и $b \in M$ таковы, что $f(a) = p$, $f(b) = q$. Так как для каждой точки $x \in M$ справедливо включение $f(x) \in f(M)$, то

$$f(a) \leqslant p \leqslant f(x) \leqslant q \leqslant f(b).$$

Отсюда видно, что f является ограниченной функцией и в точке a принимает наименьшее значение, а в точке b — наибольшее значение на множестве M. ►

Следствие 14.1. *Если f — заданная на компактном подмножестве K пространства (X,ρ) непрерывная и положительная функция, то существует число $c > 0$, такое, что $f(x) \geqslant c$ для всех $x \in K$.* ►

◄ Так как $f(x) > 0$ для любого $x \in K$ (по условию), то, в силу теоремы 14.4, найдется точка $a \in K$, в которой $f(a) = \inf\limits_{x\in K} f(x)$. Следовательно, $f(x) \geqslant f(a) = c > 0$ при любом $x \in K$. ►

Задачи и упражнения

14.1. Доказать следующие утверждения:

(а) объединение конечного числа компактных множеств компактно (в частности, множество, состоящее из конечного числа точек, компактно);

(б) пересечение любой совокупности компактных множеств компактно.

14.2. (а) Доказать, что любое неограниченное множество $A \subset X$ пространства (X,ρ) не компактно.

§15. Критерии предкомпактности в конкретных пространствах

Частное вечно подчиняется общему, общее же все время подлаживается к частному.

И. Гете

В математическом анализе очень часто встречается задача о предкомпактности того или иного множества, рассматриваемого в некотором заданном МП. Поэтому большой интерес представляют легко применимые критерии предкомпактности множеств в некоторых пространствах, позволяющие узнавать такие множества. Это позволяет также сделать более прозрачным важное понятие компактности.

Семейство отображений $\mathscr{F} = \{f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)\}$ называется *равномерно ограниченным на множестве* X, если множество

$$V = \{y \in Y : \exists f \in \mathscr{F}, \exists x \in X, y = f(x)\}$$

значений функций семейства $\mathscr{F}$ ограничено в (Y, σ).

Для семейства $\mathscr{F}$ числовых функций $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ это означает существование такого числа $c \in \mathbb{R}$, что для всех $f \in F$ и всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$.

Семейство отображений $\mathscr{F} = \{f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)\}$ называется *равностепенно непрерывным на множестве* X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех $f \in \mathscr{F}$ и всех точек $x_1, x_2 \in X$, для которых $\rho(x_1, x_2) < \delta$, выполняется неравенство $\sigma(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Ясно, что каждое отображение f, входящее в состав равностепенно непрерывного семейства $\mathscr{F}$, равномерно непрерывно.

С помощью равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности устанавливается критерий предкомпактности множества в пространстве $C[a, b]$, известный как

Теорема Арцела – Асколи. *Для того чтобы множество $M \subset C[a, b]$ было предкомпактно в пространстве $C[a, b]$, необходимо и достаточно,* *чтобы множество M было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

◄ Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть множество M предкомпактно в пространстве $C[a,b]$. Тогда, в силу теоремы 14.3, оно вполне ограничено, а значит, множество M равномерно ограничено.

Покажем, что множество M равностепенно непрерывно. Согласно вполне ограниченности M для данного $\varepsilon > 0$ существует конечная $(\varepsilon/3)$-сеть $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \subset M$. Так как функции $f_k \in C[a,b]$, $k = \overline{1,n}$, то они равномерно непрерывны. Следовательно, для каждой функции f_k найдется такое $\delta_k > 0$, чтобы

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{15.1}$$

для всех $x_1, x_2 \in [a,b]$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta_k$.

Непосредственно из определения $(\varepsilon/3)$-сети, для любой функции $f \in M$ существует функция f_k из множества $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, такая, что

$$\rho(f, f_k) = \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{15.2}$$

Поэтому, если $\delta = \min\{\delta_k : k = 1, \ldots, n\}$ и $|x_1 - x_2| < \delta$, то для любой функции $f \in M$ из неравенств (15.1) и (15.2) имеем

$$\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &\leqslant |f(x_1) - f_k(x_1)| + |f_k(x_1) - f_k(x_2)| + \\
&+ |f(x_2) - f_k(x_2)| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x_1) - f_k(x_2)| + \\
&+ \max_{x\in[a,b]} |f(x) - f_k(x)| < 2\rho(f, f_k) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

а это означает, что множество M равностепенно непрерывно.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть множество M равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. $C[a,b]$ — ПМП, поэтому для того, чтобы доказать предкомпактность множества M, достаточно установить, что оно вполне ограничено (теорема 14.3), т. е. для множества M в пространстве $C[a,b]$ при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Для произвольной функции $f \in M$ и фиксированного $\varepsilon > 0$ выбрано $\delta > 0$ так, чтобы для любых точек $x_1, x_2 \in [a,b]$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнялось неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Из равномерной ограниченности множества M имеем, что существует $c > 0$, такое, что $|f(x)| \leqslant c$ для любого $f \in M$ и для всех $x \in [a, b]$. Возьмем точки $\{x_i : i = 0, 1, \ldots, n\}$ отрезка $[a, b]$ и $\{y_j : j = 0, 1, \ldots, m\}$ отрезка $[-c, c]$, такие, что

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ x_i - x_{i-1} < \delta,\ i = \overline{1, n};$$
$$-c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = c,\ y_j - y_{j-1} < \frac{\varepsilon}{5},\ j = \overline{1, m}.$$

Через точки $(x_i, 0)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, проведем прямые, параллельные оси Oy, а через точки $(0, y_j)$, $j = 0, 1, \ldots, m$, прямые, параллельные оси Ox. В результате этого получим разбиение τ прямоугольника

$$\{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, \quad -c \leqslant y \leqslant c\},$$

в котором лежат графики функций $f \in M$, на прямоугольники с длинами сторон, параллельными оси Ox, меньшими δ, и параллельными оси Oy, меньшими $\frac{\varepsilon}{5}$.

Рассмотрим множество A всех непрерывных на $[a, b]$ функций, графиками которых являются ломаные, вершины которых лежат в вершинах (x_i, y_j) прямоугольников разбиения τ. Множество A конечно, так как конечным является множество всех вершин (x_i, y_j), где $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Докажем, что A является ε-сетью для M. Выберем произвольную $f \in M$, и для каждого x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, обозначим через (x_i, y_i) ближайшую к точке $(x_i, f(x_i))$ точку вида (x_i, y_j), лежащую на прямой $x = x_i$, тогда $|f(x_i) - y_{j_i}| < \frac{\varepsilon}{5}$. Сопоставим f функцию $f_0 \in A$, графиком которой является ломаная, проходящая через вершины (x_0, y_{j_0}), (x_1, y_{j_1}), ..., (x_n, y_{j_n}), т. е. $f_0(x_i) = y_{j_i}$, причем

$$|f_0(x_i) - f_0(x_{i-1})| \leqslant |f_0(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1}| + \\ + |f(x_{i-1}) - f_0(x_{i-1})| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{3\varepsilon}{5}.$$

В силу линейности функции f_0 на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ для любой точки $x \in [x_{i-1}, x_i]$ имеем

$$|f_0(x) - f_0(x_{i-1})| \leqslant |f_0(x_i) - f_0(x_{i-1})| < \frac{3\varepsilon}{5}.$$

Для каждой точки $x \in [a, b]$, найдется содержащий ее отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, а для произвольной точки этого отрезка будем иметь

$$|f(x) - f_0(x)| \leqslant |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - f_0(x_{i-1})| + \\ + |f_0(x_{i-1}) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3}{5}\varepsilon = \varepsilon.$$

Отсюда и из определения чебышевской метрики ρ в пространстве $C[a, b]$ (см. пример 2.9) получаем, что $\rho(f, f_0) < \varepsilon$, т. е. множество A является конечной ε-сетью для M. ▶

Замечание 15.1. Теорема Арцела — Асколи допускает обобщение на случай отображения компактов, а именно: если $\mathscr{F}$ — семейство отображений $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$, определенных на компактном МП (X, ρ) со значениями в ПМП (Y, σ), то для предкомпактности $\mathscr{F}$ в пространстве $C(X, Y)$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{F}$ было вполне ограниченным и равномерно непрерывным (см., например, [12], ч. II, стр. 470).

Теорема 15.1. *Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ предкомпактно в пространстве $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно ограничено.*

◀ Необходимость очевидна, так как всякое вполне ограниченное множество ограничено.

Обратно, если множество M ограничено в пространстве $\mathbb{R}^n$, то его можно поместить внутрь некоторого достаточно большого куба. Если разбить такой куб на кубики с ребром $\dfrac{2\varepsilon}{\sqrt{n}}$, то вершины этих кубиков будут образовывать конечную ε-сеть в исходном кубе и, значит, в любом множестве, лежащем внутри этого куба. ▶

Теорема 15.2. *Множество $M \subset l_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ предкомпактно в пространстве l_p тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(а) *существует такое число $c > 0$, что*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \leqslant c$$

для любого $x \in M$, $x = (x_i)$ (т. е. множество M ограничено);

(б) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что*

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p$$

для всех $x \in M$, $x = (x_i)$.

◀ Пусть M предкомпактно, тогда, в силу теоремы 14.3, множество M вполне ограничено, а значит, M ограничено и условие (а) выполнено.

Докажем справедливость условия (б). Для точки $x \in M$, $x = (x_n)$, положим

$$S_n(x) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots), \; R_n(x) = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots).$$

Отсюда и из определения пространства l_p (см. пример 2.6) имеем

$$x = S_n(x) + R_n(x),$$

$$\rho(R_n(x), 0) = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x, S_n(x)).$$

Ясно, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Для любых $x, y \in l_p$ получаем

$$\rho(S_n(x), S_n(y)) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x, y).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно, и выберем $\frac{\varepsilon}{3}$-сеть $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \subset M$ для множества M. Тогда для любой точки $x \in M$ найдется такая z_{i_0}, что $\rho(x, z_{i_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \rho(R_n(x), 0) &= \rho(x, S_n(x)) \leqslant \rho(x, z_{i_0}) + \rho(z_{i_0}, S_n(x)) \leqslant \\ &\leqslant \rho(x, z_{i_0}) + \rho(z_{i_0}, S_n(z_{i_0})) + \rho(S_n(z_{i_0}), S_n(x)) < \\ &< 2\rho(x, z_{i_0}) + \rho(R_n(z_{i_0}), 0) < \frac{2}{3}\varepsilon + \rho(R_n(z_{i_0}), 0). \end{aligned}$$

Поскольку $\rho(R_n(z_{i_0}), 0) \to 0$, $n \to \infty$, то найдется такой номер n_0, что $\rho(R_n(z_{i_0}), 0) < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n > n_0$ и всех $i_0 = \overline{1, n}$. Следовательно, справедливо неравенство $\rho(R_n(x), 0) < \varepsilon$, для всех $x \in M$, т. е. выполнено условие (б).

Обратно, пусть выполнены условия (а) и (б). Докажем, что для заданного $\varepsilon > 0$ множество M имеет конечную ε-сеть. Выберем номер n_0 так, чтобы $\rho(R_{n_0}(x), 0) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in M$. Рассмотрим конечное множество

$$M_1 = \{y \in l_p \colon y = (y_1, \ldots, y_{n_0}, 0, \ldots), \; y_i = k\delta, \; \delta = \frac{\varepsilon}{2n_0^{1/p}}, \; k \in \mathbb{Z}, \; |k| \leqslant \frac{c}{\delta}\}.$$

Для точки $x \in M$ выберем $y = ([\frac{x_1}{\delta}]\delta, \ldots, [\frac{x_{n_0}}{\delta}]\delta, 0, \ldots) \in M_1$, где $[x]$ – целая часть числа x. Тогда

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n_0} \left|\left[\frac{x_k}{\delta}\right]\delta - x_k\right|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left[n_0\delta^p + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = \varepsilon.$$

Отсюда, по теореме 14.3, с учетом полноты пространства l_p, получаем предкомпактность множества M. ►

Задачи и упражнения

15.1. Доказать предкомпактность в пространстве $C[0,1]$ следующих множеств:

(а) $\{x \in C^2[0,1] : |x''(t)| \leqslant 1,\ x(0) = x(1) = 0\}$;
(б) $\{x \in C^1[0,1] : |x'(t)| \leqslant 1,\ x(0) = a\}$, a – некоторое число;
(в) $\{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0,\ \int\limits_0^1 |x'(t)|^2 dt \leqslant 1\}$;
(г) $\{x \in C^2[0,1] : x(0) = 0,\ x'(0) = 0,\ \int\limits_0^1 |x''(t)|^2 dt \leqslant 1\}$;
(д) $\{x : x(\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi(t)dt,\ \varphi \in C[0,1]\}$.

15.2. В пространстве $C[a,b]$ рассмотрим следующие семейства функций

(а) t^n, $n \in \mathbb{N}$; (б) $\sin nt$, $n \in \mathbb{N}$;
(в) $\sin(n+t)$, $n \in \mathbb{N}$; (г) $e^{t-\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Какие из них предкомпактны в пространстве $C[a,b]$ и при каких a и b?

15.3. Какие из нижеперечисленных множеств предкомпактны в пространстве $C[0,1]$:

(а) $\{x \in C[0,1] : |x(t)| \leqslant B\}$,
(б) $\{x \in C^1[0,1] : |x(t)| \leqslant B_0,\ |x'(t)| \leqslant B_1\}$,
(в) $\{x \in C^2[0,1] : |x'(t)| \leqslant B_1,\ |x''(t)| \leqslant B_2\}$,
(г) $\{x \in C[0,1] : |x(t)| \leqslant B,\ |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|\}$,
(д) $\{x \in C^1[0,1] : |x(t)| \leqslant B,\ |x'(t_1) - x'(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|\}$,

где B, B_0, B_1, B_2, L — некоторые постоянные? Указать, какие из этих множеств компактны.