ЗАДАНИЯ 3, 4
“ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ”

Выполнить программную реализацию математической модели с начальными и граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)}\frac{\partial}{\partial x}(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + F(x,t), & t \in [0,T], x \in [0,L], \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), & x \in [0,L] \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(L,t) = \beta(t), & t \in [0,T] \end{cases} \tag{1}$$

Переход к дискретной модели. Явный метод расчета

Введем равномерное разбиение прямоугольника $[0,L] \times [0,T]$ на сетку с узлами (x_j, t_m), где $x_j = j * \Delta x$, $t_m = m * \Delta t$, $j = 1,2,...,N$, $m = 1,2,...,M$.

Здесь $\Delta x = L/N$, $\Delta t = T/M$ – шаги разбиения отрезка $[0,L]$ и $[0,T]$ соответственно.

Тогда известные непрерывно-дифференцируемые функции $\rho(x)$, $k(x)$, $f(x)$ становятся известными дискретными функциями

$$\rho_j := \rho(x_j) = \rho(j * \Delta x),$$

$$k_j := k(j * \Delta x),$$

$$F_j^m := F(j * \Delta x, m * \Delta t).$$

Искомой величиной в дискретной задаче будет двумерный массив

$$u_j^m :\approx u(x_j, t_m)$$

Для дискретизации основного уравнения перепишем его, раскрывая производную произведения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k'(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t). \tag{2}$$

Уравнение (2) заменяется на дискретный аналог:

$$\begin{gathered}\frac{u_j^{m+1}-2u_j^m+u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2}=\frac{k'(x_j)}{\rho_j}\cdot\frac{u_{j+1}^m-u_{j-1}^m}{2\Delta x}\\+\frac{k_j}{\rho_j}\cdot\frac{u_{j+1}^m-2u_j^m+u_{j-1}^m}{(\Delta x)^2}+F_j^m,\ j=\overline{1,N-1},\ k=\overline{1,M-1}.\end{gathered}\tag{3}$$

Начальные условия в дискретном случае будут выглядеть:

$$u_j^0=f_j, u_j^1=f_j+g_j\Delta t,\ j=\overline{0,N}\tag{4}$$

граничные условия Дирихле:

$$u_0^m=\alpha(t_m):=\alpha_m,\quad u_N^m=\beta(t_m):=\beta_m,\ m=\overline{0,M},\tag{5}$$

Заметим, что в уравнении (3) в расчете участвует пять точек u_j^m, u_{j-1}^m, u_{j+1}^m, u_j^{m-1}, u_j^{m+1}. На первом шаге благодаря начальным условиям, оказываются известными значения 4-е значения на $m-1, m$ временном слое, а неизвестной является из них одна точка u_j^{m+1}. Выражая ее явно из (3), мы получим рекуррентную формулу для расчета смещения в точке (x_j, t_{m+1}):

$$u_j^{m+1}=\left(2-2\frac{k_j}{\rho_j}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)u_j^m-u_j^{m+1}+...\tag{6}$$

здесь самостоятельно дописать! Эта формула пойдет в программу!

Явный метод расчета обладает одним недостатком: он условно устойчив. Иначе говоря, не при всяких шагах дискретизации $\Delta t, \Delta x$ он работает. То есть метод чувствителен к размерности массива $M\times N$. Условием устойчивости здесь является *условие Куранта:*

$$\left|2-2\frac{k_j}{\rho_j}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right|\le 1$$

Необходимо его проверять в программе в цикле перед расчетом по формуле (6).

Неявный метод расчета

задача для **неявного метода** будет иметь вид

$$\frac{u_j^{m+1}-2u_j^m+u_j^{m-1}}{(\Delta t)^2}=\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)}\cdot\frac{u_{j+1}^{m+1}-u_{j-1}^{m+1}}{2\Delta x}+\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)}\cdot\frac{u_{j+1}^{m+1}-2u_j^{m+1}+u_{j-1}^{m+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$+f(x_j,t_m), j=\overline{1,N-1},\ \ k=\overline{1,M-1}. \tag{21}$$

Начальные и граничные условия остаются без изменения, то есть такие же, как в (20).

В уравнении (21) неизвестными являются три точки $u_{j+1}^{m+1},\ u_j^{m+1},\ u_{j-1}^{m+1}$. То есть матрица для неизвестных получается трехдиагональная. Перепишем (21), выделяя коэффициенты при этих трех неизвестных:

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2}-\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}\right)u_{j-1}^{m+1}-\left(\frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta t)^2}\right)u_j^{m+1}+$$

$$\left(\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2}+\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x}\right)u_{j+1}^{m+1}==\frac{u_j^{m-1}-2u_j^m}{(\Delta t)^2}-F(x_j,t_m). \tag{22}$$

Введя обозначение

$$a_j=\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2}-\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x},\ \ b_j=\frac{2k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta t)^2},$$

$$c_j=\frac{k(x_j)}{\rho(x_j)(\Delta x)^2}+\frac{k'(x_j)}{\rho(x_j)2\Delta x},\ \ \widetilde{F}_j^m=\frac{u_j^{m-1}-2u_j^m}{(\Delta t)^2}-F(x_j,t_m),$$

получим задачу для неявного метода

$$\begin{cases} a_ju_{j-1}^{m+1}-b_ju_j^{m+1}+c_ju_{j+1}^{m+1}=\tilde{F}, \\ u_j^0=f(x_j), \quad u_j^1=f(x_j)+g(x_j)\Delta t, \quad j=\overline{0,N}, \\ u_0^{m+1}=\alpha(t_{m+1}), \quad u_N^m=\beta(t_{m+1}), \quad m=\overline{0,M-1}. \end{cases} \tag{23}$$

Метод прогонки заключается в представлении (гипотезе), что

$$u_j^{m+1}=A_{j+1}u_{j+1}^{m+1}+B_{j+1}, \quad j=0,...,N-1; m=0,...,M-1. \tag{24}$$

На первом этапе (прямой ход) определяются коэффициенты

$$A_{j+1}=\frac{c_j}{b_j-A_ja_j}, \quad B_{j+1}=\frac{a_jB_j-\tilde{F}}{b_j-A_ja_j}. \tag{25}$$

Для расчета по формулам (25) необходимо знать начальные значения A_1, B_1:

$$A_1 = 0,\ B_1 = \alpha_{m+1}.$$

так как $u_0^{m+1} = A_1 u_1^{m+1} + B_1$.

То есть для задания A_1, B_1 берем граничные условия на левом конце.

На втором этапе обратный ход представляет равенство (24), для которого нужно знать начальное значение - u_N^{m+1}.

Граничные условия на правом конце используем для задания u_N^{m+1}, которое необходимо знать перед выполнением обратного хода (15):

$$u_N^{m+1} = \beta_{m+1}.$$

Заметим, что условием существования, единственности и устойчивости решения по методу прогонки является условие, выполняемое при любом m:

$$|b_j| >= |a_j| + |c_j|,$$

которое очевидно выполняется в нашем случае.

Алгоритм.

До пятого пункта предыдущего алгоритма все остается, то есть до цикла, который задает граничные условия. Этот цикл исключается в методе прогонки.

6. Открытие цикла по $m = 0, .., M-1$, который закроется в самом конце алгоритма.

7. Задание A_1, B_1

8. Открытие цикла по $j = 1, .., N-1$ выполнение прямого хода - расчет по формулам (25), после цикл закрывается.

9. Задание u_N^{m+1}

10. Открытие цикла с обратным ходом - формула (24), будет только одна формула в этом цикле

11. Закрытие цикла по времени и вывод графика.

Варианты:

1. $L = 10$, $k(x) = x^2$, $\rho(x) = x + 1$, $F(x,t) = \sin(x)$, $f(x) = x$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t, \beta(t) = 0$.

2. $L = 10$, $k(x) = x^3 + 1$, $\rho(x) = (x + 1)^2$, $F(x,t) = \cos(x)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t, \beta(t) = t^2$.

3. $L = 10$, $k(x) = 1\frac{1}{x+1}$, $\rho(x) = 1$, $F(x,t) = \cos(x)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = 0, \beta(t) = t$.

4. $L = 10$, $k(x) = x^3 + 1$, $\rho(x) = (x + 1)^2$, $F(x,t) = \sin(x)$, $f(x) = x^3 - x$, $g(x) = -x$, $\alpha(t) = 0, \beta(t) = 0$.

5. $L = 10$, $k(x) = x^5 + x$, $\rho(x) = 2$, $F(x,t) = e^{\cos(x)}$, $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $\alpha(t) = t, \beta(t) = t + 1$.

6. $L = 10$, $k(x) = 1$, $\rho(x) = (x+1)^2$, $F(x,t) = 0$, $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t + 1, \beta(t) = 0$.

7. $L = 10$, $k(x) = x^3 - x^2 + x + 1$, $\rho(x) = x$, $F(x,t) = \cos^2(x)$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = 0, \beta(t) = 0$.

8. $L = 10$, $k(x) = x^2 + x + 1$, $\rho(x) = 1$, $F(x,t) = e^{-x^2}$, $f(x) = \cos(x^2)$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = 1, \beta(t) = t^2$.

9. $L = 10$, $k(x) = 2x$, $\rho(x) = \ln(x+1)^2$, $F(x,t) = e^x$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t, \beta(t) = t^2$.

10. $L = 10$, $k(x) = e^x + 1$, $\rho(x) = (x + 1)^2$, $F(x,t) = e^{-x}$, $f(x) = \sin(x)^2$, $g(x) = x$, $\alpha(t) = t^2, \beta(t) = -t$.