Вариант 1

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\pi - \arccos(|x|-4)}{x^2-16} \geqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,-1)$, $M = \{(x,y) \mid y\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1 = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 3t^2,\ y(t) = t$ в $CL_1[-1;1]$.
4. Доказать, что если K – компактное множество в (X,d), то для $\forall y_0 \in X \exists x_0 \in K :$ $d(x_0, y_0) = \mathrm{dist}(y_0, K)$.

Вариант 2

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{\pi - 2\arcsin\frac{|x|}{2}}{x^2-5x+4} \geqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,2)$, $M = \{(x,y) \mid y\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1 = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 3t^2,\ y(t) = 2t$ в $CL_1[-1;1]$.
4. Доказать, что если K – компактное множество в (X,d), то $\exists x_0, y_0 \in K : \mathrm{diam}K = d(x_0, y_0)$.

Вариант 3

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{d}{dx}\int\limits_x^{x^2} \frac{\sqrt{1-t}}{2t}dt \leqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,1)$, $M = \{(x,y) \mid y\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 3t^2,\ y(t) = -2t$ в $CL_1[-1;1]$.
4. Доказать, что компактное множество в (X,d) замкнуто.

Вариант 4

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{d}{dx} \int\limits_{x}^{x^2} \frac{\sqrt{1-t}}{2t} dt \geqslant 0 \right\}.$$

2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,-2)$, $M = \{(x,y) \mid y\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = 5\}$.

3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = \sqrt{t}$, $y(t) = 2t$ в $CL_1[0;9]$.

4. Доказать, что если K – компактное множество в (X,d), то (K,d) – полное МП.

Вариант 5

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{d}{dx} \int\limits_{0}^{1-x} \frac{t^2}{t^2+3t+2} dt \leqslant 0 \right\}.$$

2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,0)$, $M = \{(x,y) \mid y = \sqrt{\ln(2x + \frac{2}{x} + 1)}\}$.

3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = t - 2$, $y(t) = \sqrt{t}$ в $CL_1[0;9]$.

4. Доказать, что множество $K_1 \times K_1$ компактно в произведении МП (X_1, d_1) и $(X_2, d_2) \Leftrightarrow K_j$ – компактное множество в $(X_j, d_j), j = 1, 2$.

Вариант 6

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{d}{dx} \int\limits_{0}^{1+x} \frac{t^2}{t^2-8t+15} dt < 0 \right\}.$$

2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(-2,0)$, $M = \{(x,y) \mid y = \sqrt{\ln(3x^2+4x+3)}\}$.

3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = t^2 - 9t$, $y(t) = -3t - 8$ в $CL_1[0;9]$.

4. Доказать, что $\mathrm{diam}B(x,r) = 2r$.

Вариант 7

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{x^2} \sqrt{1-\sqrt{t}}dt \geqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,0)$, $M = \{(x,y) \mid y = \ln(x+2) + \ln\frac{x}{8}\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = \frac{1}{2}$, $y(t) = \sin t$ в $CL_1[0;\pi]$.
4. Доказать, что вполне ограниченное множество ограничено.

Вариант 8

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{x^2-1}\frac{d}{dx} \int\limits_0^{x} \arcsin t dt \leqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,0)$, $M = \{(x,y) \mid (y-4)(x^2+2) - 9x = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = \frac{1}{2}$, $y(t) = \cos t$ в $CL_1[0;\pi]$.
4. Доказать, что множество $K_1 \times K_1$ секвенциально компактно в $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2) \Leftrightarrow$ K_j – секвенциально компактно в $(X_j, d_j), j = 1, 2$.

Вариант 9

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (t+2) dt \leqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(3,0)$, $M = \{(x,y) \mid x^2 - 2y^2 - 2 = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = \cos t$, $y(t) = \cos 3t$ в $CL_1[-\pi;\pi]$.
4. Пусть (X,d) – МП. Докажите, что $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ – метрика на X и эквивалентна метрике d.

Вариант 10

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{\ln(x+1)} \frac{e^{2t} + 2e^t + 1}{e^t - 4} dt \leqslant 0 \right\}.$$

2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0, -3)$, $M = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 - 1 = 0\}$.

3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = \sin t$, $y(t) = \sin 3t$ в $CL_1[-\pi; \pi]$.

4. Докажите, что фундаментальная последовательность в МП ограничена.

Вариант 11

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{\arcsin x} (1 - 2\sin t)\cos t dt = 0 \right\}.$$

2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(-3, 0)$, $M = \{(x, y) \mid x^2 - 2y^2 - 2 = 0\}$.

3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = \cos^2 t$, $y(t) = \sin^2 t$ в $CL_1[0; \pi]$.

4. Докажите, что если $(x_n) \in cs(\mathbb{R}) \wedge (y_n) \in cs(\mathbb{R})$, то $(x_n + y_n), (x_n \cdot y_n)$ – фундаментальные последовательности в $\mathbb{R}$.

Вариант 12

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{\sin x} \arcsin t dt \leqslant 0 \right\}.$$

2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(-2, 4)$, $M = \{(x, y) \mid y = |x - 1| - 4, x \in [0; 5]\}$.

3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$ в $CL_1[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

4. Докажите, что если $U \in \mathcal{T}_X$, то $U \setminus \{x_k \mid k = \overline{1, n}\} \in \mathcal{T}_X$, где $x_k \in U, k = \overline{1, n}$.

Вариант 13

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{\cos x} \arccos t dt \leqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(-3, 4)$, $M = \{(x, y) \mid y - \mathrm{arctg} x = 0, x \in [-1; 1]\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = e^t t + e^t,\ y(t) = e^t t^2$ в $C[-1; 0]$.
4. Доказать, что если K – компактное множество в (X, d), то для $\forall y_0 \in X \exists x_0 \in K$: $d(x_0, y_0) = \mathrm{dist}(y_0, K)$.

Вариант 14

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi - \arccos(|x| - 4)}{x^2 - 16} \geqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0, -1)$, $M = \{(x, y) \mid y\sqrt{1 - x^2} + x^2 - 1 = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = e^t t^2 - e^t,\ y(t) = e^t t$ в $C[-3; 2]$.
4. Доказать, что если K – компактное множество в (X, d), то $\exists x_0, y_0 \in K : \mathrm{diam}K = d(x_0, y_0)$.

Вариант 15

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi - 2 \arcsin \frac{|x|}{2}}{x^2 - 5x + 4} \geqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0, 2)$, $M = \{(x, y) \mid y\sqrt{x^2 - 1} + x^2 - 1 = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 2t,\ y(t) = \mathrm{tg}\, t$ в $C[0; \frac{\pi}{3}]$.
4. Доказать, что компактное множество в (X, d) замкнуто.

Вариант 16

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{x^2} \frac{\sqrt{1-t}}{2t}dt \leqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,1)$, $M = \{(x,y) \mid y\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = \ln(2t)$, $y(t) = t^2 - t$ в $C[\frac{1}{2}; 2]$.
4. Доказать, что если K – компактное множество в (X,d), то (K,d) – полное МП.

Вариант 17

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{x^2} \frac{\sqrt{1-t}}{2t}dt \geqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,-2)$, $M = \{(x,y) \mid y\sqrt{1-x^2} + 1 - x^2 = 5\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 3t$, $y(t) = t^3$ в $C[-2; 2]$.
4. Доказать, что множество $K_1 \times K_1$ компактно в произведении МП (X_1, d_1) и $(X_2, d_2) \Leftrightarrow K_j$ – компактное множество в $(X_j, d_j), j = 1, 2$.

Вариант 18

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx}\int\limits_{0}^{1-x} \frac{t^2}{t^2+3t+2}dt \leqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,0)$, $M = \{(x,y) \mid y = \sqrt{\ln(2x + \frac{2}{x} + 1)}\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t - 2$ в $C[-10; 10]$.
4. Доказать, что $\mathrm{diam}B(x,r) = 2r$.

Вариант 19

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{1+x} \frac{t^2}{t^2 - 8t + 15} dt < 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(-2, 0)$, $M = \{(x, y) \mid y = \sqrt{\ln(3x^2 + 4x + 3)}\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 4t^3,\ y(t) = t|t - 2|$ в $C[0; 3]$.
4. Доказать, что вполне ограниченное множество ограничено.

Вариант 20

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{x^2} \sqrt{1 - \sqrt{t}} dt \geqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0, 0)$, $M = \{(x, y) \mid y = \ln(x + 2) + \ln \frac{x}{8}\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = t^2 + 3t,\ y(t) = t - 1$ в $C^{(2)}[1; 2]$.
4. Доказать, что множество $K_1 \times K_1$ секвенциально компактно в $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2) \Leftrightarrow K_j$ – секвенциально компактно в $(X_j, d_j), j = 1, 2$.

Вариант 21

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{1}{x^2 - 1} \frac{d}{dx} \int\limits_0^{x} \arcsin t dt \leqslant 0 \right\}.$$
2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0, 0)$, $M = \{(x, y) \mid (y - 4)(x^2 + 2) - 9x = 0\}$.
3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 3t^2,\ y(t) = t$ в $CL_1[-1; 1]$.
4. Пусть (X, d) – МП. Докажите, что $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ – метрика на X и эквивалентна метрике d.

Вариант 22

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (t+2)dt \leqslant 0 \right\}.$$

2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(3,0)$, $M = \{(x,y) \mid x^2 - 2y^2 - 2 = 0\}$.

3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t$ в $CL_1[-1;1]$.

4. Докажите, что фундаментальная последовательность в МП ограничена.

Вариант 23

1. Найдите $\mathrm{Int}A$, $\overline{A}$, A', ∂A, $\mathrm{diam}A$ множества

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{d}{dx} \int\limits_0^{\ln(x+1)} \frac{e^{2t} + 2e^t + 1}{e^t - 4} dt \leqslant 0 \right\}.$$

2. Найдите элемент наилучшего приближения точки P множеством M в пространстве $\mathbb{R}^2$, если $P(0,-3)$, $M = \{(x,y) \mid y^2 - x^2 - 1 = 0\}$.

3. Найдите расстояние между функциями $x(t) = 3t^2$, $y(t) = -2t$ в $CL_1[-1;1]$.

4. Докажите, что если $(x_n) \in cs(\mathbb{R}) \wedge (y_n) \in cs(\mathbb{R})$, то $(x_n + y_n), (x_n \cdot y_n)$ – фундаментальные последовательности в $\mathbb{R}$.