04.03.2025

ТЕМА: "КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ"

1 Корректность задачи

При постановке и решении любой задачи ставятся одни и те же вопросы:

a) существует ли у нее решение (то есть задача разрешима)?

b) если ответ на первый вопрос положительный, то единственно ли это решение?

c) как зависит решение от входных данных?

Возможны два случая:

1). Задача поставлена *корректно* (задача корректна):

- задача разрешима при любых допустимых входных данных;
- имеется единственное решение;
- **решение задачи непрерывно зависит от входных данных (малому изменению входных данных соответствует малое изменение малое изменение решения)** — тогда говорят, что задача устойчива.

2). Задача *некорректна*, если не выполняется хотя бы одно из вышеперечисленных условий. Обычно не выполняется третье условие - малому изменениею входных данных может соответствовать неограниченно большое изменение решения.

Примером корректной задачи может служить задача интегрирования, а примером некорректной задачи – дифференцирование.

Пример. Пусть по прямой движется частица единичной массы. Движение обусловлено тем, что на частицу действует сила $q(t)$, которая меняется во времени. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$ и имела нулевую скорость, то в соответствии с законом Ньютона движение частицы будет описываться функцией $u(t)$, удовлетворяющей задаче Коши:

Поставим задачу Коши для $u(t)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = q(t), \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad \frac{du}{dt}|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Здесь $u(t)$ — положение частицы в момент времени t.

Задача определения $u(t)$ решается двойным интегрированием функции $q(t)$:

$$u(t) = \int_0^t \int_0^s q(\tau)d\tau + C_1 t + C_2$$

и является устойчивой при $u \in C^2[0, T],\ q(t) \in C[0, T]$ (корректно поставленной).

Рассмотрим *обратную задачу*: требуется определить $q(t)$ по известной функции $u(t)$.

Покажем неустойчивость задачи определения $q(t)$. Пусть $u(t)$ — решение прямой задачи для некоторого $q(t)$. Рассмотрим следующие возмущения решения прямой задачи:

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n} cos(nt).$$

Этим возмущениям соответствуют правые части

$$q_n(t) = q(t) - ncos(nt),$$

т.к. $u''(t) = q(t)$.

Очевидно, что

$$\|u - u_n\|_{C[0,T]} \to 0$$

при $n \to \infty$, а

$$\|q - q_n\|_{C[0,T]} \to \infty$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, малое возмущение функции $u(t)$ соответствуют сколь угодно большому изменению функции $q(t)$.

2 Устойчивость задачи

Для изучения устойчивости дифференциального уравнения по начальным данным будем рассматривать модельное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ x > 0,\ y(0) = y_0.$$

а именно, рассмотрим модель радиоактивного распада вещества

$$\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0, \quad \lambda = const > 0,\ x > 0,\ y(0) = y_0. \tag{3}$$

Его решение $y(t) = y_0 e^{-\lambda x}$ убывает при $\lambda > 0$ и

$$|y(t)| \le |y_0| \text{ при } \lambda \ge 0 \text{ для всех } t \ge 0, \tag{4}$$

т.е. уравнение (3) *устойчиво* при $\lambda \ge 0$, что соответствует условию

$$\frac{\partial f}{\partial y} \le 0.$$

В этом случае при выполнении (4) малым изменениям начальных данных будет соответствовать малое изменение самого решения. Такие условия в дальнейшем мы будем называть *условием устойчивости.*

При дискретизации вводится естественное требование: для дискретных моделей, аппроксимирующих (приближающих с некоторой погрешностью) модельные уравнения, для корректности должен выполняться аналог неравенства (4):

$$|y_k| \le |y_0|, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Мы увидим ниже, что это не всегда выполняется.

Рассмотрим ряд примеров.

1) Явная схема Эйлера (когда правая часть, зависящая от y, проектируется в известный узел сетки):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_k = 0, \quad y_{k+1} = (1 - h\lambda) y_k. \tag{5}$$

Отсюда видно, что условие

$$|y_{k+1}| \le |y_k| \le \ldots \le |y_0| \tag{6}$$

выполнено при $|1 - h\lambda| \le 1$ или $-1 \le 1 - h\lambda \le 1$, то есть при

$$h\lambda \le 2.$$

Если, например, $h\lambda \ge 3$, то

$$|y_{k+1}| = |h\lambda - 1||y_k| \ge 2|y_k| \ge \ldots \ge 2^{k+1}|y_0|,$$

$$|y_k| \ge 2^k|y_0| \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Схема неустойчива, условие (6) не выполнено. Таким образом, в этом случае говорят, что явная схема Эйлера (5) *условно устойчива* с условием устойчивости $h \le 2\lambda,\ \lambda > 0$.

2) Неявная схема Эйлера (когда правая часть, зависящая от y, проектируется в неизвестный узел сетки):

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda y_{k+1} = 0, \quad y_{k+1} = \frac{1}{1 + h\lambda} y_k. \tag{7}$$

Так как $\frac{1}{1+h\lambda} \le 1$ при любых $h\lambda \ge 0$, то говорят, что схема *безусловно устойчива*.

3) Схема с весами:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} + \lambda(\sigma y_{k+1} + (1 - \sigma) y_k) = 0,$$

отсюда приводим к виду

$$y_{k+1} = q y_k.$$

Для выполнения условия $|y_{k+1}| \le |y_k| \le ... \le |y_0|$, то есть для выполнения требования устойчивости необходимо и достаточно, чтобы

$$|q| \le 1, \quad q = \frac{1 - (1 - \sigma)h\lambda}{1 + \sigma h\lambda}.$$

Видим, что $|q| \le 1$, если

$$-1 - \sigma h\lambda \le 1 - (1 - \sigma)h\lambda \le 1 + \sigma h\lambda$$

или

$$1 + h(\sigma - 1/2)\lambda \ge 0,$$

так что

$$1 + \sigma h\lambda \ge h\lambda/2 > 0.$$

Таким образом, схема с весами беусловно (или абсолютно) устойчива (при любых h) при $\sigma > 1/2$ и условно устойчива в случае $\sigma < 1/2$, если $h \leq \frac{1}{(1/2-\sigma)\lambda}$.

Следующая тема: " Пространственно-временные модели волновых процессов."