$$\Delta\tilde{\varphi} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\left(\frac{2}{a^2+\vartheta_i} + \frac{2}{b^2+\vartheta_i} + \frac{2}{c^2+\vartheta_i} + \sum_{j\neq i}\frac{8}{\vartheta_i-\vartheta_j}\right)$$

$\boxed{2019.\ 10.\ 10.}$

$$\left(\frac{2\alpha}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2\beta}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{2\gamma}{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\tilde{\varphi} = \frac{2\alpha}{x_1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{(-2x_1)}{a^2+\vartheta_i} + \frac{2\beta}{x_2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{(-2x_2)}{b^2+\vartheta_i} +$$

$$+ \frac{2\gamma}{x_3}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{(-2x_3)}{b^2+\vartheta_i} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\left(\frac{4\alpha}{a^2+\vartheta_i} + \frac{4\beta}{b^2+\vartheta_i} + \frac{4\gamma}{c^2+\vartheta_i}\right)$$

$$\left(\frac{2x_1}{a^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2x_2}{b^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{2x_3}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\tilde{\varphi} = \frac{2x_1}{a^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{(-2x_1)}{a^2+\vartheta_i} +$$

$$+ \frac{2x_2}{b^2}\sum_i\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{(-2x_2)}{b^2+\vartheta_i} + \frac{2x_3}{c^2}\sum_i\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{(-2x_3)}{c^2+\vartheta_i} =$$

$$= -4\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\left[\frac{x_1^2}{a^2(a^2+\vartheta_i)} + \frac{x_2^2}{b^2(b^2+\vartheta_i)} + \frac{x_3^2}{c^2(c^2+\vartheta_i)}\right]$$

Azonosság: $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2+\vartheta_i} = \frac{\vartheta_i}{a^2(a^2+\vartheta_i)}$

$$\frac{1}{\vartheta_i}\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^2+\vartheta_i}\right) = \frac{x_1^2}{a^2(a^2+\vartheta_i)}$$

$$= -4\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\left[\underbrace{\left(1-\frac{x_1^2}{a^2+\vartheta_i}-\frac{x_2^2}{b^2+\vartheta_i}-\frac{x_3^2}{c^2+\vartheta_i}\right)}_{\varphi_i} - \underbrace{\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}\right)}_{\varphi_0}\right]\frac{1}{\vartheta_i} =$$

$$= -4\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{1}{\vartheta_i}\varphi_i + 4\varphi_0\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{1}{\vartheta_i} =$$

$$= -4\tilde{\varphi}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\vartheta_i} + 4\varphi_0\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}\frac{1}{\vartheta_i}$$

$\rightsquigarrow$ az eredményeket visszaírjuk:

$$\frac{\omega^2}{c_0^2}\tilde{\varphi} = \left(\frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{\vartheta_i}\right)\tilde{\varphi} +$$

$$+ \varphi_0\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{a^2+\vartheta_i} + \frac{2}{b^2+\vartheta_i} + \frac{2}{c^2+\vartheta_i} + \sum_{i\neq j}\frac{8}{\vartheta_i-\vartheta_j} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\alpha}{a^2+\vartheta_i} + \frac{4\beta}{b^2+\vartheta_i} + \frac{4\gamma}{c^2+\vartheta_i} + \frac{4}{\vartheta_i}\right)\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\varphi_i}$$

$\rightsquigarrow$ ha a második tagot kinulláznuk $\longrightarrow \frac{\omega^2}{c_0^2} = (\dots)$

$\hookrightarrow$ ehhez n db egyenlet a ϑ_i-re.

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{4}{\vartheta_i}$$

$$i = 1\dots n: \quad \boxed{0 = G_i(\underline{\vartheta}) = \frac{4}{\vartheta_i} + \frac{4\alpha+2}{a^2+\vartheta_i} + \frac{4\beta+2}{b^2+\vartheta_i} + \frac{4\gamma+2}{c^2+\vartheta_i} + \sum_{i\neq j}\frac{8}{\vartheta_i-\vartheta_j}}$$

- ebből a gerj. fv.-ek is megkaphatók:

$$\delta_n = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2+\vartheta_i} - \frac{x_2^2}{b^2+\vartheta_i} - \frac{x_3^2}{c^2+\vartheta_i}\right)\\ 1, \quad n=0\end{cases}$$

- parc. diff $\longrightarrow$ közönséges ún lineáris egyenlet rsz.

- jó kvantumszámok: α, β, γ, n.

∘ spec. esetek

$\underline{n=0}$

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2}$$

$\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$

$\Downarrow$

problémás : $\alpha, \beta, \gamma = 0$

nem részecskeszám megőrző.

$$n_0 + \underbrace{\delta n(t)}$$

$$Re\left(e^{i\omega t}\,\delta n\right)$$

⇝ tartalmazza a Kohn-módusokat:

$$\omega^2 = \frac{c_0^2\alpha\cdot 2}{a^2} = \frac{2\alpha}{\frac{2\alpha}{m\omega_1^2}}\frac{\mu}{m} = \omega_1^2$$

⇝ többi módusok:

$$\omega^2 = \alpha\omega_1^2 + \beta\omega_2^2 + \gamma\omega_3^2$$

$\underline{n=1}$

$$\delta n = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2+\vartheta_1} - \frac{x_2^2}{b^2+\vartheta_1} + \frac{x_3^2}{c^2+\vartheta_1}\right)$$

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2} - \frac{4}{\vartheta_1}$$

$$0 = \frac{4}{\vartheta_1} + \frac{4\alpha+2}{a^2+\vartheta_1} + \frac{4\beta+2}{b^2+\vartheta_1} + \frac{4\gamma+2}{c^2+\vartheta_1}$$

állítás a megoldásokról:

$$-a^2 \leq \vartheta_{1,3} \leq -b^2 \leq \vartheta_{1,2} \leq -c^2 \leq \vartheta_{1,1} \leq 0$$

→ ∀ megoldáshoz külön gerj. frek.

ϑ_{11} ⇝ a hullámfv. ellipszoid $\underbrace{\text{felületen}}$ lesz. 0.
/ ≠-ségből... /
"nodális felület"

ϑ_{12} ⇝ $c^2 + \vartheta_{12} < 0$ → egyköpenyű hiperboloid

ϑ_{13} ⇝ $c^2 + \vartheta_{13} < 0$, $b^2 + \vartheta_{12} < 0$ → kétköpenyű hiperboloid.

$$\frac{\omega^2}{c_0^2} = \frac{2\alpha}{a^2} + \frac{2\beta}{b^2} + \frac{2\gamma}{c^2} + \frac{4}{\vartheta_{1,\ell}} \qquad \forall\ \ell = 1, 2, 3.$$

• állítás: ∀ $G_i(\underline{\vartheta})$ származtatható mint:

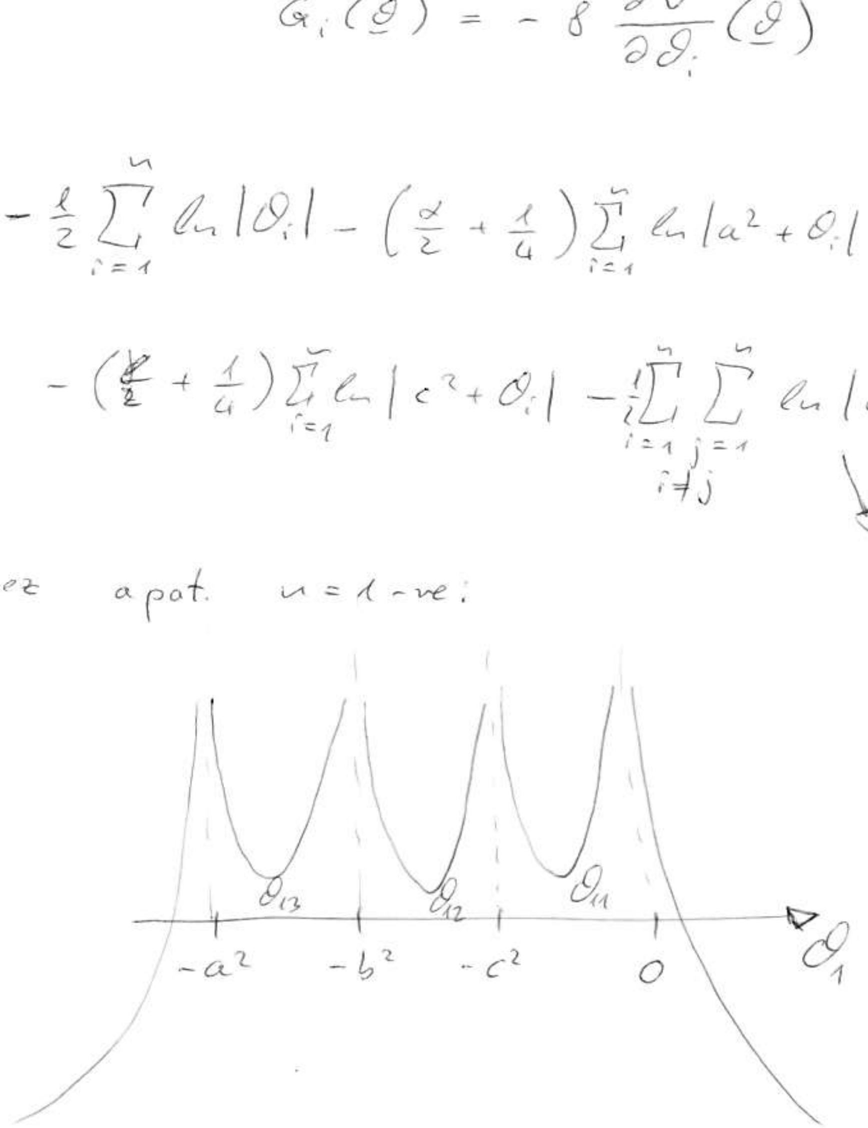
$$G_i(\underline{\vartheta}) = -8 \frac{\partial V}{\partial \vartheta_i}(\underline{\vartheta})$$ "származtatható potenciálból"

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \ln|\vartheta_i| - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)\sum_{i=1}^{n} \ln|a^2 + \vartheta_i| - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\sum_{i=1}^{n} \ln|b^2 + \vartheta_i| -$$

$$-\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4}\right)\sum_{i=1}^{n} \ln|c^2 + \vartheta_i| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \ln|\vartheta_i - \vartheta_j|$$

emiatt ha 2 komp. közel van azok "taszítják" egymást.

• ez a pot. $n = 1$-re:



• $G = 0 \rightarrow$ potenciál extremumainak keresése

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial \vartheta_i} = 0$$

• "mechanikai" probléma:

szabad töltések amik egymást lökdösik (egységnyi töltés)

~> a fix töltés

$x = 0 \quad -\frac{1}{2}$

$x = -a^2 \quad \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$x = -b^2 \quad \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$x = -c^2 \quad \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$$F \sim \frac{1}{\ell}$$

• összesen n db töltés

n_1 az egyik lyukba, n_2 a másikba ...

$n = n_1 + n_2 + n_3$

• $\underline{\vartheta}$ komponenseinek permutációja is vezet új megoldásra

~> komponenseit nagyság szerint rendezhetem

• adott n-re a különböző megoldások:

~> $n+2$ db objektum, 2 fal.

↓

$\binom{n+2}{n}$ különböző $\underline{\vartheta}$ adott n-re.

• A jó kvantumszámok: $\alpha, \beta, \gamma, n_1, n_2, n_3$

~> ezekre egyértelmű megoldás van.