$$h(R_i) = k_B T m(R_i) + \frac{k_B T}{3} m(R_i)^3 - \underbrace{6J}_{kT_c} m(R_i) - Ja^2 \Delta m(R_i)$$

ez $\forall$ pontban érvényes!

$$h(R) = \underbrace{k_B (T - T_c)}_{a} m(R) + \underbrace{\frac{k_B T}{3}}_{b} m(R)^3 - \underbrace{Ja^2}_{c} \Delta m(R)$$

$\rightsquigarrow$ mint a Landau-elméletben.

$\rightsquigarrow$ fenomenologikus együtthatók helyett átlagtér elmélet együtthatói lesznek

$\rightsquigarrow$ a kit viselkedés szempontjából a két elmélet ekvivalens.

$\boxed{2019.11.06.}$

- hatványfv.-ek

$f(x) \quad x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln f(x)}{\ln x} = \lambda$$

$$f(x) \sim x^{\lambda}$$

pl.: x^{λ}

$$x^{\lambda} |\ln(x)|^{\alpha} \rightsquigarrow \frac{\lambda \lg x + \alpha \ln|\ln(x)|}{\ln x} \to \lambda$$

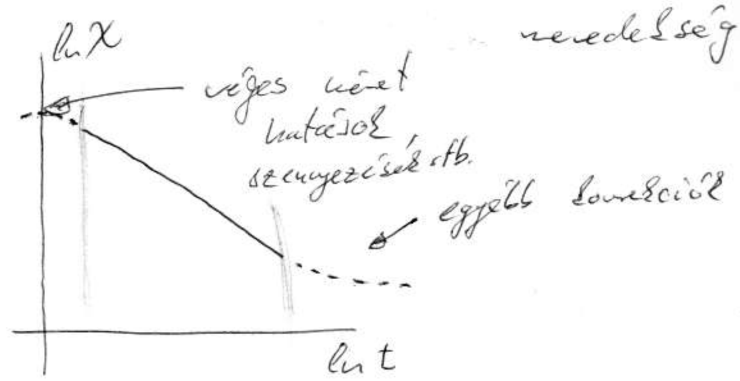
$$x^{\lambda}(1 + x^{\sigma} + \dots)$$

- hatványfv. kísérletekben

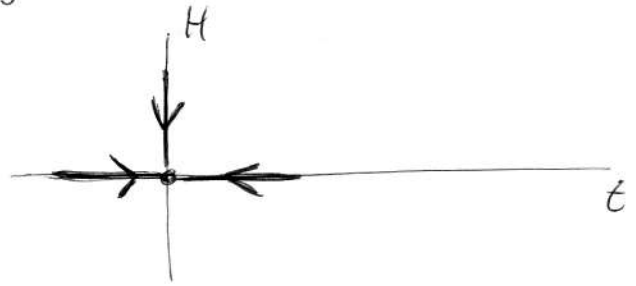
redukált hőmérséklet: $t = \dfrac{T - T_c}{T_c}$

$$\chi \sim t^{-\gamma}$$

$\ln \chi \sim -\gamma \ln t \Longrightarrow$ log-log skálán egyenes meredeksége a γ



- jellemző kitevők



→ $m \sim |t|^{\beta}$ $\quad t < 0,\ H = 0$

→ $\chi \sim |t|^{-\gamma}$ $\quad \left.\begin{matrix} t < 0 \\ t > 0 \end{matrix}\right\},\ H = 0$

→ $H \sim m^{\delta}$ $\quad t = 0,\ H \to 0$

→ $C_{H=0} \sim |t|^{-\alpha}$ $\quad \left.\begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}\right\},\ H = 0$ (fajhő)

→ $\xi \sim |t|^{-\nu}$ $\quad \left.\begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}\right\},\ H = 0$ (korr. hossz)

→ $\xi \sim H^{-\mu}$ $\quad t = 0,\ H \to 0$

→ $G \sim \dfrac{1}{q^{2-\eta}}$ $\quad t = 0,\ H = 0$ (korr. fv.)

$\longrightarrow \beta, \gamma, \delta, \alpha, \nu, \mu, \eta$

- folyadék gáz esetben

  $m \longrightarrow V - V_c$ (térfogat...)

  $H \longrightarrow p - p_c$

  $\longrightarrow V_g - V_c \sim |t|^{-\beta}$

  $\longrightarrow \kappa_T \sim |t|^{-\gamma}$

  $\longrightarrow C_V \sim |t|^{-\alpha}$

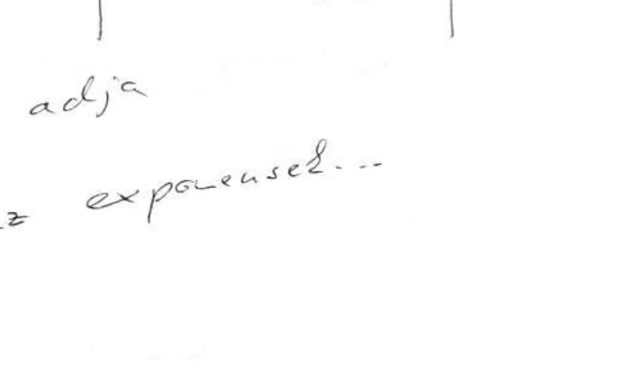
	Landau	Ising ($d=2$)	Szférikus ($d=3$)	Mérés
β	$1/2$	$1/8$	$1/2$	$\sim 1/3$
γ	-1	$7/4$	2	$\{1.21,\ 1.3$
δ	3	15	5	?
α	0 (ugrás)	0 (log. sing)	-1	~ 0
ν	$1/2$	1	1	$\sim 2/3$
μ	$1/3$	?	$2/5$	?
η	0	$1/4$	0	~ 0.068

- átlagtér közelítés is ezeket adja
- Univerzalitás $\longrightarrow$ mindig ezek az exponensek...
- Ising-modell ($d=2$)

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} S_i S_j - H \sum_i S_i$$

Onsager (1944)

- szférikus modell
  - $\longrightarrow$ egzakt
  - $\longrightarrow -\infty < S_i < \infty\ ,\ \sum_{i=1}^{N} S_i^2 = N$



- egzakt eredményekkel konfliktus Landau-elm.

Ginzburg - kritérium

$T < T_c \qquad \langle \Delta M^2 \rangle \ll \langle M \rangle^2$

- ön konzisztencia

$$\langle \Delta M^2 \rangle = k_B T \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T = k_B T V \left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T = k_B T V \cdot \chi$$

$$\langle M \rangle^2 = V^2 m^2$$

$$\frac{\langle \Delta m^2 \rangle}{\langle m \rangle^2} = k_B T \frac{\chi}{m^2 V}$$

→ Ha $V \to \infty$ az eloszlás éles lesz.

→ Meddig csökkenthetjük a V-t?

⇝ korrelációs hossz nagyságrendje

$$\boxed{k_B T \frac{\chi}{m^2 V_{corr}} \ll 1}$$

L. elm. érvényességének szükséges feltétele.

$$\frac{\chi}{m^2 \xi^d} \ll 1$$

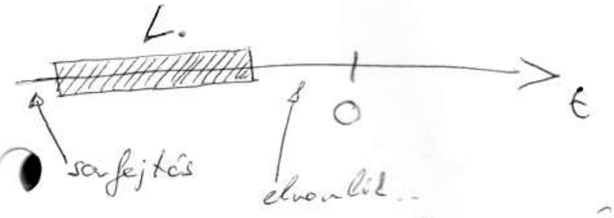
$$\frac{\chi}{m^2 \xi^d} \sim |t|^{-1-1+\frac{d}{2}}$$

L. elm konzisztens, ha $-2 + \frac{d}{2} \geq 0$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{d \geq 4}$$

$d < 4$-re elromlik, ha $t \to 0$



- csak egy általában érvényes $d = 3$-ra.

- kísérleti eredmények

  $\beta \sim 1/3$ → eltérnek a L. elm. jóslatától

  → Univerzalitás ✓

  ⇝ különböző átalakulások (folyadék-gáz, mágneses...)

- L. elm a krit. ponthoz közel kvantitatív leírásra nem alkalmas.

Magas hőmérsékletű sorfejtés

$$e^{-\beta E} = 1 - \frac{E}{kT} + \frac{1}{2}\left(\frac{E}{kT}\right)^2 + \dots$$

- Ha $kT \gg E$ a korrekciók kicsik
- $T = \infty \to 1$, $\forall$ áll. azonos valószínűséggel...

$$e^{-\beta \mathcal{H}} = 1 - \beta \mathcal{H} + \frac{1}{2}\beta^2 \mathcal{H}^2$$

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}} = \mathrm{Tr}\, 1 \cancel{+} - \beta\, \mathrm{Tr}\, \mathcal{H} + \frac{1}{2}\beta^2\, \mathrm{Tr}(\mathcal{H}^2)$$

- Ising-modell

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j$$

$$\beta \mathcal{H} = -K \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j \qquad K = \frac{J}{k_B T}$$

$$e^{-\beta \mathcal{H}} = e^{K\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j} = \prod_{\langle ij\rangle} e^{K S_i S_j}$$

$$e^{\pm x} = \mathrm{ch}\,x \pm \mathrm{sh}\,x$$

$$e^{K S_i S_j} = \mathrm{ch}(K S_i S_j) + \mathrm{sh}(K S_i S_j) \qquad S_i S_j = \pm 1$$

$$e^{K S_i S_j} = \mathrm{ch}(K) + S_i S_j\, \mathrm{sh}(K)$$

$$e^{-\beta \mathcal{H}} = \left[\prod_{\langle ij\rangle} \left(1 + S_i S_j\, \mathrm{th}(K)\right)\right] \cdot \left(\mathrm{ch}(K)\right)^P$$

ahol P a legközelebbi szomszéd párok száma

$P = \frac{Nz}{2}$ $\quad$ z: koordinációs szám.

$V := \mathrm{th}(K)$

Ha $T \to \infty$, $V \to 0$

V használható sorfejtési együtthatónak.

$$Z = \sum_{\hat{S}} e^{-\beta \mathcal{H}} = \left(\mathrm{ch}(K)\right)^P \underbrace{\sum_{\hat{S}} \left(\prod_{\langle ij\rangle} \left(1 + V S_i S_j\right)\right)}_{2^N + V \underbrace{\sum_{\hat{S}} S_i S_j}_{\emptyset} + V^2 \ldots}$$

- ált. tag:

$$\sum_{\tilde{S}} S_1^{p_1} S_2^{p_2} \dots S_N^{p_N} =$$

p_i: hányszor szerepel..

$$= \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{S_i} S_i^{p_i} \right)$$

$$\sum_{\tilde{S}} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \dots \sum_{S_N}$$

$$\sum_{S} S^p = 1^p + (-1)^p = \begin{cases} 2 & \text{ha } p \text{ páros} \\ 0 & \text{ha } p \text{ páratlan} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ a teljes összeg csak akkor $\neq$ ha $\forall$ spin páros-szor szerepel.

$$\sum_{\tilde{S}} S_1^{p_1} S_2^{p_2} \dots S_N^{p_N} = \begin{cases} 2^N & \text{ha } \forall\, p_i \text{ páros} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$Z = (ch(K))^P 2^N \sum_{l=0}^{P} v^l g(l)$$

$g(l)$ azon választások száma, melyekben l legközelebbi szomszéd párt választottunk ki és $\forall$ spin páros hatványon szerepel

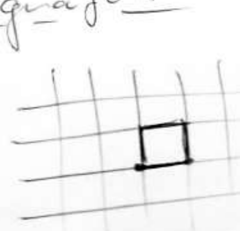
$\to$ Z számolás már "csak" kombinatorika

$\to$ gráfok

$g(0) = 1$

$g(1) = 0$
$\hookrightarrow$ mind2 pontból 1 él indul ki

$g(2) = 0$
$g(3) = 0$
$g(4) = N$



$g(\ell)$ azon ℓ élű gráfok száma, amelyek csomópontjainak ~~szöge~~ fokszáma páros.

$\square$ - rácson:

$$Z = (ch(K))^P 2^N (1 + Nv^4 + \dots)$$

⇝ első zárt gráf adja az első korrekciót...

$$C_{mn} = \langle S_m S_n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{S} e^{-\beta H} S_m S_n =$$

$$= \frac{1}{Z} (ch K)^P \sum_{S} \left(\prod_{\langle ij \rangle} (1 + v S_i S_j) \right) S_m S_n =$$

$$= \frac{1}{Z} ch(K)^P 2^N \sum_{\ell=0}^{P} \eta_{mn}(\ell) v^\ell$$

$\eta_{mn}(\ell)$ azon ℓ élű gráfok száma, ahol az m, n csomópontok páratlan fokszámúak, a többi páros fokszámú

$$\chi = \sum_m \chi_{mn} = \frac{1}{k_B T} \sum_m C_{mn} = \frac{1}{k_B T} \frac{1}{Z} (ch K)^P 2^N \sum_{\ell=0}^{P} \eta(\ell)$$

$$\eta(\ell) = \sum_m \eta_{mn}(\ell)$$

$$\boxed{k_B T \chi = \frac{\sum_{\ell=0}^{P} \eta(\ell) v^\ell}{\sum_{\ell=0}^{P} g(\ell) v^\ell}}$$