$\xi \sim |t_1(T)|^{-1/y_1}$ határfv. viselkedés

- def: $\xi \sim |t|^{-\nu} \longrightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{y_1}}$

- krit viselkedés független t_2-től! $\longrightarrow$ univerzalitás
  (pontosan melyik vsz.-t vizsgáljuk...)

$$f(t_1(T), t_2(T)) = b^{-d} f(b^{y_1} t_1(T), b^{y_2} t_2(T))$$

$$f(t_1(T), t_2(T)) \underset{t_1(T)\to 0}{=} \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{-\frac{d}{y_1}} f(\pm t_{10}, 0) \qquad \text{határfv.}$$

$$f \sim |t_1(T)|^{\frac{d}{y_1}} = |t_1(T)|^{d\nu}$$

def: $f \sim |t|^{2-\alpha} \rightsquigarrow \boxed{2-\alpha = d\nu}$

RG biztosítja a hiperskála tv.-t.

- $\forall$ vsz. amit a fixpont vonz, ugyanazt a krit. viselkedést mutatja.
- sorfejtéssel lehet skálázáshoz korrekciókat számolni
  $\hookrightarrow$ korrekció arányos $t_2(T)$-vel $\rightsquigarrow$ már nem univerzális
- RG elég flexibilis $\rightsquigarrow$ sok vsz.-hez igazítani lehet.

$\boxed{2019.12.04.}$

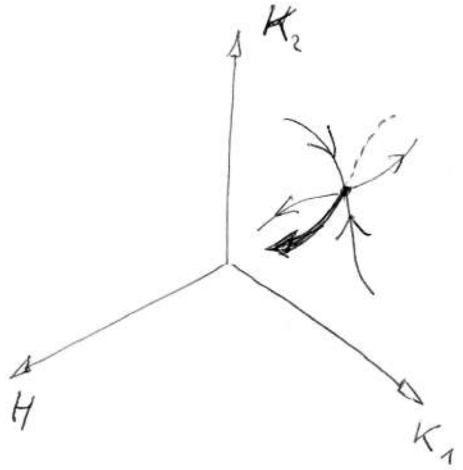
<u>skálázás</u>

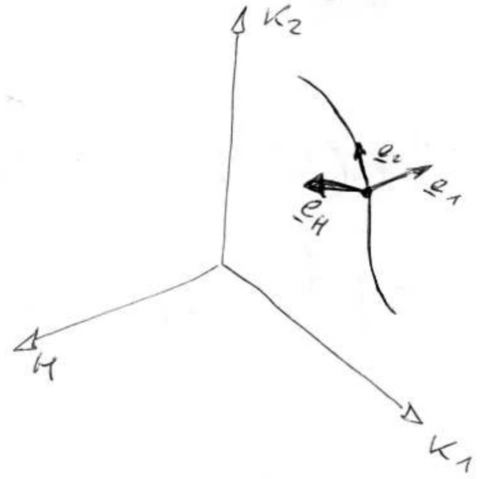
- paraméterek: $\underline{K}$, H
- kritikus felületen $H = 0 \rightsquigarrow$ releváns változó, mint t.
- szimmetria: $H \longleftrightarrow -H$
  $\hookrightarrow$ nem jelenik meg lineáris rendben H.

• új transzformáció:

$$\left(\begin{array}{c|c} \underline{\underline{L}} & 0 \\ \hline 0 & b^{y_H} \end{array}\right)$$

$y_H > 0$, H releváns változó





$$f(t_1, t_0, H) = b^{-d} f(b^{y_1} t_1,\ b^{y_2} t_2,\ b^{y_H} H)$$

$y_1 > 0$, $y_H > 0$, $y_2 < 0$

$b^{y_1} |t_1| = t_{10}$

$b = \left|\frac{t_0}{t_1}\right|^{1/y_1}$

$$f(t_1, t_2, H) = \left|\frac{t_1}{t_0}\right|^{\frac{d}{y_1}} f\left(\pm t_{10},\ \underbrace{\left|\frac{t_1}{t_0}\right|^{-\frac{y_2}{y_1}}}_{\to 0} t_2,\ \underbrace{\left|\frac{t_1}{t_0}\right|^{\frac{y_H}{y_1}}}_{\text{divergál kivéve ha } H=0} H\right)$$

$t_1(T) \to 0$ eset
$(T \to T_c)$

skálázás: $f(t, H) = |t|^{2-\alpha} \mathcal{F}\left(\frac{H}{|t|^{\Delta}}\right)$

⇝ exponenseket összeigazíthatjuk.

$$2 - \alpha = \frac{d}{y_1} = d\nu$$

$$\Delta = \frac{\nu}{\mu} = \frac{y_H}{y_1} \Rightarrow \mu = \frac{1}{y_H}$$

$\rightsquigarrow t_2$ kiesése $\rightsquigarrow$ univerzalitás

krit viselkedés függ attól, hogy a vt.
hol metszi a görbét.

- konkrét vt.-ekre egyéb relációkat is le lehet vezetni.

nemlineáris skálaterek

- kiterjesztés a fixpont lin. körny. kívülre.

- tfh. $\left.\begin{array}{l} b^{y_1} g_1(\underline{K}) = g_1(\underline{K}') \\ b^{y_2} g_2(\underline{K}) = g_2(\underline{K}') \end{array}\right\}$ úgy transzformálódnak mint t_1, t_2 a fixpont lin körny.

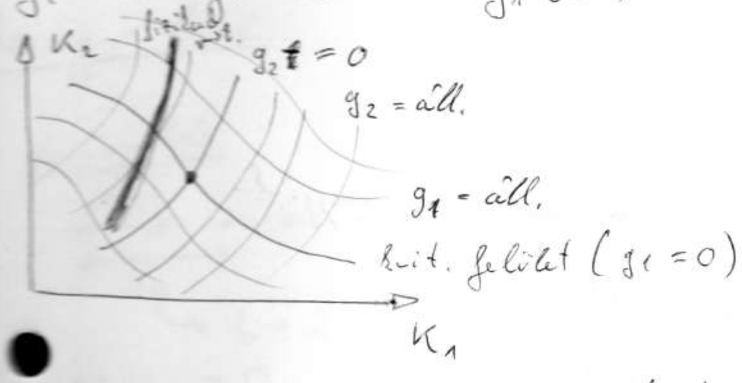
$y_1 > 0$, $y_2 < 0$

- fixpont: $\begin{array}{l} b^{y_1} g_1(\underline{K}^*) = g_1(\underline{K}^*) \\ b^{y_2} g_2(\underline{K}^*) = g_2(\underline{K}^*) \end{array} \Longrightarrow g_1(\underline{K}^*) = g_2(\underline{K}^*) = 0$

- lin tartomány: $g_1(\underline{K}) \simeq t_1(\underline{K})$
$g_2(\underline{K}) \simeq t_2(\underline{K})$

- g_2 értéke iterációval 0-hoz tart. (beegy a fixpontba)

- g_1 divergálna $\rightsquigarrow$ $g_1(\underline{K}) = 0$ definiálja a kritikus felületet.



- g_1, g_2 új koordinátarsz.-t határoznak meg

$\xi(g_1, g_2) = b\,\xi(b^{y_1} g_1, b^{y_2} g_2)$ az egész tartományban!

fizikai rendszer: $g_1(T)$, $g_2(T)$

⇝ krit felületen $g_1(T)$ előjelet vált.

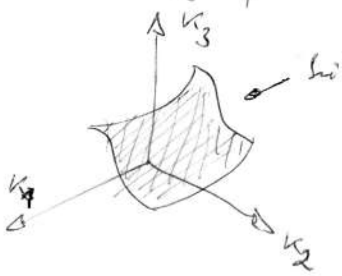
↳ $g_1(T) \sim \dfrac{T - T_c}{T_c}$

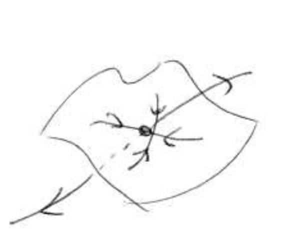
- egész elemzést t_1, t_2-re megismételhető g_1, g_2-re.

$$\xi(g_1(T), g_2(T)) = \left|\frac{g_{10}}{g_1(T)}\right|^{1/y_1} \xi(\pm g_{10}, 0)$$

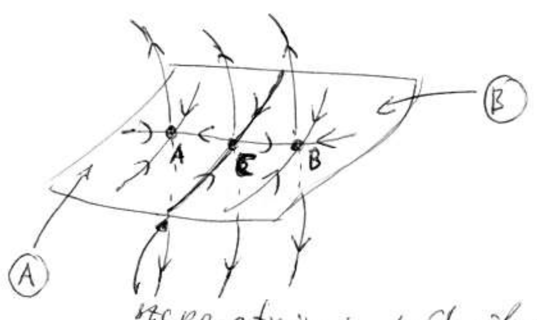
stb.

⟹ a fixpont teljes vonzáskörzetében ugyanaz a viselkedés.





- miért ne lehetne több fixpont a krit. felületen?



szeparatrix: szétválasztja a fixpontok vonzáskörzetét.

- lehet ezen is fixpont.

↓

instabil, ha a szep.-ról kimozdul.

- univerzalitási osztályok alakulnak ki.

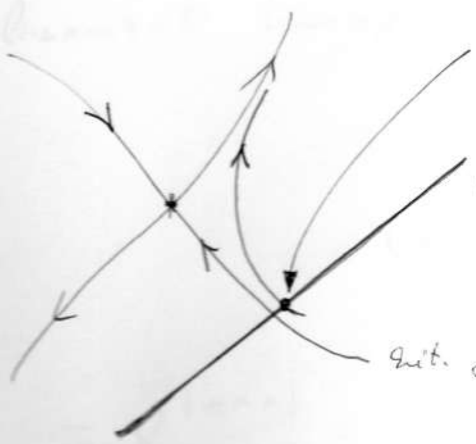
A fixpont vonzáskörzete ⇝ A univerzalitás stb.

1.) flexibilitás
$\leadsto$ általános definícó $\leadsto$ transzformáció igazítható a modellhez.

2.) 1 lépésben végez sok
szabadsági fok kezelése
$\leadsto$ sima transzformációból kapjuk a fiz. rsz.
szingulásis tulajdonságait.
$\leadsto$ sok esetben lehet infinitezimális transzformációt definiálni

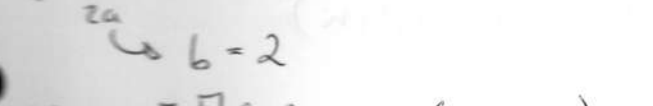
3.) bizonyítja: skálázást
univerzalitást
(vonzó fixpont létezése)

4.) konstruktív eljárás
$\leadsto$ recept a $\nu, \mu \ldots$ exponensekre



Ising - lánc

• decimálás



$\hookrightarrow b = 2$

$H = -J \sum_i s_i s_{i+1}$ (nn. kh.)

$$e^{-\frac{H}{k_B T}} = e^{K\sum_i s_i s_{i+1}} = \prod_i e^{K s_i s_{i+1}}$$

$$K = \frac{J}{k_B T}$$

- un Eh. miatt a kiátlagolás nem érinti a többi spint, csak a két szomszédot.

$$\sum_{s_1} e^{K(s_0 s_1 + s_1 s_2)} = \begin{cases} 2\,ch(2K) \\ 2 \end{cases}$$

$s_0 s_2 = 1$ (↑↑ v. ↓↓)
$s_0 s_2 = -1$ (↑↓ v. ↓↑)

$$\sum_{s_1} e^{2Ks_1} = e^{2K} + e^{-2K} = 2\,ch(2K)$$

$$e^{K(s_1 - s_1)} = 1$$

$$\sum_{s_1} e^{K(s_0 s_1 + s_1 s_2)} = e^{\ln 2 + \ln ch(2K)\frac{1 + s_0 s_2}{2}} =$$

$$= e^{A + K' s_0 s_2}$$

ahol $A = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln ch(2K)$

$K' = \frac{1}{2}\ln ch(2K)$

- konstans + ugyan olyan un Eh. mint, ami volt.

↓

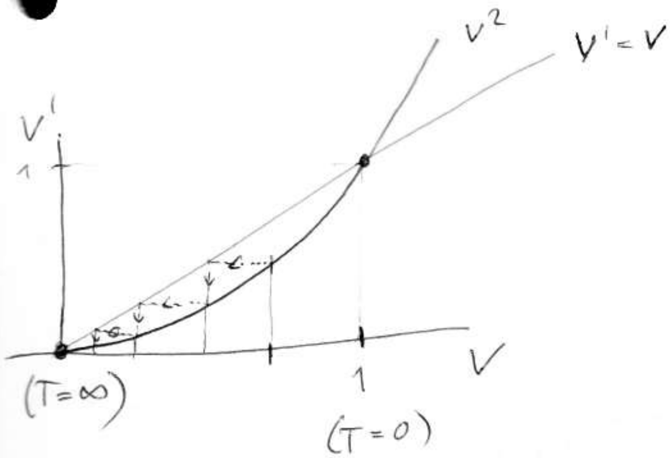
beolvasztható a normálásba

$$e^{2K'} = ch(2K) = \frac{ch^2(K) + sh^2(K)}{ch^2(K) - sh^2(K)} = \frac{1 + th^2(K)}{1 - th^2(K)}$$

$v = th(K)$ paraméter.

$$e^{2K'} = \frac{1+v^2}{1-v^2} \rightsquigarrow v^2 = \text{th}\, K' = v'$$

rekurziós összefüggés! $\boxed{v' = v^2}$



- transzformáció mindig bevisz 0-ba: $v^* = v^{*2}$

$v^* = 0$ (stabil) „magas hőmérs. fixpont"

$v^* = 1$ (nem stabil fixpont) „alacsony hőmérs. fixpont"

- linearizált transzformáció ($v^* = 1$): $v = 1 - x$

$$v' = 1 - x' = (1-x)^2 = 1 - 2x + x^2$$

$$\Downarrow$$

$$x' = 2x$$

$$2 = b^{y_1} = 2^{y_1} \Rightarrow \boxed{y_1 = 1}$$

$$\nu = 1$$

$$C_{mn} = v^{|m-n|} = e^{\frac{1}{a}\ln v \cdot |m-n| a}$$

$$\Downarrow$$

$$\xi = -\frac{a}{\ln v} = \frac{a}{|\ln v|} \approx \frac{a}{x} \qquad \xi \sim \frac{1}{x}$$

$v = 1 - x \rightsquigarrow \ln(1-x) = -x$

valóban megkaptuk a korr. hossz. viselkedését.

Gauss-modell

• Kontinuum-modell

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqx} \phi_q$$

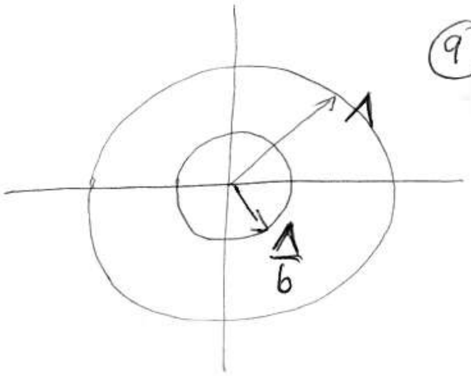
$$x = (x_1, \dots, x_d) \qquad |q| < \Lambda$$
$$q = (q_1, \dots, q_d)$$

kvadratikus-modell.

$$H = \int d^dx \left(\frac{r}{2}\phi^2 + \frac{c}{2}(\nabla\phi)^2 \right) = \sum_q \frac{r + cq^2}{2} \phi_q \phi_{-q}$$

$$\int d^dx\, \phi^2 = \frac{1}{V} \sum_{q_1 q_2} \phi_{q_1} \phi_{q_2} \underbrace{\int d^dx\, e^{i(q_1+q_2)x}}_{V \delta_{q_1, -q_2}} = \sum_q \phi_q \phi_{-q}$$

$$e^{-H} = \prod_q e^{\frac{r+cq^2}{2} \phi_q \phi_{-q}}$$



• Kiátlagolás: $\prod_{|q| < \frac{\Lambda}{b}} e^{\frac{r+cq^2}{2} \phi_q \phi_{-q}}$

• átskálázás:

legyen $c = 1$ („beolvasztjuk ϕ-be...)

$q^2 \phi_q \phi_{-q}$ dimenziótlan

$[\phi_q] =$ hosszúság

- $q' = bq$

  $\phi_q = b\,\phi'_{q'}$

$$\frac{r+cq^2}{2}\phi_q\phi_{-q} = \frac{r+\left(\frac{q'}{b}\right)^2}{2} b^2 \phi'_{q'}\phi'_{-q'} = \frac{b^2 r + q'^2}{2}\phi'_{q'}\phi'_{-q'}$$

$\rightsquigarrow$ $c = 1$ nem változott

$\rightsquigarrow$ $\boxed{r' = b^2 r}$ egy paraméter változott

- fixpont $\underline{\underline{r^* = 0}}$, taszító!

  $b^2 = b^{y_1} \rightsquigarrow y_1 = 2 \rightsquigarrow \nu = \frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow$ Landau-elmélet krit. pont feletti viselkedését kaptuk vissza.

$$H = \int d^d x \left\{ \frac{r}{2}\phi^2 + \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + \frac{u}{4}\phi^4 \right\}$$

- e^{-H}

$\rightsquigarrow$ Landau-elm.: legvalószínűbb $\phi(x) \rightsquigarrow H = \min.$

átskálázás: $\phi_q = b^{1-\eta/2}\phi'_{q'}$ $\quad\eta$: anomális dimenzió

- RG: térelméleti perturbációszámítással kiszámítható meg.

  $\rightsquigarrow$ $d = 4 - \varepsilon$ dimenzióban dolgozunk.

- $\rightsquigarrow$ sorfejtés: u, ε szerint.