2019. 11. 13.

• pl.: 1D Ising

$g(\ell) = 0 \rightsquigarrow$ nem tudok olyan gráfot rajzolni ami páros fokszámú

$g(0) = 1$

$Z = (\mathrm{ch}\, K)^{N-1} \cdot 2^N$

$\eta_{nm}(\ell) = 1$

$C_{nm} = v^{|m-n|}$

$k_B T \chi = 1 + 2v + 2v^2 + \dots + 2v^\ell + \dots =$

$\eta(\ell) = 2 \rightsquigarrow$ 2 irányba indulhatok el

$$= 1 + 2v \underbrace{(1 + v + v^2 + \dots)}_{\frac{1}{1-v}} = 1 + \frac{2v}{1-v} = \frac{1+v}{1-v}$$

$k_B T \chi = e^{2K} = e^{\frac{2J}{k_B T}}$

• pl.: négyzetrács

$g(0) = 1$

$g(1) = g(2) = g(3) = 0$

$g(4) = N$

$\eta(0) = 0$

$\eta(1) = 4$

$\eta(2) = 12 \; (= 4 \cdot 3)$

$\eta(3) = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

$\eta(4) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 - 8 + N$

zárt gráf

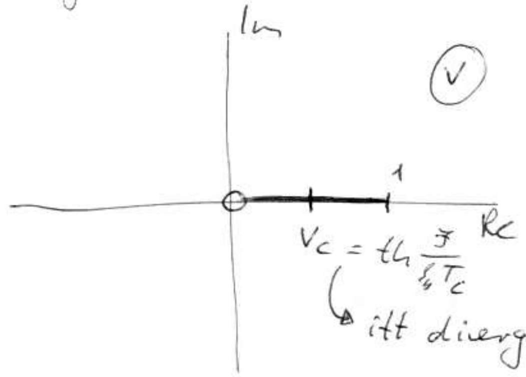
$$k_B T \chi = \frac{1 + 4v + 12v^2 + 36v^3 + 100v^4 + Nv^4 + \dots}{1 + Nv^4}$$

$$\frac{1}{1+Nv^4} \approx 1 - Nv^4 + \dots$$

$$k_B T \chi = 1 + 4v + 12v^2 + 36v^3 + 100v^4 + \cancel{Nv^4} - \cancel{Nv^4}$$

$$k_B T \chi = \sum_{n=0}^{\infty} v^n a_n$$ ⇝ polinom

• kiterjeszthető C-síkra



$$v = th\frac{J}{k_B T}$$
↓
$(0, 1)$ között érdekes v

ρ : konvergencia sugár

$$\rho \leq v_c$$

• tfh. v_c a ρ-t meghatározó szingularitás

• $$k_B T \chi(v) \xrightarrow[v \to v_c]{} A\left(1 - \frac{v}{v_c}\right)^{-\gamma}$$

⇝ hatványfv. szingularitás

$$v_c - v \sim T - T_c$$

• d'Alembert kritérium:

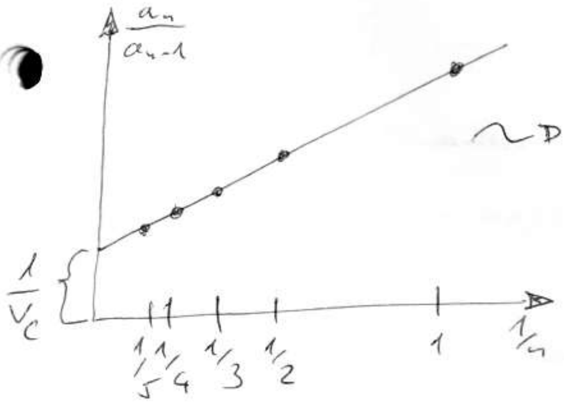
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{1}{\rho}$$

$$k_B T \chi(v) = A\left(1 + \gamma\frac{v}{v_c} + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\left(\frac{v}{v_c}\right)^2 + \dots + \frac{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}{n!}\left(\frac{v}{v_c}\right)^n + \dots\right.$$

⇝ ugyan olyan a krit viselkedés mint a magas hőm. sor.

⇝ $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ ugyan az a két kifejezésre

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \approx \frac{\gamma - \cancel{n} 1}{n}\,\frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_c}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{n}\right)$$



⤳ meredekség $\frac{\gamma-1}{v_c}$

„hányados módszer"

- krit hőmérs. méréséhez
- krit exponens

$$\frac{\partial}{\partial v} \ln k_B T \chi(v) = \frac{\partial}{\partial v}\left(-\gamma \ln(v_c - v)\right) = -\gamma \frac{1}{v - v_c}$$

⤳ v_c helyen 1x szinguláris

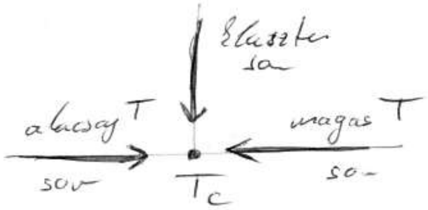
⤳ reziduum $-\gamma$

⤳ „meromorf-fv"

↓

Padé-approximáns
(közelítés törtfv.-ekkel)

- sok modellre alkalmazták a magas hőmérs. sorokat
  - ⤳ krit exponensek
  - ⤳ állapotegyenletek
  - ⤳ stb.



- alacsony hőmérs. sorfejtés
  - ⤳ alapáll. indulunk
  - ⤳ keressük a „következő" legkisebb gerjesztést

- klasszikus sorf.
  - ⤳ folyadékoknál ugyanis fv.-ben...

Rushbrooke - egyenlőtlenség

- kritikus exponensek nem függ ϕ-ek egymástól

$$C_p - C_v = \frac{T v \alpha^2}{\kappa_T} = \frac{T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2}{-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T} \quad \text{(termodinamika)}$$

$$V \to m$$
$$-p \to H$$

$\rightsquigarrow$ analógia mágneses rsz.-ekre

$$C_H - C_m = \frac{T\left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_H^2}{\left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T}$$

$$C_H \geqslant \frac{T\left(\frac{\partial m}{\partial T}\right)_H^2}{\left(\frac{\partial m}{\partial H}\right)_T} \quad \text{mert } C_m > 0$$

$$\wr\wr \qquad \wr\wr$$

$$|t|^{-\alpha} \geqslant |t|^{2\beta - 2 + \gamma}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{2\beta + \gamma + \alpha \geqslant 2}$$

- Landau - elmélet

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 1 + 0 = 2$$

- 2D Ising

$$2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{7}{4} + 0 = 2$$

- mérések

$$2\,\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + 0 = 2$$

(inkább $\gtrapprox 2$, hibahatáron belül...)

Önhasonlóság – skálázás – skálahipotézis

- vsz. amit megfigyelek egy (~~...~~) léptékben érzékeny.
  - ~> kis jelenségeket átlagolva látjuk.
  - ~> nagy –||– nem látjuk.

- vsz. → vannak saját belső karakterisztikus léptékek
  - ~> jellemző kh. atomok között
  - ~> rácsállandó
  - ~> korrelációs - hossz.

- ezek a kar. hosszúságok nagyságrendekben különböznek

- nincs kar. hossz. ~> hasonlósági törvények
  (messze vannak) "skálázás"

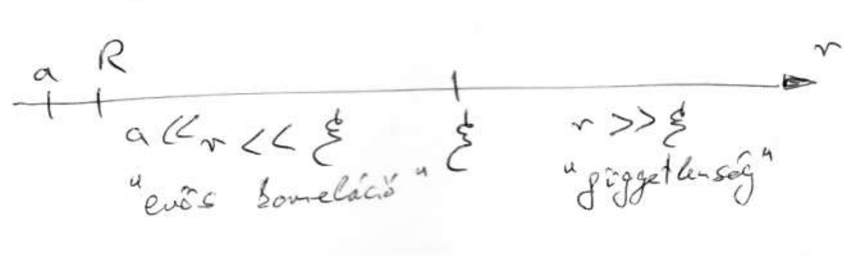
  → pl. hidrodinamika – Euler-egyenlet.
  - → meteorológia
  - → örvények hidak mellett.
  - → szabad úthossz távolságig le lehet menni...

- kar. hossz. átlépése ~> módosul a leírás

- skálázás termodinamikában
  - → extenzív mennyiségek homogén elsőfokú fv.-ek.

    $$\lambda S(E, V, N) = S(\lambda E, \lambda V, \lambda N)$$

  - → felületi hatások elhanyagolhatók.



$q \ll \frac{1}{\xi}$ $\quad \frac{1}{\xi} \quad$ $\frac{1}{\xi} \ll q \ll \frac{1}{a}$ $\quad \frac{1}{a} \quad$ q (hullámszám)

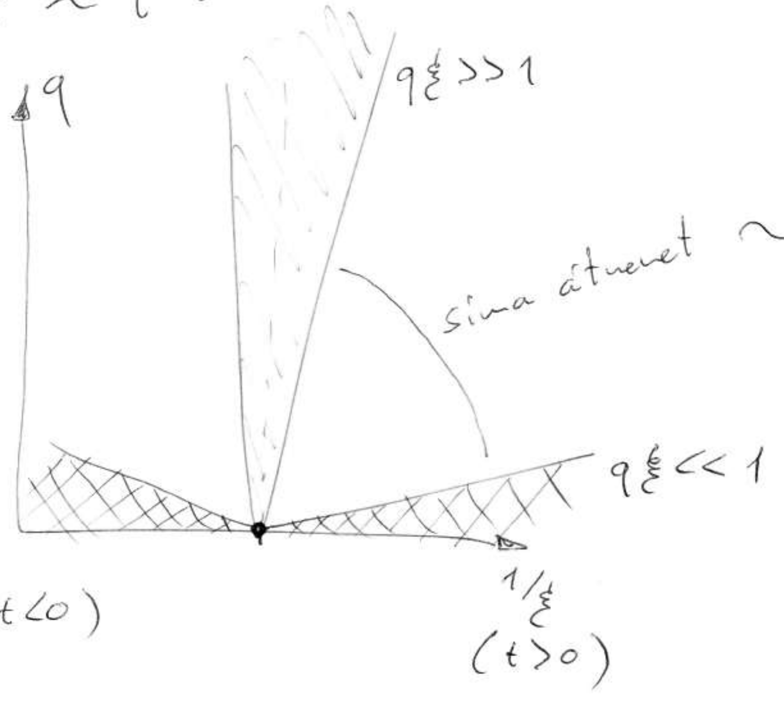
"függ $\not{q}$" "erős kom"

$$C(q) \approx C(q=0) = k_B T \chi \sim \xi^{\frac{\gamma}{\nu}}$$

$$C(q) \approx \frac{1}{q^{2-\eta}}$$

$$\chi \sim t^{-\gamma} \sim \xi^{\frac{\gamma}{\nu}}$$

$$\xi \sim t^{-\nu}$$



sima átmenet $\rightsquigarrow$ aszimptotikus viselkedést összeillesztjük $q\xi = 1$ -nél.

$$q = \frac{1}{\xi} \rightsquigarrow \frac{1}{q^{2-\eta}} \approx \xi^{2-\eta} \approx \xi^{\frac{\gamma}{\nu}}$$

$$\boxed{\gamma = \nu(2-\eta)}$$

- Az egyetlen karakterisztikus hosszúság a ξ ami a krit viselkedést meghatározza.

<u>dimenzió analízis</u>

$$C(q,\xi) = C(0,\xi) \cdot \underbrace{\phi(q\xi)}_{\text{dimenziótlan}}$$

$C(0,\xi) = A\,\xi^{\gamma/\nu}$

$$\boxed{C(q,\xi) = \xi^{\frac{\gamma}{\nu}} \cdot f(q\xi)}$$ Four. fv.-re vonatkozó skálahipotézis.

- ha $q\xi \ll 1$ akkor $\xi^{\gamma/\nu}$ a jellemző vis. C-nek.

$\rightsquigarrow f(q\xi) \underset{q\xi \ll 1}{\approx} \text{const.}$

- ha $q\xi \gg 1$ akkor $f(q\xi) \approx (q\xi)^{-\frac{\gamma}{\nu}}$

$\rightsquigarrow C$ nem függ ξ-től $\to C \sim q^{-\frac{\gamma}{\nu}}$

def: $C \sim \frac{1}{q^{2-\eta}}$ $\Big\}$ $\gamma = \nu(2-\eta)$

- átskálázás $\xi \to \frac{1}{\lambda}\xi$, $q \to q \cdot \lambda$

$$C\left(\lambda q, \xi/\lambda\right) = \left(\frac{\xi}{\lambda}\right)^{\gamma/\nu} f(q\xi) =$$
$$= \lambda^{-\frac{\gamma}{\nu}} C(q,\xi)$$

"általánosított homogén fv."

$f(\lambda^a x, \lambda^b y) = \lambda^p f(x,y)$

$\lambda^p f(x,0) = f(\lambda^a x, 0)$ | λ kivételével $\forall$ vált. nulla |

$\lambda^a x = x_0$ rögzített.

$f(x,0) \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{p/a} = f(x_0, 0)$

ez egy hatványfv.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$f_x(\lambda^a x, \lambda^b y) \cdot \lambda^a = \lambda^p f_x(x,y)$$

a parciális deriválttal is ált. homogén fv.-ek lesznek

- - - - - - - - - -

$$\xi = t^{-\nu}$$

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{t^{-\nu}}{\lambda} = \left(\lambda^{1/\nu} t\right)^{-\nu}$$

$$\boxed{C(\lambda q, \lambda^{1/\nu} t) = \lambda^{-\gamma/\nu} C(q,t)}$$