Kvantumgázok I.

- tipikus $T = 10^{-7}$ K ~ bose-kondenzáció

  2002 $\begin{cases} \cdot\ ^{87}Rb \text{ (JILA, C. Wienman, E. Cornell)} \\ \cdot\ ^{23}Na \text{ (MIT) W. Ketterle)} \end{cases}$

  • ^{6}Li (nehéz) Texas, R. Henlet)

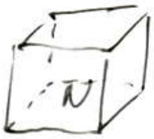
  • 1995

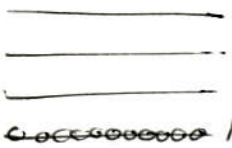
- 2000 - 2005 : Fermionok, BCS - csapdázás

Csapdázott gázok

• N db atom dobozban, T_c alatt

• A/V anyag kicsi, akkor a per. hf. ok.





N_0/N véges

nem kh.

$\Psi(r_1 \dots) = \varphi(r_1)\varphi(r_2) \dots \varphi(r_N)$

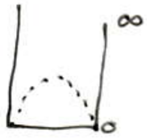
$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi = E\varphi$

ui. ha $k_1, k_2, k_3 = 0$

φ konst. hullámfv.!

$E = 0$.

•



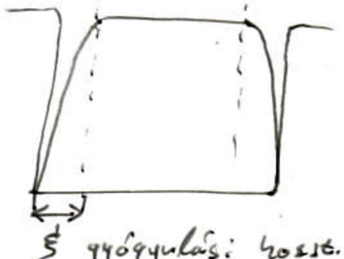
ilyen pot. gödörben a hf. sin!

$\sin(k_1 x_1) \cdot \sin(k_2 x_2) \sin(k_3 x_3)$

$k_1 = \frac{\pi}{L_1}$, $k_2 = \frac{\pi}{L_2}$, $k_3 = \frac{\pi}{L_3}$

• két esetben az alapáll. eltér!

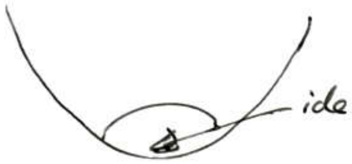
• kölcsönható rsz.-ben: (gyenge kh.)



ξ gyógyulási hossz.

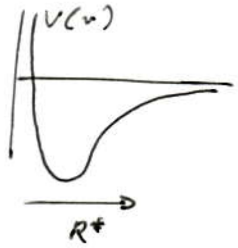
• ideális ha az edénnyel való kontaktus "kikapcsolva"

→ soft potenciálban az atomok (hűtésnél)
(ez a csapdázás...)



akár ki is cserélhetjük: (átkenül...)

- ez ált. alkáli gőzöknél használt.
- itt nagyobb a szabad úthossz, mint He-folyadékban.
- itt kh:



atom-atom potenciál.

r_0 : átlagos atom-atom távolság.

He : $r_0 \approx R^*$; alkáli : $R^* << r_0$

↓ lényeges a pot. menete

↓ Green-fv. formalizmus
(erősen kh. rsz.)

↓ hosszskálák elválnak ⇒ Ritkagáz közelítés

külső csapda pot.

$$\hat{H} = \int d^3r\, \hat{\Psi}^+(r)\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(r) + V(r)\right)\hat{\Psi}(r) + \frac{1}{2}\int d^3r\, d^3r'\, \hat{\Psi}^+(r)\hat{\Psi}^+(r')v(r-r')$$

$$\hat{\Psi}(r')\hat{\Psi}(r)$$

⤳ rsz. nem eltolásinvariáns!

$$G\left(r_1 - r_2, \frac{r_1+r_2}{2}\right)$$

↳ tkp. függés, "R"

$\tilde{F}(r_1 - r_2)$ szerint: $G(\vec{k}, \vec{R})$

ezt szokás használni.

Emlékeztető:

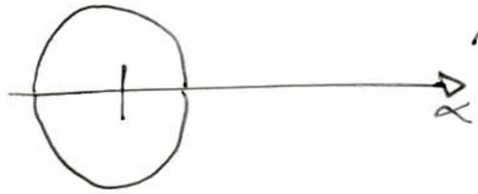
Bose-Einstein, Fermi-Dirac integrálok

$$F_{\mp}(s,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^{x+\alpha}\mp 1} \qquad \begin{cases} F_+ : & -\infty<\alpha<+\infty \\ F_- : & 0<\alpha<+\infty \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ momentum-integrálok ilyesmikre vezetnek.

$$=(\pm)\sum_{k=1}^{\infty}(\pm 1)^k\,\frac{e^{-k\alpha}}{k^s}$$

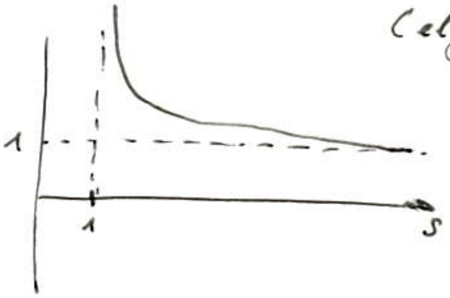
/J. Robinson Phys Rev. 83, 1951, 678./



$$F(s,\alpha)=\Gamma(1-s)\,\alpha^{s-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\zeta(s-n)\,\alpha^n$$

$\rightsquigarrow$ Γ negatív arg. $\rightarrow \infty$!

$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ $\rightsquigarrow$ ζ-nak pólusa 1-ben van. (elfolytatással is)



$$\Gamma(s)\,\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$ /Gauss duplikációs formula/

↳ Γ-nak pólusok $(-)$ egészekre...

$$\zeta(s)=2^s\,\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s)$$

↳ lehet ζ-t elfolytatni...

- szerencsére $\exists\ \zeta(s-(s-1))\rightarrow\infty$ kiválasztható és kiértékelhető $\Gamma(1-s)$-el üti!

$s = m$ egész:

$$F_-(m,\alpha) = \frac{(-1)^{m-1}\alpha^{m-1}}{(m-1)!}\left[-\log\alpha + \begin{cases}0 & m=1\\ \sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{l} & m>1\end{cases}\right] +$$

$$+\sum_{\substack{n=0\\ n\neq m-1}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\zeta(m-n)\cdot\alpha^n$$

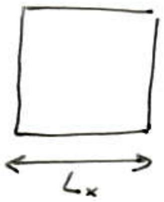
konvergens $0\leq\alpha\leq 2\pi$

$$\zeta(s)\sim\frac{1}{s-1}$$

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

<u>Nem-kölcsönható Bozonok dobozban</u>

$$\varphi(x,y,z) = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$



$$k_x = \frac{2\pi}{L_x}n_x\,,\ \dots$$

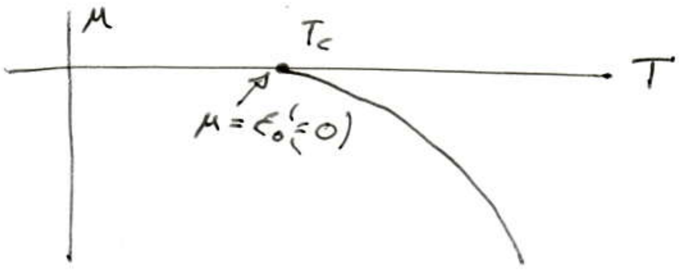
$$n_x = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

$$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)$$

$$N = \sum_{n_x n_y n_z}\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z}-\mu)}-1} \qquad \boxed{T > T_c}$$

$\downarrow$ continuum-limesz

$$= \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\frac{1}{e^{\beta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right)}-1} = V\left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot F_-\left(\frac{3}{2}, -\frac{\mu}{k_B T}\right)$$



$$k_B T_C = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left(\frac{n}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3}$$

- $$\lambda_{DB}^{-3}(T) = \left(\frac{m k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$ termikus de-Broigle hullámhossz.

$$\boxed{\zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) = n \cdot \lambda_{db}^3(T_C)}$$

ezt kell elérni. $\to$ T csökk.
$\to$ vagy n növ.

$T < T_C$

- $$N = N_0 + \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{1}{e^{\beta \varepsilon_{n_x n_y n_z}} - 1}$$ $(\mu = 0$, itt$)$

$$\downarrow$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$$

Nem kh. bozonok harmonikus oscillátor csapdában.

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\left(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2\right)$$

- $$\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega_1\left(n_x + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(n_y + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega_3\left(n_z + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$n_x, n_y, n_z \geq 0$$

$T > T_C$

$$N = \sum_{\substack{n_x\\n_y\\n_z}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)} - 1}$$

ha $T = T_C \to \mu = \varepsilon_{000} = \hbar\left(\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2} + \frac{\omega_3}{2}\right)$

$T < T_C$

$$N = N_0 + \sum_{\substack{n_x\\n_y\\n_z}} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \varepsilon_{000})} - 1}$$

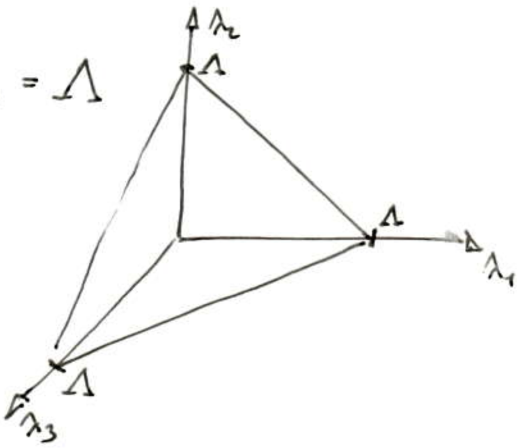
$$\simeq N_0 + \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \int_0^\infty dn_z \frac{1}{e^{\beta(\hbar\omega_1 n_x + \hbar\omega_2 n_y + \hbar\omega_3 n_z)} - 1} =$$

$$\lambda_1 = \beta\hbar\omega_1 n_1$$

$$d\lambda_1 = \beta\hbar\omega_1 dn_1$$

$$= N_0 + \left(\frac{1}{\beta\hbar\omega_1}\right)\left(\frac{1}{\beta\hbar\omega_2}\right)\left(\frac{1}{\beta\hbar\omega_3}\right)\int_0^\infty d\lambda_1 \int_0^\infty d\lambda_2 \int_0^\infty d\lambda_3 \frac{1}{e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} - 1}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \Lambda$$



$$\underset{\downarrow}{\bar{\omega}} = (\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$$

átlagos csapdafrek.

$$d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 = dV \Leftarrow \underbrace{\frac{\Lambda^2}{2}\frac{\Lambda}{3}}_{\text{tetraéder térfogata}}$$

$$\| $$

$$\frac{\Lambda^2}{2} d\Lambda$$

$$= N_0 + \left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \underbrace{\int_0^\infty \frac{\Lambda^2}{2} d\Lambda \frac{1}{e^\Lambda - 1}}_{F_-(3,0) = \zeta(3)} = N_0 + \zeta(3)\left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 = N$$

$$\boxed{k_B T_c = \hbar\bar{\omega}\left(\frac{N}{\zeta(3)}\right)^{1/3}}$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{\left(\frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \zeta(3)}{N} =$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \underbrace{\left(\frac{k_B T_c}{\hbar\bar{\omega}}\right)^3 \frac{\zeta(3)}{N}}_{1} = \underline{\underline{1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3}} \quad \text{(csapdában)}$$