$$(P_s, S) \Rightarrow (P_{S_1}, S_1)$$

$\rightsquigarrow \mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{H}'$ (felt. szabadenergia)

$\rightsquigarrow \underline{K} \Rightarrow \underline{K}'$ (paraméterek)

2019. 11. 27.

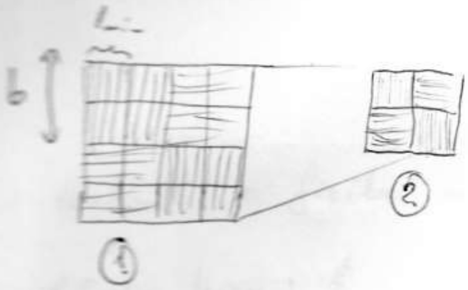
renormálási csoport tr. (Wilson-féle)

• két lépés: ① $l_{min} \to b \cdot l_{min}$ $(b>1)$

kiátlagoljuk a $l_{min} < \lambda < b\, l_{min}$ szab. fokokat.

② átskálázás

$$x' = \frac{x}{b} \qquad l'_{min} = \frac{b\, l_{min}}{b} = l_{min}$$



① lépés

S fázistér ⟶ S' új fázistér

P eloszlás ⟶ P' új eloszlás

$$S, P \to S', P'$$

$$S = S_1 + S_2$$

$\lambda > b\, l_{min}$ $\qquad$ $b\, l_{min} > \lambda > l_{min}$

feltételes szabadenergia $k_B T$ egységekben

$$e^{-\beta F} = Z = \sum_S e^{-\mathcal{H}_S} = \sum_{S_1}\left(\sum_{S_2} e^{-\mathcal{H}_S}\right) = \sum_{S_1} e^{-\mathcal{H}_{S_1}}$$

$$P_S = \frac{e^{-\mathcal{H}_S}}{Z} \rightsquigarrow P_{S_1} = \sum_{S_2} \frac{e^{-\mathcal{H}_S}}{Z} = \frac{e^{-\mathcal{H}_{S_1}}}{Z}$$

ügyes transzformáció: $S \approx S_1$ (ekvivalens)

- azonos struktúra (pl. Ising → Ising)

Szabadsági fokok száma:

$$N \sim \frac{V}{l_{min}^d}$$

$$N' \sim \frac{V}{(b l_{min})^d} \sim \frac{N}{b^d}$$ → csökken a szabadsági fokok száma.

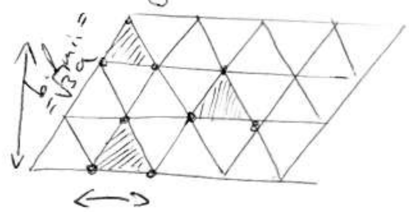
$\mathcal{H}_S = \mathcal{H}(\underline{K})$ paraméterezhető, nem „akármilyen" alakú

$\mathcal{H}_{S_1} = \mathcal{H}(\underline{K}')$

$$\underline{K} = (K_1, K_2, K_3, \dots)$$

Példák

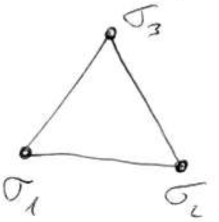
① Ising-modell síkbeli Δ rácson



$l_{min} = a$ (rácsállandó)

$b = \sqrt{3}$

blokk-spin: többségi szabály



$S = \mathrm{sign}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$

$$\left.\begin{array}{c} \uparrow\uparrow\uparrow \\ \uparrow\uparrow\downarrow \\ \uparrow\downarrow\uparrow \\ \downarrow\uparrow\uparrow \end{array}\right\} S = 1$$

$$\left.\begin{array}{c} \downarrow\downarrow\downarrow \\ \downarrow\downarrow\uparrow \\ \downarrow\uparrow\downarrow \\ \uparrow\downarrow\downarrow \end{array}\right\} S = -1$$

transzformáció valós térben

⇝ blokkok is Δ rácson lesznek!

(2.) transzformáció hullámszám térben

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_q e^{iqx} S_q$$

$(q < \Lambda)$

levágás

$$\Lambda \sim \frac{1}{l_{min}}$$

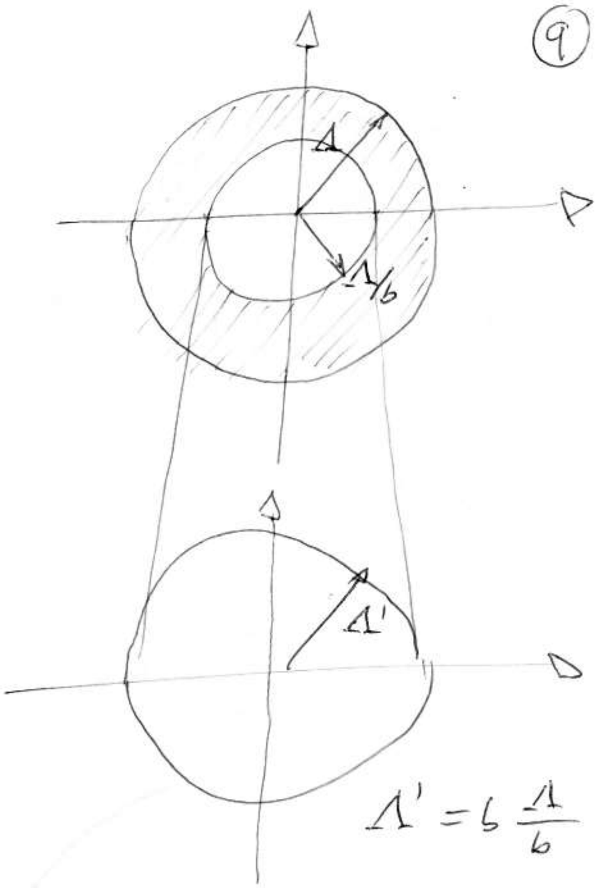
fázistér: $\{S_q\}_q$

$$l_{min} \to b\, l_{min}$$

$$\Lambda \to \frac{\Lambda}{b}$$

$$q' = bq \quad \left(x' = \frac{x}{b}\right)$$

(9)



$$\Lambda' = b\,\frac{\Lambda}{b} = \Lambda$$

- mi történik a fizikai mennyiségekkel?
- korrelációs hossz: ξ

  (1.) lépésben ξ nem változik

  (2.) lépésben $\xi' = \frac{\xi}{b} \rightsquigarrow \xi' = \xi(\underline{K}') = \frac{\xi(\underline{K})}{b}$

- szabadenergia sűrűsége

  $\rightsquigarrow$ blokkolva vetített szabadenergia

$$f = \frac{F}{N} = \frac{F}{b^d N'} = \frac{f'}{b^d}$$

$$f' = f(\underline{K}') = b^d f(\underline{K})$$

- félcsoport-jelleg:

nincs inverze!

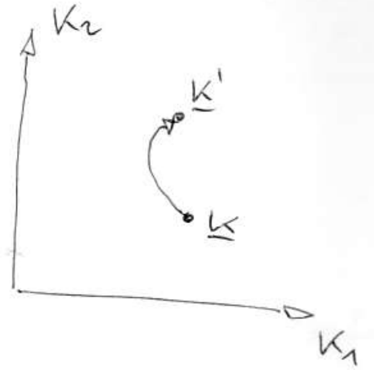
$$\begin{tikzcd} \underline{K} \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend left, "bb'"] & \underline{K}' \arrow[r, "b'"] & \underline{K}'' \end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{aligned} R_b \underline{K} &= \underline{K}' \\ R_{b'} \underline{K}' &= \underline{K}'' \\ R_{bb'} \underline{K} &= \underline{K}'' \end{aligned}\right\} \quad R_{bb'} = R_{b'} R_b$$

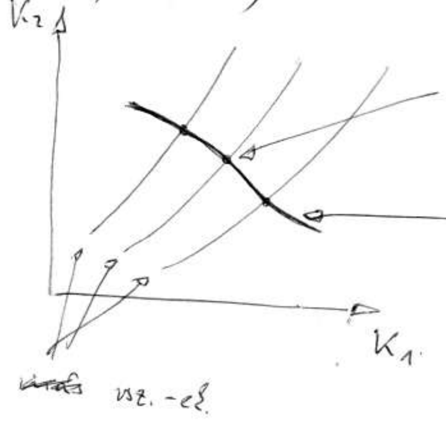
Kapcsolat a kritikus viselkedéssel

• két paraméter (általánosítható többre...)

$$\underline{K} = (K_1, K_2)$$
$$\underline{K}' = \underline{F}(\underline{K})$$
$$K_1' = F_1(K_1, K_2)$$
$$K_2' = F_2(K_1, K_2)$$



• adott fizikai rsz.: $K_1(T), K_2(T)$



bejelölhetők a krit. pontok

ezek definiálnak egy kritikus felületet

$\xi = \infty$

(algebrai lecsengés
$(\sim \frac{1}{r^\alpha})$)

$\xi' = \infty$

feltesszük, hogy ez a vándorlás egy fixpontban tart.

• A krit. felület invariáns az RG-trafóra.

• iteráció: vándorlás a kritikus felületen.

• fixpont: $\underline{K}^* = \underline{F}(\underline{K}^*)$

• krit felületen vonzó (stabil) fixpont.

• ha nem krit felületről indulunk:

$\xi' < \xi$ taszító fixpont.

- fixpont körül linearizálunk:

$$\underline{K} = \underline{K}^* + \delta \underline{K}$$

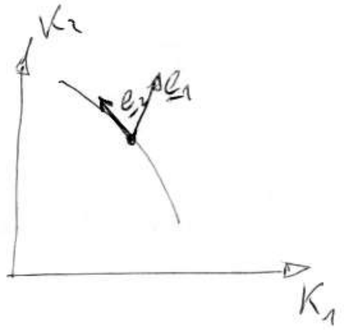
$$\underline{K}' = \underline{K}^* + \delta \underline{K}' = \underline{F}(\underline{K}^* + \delta \underline{K}) = \underline{F}(\underline{K}^*) + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{K}}\bigg|_{\underline{K}^*} \cdot \delta \underline{K}$$

$$\Longrightarrow \delta \underline{K}' = \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{K}}\bigg|_{\underline{K}^*} \delta \underline{K}$$

$$\begin{pmatrix} \delta K_1' \\ \delta K_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial K_1} & \frac{\partial F_1}{\partial K_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial K_1} & \frac{\partial F_2}{\partial K_2} \end{pmatrix}_{\underline{K}^*} \begin{pmatrix} \delta K_1 \\ \delta K_2 \end{pmatrix}$$

⇝ koordinátarsz. origóját eltoltuk a fixpontba.

- sajátvektorok, sajátértékek:
  → jobb oldali (nincs garancia, h $\underline{\underline{L}}$ szimm.)



$$\underline{\underline{L}}\, \underline{e}_1 = \lambda_1 \underline{e}_1$$

$$\underline{\underline{L}}\, \underline{e}_2 = \lambda_2 \underline{e}_2$$

⇝ egyik sajátvektor a krit. felületben fekszik ($\underline{e}_2$)
vonzó irány
$\lambda_2 < 1$

⇝ $\underline{e}_1$ "kilóg"
taszító irány
$\lambda_1 > 1$

⇝ b függés: $\lambda(b')\lambda(b) = \lambda(bb')$
(feltéve, h sv.-ok nem függnek b-től)

megoldása: $\lambda(b) = b^y$

$\lambda_1 = b^{y_1}$ $\quad y_1 > 0$ "releváns" irány

$\lambda_2 = b^{y_2}$ $\quad y_2 < 0$ "irreleváns" irány

$y = 0$ ⇝ anomális tul. a fázisátalakulásban.

⇝ új bázis $\underline{e}_1, \underline{e}_2$

$$\delta \underline{K} = t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2$$

$$\delta \underline{K}' = b^{y_1} t_1 \underline{e}_1 + b^{y_2} t_2 \underline{e}_2$$

a kritikus felületen $t_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \xi(t_1, t_2) &= b\, \xi(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2) \\ f(t_1, t_2) &= b^{-d} f(b^{y_1} t_1, b^{y_2} t_2) \end{aligned}\right\}$$ általánosított homogén fv.-ek (még nem skálázás!)

- adott fizikai vsz.: $\underline{K}(T)$

$$t_1(T),\ t_2(T)$$

$t_1(T)$ előjelet vált a krit. felületen.

$t_1(T) \sim \dfrac{T - T_c}{T_c}$ olyan mint a redukált hőmérséklet.

$t_2(T_c)$ meghatározza a "töréspontot"

$$\xi(t_1(T), t_2(T)) = b\, \xi(b^{y_1} t_1(T), b^{y_2} t_2(T))$$

$$b^{y_1} |t_1(T)| = t_{10} \quad \text{(rögzített)}$$

$$b = \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{1/y_1}$$

$$\xi(t_1(T), t_2(T)) = \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{1/y_1} \xi\left(\pm t_{10}, \underbrace{\left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{y_2/y_1} t_2(T)}\right)$$

$$t_1(T) \to 0$$

$y_2 < 0$, $y_1 > 0$ ⇝ $\dfrac{y_2}{y_1} < 0$

$$\sim |t_1(T)|^{-y_2/y_1} \to 0$$

$$\xi(t_1(T), t_2(T)) = \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{1/y_1} \xi(\pm t_{10}, 0)$$

$\xi \sim |t_1(T)|^{-1/y_1}$ határfv. viselkedés

def: $\xi \sim |t|^{-\nu} \longrightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{y_1}}$

- krit viselkedés függ⌀ t_2-től! $\longrightarrow$ univerzalitás
  (pontosan melyik vsz.-t vizsgáljuk...)

$$f(t_1(T), t_2(T)) = b^{-d} f(b^{y_1} t_1(T), b^{y_2} t_2(T))$$

$$f(t_1(T), t_2(T)) \underset{t_1(T) \to 0}{=} \left|\frac{t_{10}}{t_1(T)}\right|^{-\frac{d}{y_1}} f(\pm t_{10}, 0) \quad \text{határfv.}$$

$$f \sim |t_1(T)|^{\frac{d}{y_1}} = |t_1(T)|^{d\nu}$$

def: $f \sim |t|^{2-\alpha} \rightsquigarrow \boxed{2-\alpha = d\nu}$

RG biztosítja a hiperskálatv.-t.

- $\forall$ vsz. amit a fixpont vonz, ugyanazt a krit. viselkedést mutatja.
- sorfejtéssel lehet skálázáshoz korrekciókat számolni
  ↳ korrekció arányos $t_2(T)$-vel ⇝ már nem univerzális
- RG elég flexibilis ⇝ sok vsz.-hez igazítani lehet.