Příprava na cvičení: Algebra matic – Aplikace v Grafice a AI

Cíle Cvičení:

1. Procvičit základní operace s maticemi (sčítání, násobení skalárem, násobení matic).
2. Pochopit násobení matic jako skládání lineárních transformací.
3. Ukázat geometrický význam matic na příkladech relevantních pro **počítačovou grafiku a hry** (rotace, zkosení, reflexe).
4. Demonstrovat, jak algebra matic umožňuje efektivně reprezentovat a manipulovat s transformacemi, včetně nelineárního posunutí pomocí triku s homogenními souřadnicemi.

Rekapitulace z přednášek (04A, 04B):

1. **Lineární zobrazení:** $f(\sum a_i x_i) = \sum a_i f(x_i)$. Je jednoznačně určeno hodnotami na bázi.
2. **Matice zobrazení $A : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$:** Sloupce matice A jsou obrazy vektorů kanonické báze, tj. $A = (A \cdot e_1, ..., A \cdot e_s)$.
3. **Násobení matice vektorem:** $A \cdot x = \sum_{j=1}^{s} x_j (A \cdot e_j)$. Toto je základní operace např. v neuronových sítích.
4. **Operace s maticemi:**
   1. **Sčítání:** Po složkách (jen pro matice stejných rozměrů).
   2. **Násobení skalárem:** Každá složka se násobí skalárem.
   3. **Násobení matic (Skládání zobrazení):** Pro $A : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^p$ a $B : \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^r$ je součin $C = B \cdot A$ zobrazení $\mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$.
5. **Vlastnosti:** Násobení je asociativní, ale obecně **není komutativní**. Jednotková matice E_n funguje jako neutrální prvek.

—

Problém 5.1.4 – Je posunutí lineární?

Zadání: Ať $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení definované takto

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ukažte, že f není lineární zobrazení.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Podmínka nulového vektoru:** Pro lineární zobrazení f musí platit $f((o)) = (o)$.
2. **Výpočet:**

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. **Závěr:** Protože $f((o)) \neq (o)$, zobrazení f není lineární.

—

Problém 5.1.2 – Zápis matice a výpočet obrazu vektoru

Zadání: Lineární zobrazení $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je určeno hodnotami:

$$M : e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad M : e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad M : e_3 \mapsto \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Zapište M jako matici. (2) Nalezněte funkční hodnotu M ve vektoru $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Sestavení matice:** Sloupce matice jsou obrazy vektorů kanonické báze.

$$M = (M \cdot e_1, M \cdot e_2, M \cdot e_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -16 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Výpočet obrazu vektoru:** Obraz $M \cdot x$ je lineární kombinace sloupců matice M s koeficienty z vektoru x.

$$M \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-3) * \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 + 4 - 16 \\ 6 - 6 + 2 \\ -6 + 10 - 4 \\ -6 + 24 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 2 \\ 0 \\ 19 \end{pmatrix}$$

—

Problém 5.1.6 – Rotace v Grafice a Herních Enginech

Zadání: Matice rotace v $\mathbb{R}^2$ je $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Z geometrického faktu, že složení dvou rotací je opět rotace, musí platit $R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}$. Odvoďte z této maticové rovnosti součtové vzorce pro $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Vynásobení matic $R_\alpha \cdot R_\beta$:**

$$R_\alpha \cdot R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

2. **Zápis matice $R_{\alpha+\beta}$:**

$$R_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

3. **Porovnání položek** z rovnosti $R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}$:
   1. **Položka (1,1):** $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
   2. **Položka (2,1):** $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

—

Problém 5.2.1 – Reflexe (Zrcadlení) a Algebra Matice

Zadání: Ukažte, že pro matici $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ z rovnosti $A^2 = E_2$ neplyne nutně ani $A = E_2$, ani $A = -E_2$. Najděte příklad takové matice a vysvětlete její geometrický význam.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Hledáme geometrickou transformaci**, která je sama sobě inverzí. Kandidát: reflexe (zrcadlení).
2. **Matice reflexe podle osy x:**
   1. $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   2. $e_2 = \binom{0}{1} \mapsto \binom{0}{-1}$
   3. Matice je $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Zjevně $A \neq E_2$ a $A \neq -E_2$.
3. **Ověření $A^2 = E_2$**:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

4. **Závěr:** Našli jsme příklad. Geometricky: dvojí zrcadlení podle stejné osy je identita.

—

Problém 6.3.3 (Motivační Bonus) – Posunutí v Grafice pomocí Matic

Zadání: Vymyslete matici, která realizuje posunutí bodu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ do bodu $\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Motivace:** Posunutí není lineární, ale chceme ho reprezentovat maticí. Použijeme „trik" - bod $\binom{x}{y}$ z $\mathbb{R}^2$ reprezentujeme jako vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ z $\mathbb{R}^3$ (homogenní souřadnice).
2. **Cíl:** Hledáme matici T rozměrů 3×3 takovou, že:

$$T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. **Odvození řádků matice T**:
   1. První řádek výsledku: $x + a = 1 * x + 0 * y + a * 1$. Řádek je $(1, 0, a)$.
   2. Druhý řádek výsledku: $y + b = 0 * x + 1 * y + b * 1$. Řádek je $(0, 1, b)$.
   3. Třetí řádek výsledku: $1 = 0 * x + 0 * y + 1 * 1$. Řádek je $(0, 0, 1)$.
4. **Výsledná matice posunutí (translace)**:

$$T_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Ověření**:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 0y + a * 1 \\ 0x + 1y + b * 1 \\ 0x + 0y + 1 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Funguje to. Tímto způsobem můžeme všechny 2D transformace (rotace, škálování, posunutí…) reprezentovat jako násobení matic 3×3.