Příprava na cvičení: Báze a dimenze lineárního prostoru

Cíle Cvičení:

- Studenti by měli pochopit, co je to báze a dimenze, a umět tyto pojmy prakticky použít.
- Měli by se naučit, jak znalost dimenze dramaticky zjednodušuje ověřování, zda je daný seznam vektorů bází.
- Studenti by měli být schopni aplikovat větu o dimenzi spojení a průniku jak na konkrétních, tak na abstraktních příkladech.
- Měli by porozumět důsledkům věty o dimenzi, například jak zaručuje existenci netriviálního průniku podprostorů.

Problém 4.2.1 – Ověřování báze v $\mathbb{R}^3$

Zadání:

O následujících seznamech rozhodněte, zda jsou uspořádanými bázemi lineárního prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Smíte využít faktu, že $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

1. Seznam $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.
2. Seznam $B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 148 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.
3. Seznam $B_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$.

Klíčové Koncepty:

Báze, dimenze, lineární nezávislost, lineární obal (množina generátorů), kanonická báze.

Cíl Problému:

Ukázat studentům, jak znalost dimenze prostoru radikálně zjednodušuje ověření, zda je daný seznam vektorů bází. Porovnat výpočetně náročný postup s elegantnějším teoretickým přístupem.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Úvodní otázka:** „Co víme o prostoru $\mathbb{R}^3$? Jaká je jeho dimenze a proč?“
   - Očekávaná odpověď: $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. Důvod: kanonická báze $K_3 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ má 3 prvky.
   - **Ponaučení:** Jakákoli jiná báze prostoru $\mathbb{R}^3$ musí mít také přesně 3 prvky.
2. **Řešení části (2): Seznam B_2**
   - Seznam B_2 má pouze 2 vektory, ale $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.
   - **Závěr:** B_2 není bází $\mathbb{R}^3$.
3. **Řešení části (1): Seznam B_1**
   - Seznam má 3 vektory, což je správný počet. Stačí ověřit lineární nezávislost.
   - **Porovnání metod:**
     - **Generování:** Vede na soustavu s parametry na pravé straně. Náročné.
     - **Lineární nezávislost:** Vede na homogenní soustavu bez parametrů. Jednodušší.
   - **Výpočet lineární nezávislosti (standardní):**

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + 3a_2 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 = 0 \end{pmatrix}$$

Z posledních dvou rovnic plyne $a_1 = 0$ a $a_2 = 0$. Dosazením do první dostaneme $a_3 = 0$. Řešení je pouze triviální, vektory jsou LN.

- **Výpočet lineární nezávislost (elegantní):**
  - Jsou $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ lineárně nezávislé? Ano, nejsou násobky.
  - Leží $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ v jejich obalu? Tj. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$?
  - Z rovnic $0 = 2\alpha + 3\beta$ a $0 = 3\alpha + 2\beta$ plyne $\alpha = 0, \beta = 0$. Dosazením do první rovnice souřadnic $1 = \alpha + \beta$ dostáváme $1 = 0$, což je spor.
  - Vektor $\vec{v}_3$ neleží ve $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.
- **Konečný Závěr:** B_1 je seznam 3 LN vektorů v prostoru dimenze 3, je to tedy báze.

Poznámky pro Vyučujícího:

- Zdůrazněte, že ověření počtu prvků seznamu je první a nejrychlejší krok.
- Ukažte, že teoretická znalost (věta o dimenzi) šetří polovinu práce. Heslo: „Buďme chytře líní."

Problém 4.2.2 – Transformace báze

Zadání:

Ať $\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\right)$ je uspořádaná báze lineárního prostoru L nad $\mathbb{F}$. Rozhodněte, pro která $n \geq 2$ je seznam $B' = \left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{b}_2 + \vec{b}_3, ..., \vec{b}_n - 1 + \vec{b}_n, \vec{b}_n + \vec{b}_1\right)$ opět bází prostoru L.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Analýza problému:** Máme n vektorů v prostoru dimenze n. Stačí ověřit LN. $a_1\left(\vec{b}_1 + \vec{b}_2\right) + a_2\left(\vec{b}_2 + \vec{b}_3\right) + .. + a_{n\left(\vec{b}_n + \vec{b}_1\right)} = (0)$. Přeskupením: $(a_n + a_1)\vec{b}_1 + (a_1 + a_2)\vec{b}_2 + .. + (a_{n-1} + a_n)\vec{b}_n = (0)$. Z LN původní báze dostáváme soustavu:

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ .. \\ a_n + a_1 = 0 \end{pmatrix}$$

2. **Zobecnění:** Z řetězce rovnic plyne $a_k = (-1)^{k-1} a_1$. Dosazením do poslední rovnice $a_n + a_1 = 0$ dostaneme $(-1)^{n-1} a_1 + a_1 = 0$.

3. **Závěr:**
   - **n liché:** $n - 1$ je sudé. Rovnice je $a_1 + a_1 = 2a_1 = 0$. Nad $\mathbb{R}$ je řešení jen $a_1 = 0$, tedy všechny $a_k = 0$. Vektory jsou LN. ***B′* je báze.**
   - **n sudé:** $n - 1$ je liché. Rovnice je $-a_1 + a_1 = 0$, což platí vždy. Můžeme zvolit $a_1 = 1$ a najít netriviální řešení. Vektory jsou LZ. ***B′* není báze.**

Problém 4.2.4 a 4.3.1 – Věta o dimenzi spojení a průniku

Zadání (A):

V, W jsou podprostory $\mathbb{R}^5$, $\dim(V) = 3, \dim(W) = 3$. Co lze říci o $\dim(V \cap W)$ a $\dim(V \bigcup W)$?

Zadání (B):

Ať $\dim(L) = n$ a V, W jsou podprostory L takové, že $\dim(V) + \dim(W) > n$. Dokažte, že $\dim(V \cap W) \geq 1$.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Zopakování věty:** $\dim(V) + \dim(W) = \dim(V \bigcup W) + \dim(V \cap W)$.
2. **Řešení (A):**
   - $3 + 3 = 6 = \dim(V \bigcup W) + \dim(V \cap W)$.
   - Omezení: $3 \leq \dim(V \bigcup W) \leq 5$ a $0 \leq \dim(V \cap W) \leq 3$.
   - Možnosti:
     - $\dim(V \cap W) = 1 \Rightarrow \dim(V \bigcup W) = 5$.
     - $\dim(V \cap W) = 2 \Rightarrow \dim(V \bigcup W) = 4$.
     - $\dim(V \cap W) = 3 \Rightarrow \dim(V \bigcup W) = 3$ (pak $V = W$).
3. **Řešení (B):**
   - $\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \bigcup W)$.
   - Víme, že $\dim(V) + \dim(W) > n$ a $\dim(V \bigcup W) \leq n$.
   - $\dim(V \cap W) > n - \dim(V \bigcup W) \geq n - n = 0$.
   - Jelikož $\dim(V \cap W)$ je celé číslo a je větší než 0, musí platit $\dim(V \cap W) \geq 1$.

Poznámky pro Vyučujícího:

- Ukažte geometrickou intuici v $\mathbb{R}^3$: dvě roviny ($\dim = 2$) se musí protnout, protože $2 + 2 > 3$.

Problém 4.3.3 (3) – Výhled na Frobeniovu větu

Zadání:

Dokažte ekvivalenci: (a) $\vec{b} \in \operatorname{span}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_s)$ (b) $\dim(\operatorname{span}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_s)) = \dim\left(\operatorname{span}\left(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_s, \vec{b}\right)\right)$.

Postup Řešení na Tabuli:

1. **Označení:** $W = \operatorname{span}(\vec{a}_1, ..., \vec{a}_s)$ a $V = \operatorname{span}\left(\vec{b}\right)$. Chceme dokázat $V \subseteq W \Leftrightarrow \dim(W) = \dim(W \bigcup V)$.
2. **Použití problému 4.3.3(2) ze sbírky:** Tam je dokázáno, že pro podprostory V, W platí $V \subseteq W \Leftrightarrow \dim(V \bigcup W) = \dim(W)$.
3. **Aplikace:** Tvrzení přímo plyne z této vlastnosti, kde za V vezmeme přímku generovanou vektorem $\vec{b}$.

Shrnutí a Závěr:

Dnes jsme si ukázali, že dimenze je praktický nástroj.

1. **Znalost dimenze** šetří práci při ověřování báze.
2. **Věta o dimenzi spojení a průniku** umožňuje analyzovat vztahy mezi podprostory bez jejich explicitního výpočtu.

3. Připravili jsme půdu pro **Frobeniovu větu**: vektor leží v lineárním obalu právě tehdy, když jeho přidáním nezvětšíme dimenzi tohoto obalu. To bude brzy náš hlavní nástroj pro určení, zda má soustava lineárních rovnic řešení.

Další rozšiřující příklady

Příklad: Báze v prostoru polynomů

Zadání:

Je seznam $C = (1, x-1, (x-1)^2)$ bází prostoru polynomů stupně nejvýše 2, $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$?

Cíl:

Ukázat, že principy báze a dimenze fungují stejně i v prostorech, které nejsou $\mathbb{R}^n$.

Postup:

1. **Dimenze:** Připomeneme, že $\dim(\mathbb{R}_{\leq 2}[x]) = 3$. Standardní báze je $(1, x, x^2)$.
2. **Počet vektorů:** Seznam C má 3 prvky, což je správný počet. Stačí ověřit lineární nezávislost.
3. **Lineární nezávislost:** Řešíme rovnici $a_1(1) + a_2(x-1) + a_3(x-1)^2 = 0$.
   - Roznásobením a přeskupením dostaneme: $a_3x^2 + (a_2 - 2a_3)x + (a_1 - a_2 + a_3) = 0$.
   - Aby byl polynom nulový, musí být všechny jeho koeficienty nulové:

$$\begin{aligned} a_3 &= 0 \\ a_2 - 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

   - Tato soustava má jediné řešení $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Polynomy jsou tedy lineárně nezávislé.
4. **Závěr:** Seznam C je bází prostoru $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$.

Příklad: Mimoběžné roviny v $\mathbb{R}^4$

Zadání:

V prostoru $\mathbb{R}^4$ nalezněte dva podprostory (roviny) V a W takové, že $\dim(V) = 2$, $\dim(W) = 2$ a jejich průnik je pouze nulový vektor, tj. $V \cap W = \{(0)\}$.

Cíl:

Konkrétně demonstrovat, že dvě roviny v $\mathbb{R}^4$ se mohou „minout“ (protnout se jen v počátku).

Postup:

1. **Strategie:** Chceme najít dvě báze, jejichž spojení bude generovat celý prostor $\mathbb{R}^4$. Tím pádem bude $\dim(V \bigcup W) = 4$.
2. **Volba bází:** Zvolme co nejjednodušší vektory z kanonické báze.
   - Nechť $V = \mathrm{span}(\vec{e}_1), \vec{e}_2) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Toto je „rovina xy“.
   - Nechť $W = \mathrm{span}(\vec{e}_3, \vec{e}_4) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Toto je „rovina zw“.
3. **Ověření:**
   - Je zřejmé, že $\dim(V) = 2$ a $\dim(W) = 2$.
   - Spojení $V \bigcup W = \mathrm{span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4) = \mathbb{R}^4$, takže $\dim(V \bigcup W) = 4$.
4. **Věta o dimenzi:** $\dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \bigcup W) = 2 + 2 - 4 = 0$.
5. **Závěr:** Průnikem je pouze podprostor dimenze 0, tedy $\{(0)\}$. Našli jsme dvě roviny, které se protínají pouze v počátku.