Mathe Hausaufgaben in LaTeX

Tim Meusel

1 Aufgabe

$V(t) = 10t^3 - 50t^2 - 60t$
Einheit: cm / min Intervall: [0; 3,5] (Minuten)

2 Fragen

2.1 Wann befindet sich der Schlitten in Ruhe?

Bei $V(t) = 0$ bewegt sich der Schlitten nicht. Die möglichen Positionen können über die Nullstellen von V ermittelt werden. Vorgehensweise:

- Formel nach $V(t) = 0$ umstellen
- In eine quadratische Funktion umwandeln, welche 0 ergibt
- Faktor vor der Variable mit dem Exponent 2 entfernen
- PQ Formel anwenden
- Ausrechnen

Realisierung:

$$
\begin{aligned}
V(t) &= 10t^3 - 50t^2 - 60t \\
V(t) &= 0 \Leftrightarrow 10t^3 - 50t^2 - 60t = 0 \\
V(t) &= 0 \Leftrightarrow t * (10t^2 - 50t - 60) = 0 \\
V(t) &= 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 10t^2 - 50t + 60 = 0 \\
0 &= 10t^2 - 50t + 60 \\
0 &= t^2 - 5t + 6 \\
x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2}^2 - q} \\
x_{1,2} &= -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2}^2 - 6} \\
x_{1,2} &= 2,5 \pm 0,5 \\
x_1 &= 3 \\
x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Da $V(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 10t^2 - 50t + 60 = 0$ ist eine Nullstelle bei $x = 0$. Die weiteren Nullstellen befinden sich bei $x = 3$ und $x = 2$.

2.2 Wann ist die größte und die kleinste Geschwindigkeit im Intervall erreicht und wie groß sind diese?

- Ableiten
- Faktor vor der Variable mit dem Exponent 2 entfernen
- PQ Formel anwenden
- Ausrechnen

$$
\begin{aligned}
V(t) &= 10t^3 - 50t^2 - 60t \\
V'(t) &= 30t^2 - 100t + 60 \\
V'(t) &= t^2 - 4\frac{1}{3}t + 2 \\
x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
x_{1,2} &= \frac{\frac{1}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1\frac{1}{3}}{2}\right)^2 - 2} \\
x_{1,2} &= \frac{\frac{1}{3}}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{3} \\
x_1 &= 1,0485 \\
x_1 &= -0,7152
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V''(t) &= 60t - 100 \\
V''(-0,7152) &= -142,912 \\
V''(1,0485) &= 60,385
\end{aligned}
$$

2.3 Die maximale Beschleunigung beträgt $20cm/minute^2$. Wird dieser Wert im Intervall [1;2] min überschritten?

- $V'(t) = 30t^2 - 100t + 60$ ausrechnen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$
- Nullstellen von $V''(t) = 60t - 100$ ausrechnen
- Die errechneten Nullstellen als t in $V'(t) = 30t^2 - 100t + 60$ einsetzen

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 2 \\
V'(t) &= 30t^2 - 100t + 60 \\
V'(x_1) &= 30 * 1^2 - 100 * 1 + 60 \\
V'(x_1) &= -10 \\
V'(x_2) &= 30 * 2^2 - 100 * 2 + 60 \\
V'(x_2) &= -20
\end{aligned}
$$

An den Intervallgrenzen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ beträgt die Beschleunigung -10 beziehungsweise -20.

Bestimmung der Nullstelle:

$$\begin{aligned} V''(t) &= 60t - 100 \\ 0 &= 60t - 100 \\ 100 &= 60t \\ \frac{5}{3} &= t \end{aligned}$$

Ermitteln das lokalen Extremwerts:

$$\begin{aligned} t &= \frac{5}{3} \\ V'(t) &= 30t^2 - 100t + 60 \\ V'(t) &= 30 * \frac{5}{3}^2 - 100 * \frac{5}{3} + 60 \\ V'(t) &= -56\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Der lokale Extremwert liegt bei $-56\frac{2}{3}$. Die maximale Beschleunigung wird im Intervall [1;2] min nicht überschritten.

2.4 Welcher Weg wird im Intervall [0;3,4] zurückgelegt?

- Integrieren von $V(t) = 10t^3 - 50t^2 - 60t$
- Fläche des Integrals von [1;2] errechnen

$$V(t) = 10t^3 - 50t^2 - 60t$$