FIS210: Clase 24: Invariancia Adiabática
Ecuación de Hamilton-Jacobi

Bastián Castorene[1]

28 de diciembre de 2021

[1] *Estudiante de Licenciatura en Física, Departamento de Física, UTFSM*

1. Invarianza Adiabatica de las variables de Acción (J)

Este formalismo Es muy bueno para tratar perturbaciones.

$$\mathcal{H}(q, p, \lambda(t)) \tag{1}$$

Esto es un sistema periódico si λ es constante, es decir, $\dot{\lambda} = 0$. Ejemplo, el sol perdiendo masa, un resorte calentándose o un movimiento por un Campo Electromagnetico.
La energia no se corservara y la frecuencia depende del tiempo. $E = E(t) \mid \omega = \omega(t)$. Si $\Delta\lambda << \lambda$ sobre un periodo y debe ser suave, continuo y pequeño. Entonces la variable de acción:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq = cte \tag{2}$$

Esto nos da una relacion entre la energia y ω que es distinta para cada sistema. Y lo bueno es que, esta es la relacion si el cambio es suficientemente lento. Y puede ocurrir reversible.
Nuestros objetivo. es calcular

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2\pi} \oint \left(\frac{\partial p}{\partial \mathcal{H}} \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) dq \tag{3}$$

El objetivo es calcular esto y no es sencillo hacerlo.
Vamos a demostrarlo para el promedio temporal

$$\frac{\mathrm{d}\bar{J}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Bigg| \quad \bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T E \, dt$$

Como si λ fuera constante.

Ejemplo

Oscilador Armonico $\omega(t)$

$$\ddot{q} + \omega^2(t) q = 0 \tag{4}$$

Aprox. Adiabatica: $\Delta\omega << \omega$ sobre un periodo. Es decir $\frac{\Delta\omega}{T} << \frac{\omega}{T} \implies \frac{\dot{\omega}}{\omega} < \omega$. Esto dice que la escala temporal donde cambia el parametro debe ser larga respecto a su funcion original.

$$E = \frac{1}{2}m\big(\dot{q}^2 + m\omega^2 q^2\big) \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\big(\dot{q}\ddot{q} + \omega^2 q\dot{q} + \omega\dot{\omega}q^2\big) \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\big(\dot{q}\big(\ddot{q} + \omega^2 q\big) + \omega\dot{\omega}q^2\big) \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\left(\cancelto{0}{\dot{q}\left(\ddot{q} + \omega^2 q\right)} + \omega\dot{\omega}q^2\right) \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\omega\dot{\omega}q^2 \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{E}}{\mathrm{d}t} = \omega\dot{\omega}\bar{q^2} \tag{10}$$

El cambio debe ser lento y $\bar{q^2}$ tendra un cambio constante solo por **1 promedio** Si $\omega - cte$ con

$$q = A\cos\left(\omega t + \phi\right) \tag{11}$$

$$\frac{q}{q^2} = \frac{A^2}{2} \tag{12}$$

Entonces, reemplazando este valor en la ecuacion anterior tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}\bar{E}}{\mathrm{d}t} = \omega\dot{\omega}\frac{A^2}{2} \tag{13}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{E}}{\mathrm{d}t} = \omega\dot{\omega}\frac{A^2}{2} = \bar{E}\frac{\dot{\omega}}{\omega} \tag{15}$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - \bar{E}\frac{\dot{\omega}}{\omega} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{E}}{\omega}\right) = 0 \tag{16}$$

Y para un oscilador armonico $J = \frac{E}{\omega}$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{E}}{\omega}\right) = 0 \implies \frac{\mathrm{d}\bar{J}}{\mathrm{d}t} = 0 \to J = cte \tag{17}$$

1.1. Caso General, (Promedio Temporal)

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\mathcal{H}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t}\, dt \tag{18}$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \tag{19}$$

$$dt = \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{q}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} \tag{20}$$

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{q}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\oint \frac{q}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}}}\oint \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial \lambda}\frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}}\, dq \tag{22}$$

$$\oint \frac{\partial p}{\partial \mathcal{H}}\overline{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}}\, dq = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\oint \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}\frac{1}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}}\, dq \tag{23}$$

$$\boxed{si\ \lambda = cte \ \Big|\ \mathcal{H}(\lambda, q)\ \Big|\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda}} \tag{24}$$

$$\frac{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}}{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda} \tag{25}$$

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial \mathcal{H}}\overline{\frac{\mathrm{d}\mathcal{H}}{\mathrm{d}t}}\right) dq = -\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial t}\, dq \tag{26}$$

$$\implies \overline{\frac{\partial J}{\partial t}} = 0 \implies \overline{J} = cte \tag{27}$$

Como esto es una demonstración general, **No va a ser falta que nos pongamos caso por caso a calcular el trabajo externo, solo calculmos la variable de acción (J), que es el área del espacio de fases que nos indica la relacin entre energia y frecuencia que se mantene constante durante el cambio adiabatico.**
Puede ser cualquiera de los parámetros que cambien las frecuencias del sistema.

Ejemplo

1. Pelota rebotando elásticamente entre paredes

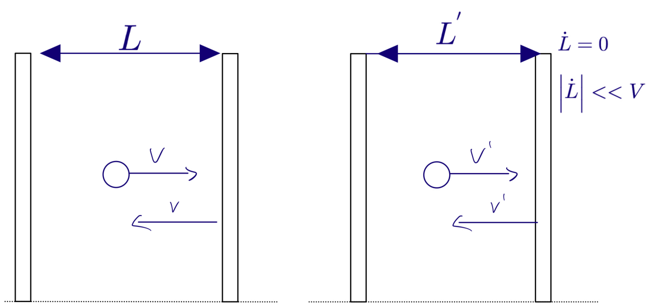

Figura 1: Diagrama de pelota rebotando

Con esto, se dibuja el espacio de fases de la pelota teniendo:

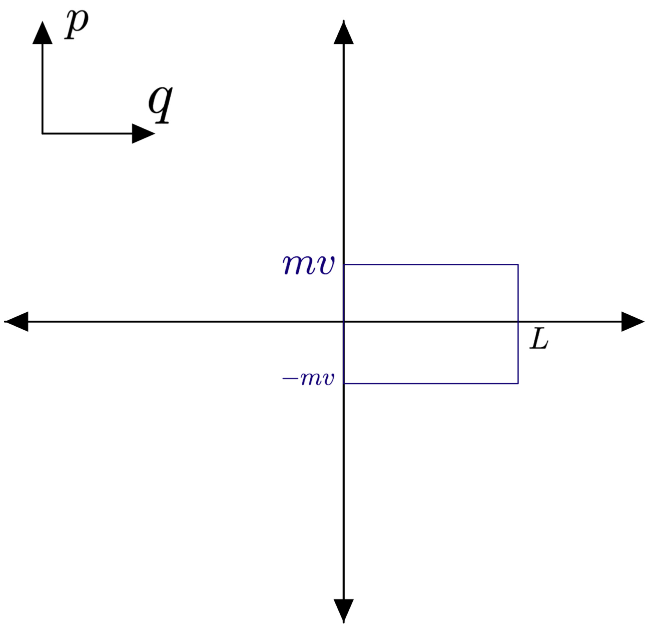

Figura 2: Espacio de fases pelota rebotando

Con esto es sencillo calcular J,

$$J = \frac{1}{2\pi} Area \tag{28}$$

$$J = \frac{1}{2\pi} L2mv \tag{29}$$

$$J = \frac{1}{\pi} mvL \tag{30}$$

Si el cambio es adiabatico, la velocidad crecera como $\frac{1}{L}$.
Esta ecuacion permite modelar la ecuacion de estado de un gas ideal monoatomico metido en una caja usando pavo-raton.

2. Pendulo de longitud variable con pequeñas oscilaciones

$$J = \frac{E}{\omega} = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \theta^2 \tag{31}$$

$$J = m l^2 \sqrt{g} l \theta^2 \tag{32}$$

$$J = m\sqrt{g} \left(l^{\frac{3}{4}} \theta \right)^2 \tag{33}$$

$$\theta_{max} = \frac{1}{l^{\frac{3}{4}}} \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

3. Particula cargada en un campo magnetico uniforme que cambia suavemente

$$\vec{B} = B\hat{z}$$

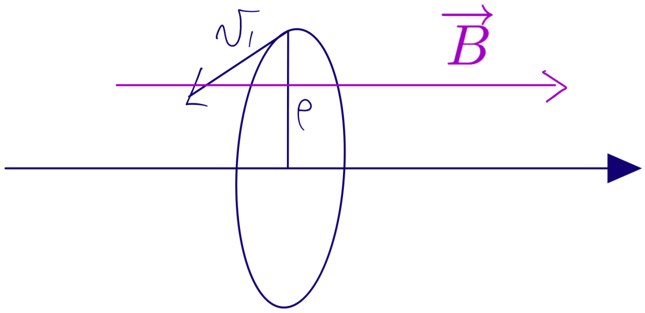

Figura 3: Diagrama de campo magnetico uniforme

$$v_\perp = \frac{qB\rho}{mc} \tag{36}$$

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq \tag{37}$$

$$\vec{p} = \left(m\vec{v} + \frac{\rho}{c}\vec{A}\right) \tag{38}$$

$$J = inv2\pi\oint\left(m\vec{v} + \frac{\rho}{\rho}\vec{A}\right)d\vec{l} \tag{39}$$

$$J = -\rho\frac{B\rho^2}{c} \rightarrow Flujo \tag{40}$$

Como la energía es constante, si esta se mueve por el cambio que varia y se va acercando cada vez mas hacia la parte con mayor densidad. Generado una botella magnético[1].

2. Ecuación de Hamilton-Jacobi

Esta es solo 1 ecuación con n grados de libertad, pero una sola.
Es una ecuacion complicada en derivadas parciales para una función generatriz $F_2(q,p,t)$.
Con un único objetivo, que nos de un Hamiltoniano mas simple posible.

$$\mathcal{H}(q,p,t) \xrightarrow{T.C} \mathcal{H}'(Q,P) = 0 \tag{41}$$

El objetivo es que las nuevas Q y P serán constantes determinadas por sus condiciones iniciales.

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}\Big/ \textit{Notacion: } F_2(Q,P,t) = S(Q,P,t) \tag{42}$$

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \tag{43}$$

$$\boxed{\mathcal{H}(q_1,q_2,\cdots,q_n,\frac{\partial S}{\partial q}_1,\frac{\partial S}{\partial q}_2,\cdots,\frac{\partial S}{\partial q}_n,t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \tag{44}$$

La Funcion que resuelve la Ecuacion de Hamilton-Jacobi se llama Funcion principal de Hamilton (S).

[1]Se trata de usar eso en fusion nuclear. Se ve esto en los cinturones de Van Hallen. En 1911 Lorentz y Einstein se pusieron a discutir sobre el cambio del largo de un pendulo cuántico mediante el mismo principio usado anteriormente y surgió que quizás habría que cuantificar las variables clásicas que no cambian sobre cambios lentos.

Esto fue conocido como la regla de cuantificación de Bohr-Sommerfield.

Ejemplo

Oscilador Armonico

$$\mathcal{H} = \frac{\partial p^2}{\partial 2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \tag{45}$$

Cómo se lee la ecuación de Hamilton-Jacobi?
Donde diga p en el $\mathcal{H}$ reemplazamos por $\frac{\partial S}{\partial q}$.

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{46}$$

La dependencia entre q,t es separable. Con un ansatz veremos $S = W(Q) + T(t)$ es una prueba para ver si es separable.

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{47}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = E \tag{48}$$

$$\therefore -\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = E \implies T(t) = -Et \tag{49}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E \tag{50}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} = \sqrt{2m(E - m\omega^2 q^2)} \tag{51}$$

$$W(q) = \int_0^q \sqrt{2m(E - m\omega^2 q'^2)}\, dq' \tag{52}$$

$$S = W(q) - Et \tag{53}$$

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}q} \;\Big|\; Q = \frac{\partial S}{\partial P} \;\Big|\; \textit{Constante de Integracion}\tilde{N}\; P = E \tag{54}$$

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \frac{\partial S}{\partial E} - \frac{\partial W}{\partial E} - t = \beta \tag{55}$$

$$W(q) = \frac{1}{\omega}\arcsin\sqrt{\frac{m\omega^2}{2E}}q = \omega t + \omega\beta \tag{56}$$

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sin(\omega t + \phi) \tag{57}$$

Esto nos muestra que esta ecuacion nos lleva del Hamiltoniano y nos retrotrae a las condiciones iniciales.Esto se parece mucho a la Ecuacion de Schrodinger.
Esto que vimos de trabajar en variables separables ocurre siempre que el Hamiltoniano sea constante.

2.1. Separacion de variables en la Ecuacion de Hamilton-Jacobi

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n), \textit{independiente} \tag{58}$$

$$\boxed{S = W(q_1, q_2, \cdots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) - Et} \tag{59}$$

Cuando la Ecuación [59] ocurre se llama **Funcion caracteristica de Hamilton**. Particularmente son interesantes cuando la funcion caracteristica tambien sea separable o parcialmente.

1. Es totalmente separable si

$$\boxed{W = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_1, q_2, \cdots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)}$$

Un caso interesante es cuando una de las coordenadas q es cíclica. Si es cíclica, se puede demostrar que esa coordenada se va a separar y se puede escoger como constante a ese valor integrado se escogerá como constante de condición inicial.

$$Mov.Periodico \rightarrow Conviene \quad \theta, J$$

$$P_i = J_i = \frac{1}{2\pi}\oint p_i\, dq_i = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}q_i}\, dq_i$$

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial J_i} = \frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}J_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J_i}t = \theta_i - W_i t \implies \theta_i = W_i + \beta_i \tag{60}$$

Es interesante si elegimos como nuevo momento las variables de acción, se obtienen las condiciones de las variables de ángulo.

Ejemplo

Problema de Keppler

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{k}{r},\ k = Gm_1m_2 \tag{61}$$

$$HJ = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{r^2}{()}(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2\right] - \frac{k}{r} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{62}$$

Ansatz; $S = W_r(r) + W_\theta(\theta) - Et$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{r^2}{()}(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta})^2\right] - Et = 0 \tag{63}$$

$$\frac{r^2}{2m}\left(\frac{\partial W_r}{\partial r}\right)^2 - kr - Er^2 = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}\right)^2 = -\frac{l^2}{2m} \tag{64}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta} = l \implies W_\theta = l\,\theta \tag{65}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \frac{k}{r} - E + \frac{l^2}{2mr^2} = 0 \tag{66}$$

$$W_r = \int_0^r \sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{l^2}{r^2}}\, dr \tag{67}$$

Trayectorias

$$Q_\theta = \beta_\theta = \frac{\partial S}{\partial l} = \theta + \frac{\partial W}{\partial l} = cte \tag{68}$$

$$\theta = \beta_\theta - \frac{\partial W}{\partial l} \rightarrow \theta(r)\,;\, r(\theta) \tag{69}$$

Dependencia temporal:

$$Q_r = \beta_E = cte \tag{70}$$

$$Q_r = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\partial W_r}{\partial E} \tag{71}$$

$$t = \beta_E - \frac{\partial W_e}{\partial E} \to t = t(r) \, : \, r(t) \tag{72}$$

Enfatizar que las ventajas de tener variables de accion en problemas periodicos.

Variables de accion

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint p_\theta \, d\theta = l \tag{73}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S}{\partial r} \, dr = \frac{1}{2\pi} 2 \int\limits_{r-}^{r+} \frac{\mathrm{d}W_r}{\mathrm{d}r} \, dr \tag{74}$$

$$J_r = k \sqrt{\frac{m}{2|E|}} - l \tag{75}$$