Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Fisica
FIS210
2°. Semestre 2021

FIS210: Clase 22

Bastián Castorene[1]
27 de diciembre de 2021
[1] *Estudiante de Licenciatura en Física, Departamento de Física, UTFSM*

1. Tipos de Función Generatriz

1.1. Función Tipo I, q y Q

$$F = F_1(q, Q, t)$$

Incluye a q y Q.

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}$$
$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_1}$$
$$\mathcal{H}` = \mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

1.2. Función Tipo II, q y P

$$F = F_2(q, P, t)$$

Incluye a q y P

$$F_2(q, P, t) = F + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i$$

$$dF_2 = dF + \sum_{i=1}^{n} (P_i dQ_i + Q_i dP_i) = \sum_{i=1}^{n} (p_i dq_i + Q_i dP_i) - (\mathcal{H} - \mathcal{H}')dt \tag{1}$$

$$\tag{2}$$

$$\boxed{p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \;\Big|\; Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \;\Big|\; \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_2}{\partial t}}$$

1.3. Función Tipo III, p y Q

$$F = F_3(p, Q, t) = F - \sum_{i=1}^{n} qip_i \tag{3}$$

$$\boxed{q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \;\Big|\; P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial q_i} \;\Big|\; \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_3}{\partial t}}$$

1.4. Función Tipo IV, p y P

Aqui se tendran que hacer dos transformadas de Legendre.

$$F = F_4(p, P, t) = F + \sum_{i=1}^{n} (Q_i Pi - q_i p_i) \tag{4}$$

$$\boxed{q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \;\Big|\; Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \;\Big|\; \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial F_4}{\partial t}}$$

Estas funciones se pueden usar de 2 maneras.
• Dar una funcion generatriz y eso va a dar una transformacion canonica.
• Dada una transformacion que creemos que es canonica, nos podemos asegurar que lo es **si** encontramos su generatriz.
Se deben mencionar que existen otros metodos de conocer si es canonica, como por ejemplo con corchetes de poisson. Osea, no es impresindible. Pero a veces ayuda a plantear ciertos parametros.

Ejemplo

$$F = F_2(q, P) = -\frac{P}{q} \tag{5}$$

$$\implies p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \frac{P}{q^2} \tag{6}$$

$$\implies Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = -\frac{1}{q} \tag{7}$$

$$\boxed{p = -\frac{P}{q^2} \;\Big|\; Q = -\frac{1}{q} \;\Big|\; \mathcal{H}' = \mathcal{H}}$$

Ejemplo

$$Q = \ln\left(\frac{p}{q}\right) \;\Big|\; P = -\frac{p}{q}\left(\frac{q^2}{2} + 1\right) \tag{8}$$

Buscamos una $F_1(q, Q)$

$$p = q\mathrm{e}^{(Q)} \;\Big|\; p = \frac{\partial F_1}{\partial q} \tag{9}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial q} = q\mathrm{e}^{(Q)} \implies F_1 = \int q\mathrm{e}^{(Q)}\, dq \tag{10}$$

$$F_1 = \frac{q^2}{2}\mathrm{e}^{(Q)} + h(Q) \tag{11}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = -\frac{q^2}{2}\mathrm{e}^{(Q)} + h'(Q) \tag{12}$$

$$P = -\frac{p}{q}\left(\frac{q^2}{2} + 1\right) = -\mathrm{e}^{(Q)}\left(\frac{q^2}{2} + 1\right) \tag{13}$$

$$-\mathrm{e}^{(Q)}\left(\frac{q^2}{2} + 1\right) = -\frac{q^2}{2}\mathrm{e}^{(Q)} + h'(Q) \tag{14}$$

$$\therefore h'(Q) = \mathrm{e}^{(Q)} \implies hQ = \mathrm{e}^{(Q)} \tag{15}$$

$$\boxed{F_1 = -\frac{q^2}{2}\mathrm{e}^{(Q)} + \mathrm{e}^{(Q)}}$$

En resumen, empezamos con una transformacion, pero como fuimos capaces de encontrar la generatriz automaticamente es canonica.

Ejemplo

$$\frac{p^2}{2m} = J\omega\cos^2(\theta) \;\Big|\; \frac{k}{2}q^2 = J\omega\sin^2(\theta) \tag{16}$$
$$q, p \to \theta, J \tag{17}$$
$$p = \sqrt{2m\omega J\cos^2(\theta)} \;\Big|\; q = \sqrt{\frac{2J}{m\omega}}\sin(\theta) \tag{18}$$
$$Buscamos\ F_1(q,\theta) \tag{19}$$
$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}\Big/ dividimos\, p\, y\, q \tag{20}$$
$$\frac{p}{q} = mv\cot\theta \tag{21}$$
$$p = qmv\cot\theta \Big/ \int dq \tag{22}$$
$$F_1 = \frac{q^2}{2}mv\cot\theta + h(\theta) \tag{23}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial\theta} = \frac{q^2}{2}mv\frac{1}{\sin^2(\theta)} + h'(\theta) \tag{24}$$
$$\frac{q^2}{2}mv\frac{1}{\sin^2(\theta)} + h'(\theta) = \frac{m\omega}{2\sin^2(\theta)}q^2 \implies h'(\theta) = 0 \tag{25}$$

$$\boxed{F_1 = \frac{q^2}{2}mv\cot\theta}$$

$$\boxed{Si\,\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \omega^2 q^2 \implies \omega J}$$

Es interesante ver que encontrar la Generatriz para las variables angulos accion y encontrar un metodo para hallarlas.

2. Condiciones Directas para saltarnosla Generatriz

Derivando las relaciones ya conocidas.
F_1

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial}{\partial Q_j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}(-P_j) = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial P_i}{\partial q_i} \tag{26}$$
$$\tag{27}$$

$$\boxed{\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_i}{\partial q_i}}$$

Todo esto se repite para F_2, F_3, F_4 obteniendo lo siguiente

$$\boxed{\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i} \;\Big|\; \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \;\Big|\; \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \;\Big|\; \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}} \tag{28}$$

Con estas relaciones bastan y sobran con verificar un par para que la transformacion es canónica sin pasar por la generatriz.

3. Relación de corchetes de Poisson y transformaciones canónicas.

Esta es la definición del Corchete de Poisson[1]. Estos corchetes seran sumamente util

$$[f, g] \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{29}$$

Corchetes de Poisson elementales:

$$[f, g] = -[g, f] \tag{30}$$
$$[f, c] = 0 \tag{31}$$
$$[c_1 f_1 + c_2 f_2, g] = c_1 [f_1, g] + c_2 [f_2, g] \tag{32}$$
$$[f_1 f_2, g] = [f_1, g] f_2 + f_1 [f_2, g] \tag{33}$$
$$[f, q_a] = \frac{\partial f}{\partial p_a}, \quad [f, p_a] = -\frac{\partial f}{\partial q_a} \tag{34}$$
$$[q_a, q_b] = 0, \quad [p_a, p_b] = 0, \tag{35}$$
$$[p_a, q_b] = \delta_{ab}, \begin{cases} 1 \; si \;\; i = j \\ 0 \; si \;\; i \neq j \end{cases} \tag{36}$$
$$[[f, g], h] + [[h, f], g] + [[gh], f] = 0 \tag{37}$$

Algunas nociones muy utiles:

$$[Q_i, P_j]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_i}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \tag{38}$$

Gracias a las ecuaciones de la Ecuación [28] podemos reemplazar en la Ecuacion anterior, porque estas son canonicas:

$$[Q_i, P_j]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\cancelto{\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}}{\frac{\partial P_i}{\partial p_k}} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\cancelto{-\frac{\partial p_k}{\partial Q_j}}{\frac{\partial P_i}{\partial q_k}} \right) \tag{39}$$

$$[Q_i, P_j]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial Q_j} + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial Q_j} \right) \tag{40}$$
$$\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}Q_j} = \delta_{ij}$$

[1] Poisson fue un matemático Francés que estudiaba en la Politecnica cuando Legendre era profesor. Su primer paper fue a los 18 años y fue un matematica prolijo, existen derivadas, integrales y distribuciones estadisticas asociados a él. Y sus famosos corchetes de Poisson.

$\therefore$ Esta es otra forma de comprobar si una transformación es canonica.

$$\boxed{[Q_i, P_j]_{q,p} = \delta_{ij}}$$

Existe otra propiedad interesante que relacion las coordenadas originales con las nuevas. Es decir, da lo mismo cuales coordenadas y momentos generalizados uses, darán lo mismo si son canónicas.

$$\boxed{[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,p}}$$

4. Transformación canónica Infinitesimal

Basicamente, llevar el Teorema de Noether a otras perspectivas. Y nos permite una interpretación distinta e interesante.
Usaremos una F_2 solo para empezar, pueden usar cualquiera.

$$F_2(q, P) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (q_i P_i)}_{Identidad} + \epsilon\, G(q, p, t), \quad \epsilon << 1 \tag{41}$$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \implies \boxed{P_i = p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}} \tag{42}$$

$$Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \approx q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \tag{43}$$

$$\frac{\partial G}{\partial P_i} = \frac{\partial G}{\partial p_i} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{44}$$

Estos cuadros resumen que condiciones deben cumplirse para que una. transformación infinitesimal sea canónica.

$$\boxed{P_i = p_i = -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \;\Big|\; Q_i = q_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}}$$

G es la generatriz de la transformacion canonica infinitesimal.

4.1. Evolución Temporal Infinitesimal

Elegimos

$$G = \mathcal{H}, \ \epsilon = dt \tag{45}$$

$$Q_i = q_i + dt \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}}_{\dot{q}_i} \tag{46}$$

$$Q_i = q_i + \dot{q}_i dt \Big/ \textit{Hacemos Taylor a primer orden} \tag{47}$$

$$Q_i(t) = q_i(t + dt) + \cancel{\mathcal{O}(t^2)} \tag{48}$$

$$P_i = p_i - dt \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right) \tag{49}$$

$$P_i = p_i - \dot{p}_i dt \tag{50}$$

$$\boxed{Q_i(t) = q_i(t+dt) \mid P_i(t) = p_i(t+dt)}$$

La evolución temporal es una transformación canónica generada por el $\mathcal{H}$. Si esto es posible, entonces existe la inversa, que nos lleve del valor en cada tiempo a las condiciones iniciales.

5. Teorema de Liouville

Liouville demostró una propiedad fundamental del espacio de fases, hace la siguiente afirmación.

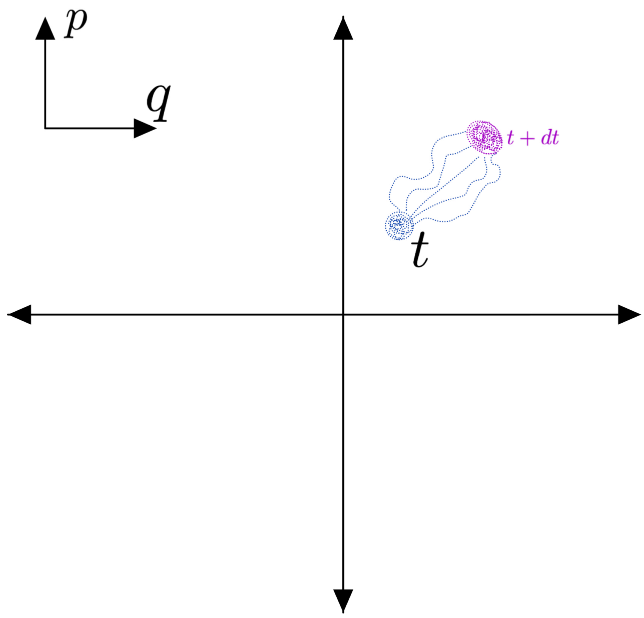

Figura 1: Representación del Teorema de Liouville

Existe una densidad de estados en el espacio de fases $\rho = \frac{N}{\Gamma}$ es decir, la cantidad de estados iniciales dividido en el volumen en el espacio de fases. Cualquier transformación canónica mantiene el valor del volumen del espacio de fases como muestra la Figura [1]. Entonces,

Teorema 5.0.1. *La densidad de estados en el espacio de fases se mantiene constante ante la evolución temporal.*

Ejemplo

5.1. Analogía con un fluido incompresible

Sea $\vec{u}$ un campo de velocidad,

$$\vec{u} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \cdots, \dot{p}_n) \tag{51}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2} + \cdots \frac{\partial \dot{p}_n}{\partial q_n} \right) \tag{52}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \,\Big|\, \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \tag{53}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial \dot{q}_2}{\partial q_2} + \cdots + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} + \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_2} + \cdots \frac{\partial \dot{p}_n}{\partial q_n} \right) \tag{54}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} + \cdots - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} \cdots \right) \tag{55}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} + \cdots - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} \cdots \right) \tag{56}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \tag{57}$$

Este es el teorema de Liouville que se demuestra mediante el formalismo Hamiltoniano.

6. Corchetes de Poisson, Leyes del movimiento y de conservación

$$Sea\, f(q, p, t) \tag{58}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p} \right) \tag{59}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cancelto{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}}{\dot{q}_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \cancelto{-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}}{\dot{p}_i} \right) \tag{60}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, \mathcal{H}]}$$

Esta ecuación es muy importante, porque nos permite escribir de otra forma la formulación Hamiltoniana. Y cualquier función de las variables dinámicas del sistema cumple con esta ecuación.
f es constante de movimiento si

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial t} = -[f, \mathcal{H}] \tag{61}$$

En particular, si la funcion no depende explicitamente del tiempo, entonces:

$$Si\, \frac{\partial f}{\partial t} = 0,\ f = f(q, p) \implies \boxed{[f, \mathcal{H}] = 0} \tag{62}$$

Si esto se cumple es constante de movimiento.

Corollary 6.0.0.1. *Si f_1 y. f_2 son constantes de movimiento $\implies$ $[f_1, f_2]$ también es constante de movimiento. Esto se demuestra mediante la Identidad de Jacobi.*

$$\boxed{[f_1, [f_2, f3]] + [f_2, [f_3, f_1]] + [f_3, [f_1, f_2]] = 0}$$