Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Fisica
FIS210
2°. Semestre 2021

FIS210: Certamen 3

Bastián Castorene[1]

29 de diciembre de 2021

[1] *Estudiante de Licenciatura en Física, Departamento de Física, UTFSM*

a

1. Pendulo conectado a un bloque en plano inclinado

Como el pendulo se halla colgando del bloque en un plano inclinado con un angulo θ. Consideraremos como coordenada x al eje del plano inclinado y otra coordenada en funcion del largo L. En este caso, lo que varia es la coordenada θ y el angulo α es una constante.

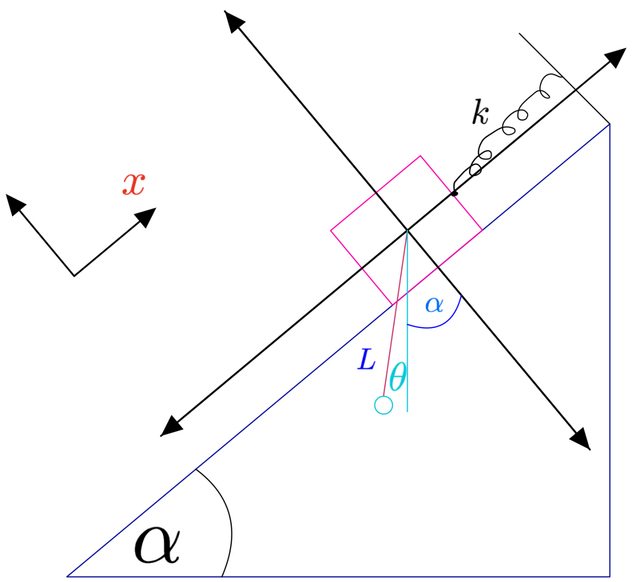

Figura 1: Diagrama de Problema 1 con Coordenadas x e L

Con lo cual si definimos las coordenadas generalizadas tenemos:

$$(x, l): \ (x + L\sin(\theta+\alpha), \ L - L\cos(\theta+\alpha)) \tag{1}$$

$$(\dot{x}, 0): \ (\dot{x} + \dot{\theta}L\cos(\theta+\alpha), \ \dot{\theta}L\sin(\theta+\alpha)) \tag{2}$$

Con esto la energía cinetica y potencial del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\Big(\dot{x}^2 + L\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}L\cos(\theta+\alpha)\Big) \tag{3}$$

$$U = MgL + mgL(1-\cos(\theta+\alpha)) + \frac{1}{2}kx^2 \tag{4}$$

Escribimos la energia cinetica en terminos de los momentos asociados a las coordenadas.

$$T = \frac{1}{2M}p_x^2 + \frac{1}{2m}\big(p_x^2 + Lp_\theta^2 + 2p_xp_\theta L\cos(\theta+\alpha)\big) \tag{5}$$

$$U = MgL + mgL(1-\cos(\theta+\alpha)) + \frac{1}{2}kx^2 \tag{6}$$

Con esto si la coordenada $x \to q_1$ con $p_x p_1$ y $\theta \to q_2$ con $p_\theta \to p_2$ el Hamiltoniano del sistema es:

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2M}p_1^2 + \frac{1}{2m}\big(p_1^2 + Lp_2^2 + 2p_1p_2L\cos(q_2+\alpha)\big) + MgL + mgL(1-\cos(q_2+\alpha)) + \frac{1}{2}kq_1^2}$$

Ahora podemos obtener las ecuaciones de Hamilton correspondientes aplicando el corchete de Poisson al hamiltoniano tal como muestra el codigo ($ec1.nb$).

$$\boxed{\dot{q_1} = [q_1, \mathcal{H}] = \frac{p1}{M} + \frac{p_1 + Lp_2\cos(q2+\alpha)}{m} \;\Big|\; \dot{p_1} = -kq_1} \tag{7}$$

$$\boxed{\dot{q_2} = \frac{Lp_2 + Lp_1\cos(q2+\alpha)}{m} \;\Big|\; \dot{p_2} = -gLm\sin(q_2+\alpha) + \frac{Lp_1p_2\sin(q_2+\alpha)}{m}} \tag{8}$$

Podemos aproximar para pequeñas oscilaciones a primer orden las funciones trigonometricas, ya que nuestras coordenadas y momentos generalizados son pequeños.

$$\dot{q_1} = \frac{p1}{M} + \frac{p_1 + Lp_2(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)q_2)}{m} \;\Big|\; \dot{p_1} = -kq_1 \tag{9}$$

$$\dot{q_2} = \frac{Lp_2 + Lp_1(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)q_2)}{m} \;\Big|\; \dot{p_2} = -gLm(\sin\alpha + \cos(\alpha)q_2) + \frac{Lp_1p_2(\sin\alpha + \cos(\alpha)q_2)}{m} \tag{10}$$

2. Problema 2

Se realizaron los corchetes de Poisson en el archivo ($ec1.nb$)de $[P1, Q1]$ obteniendo que esto vale $-\alpha\beta$ junto a esto se hicieron con $[P2, Q2]$ obteniendo $-\alpha\beta$.Como estos deben valer -1 se tiene:

$$\alpha = \beta \therefore \textit{Estos pueden valer por ejemplo: } \alpha = 1 \implies \beta = 1$$

Para armar la Generatriz podemos despejar q_1 y q_2 de sus Q's.

$$q_2 = Q_2\cos(p_2) \tag{11}$$

$$q_1 = \sqrt{Q_1} \tag{12}$$

$$\textit{Esto perfectamente puede ser una generatriz } F_3 \tag{13}$$

$$q_2 = Q_2\cos(p_2) = -\frac{\partial F_3}{\partial p_2} \tag{14}$$

$$q_1 = \sqrt{Q_1} = -\frac{\partial F_3}{\partial p_1} \tag{15}$$

$$\textit{Podemos reemplazar q1 y q2 en P1} \tag{16}$$

$$P_1 = \frac{p_1\cos(p_2) - 2Q_2\cos(p_2)}{2\sqrt{Q_1}p_2} = \frac{p_1 - 2Q_2}{2\sqrt{Q_1}} = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_1} \tag{17}$$

$$\textit{Se puede reemplazar q1 y q2 en P2 como se hizo antes} \tag{18}$$

$$P_2 = \sin(p_2) - 2\sqrt{Q_1} = \frac{\partial F_3}{\partial Q_2} \tag{19}$$

Ahora se puede hacer el metodo de variables separables e integrar la primera ecuacion, luego derivarla e igualarla a la siguiente para ir encontrando las constantes. Con esto tenemos que:

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}p_1 + h \bigg/ \frac{\partial}{\partial p_2} \tag{20}$$

$$Q_2 \cos(p_2) = -\frac{\partial h}{\partial p_2} \implies h = -Q_2 \sin(p_2) + t \tag{21}$$

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}p_1 - Q_2 \sin(p_2) + t \bigg/ \frac{\partial}{\partial Q_1} \tag{22}$$

$$\frac{p_1}{2\sqrt{Q_1}} + \frac{\partial t}{\partial Q_1} = p_1 \sin(p_2) - 2Q_2 \sin(p_2) 2\sqrt{Q_1}p_2 \implies t = 2\sqrt{Q_1}Q_2 + k \tag{23}$$

$$F_3 = -\sqrt{Q_1}p_1 - Q_2 \sin(p_2) + 2\sqrt{Q_1}Q_2 + k \bigg/ \frac{\partial}{\partial Q_2} \tag{24}$$

$$\sin(p_2) - 2\sqrt{Q_1} + k' = \sin(p_2) - 2\sqrt{Q_1} \implies k = cte \tag{25}$$

$$\boxed{F = -\sqrt{Q_1}p_1 - Q_2 \sin(p_2) + 2\sqrt{Q_1}Q_2 + C} \tag{26}$$