Výroková a predikátová logika

Algoritmy pro:

2-SAT

- Výrok je v k-CNF, je-li v CNF a každá jeho klauzule má nejvýše k literálu˚.
- k-SAT je následující problém (pro pevné k > 0)
  - INSTANCE: Výrok ϕ v k-CNF.
  - OTÁZKA: Je ϕ splnitelný?

2-SAT lze ˇrešit v lineárním ˇcase (vzhledem k délce ϕ).

Tvrzení
Rozklad orientovaného grafu (V,E) na silnˇe souvislé komponenty lze nalézt v ˇcaseO(|V|+|E|).

- Orientovaný graf G je silnˇe souvislý, pokud pro každé dva vrcholy u a v existují v G orientované cesty jak z u do v, tak i z v do u.
- Silnˇe souvislá komponenta grafu G je maximální silnˇe souvislý podgraf G.

Implikaˇcní graf výroku ϕ v 2-CNF je orientovaný graf Gϕ, v nˇemž vrcholy jsou promˇenné výroku ϕ nebo jejich negace, klauzuli l1 ∨l2 výroku ϕ reprezentujeme dvojicí hran l1 →l2, l2 →l1, klauzuli l1 výroku ϕ reprezentujeme hranou l1 →l1.

Tvrzení
ϕ je splnitelný, právˇe když žádná silnˇe souvislá komponenta v Gϕ neobsahuje dvojici opaˇcných literálu˚.

Du˚kaz
Každé splˇnující ohodnocení ohodnotí všechny literály ze stejné komponenty stejnˇe. Implikace zleva doprava tedy platí.

Naopak, oznaˇcme G∗ ϕ graf vzniklý z Gϕ kontrakcí silnˇe souvislých komponent.

Pozorování G∗ ϕ je acyklický, má tedy topologické uspoˇrádání <.

- Orientovaný graf je acyklický, neobsahuje-li orientovaný cyklus.
- Lineární uspoˇrádání < vrcholu˚ orientovaného grafu je topologické, pokud p < q pro každou hranu z p do q.

Nyní pro každou komponentu v rostoucím poˇradí dle <, nejsou-li její literály dosud ohodnocené, nastav je na 0 a literály v opaˇcné komponentˇe na 1.

Zbývá ukázat, že takto získané ohodnocení v splˇnuje ϕ. Kdyby ne, existovaly by v G∗ ϕ hrany p →q a q →p s v§ = 1 a v(q) = 0. To je ve sporu s poˇradím nastavení komponent na 0 resp. 1, nebot’ p < q a q < p.

Du˚sledek 2-SAT je ˇrešitelný v lineárním ˇcase.

Horn-SAT (dukaz korektnosti).

Horn-SAT

- Jednotková klauzule je klauzule obsahující jediný literál,
- Hornova klauzule je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál,
  $\neg p1 \vee \cdots \vee \neg pn \vee q \sim (p1 \wedge \cdots \wedge pn) \rightarrow q$
- Hornu˚v výrok je konjunkcí Hornových klauzulí,
- Horn-SAT je problém splnitelnosti daného Hornova výroku.

Algoritmus
(1) obsahuje-li ϕ dvojici jednotkových klauzulí l a l, není splnitelný,
(2) obsahuje-li ϕ jednotkovou klauzuli l, nastav l na 1, odstraˇn všechny klauzule obsahující l, odstraˇ n l ze všech klauzulí a opakuj od zaˇcátku,
(3) neobsahuje-li ϕ jednotkovou klauzuli, je splnitelný ohodnocením 0 všech zbývajících promˇenných.

Krok (2) se nazývá jednotková propagace.

Jednotková propagace
Pozorování
Nechtʼ ϕl je výrok získaný z ϕ jednotkovou propagací. Pak ϕl je splnitelný, právˇe když ϕ je splnitelný.

Du˚sledek
Algoritmus je korektní (ˇreší Horn-SAT).

Du˚kaz
Korektnost 1. kroku je zˇrejmá, v 2. kroku plyne z pozorování, v 3.kroku díky Hornovˇe tvaru, nebotʼ každá zbývající klauzule obsahuje negativní literál.

Poznámka
Pˇrímoˇcará implementace vyžaduje kvadratický ˇcas, pˇri vhodné reprezentaci v pamˇeti lze dosáhnout lineárního ˇcasu (vzhledem k délce ϕ).

Tablo metoda ve VL:

syst. tablo

(dokoncenost, kon. dukazu)

Systematické tablo - dokonˇcenost
Tvrzení
Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ dokonˇcené.

Du˚kaz

- Necht' $\tau = \bigcup \tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\phi_0, \phi_1, \ldots\}$ s R v ko˘reni.
- Je-li v˘etev v τ bezesporná, je i každý její prefix v τ_n bezesporný.
- Je-li položka P neredukovaná na v˘etvi v τ, je neredukovaná na každém jejím prefixu v τ_n (na n˘emž leží).
- Do úrovn˘e každé položky P (v˘cetn˘e její) je v τ jen kone˘cn˘e položek.
- Kdyby P byla neredukovaná na n˘ejaké bezesporné v˘etvi τ, p˘rišla by na ní ˘rada v n˘ejakém kroku (2) a byla by zredukována krokem (3).
- Každá $\phi_n \in T$ bude dle (4) nejpozd˘eji v τ_{n+1} na každé bezesporné v˘etvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokon˘cené v˘etve.

Kone˘cnost du˚kazu˚
Lemma (König)
Každý nekone˘cný, kone˘cn˘e v˘etvící se strom obsahuje nekone˘cnou v˘etev.

Tvrzení
Je-li $\tau = \bigcup \tau_n$ sporné tablo, je τ_n sporné kone˘cné tablo pro n˘ejaké n.

Du˚kaz

- Necht' S je množina vrcholu˚ stromu τ, jenž nad sebou neobsahují spor, tj. mezi p˘redky nemají dvojici Tϕ, Fϕ pro žádné ϕ.
- Kdyby S byla nekone˘cná, dle Königova lemmatu by podstrom τ na vrcholech S obsahoval nekone˘cnou v˘etev, tedy by τ nebylo sporné tablo.
- Jelikož je S kone˘cné, všechny vrcholy z S leží do úrovn˘ e m pro n˘ejaké m.
- Tedy každý vrchol v úrovni $m + 1$ má nad sebou spor. Zvolme n tak, že τ_n se shoduje s τ do úrovn˘ e $m + 1$. Pak každá v˘etev v τ_n je sporná.
-

Du˚sledek
Je-li systematické tablo τ du˚kazem (z teorie T), je τ kone˘cné.
Du˚kaz
P˘ri jeho konstrukci se prodlužují jen bezesporné v˘etve.

korektnost

Korektnost
˘ Rekneme, že položka P se shoduje s ohodnocením v, pokud P je Tϕ a $v(\phi) = 1$ nebo pokud P je Fϕ a $v(\phi) = 0$. V˘etev V tabla se shoduje s v, shoduje-li se s v každá položka na V.

Lemma
Necht' v je model teorie T, který se shoduje s položkou v ko˘reni tabla $\tau = \bigcup \tau_n$ z T. Pak v tablu τ existuje v˘etev shodující se s v.

Du˚kaz Indukcí nalezneme posloupnost $V_0, V_1, \ldots$ takovou, že pro každé n je V_n v˘etev v τ_n shodující se s v a V_n je obsažena ve V_{n+1}.

- Ov˘ e˘rením atomických tabel snadno zjistíme, že základ indukce platí.
- Pokud τ_{n+1} vznikne z τ_n bez prodloužení V_n, položme $V_{n+1} = V_n$.

- Vznikne-li $\tau n+1$ z τn pˇripojením Tϕ k Vn pro nˇejaké $\phi \in$T, nechtʼ Vn+1 je tato vˇetev. Jelikož v je model ϕ, shoduje se Vn+1 s v.
- Jinak $\tau n+1$ vznikne z τn prodloužením Vn o atomické tablo nˇejaké položky P na Vn. Jelikož se P shoduje s v a tvrzení platí pro atomická tabla, lze požadovanou vˇetev Vn+1 v $\tau n+1$ nalézt.

Vˇeta
Pro každou teorii T a formuli ϕ, je-li ϕ tablo dokazatelná z T, je ϕ pravdivá v T, tj. T |- $\phi \Rightarrow$ T |= ϕ.

Du˚kaz

- Nechtʼ ϕ je tablo dokazatelná z teorie T, tj. existuje sporné tablo τ s položkou Fϕ v koˇreni.
- Pro spor pˇredpokládejme, že ϕ není pravdivá v T, tj. existuje model v teorie T, ve kterém ϕ neplatí (protipˇríklad).
- Jelikož se položka Fϕ shoduje s v, dle pˇredchozího lemmatu v tablu τ existuje vˇetev shodující se s v.
- To ale není možné, nebotʼ každá vˇetev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici Tψ, Fψ pro nˇejaké ψ.

úplnost

Ukážeme, že bezesporná vˇetev v dokonˇceném tablu poskytuje protipˇríklad.
Lemma
Nechtʼ V je bezesporná vˇetev dokonˇceného tabla τ. Pro následující ohodnocení v výrokových promˇenných platí, že V se shoduje s v.
v§ =(1 pokud se Tp vyskytuje na V 0 jinak

Du˚kaz Indukcí dle struktury formule v položce vyskytující se na V.

- Je-li položka Tp na V, kde p je prvovýrok, je v§ = 1 dle definice v.
- Je-li položka Fp na V, není Tp na V, jinak by V byla sporná, tedy v§ = 0 dle definice v.
- Je-li T($\phi \wedge \psi$) na V, je Tϕ a Tψ na V, nebotʼ τ je dokonˇcené. Dle indukˇcního pˇredpokladu je v(ϕ) = v(ψ) = 1, tedy v($\phi \wedge \psi$) = 1.
- Je-li F($\phi \wedge \psi$) na V, je Fϕ nebo Fψ na V, nebotʼ τ je dokonˇcené. Dle indukˇcního pˇredpokladu je v(ϕ) = 0 nebo v(ψ) = 0, tedy v($\phi \wedge \psi$) = 0.
- Pro ostatní spojky obdobnˇe jako v pˇredchozích dvou pˇrípadech.

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je i úplná.

Vˇeta
Pro každou teorii T a formuli ϕ, je-li ϕ pravdivá v T, je ϕ tablo dokazatelná z T, tj. T |= $\phi \Rightarrow$ T |- ϕ.

Du˚kaz Nechtʼ ϕ je pravdivá v T. Ukážeme, že libovolné dokonˇcené tablo (napˇ r. systematické) τ z teorie T s položkou Fϕ v koˇreni je sporné.

- Kdyby ne, nechtʼ V je nˇejaká bezesporná vˇetev tabla τ.
- Dle pˇredchozího lemmatu existuje ohodnocení v prvovýroku˚ takové, že V se shoduje s v, speciálnˇe s Fϕ, tj. v(ϕ) = 0.
- Jelikož vˇetev V je dokonˇcená, obsahuje Tψ pro každé $\psi \in$T.
- Tedy v je modelem teorie T (nebotʼ vˇetev V se shoduje s v).
- To je ale ve sporu s tím, že ϕ platí v každém modelu teorie T.

Tedy tablo τ je du˚kazem ϕ z T.

Veta o kompaktnosti VL

Vˇeta
Teorie má model, právˇe když každá její koneˇcná ˇcást má model.

Du˚kaz 1
Implikace zleva doprava je zˇrejmá. Pokud teorie T nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný ⊥ systematickým tablem τ. Jelikož je τ koneˇcné, je ⊥ dokazatelný z nˇejaké koneˇcné T0 ⊆T, tj. T0 nemá model.
Poznámka Tento du˚kaz je založen na koneˇcnosti du˚kazu, korektnosti a úplnosti. Uved'me ještˇe druhý, pˇrímý du˚kaz (pomocí Königova lemmatu).

Du˚kaz 2
Necht' T = {ϕi |i ∈N}. Uvažme strom S na koneˇcných binárních posloupnostech σ uspoˇrádaných prodloužením. Pˇ riˇcemž σ ∈S, právˇe když existuje ohodnocení v prodlužující σ takové, že v |= ϕi pro každé i ≤lth(σ).

Pozorování
S má nekoneˇcnou vˇetev, právˇe když T má model. Jelikož{ϕi |i ∈n}⊆T má model pro každé n ∈N, bude každá úroveˇn v S neprázdná. Tedy S je nekoneˇcný, navíc binární, a dle Königova lemmatu obsahuje nekoneˇcnou vˇetev.

její dusledky.

Graf (V,E) je k-obarvitelný, pokud existuje c: V →k takové, že c(u) 6= c(v) pro každou hranu{u,v}∈E.

Vˇeta
Spoˇcetnˇe nekoneˇcný graf G = (V,E) je k-obarvitelný, právˇe když každý jeho koneˇcný podgraf je k-obarvitelný.

Du˚kaz
Implikace zleva doprava je zˇrejmá. Necht' každý koneˇcný podgraf v G je k-obarvitelný.
Vezmˇeme P = {pu,i |u ∈V,i ∈k}a teorii T s axiomy pu,0 ∨···∨pu,k−1 pro všechna u ∈V, ¬(pu,i ∧pu,j) pro všechna u ∈V,i < j < k, ¬(pu,i ∧pv,i) pro všechna{u,v}∈E,i < k.
Platí, že G je k-obarvitelný, právˇe když T má model. Dle vˇety o kompaktnosti staˇcí dokázat, že každá koneˇcná T0 ⊆T má model. Necht' G0 je podgraf na vrcholech u takových, že pu,i se vyskytuje v T0 pro nˇejaké i. Jelikož G0 je k-obarvitelný dle pˇredpokladu, má T0 model.

Rezoluce ve VL:

korektnost

Vˇeta (korektnost)
Je-li S rezolucí zamítnutelná, je S nesplnitelná.

Du˚kaz
Necht’ S |-R □. KdybyV |= S pro nˇejaké ohodnoceníV, z korektnosti rezoluˇcního pravidla by platilo iV |= □, což není možné.

úplnost

Vˇeta
Je-li koneˇcná S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná, tj. S |-R □.

Du˚kaz Indukcí dle poˇctu promˇenných v S ukážeme, že S |-R □.

- Nemá-li nesplnitelná S žádnou promˇennou, je S = {□}a tedy S |-R □,
- Necht’ l je literál vyskytující se v S. Dle lemmatu, Sl a Sl jsou nesplnitelné.
- Jelikož Sl a Sl mají ménˇe promˇenných než S, dle indukˇcního pˇredpokladu existují rezoluˇcní stromy Tl a Tl pro odvození □ z Sl resp. Sl.
- Je-li každý list Tl z S, je Tl rezoluˇcním stromem □ z S, tj. S |-R □.
- Pokud ne, doplnˇením literálu l do každého listu, jenž není z S, (a do všech vrcholu˚ nad ním) získáme rezoluˇcní strom{l}z S.
- Obdobnˇe získáme rezoluˇcní strom{l}z S doplnˇením l ve stromu Tl,
- Rezolucí jejich koˇrenu˚{l}a{l}získáme rezoluˇcní strom □ z S.

Du˚sledek
Je-li S nesplnitelná, je rezolucí zamítnutelná, tj. S |-R □.

Du˚kaz
Plyne z pˇredchozího užitím vˇety o kompaktnosti.

LI-rezoluce (úplnost pro Horn. formule)

Rezoluˇcní metodu mu˚žeme znaˇcnˇe omezit (bez ztráty úplnosti).

- Lineární du˚kaz (rezolucí) klauzule C z formule S je koneˇcná posloupnost dvojic (C0,B0),...,(Cn,Bn) taková, že C0 ∈S a pro každé i ≤n i) Bi ∈S nebo Bi = Cj pro nˇejaké j < i, a ii) Ci+1 je rezolventa Ci a Bi, kde Cn+1 = C.
- C0 zveme poˇcáteˇcní klauzule, Ci centrální klauzule, Bi boˇcní klauzule.
- C je lineárnˇe dokazatelná z S, psáno S |-L C, má-li lineární du˚kaz z S.
- Lineární zamítnutí S je lineární du˚kaz □ z S.
- S je lineárnˇe zamítnutelná, pokud S |-L □.

Pozorování
Je-li S lineárnˇe zamítnutelná, je S nesplnitelná.

Du˚kaz
Každý lineární du˚kaz lze transformovat na (korektní) rezoluˇcní du˚kaz.

Poznámka
Platí i úplnost, tj. je-li S nesplnitelná, je S lineárnˇe zamítnutelná.

Vˇeta
Je-li Hornova T splnitelná a T ∪{G}nesplnitelná pro cíl G, lze □ odvodit LI-rezolucí z T ∪{G}zaˇcínající G.

Du˚kaz Dle vˇety o kompaktnosti mu˚žeme pˇredpokládat, že T je koneˇcná.

- Postupujeme indukcí dle poˇctu promˇenných v T.
- Dle pozorování, T obsahuje fakt{p}pro nˇejakou promˇennou p.
- Dle lemmatu je T0 = (T ∪{G})p = Tp ∪{Gp}nesplnitelná, pˇ riˇcemž Gp = G{p}.
- Je-li Gp = □, je G = {p}a tedy □ je rezolventa G a{p}∈T.
- Jinak, jelikož Tp je splnitelná (stejným ohodnocením, které splˇnuje T) a má ménˇe promˇenných, dle indukˇcního pˇredpokladu lze □ odvodit LI-rezolucí z T0 zaˇcínající Gp.
- Doplnˇením literálu p do všech listu˚, jež nejsou v T ∪{G}, a všech vrcholu˚ pod ním získáme LI-odvození{p}z T ∪{G}zaˇcínající v G.
- Závˇereˇcnou rezolucí pomocí faktu{p}∈T získáme □.

Sémantika PL:

veta o konstantách

Vˇeta
Necht’ ϕ je formule jazyka L s volnými promˇennými x1,...,xn a T je teorie jazyka L. Oznaˇcme L0 rozšíˇrení L o nové konstantní symboly c1,...,cn a T0 teorii T nad jazykem L0. Pak
T |= ϕ právˇe když T0 |= ϕ(x1/c1,...,xn/cn).

Du˚kaz
(⇒) Je-liA0 model teorie T0, necht’Aje reduktA0 na L. Jelikož A|= ϕ[e] pro každé ohodnocení e, platí i
A|= ϕ[e(x1/cA0 1 ,...,xn/cA0 n)], tj. A0 |= ϕ(x1/c1,...,xn/cn).
(⇐) Je-liAmodel teorie T a e ohodnocení, necht’A0 je expanzeAna L0 o konstanty cA0 i = e(xi) pro všechna i.
JelikožA0 |= ϕ(x1/c1,...,xn/cn)[e0] pro libovolné ohodnocení e0, platí i
A0 |= ϕ[e(x1/cA0 1 ,...,xn/cA0 n)], tj. A|= ϕ[e].

vlastnosti otevrených teorií !!!

Veta o dedukci !!!

T,p |- q <=> T |- p => q

(tabla)

Tablo metoda v PL: !!!

syst. tablo

(dokon., kon. dukazu)

význam axiomu rovnosti

korektnost

kanonický model

(s rovností)

úplnost

Löwenheim-Skolemova veta.

Vˇeta
Každá bezesporná teorie T spoˇcetného jazyka L bez rovnosti má spoˇcetnˇe nekoneˇcný model.

Du˚kaz
Necht' τ je systematické tablo z T s F⊥v koˇreni. Jelikož je dokonˇcené a obsahuje bezespornou vˇetev V, nebot' ⊥není dokazatelný z T, existuje kanonický modelAz V. Jelikož seAshoduje s V, jeho redukt na jazyk L je hledaným spoˇcetnˇe nekoneˇcným modelem T.

Veta o kompaktnosti PL

Teorie T0 jazyka L0 je extenze teorie T jazyka L o definice, pokud vznikla z T postupnou extenzí o definici relaˇcního ˇci funkˇcního symbolu.

Du˚sledek
Necht' T0 je extenze teorie T o definice. Pak
každý model teorie T lze jednoznaˇcnˇ e expandovat na model T0,
T0 je konzervativní extenze T,
pro každou formuli ϕ0 nad L0 existuje ϕ nad L taková, že T0 |= ϕ0 ↔ ϕ.

Napˇr. v teorii $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \to y = z\}$ nad $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností lze zavést < a unární funkˇcní symbol − axiomy
$-x = y \leftrightarrow x + y = 0$
$x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y)$
Pak formule $-x < y$ je v této extenzi o definice ekvivalentní formuli
$(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0)$.

a její dusledky. !!!

Extenze o definice,

Tvrzení
Pro každou formuli ϕ_0 nad L_0 existuje ϕ nad L, t.ž. $T_0 \models \phi_0 \leftrightarrow \phi$.

Du˚kaz
Každou podformuli $R(t_1,\dots,t_n)$ nahradíme za $\psi_0(x_1/t_1,\dots,x_n/t_n)$, kde ψ_0 je vhodná varianta ψ zaruˇcující substituovatelnost všech termu˚

Tvrzení
Pro každou formuli ϕ_0 nad L_0 existuje ϕ nad L, t.ž. $T_0 \models \phi_0 \leftrightarrow \phi$.

Du˚kaz
Staˇcí uvážit ϕ_0 s jediným výskytem f. Má-li ϕ_0 více výskytu˚ f, lze postup aplikovat induktivnˇe (v pˇrípadˇe vnoˇrených výskytu˚ jdeme od vnitˇrních k vnˇejším). Oznaˇcme ϕ^* formuli vzniklou z ϕ_0 nahrazením termu $f(t_1,\dots,t_n)$ za novou promˇennou z. Za ϕ vezmeme formuli
$(\exists z)(\phi^* \wedge \psi_0(x_1/t_1,\dots,x_n/t_n,y/z))$,
kde ψ_0 je vhodná varianta ψ zaruˇcující substituovatelnost všech termu˚.
Necht' $\mathcal{A}$ je model T_0, e je ohodnocení, $a = f^{\mathcal{A}}(t_1,\dots,t_n)[e]$. Díky obˇema podmínkám platí $\mathcal{A} \models \psi_0(x_1/t_1,\dots,x_n/t_n,y/z)[e]$ právˇe když $e(z) = a$. Tedy
$\mathcal{A} \models \phi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \phi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \phi_0[e]$
pro každé ohodnocení e, tj. $\mathcal{A} \models \phi_0 \leftrightarrow \phi$ a tedy $T_0 \models \phi_0 \leftrightarrow \phi$.

Skolemova veta

Vˇeta
Každá teorie T má otevˇrenou konzervativní extenzi T^*.

Du˚kaz Lze pˇredpokládat, že T je v uzavˇreném tvaru. Necht' L je její jazyk.
Nahrazením každého axiomu teorie T za ekvivalentní formuli v prenexním tvaru získáme ekvivalentní teorii T°.
Nahrazením každého axiomu teorie T° za jeho Skolemovu variantu získáme teorii T_0 rozšíˇreného jazyka L_0.
Jelikož je redukt každého modelu teorie T_0 na jazyk L modelem teorie T, je T_0 extenze T.
Jelikož i každý model teorie T lze expandovat na model teorie T_0, je to extenze konzervativní.
Jelikož každý axiom teorie T_0 je univerzální sentence, jejich nahrazením za otevˇrená jádra získáme otevˇrenou teorii T^* ekvivalentní s T_0.

Du˚sledek
Ke každé teorii existuje ekvisplnitelná otevˇrená teorie.

Herbrandova veta.

Vˇeta
Necht’ T je otevˇrená teorie jazyka L bez rovnosti a s alespoˇn jedním konstantním symbolem. Pak
(a) T má Herbrandu˚v model, anebo
(b) existuje koneˇcnˇe mnoho základních instancí axiomu˚ z T, jejichž konjunkce je nesplnitelná, a tedy T nemá model.

Du˚kaz
Necht’ T0 je množina všech základních instancí axiomu˚ z T. Uvažme dokonˇcené (napˇr. systematické) tablo τ z T0 v jazyce L (bez pˇridávání nových konstant) s položkou F ⊥ v koˇreni.
Obsahuje-li tablo τ bezespornou vˇetev V, kanonický model z vˇetve V je Herbrandovým modelem teorie T.
Jinak je τ sporné, tj. T0 |- ⊥. Navíc je koneˇcné, tedy ⊥ je dokazatelný jen z koneˇcnˇe mnoha formulí T0, tj. jejich konjunkce je nesplnitelná.

Rezoluce v PL:

korektnost

Nejprve ukážeme, že obecné rezoluˇcní pravidlo je korektní.

Tvrzení
Necht’ C je rezolventa klauzulí C1, C2. Pro každou L-strukturuA, A|= C1 a A|= C2 ⇒ A|= C.

Du˚kaz
Necht’ C1 = C0 1 t{A1,...,An}, C2 = C0 2 t{¬B1,...,¬Bm}, σ je nejobecnˇejší unifikace pro S = {A1,...,An,B1,...,Bm}a C = C0 1σ∪C0 2σ.
Jelikož C1, C2 jsou otevˇrené, platí iA|= C1σ aA|= C2σ.
Máme C1σ = C0 1σ∪{Sσ} a C2σ = C0 2σ∪{¬(Sσ)}.
Ukážeme, žeA|= C[e] pro každé e. Je-liA|= Sσ[e], pakA|= C0 2σ[e] a tedyA|= C[e]. JinakA6|= Sσ[e], pakA|= C0 1σ[e] a tedyA|= C[e].

Vˇeta (korektnost)
Je-li formule S rezolucí zamítnutelná, je S nesplnitelná.

Du˚kaz
Necht’ S |-R □. KdybyA|= S pro nˇejakou strukturuA, z korektnosti rezoluˇcního pravidla by platilo iA|= □, což není možné.

úplnost

Lifting lemma
Rezoluˇcní du˚kaz na úrovni VL lze “zdvihnout” na úroveˇn PL.

Lemma
Necht’ C∗ 1 = C1τ1, C∗ 2 = C2τ2 jsou základní instance klauzulí C1, C2 neobsahující stejnou promˇennou a C∗ je rezolventa C∗ 1 a C∗ 2. Pak existuje rezolventa C klauzulí C1 a C2 taková, že C∗ = Cτ1τ2 je základní instance C.

Du˚kaz
Pˇredpokládejme, že C∗ je rezolventa C∗ 1, C∗ 2 pˇres literál P(t1,...,tk).
Pak lze psát C1 = C0 1 t{A1,...,An}a C2 = C0 2 t{¬B1,...,¬Bm}, kde {A1,...,An}τ1 = {P(t1,...,tk)}a{¬B1,...,¬Bm}τ2 = {¬P(t1,...,tk)}.
Tedy (τ1τ2) unifikuje S = {A1,...,An,B1,...,Bm}a je-li σ mgu pro S z unifikaˇcního algoritmu, pak C = C0 1σ∪C0 2σ je rezolventa C1 a C2.
Navíc (τ1τ2) = σ(τ1τ2) z vlastnosti (∗) pro σ a tedy Cτ1τ2 = (C0 1σ∪C0 2σ)τ1τ2 = C0 1στ1τ2 ∪C0 2στ1τ2 = C0 1τ1 ∪C0 2τ2 = (C1 {A1,...,An})τ1 ∪(C2 {¬B1,...,¬Bm})τ2 = (C∗ 1 {P(t1,...,tk)})∪(C∗ 2 {¬P(t1,...,tk)}) = C∗.

Du˚sledek
Necht’ S0 je množina všech základních instancí klauzulí formule S. Je-li S0 |-R C0 (na úrovni VL), kde C0 je základní klauzule, pak existuje klauzule C a základní substituce σ t.ž. C0 = Cσ a S |-R C (na úrovni PL). Du˚kaz Indukcí dle délky rezoluˇcního odvození pomocí lifting lemmatu.

Vˇeta (úplnost)
Je-li formule S nesplnitelná, je S |-R □.

Du˚kaz
Je-li S nesplnitelná, dle (du˚sledku) Herbrandovy vˇety je nesplnitelná i množina S0 všech základních instancí klauzulí z S.
Dle úplnosti rezoluˇcní metody ve VL je S0 |-R □ (na úrovni VL).
Dle pˇredchozího du˚sledku existuje klauzule C a substituce σ taková, že □ = Cσ a S |-R C (na úrovni PL).
Jediná klauzule, jejíž instance je □, je klauzule C = □.

LI-rezoluce

Vˇeta
S je lineárnˇe zamítnutelná, právˇe když S je nesplnitelná.
Du˚kaz
(⇒) Každý lineární du˚kaz lze transformovat na rezoluˇcní du˚kaz.
(⇐) Plyne z úplnosti lineární rezoluce ve VL (nedokazováno), nebot’ lifting lemma zachovává linearitu odvození.

Vˇeta
Je-li Hornova T splnitelná a T ∪{G}nesplnitelná pro cíl G, lze □ odvodit LI-rezolucí z T ∪{G}zaˇcínající G.

Du˚kaz
Plyne z Herbrandovy vˇety, stejné vˇety ve VL a lifting lemmatu.

Elementární ekvivalence !!!

dusledky L.-S. vety

Vˇeta
Necht’ T je bezesporná teorie spoˇcetného jazyka L. Je-li L bez rovnosti, má T model, který je spoˇcetnˇe nekoneˇcný. Je-li L s rovností, má T model, který je spoˇcetný.

Du˚sledek
Ke každé struktuˇreAspoˇcetného jazyka bez rovnosti existuje spoˇcetnˇe nekoneˇcná elementárnˇe ekvivalentní strukturaB.

Du˚kaz
Teorie Th(A) je bezesporná, nebot’ má modelA. Dle pˇredchozí vˇety má spoˇcetnˇe nek. modelB. Jelikož je teorie Th(A) kompletní, je$A \equiv B$.

Du˚sledek
Ke každé nekoneˇcné struktuˇreAspoˇcetného jazyka s rovností existuje spoˇcetnˇe nekoneˇcná elementárnˇe ekvivalentní strukturaB.

Du˚kaz
Obdobnˇe jako výše. Jelikož vAneplatí sentence “existuje právˇ e n prvku˚” pro žádné $n \in N$ a$A \equiv B$, není B koneˇcná, tedy je nekoneˇcná.

ω-kategoricnost

Teorie T je ω-kategorická, pokud má až na izomorfismus právˇe jeden model kardinality ω, tj. spoˇcetnˇe nekoneˇcný.

Tvrzení
Teorie DeLO (tj. “bez koncu˚”) je ω-kategorická.

Du˚kaz
Necht’$A,B \models$ DeLO s $A = \{a_i\}_{i \in N}$, $B = \{b_i\}_{i \in N}$. Indukcí dle n lze nalézt prosté parciální funkce $h_n \subseteq h_{n+1} \subset A \times B$ zachovávající uspoˇrádání tak, že$\{a_i\}_{i<n} \subseteq dom(h_n)$ a$\{b_i\}_{i<n} \subseteq rng(h_n)$. Pak$A' B$ via $h = \cup h_n$.

Vˇeta
Necht’ jazyk L je spoˇcetný.
(i) Je-li teorie T jazyka L bez rovnosti ω-kategorická, je kompletní.
(ii) Je-li teorie T jazyka L s rovností ω-kategorická a bez koneˇcného modelu, je kompletní.

Du˚kaz
Každý model teorie T je elementárnˇe ekvivalentní s nˇejakým spoˇcetnˇe nekoneˇcným modelem T, ale ten je až na izomorfismus jediný. Tedy všechny modely T jsou elementárnˇe ekvivalentní, tj. T je kompletní.

podmínky pro konecnou a otevrenou axiomatizovatelnost.

Vˇeta
Necht’ $K \subseteq M(L)$ a $K = M(L) \setminus K$, kde L je jazyk. Pak K je koneˇcnˇ e axiomatizovatelná, právˇe když K i K jsou axiomatizovatelné.

Du˚kaz
($\Rightarrow$) Je-li T koneˇcná axiomatizace K v uzavˇreném tvaru, pak teorie s jediným axiomem$W\phi \in T \neg\phi$ axiomatizuje K.
($\Leftarrow$). Necht’ T, S jsou teorie jazyka L takové, že $M(T) = K$, $M(S) = K$. Pak $M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = \emptyset$ a dle vˇety o kompaktnosti existují koneˇcné $T0 \subseteq T$ a $S0 \subseteq S$ takové, že $\emptyset = M(T0 \cup S0) = M(T0) \cap M(S0)$. Jelikož $M(T) \subseteq M(T0) \subseteq M(S0) \subseteq M(S) = M(T)$, je $M(T) = M(T0)$, tj. koneˇcná T0 axiomatizuje K.

Vˇeta
Je-li teorie T otevˇrenˇe axiomatizovatelná, pak každá podstruktura modelu T je rovnˇež modelem T.

Du˚kaz
Necht’ T0 je otevˇrená axiomatika $M(T), A \models T0$ a$B \subseteq A$. Víme, že pro každé $\phi \in T0$ je$B \models \phi$, nebot’ ϕ je otevˇrená. Tedy$B$ je modelem T0.
