Rozcvička

Slovostavba Máme daný slovník (seznam slov). Najděte nejdelší posloupnost slov t.ž každé se dá získat smazáním písmene (nějakého, nikoliv posledního) z předchozího slova.

Nejkratší cesty

Co je prefixová vlastnost nejkratších cest?

Sledy vs cesty Za jakých podmínek platí, že nejkratší sled je cesta? Co máme za problém, když to neplatí?

Strom nejkratšíchch cest Dokažte, že sjednocení nejkratších cest z nějakého zdroje do všech ostatních vrcholů je strom.

Metrika Dokažte, že nejkratší cesty v grafu tvoří metriku (splňují trojúhelníkovou nerovnost).

Dijkstra

Skupina Skupina turistů bydlí v hotelu. Každý člověk umí každou ulicí města projít jinak rychle. Jak najít cesty z hotelu, které jsou nejrychlejší pro celou skupinu?

Spolehlivost Máme počítačovou síť a každá hrana v ní má spolehlivost (pst. že se data neztratí). Najděte nejspolehlivější cesty do všech ostatních vrcholů v síti.

Vrcholy Jak vyřešit situaci, kdy máme délky na vrcholech místo na hranách? Existuje více řešení.

Propustnost Opět máme síť, tentokrát s kapacitami hran. Hledáme nejpropustnější cestu. Hint: budeme muset Dijkstru lehce přiohnout.

Diskrétní vzdálenosti Mějme v grafu délky hran pouze $1, \ldots, k$. Jak toho zneužít pro zrychlení Dijkstry?

Domácí úkol

První část

Při hledání nejkratších cest (z jednoho zdroje) jsou přirozeným problémem hrany se zápornou délkou. Zvolme dostatečně velkou konstantu c a přičtěme ji ke všem délkám - záporné hrany se stanou nezáporné a problém je odstraněn. Ukažte, že tento přístup obecně změní nejratší cesty - tzn. nejkratší cesta mezi dvěma vrcholy povede po jiných hranách než v původním grafu.

Druhá část

Mějme graf reprezentující nějakou přepravní síť. Každá hrana má dánu propustnost. Pro daný zdrojový vrchol v_0 chceme najít nejpropustnější cesty do všech vrcholů.

Úlohu chceme řešit pomocí Dijkstrova algoritmu. To ale nepůjde úpravou vstupu, dokonce ani žádná úprava není nutná. Bude potřeba upravit fungování algoritmu (konkrétně stačí dvě drobné úpravy). Ukažte co je potřeba změnit. Zachovejte časovou složitost.

U Dijkstrova algoritmu máme z přednášek zevrubně dokázánu korektnost. Dokažte, že upravený algoritmus je také korektní (pro úlohu propustnosti). Tedy pokud určí, že nejpropustnější cesta do vrcholu w má propustnost c, pak musí taková cesta (nikoliv sled) existovat, a nesmí existovat žádná propustnější cesta. Důkazy korektnosti budou stěžejní částí hodnocení druhé části.

Bonusová část nebude. Dejte dohromady předchozí domácí úkoly. Můžete zkusit vypracovat předchozí bonusovou úlohu.