https://mj.ucw.cz/vyuka/1819/ads2/

Syllabus

| *date* | *topic* |
|---|---|
| 1. 10. | Searching in text: notation on strings, naïve algorithms, the KMP (Knuth, Morris, Pratt) algorithm and its analysis. |
| 8. 10. | Text searching continued: Aho-Corasick algorithm searching for multiple strings simultaneously. Using rolling hash functions: the Rabin-Karp algorithm. |
| 15. 10. | Network flows: Basic definitions and theorems on networks and flows. The Ford-Fulkerson algorithm, proof of its correcntess using cuts. Equality of maximum flow and minimum cut. Integer networks and integer flows. Reducing bipartite matching to integer flow. |
| 22. 10. | Network flows: An equivalent definition of a flow. Layered networks and blocking flows. The Dinitz's algorithm. |
| 29. 10. | Network flows: The Goldberg's algorithm (preflow push) and its analysis. Simulation: uniform path, bottleneck path, maximum height rule (source code). |
| 5. 11. | Network flows: Goldberg's algorithm with the highest vertex rule. Multiplication of polynomials. A review of complex numbers. |
| 12. 11. | Complex roots of unity. Fast Fourier transform and its inverse. FFT circuits, non-recursive FFT. Remarks on FFT (slides): algebraic interpretation, spectral analysis, signal processing. |
| 19. 11. | Parallel programming on boolean circuits: binary addition. Introduction to comparator networks. |
| 26. 11. | Comparator networks and bitonic sorting. Decision problems and reductions between them: SAT and 3-SAT. |
| 3. 12. | More reductions: independent set, clique, 3,3-SAT, 3D-matching. |
| 10. 12. | Complexity classes P and NP, NP-hard and NP-complete problems and their basic properties. Cook's theorem: SAT is NP-complete (proof sketched). |
| 17. 12. | Fighting hard problems. Special cases: independent set in trees, coloring of interval graphs, pseudopolynomial algorithm for knapsack. Approximation algorithms: traveling salesman in a finite metric space (2-approximation), approximation scheme for knapsack. |
| 7. 1. | *Geometric algorithms in the plane: convex hull, line segment intersection. Remarks on Voronoi diagrams, point location, and persistent search trees.* |

http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=172&t=11844

**Zkouška - Mareš 11.1.2019**

1. FFT (definujte DFT, inverzní transformace, algoritmus na FFT, použití)
2. V daném řetězci nad abecedou {a,b} chceme nalézt nejdelší Fibonacciho podslovo. Fibonacciho slova jsou definována takto: F1=a, F2=b, Fn+2=Fn+Fn+1.
3. Implementujte pomocí booleovských hradel komparátor n-bitových čísel. (cílem byla hloubka O(log n))

http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=172&t=11610

**Zkouška - Mareš 8. 2. 2018**

1) Algoritmus na průsečík přímek.

2) Máme bipartitní graf a chceme nalézt perfektní dvojíté párování, tedy že každý vrchol má stupeň právě dva.

3) Máme seno, skládající se z znaků A a B. Máme Fibonacciho slova, definovaná takto: F0 = A, F1 = B, Fn = Fn-1 + Fn-2. Tedy F2 = AB, F3 = BAB. Jaké je nejdelší Fibonacciho slovo, vyskytující se v seně?

http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=172&t=10702

**Zkouška 8.1.2016 Mareš**

1) Popsat algoritmus zjišťování průsečíků úseček
2) Mějme slovník D a seno S. Kolikrát se každé slovo ze slovníku vyskytuje v seně? Algoritmus musí mít složitost nejvýše O(|S| + |D|)
3) Mějme vektor velikosti n a zrotujme jej o k pozic. Jak se změní obraz tohoto vektoru po zobrazení Fourierovo transformací? Dá se zjistit porovnáním vektorů o kolik pozic se rotovalo?

http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=172&t=10711

**Zkouška 15.01.2016 – Mareš**

Tohle byl předtermín, a byli jsme v jeho kabinetě a na chodbě, takže každý dostal něco jiného.

Já měl:

1) Zjistit, jak rychle běží Goldbergův algoritmus na síti s jednotkovými kapacitami.
2) Napsat komparátorovou třídící síť.
3) Vymyslet pseudopolynomiální algoritmus řešící problém dvou loupežníků.

http://forum.matfyz.info/viewtopic.php?f=172&t=10738

**Zkouška 21. 01. 2016 - Mareš**

1) Třídící síť. Cílem je dosáhnout časové složitosti O((log n)^2), čili nejsnáz použít bitonickou třídičku z přednášky.
2) Jsou dány dva konvexní mnohoúhelníky. Rozhodněte, zda mají neprázdný průnik. Mnohoúhelník je myšlen i s jeho vnitřkem, takže pokud je malý mnohoúhelník uvnitř velkého mnohoúhelníku, ale strany se neprotínají, tak také mají neprázdný průnik. Výstupem programu je buď NE, nebo souřadnice jednoho libovolného bodu v průniku. Cílem je dosáhnout časové složitosti O(n), kde n je celkový počet vrcholů obou mnohoúhelníků.
3) Převeďte 3D párování na SAT (tedy opačný směr než byl na přednášce, ale je mnohem snazší).
4) (*) Bonus: Je dána hromada prken. Prkno je kvádr o celočíselných rozměrech w, h a tloušťce 1. Prkna lze otáčet (místo w x h možno mít h x w), lepit na sebe a ořezávat. Rozhodněte, jaký největší kvádr (o co největším objemu) lze z nich vyrobit.

https://mj.ucw.cz/vyuka/1314/ads2/zk.html

**15. 1 dopoledne.**

1. Goldbergův algoritmus a jeho implementace.
2. Najděte pro daný řetězec co nejdelší podřetězec, který je současně prefixem i suffixem (vlastním).
3. Jsou dány množiny bodů v rovině: červené a zelené. Sestrojte přímku takovou, aby na jedné její straně ležely všechny červené body, zatímco na druhé všechny zelené.

**15. 1. odpoledne**

1. Rychlá Fourierova transformace.
2. Mějme děravou šachnovnici. Jak ji pokrýt kostkami 1× 2 políčka?
3. Je dána množina bodů v rovině. Oploťte ji dvěma uzavřenými ploty tak, aby celková spotřeba pletiva byla minimální.

**22. 1. dopoledne**

1. Průsečíky úseček.
2. Definujme permanent matice stejně jako determinant, ale bez znaménkového pravidla (všechny členy přispívají kladně). Chceme pro danou nula-jedničkovou matici zjistit, zda má nenulový permanent.
3. Převeďte 3D-párování na SAT.
4. (*) Zesilme definici 3,3-SATu tak, že každá klauzule obsahuje *právě* 3 různé proměnné a každá proměnná se nachází v *právě* 3 klauzulích. Dokažte, že o NP-úplnost přijdeme pozoruhodným způsobem, totiž tak, že každá formule bude splnitelna.

**22. 1. odpoledne**

1. Sčítání čísel hradlovou sítí.
2. Pro daný neorientovaný graf chceme nalézt největší k takové, že graf je hranově k-souvislý.
3. V daném řetězci nad abecedou {a,b} chceme nalézt nejdelší Fibonacciho podslovo. Fibonacciho slova jsou definována takto: $F_1$=a, $F_2$=b, $F_{n+2}=F_nF_{n+1}$.
4. (*) V daném řetězci nad obecnou abecedou chceme najít co nejdelší podslovo isomorfní s nějakým Fibonacciho slovem (tedy stejné až na přejmenování abecedy).

**28. 1.**

1. Problém batohu: pseudopolynomiální algoritmus a aproximační schéma.
2. Jsou dány dva mnohoúhelníky. Protínají se (ne nutně hranicí)?
3. Implementujte pomocí booleovských hradel komparátor n-bitových čísel.
4. (*) U úlohy 2 průnik i sestrojte.

**6. 2.**

1. Dinicův algoritmus.
2. Uvažujme problém nezávislé množiny v grafech s maximálním stupněm 4 resp. 2. Rozhodněte, zda tento problém patří do P nebo je NP-úplný.
3. Navrhněte hradlovou síť, která testuje, zda se v n-bitové posloupnosti vyskytuje nějaký pevný vzorek. Výstupem nechť je ano/ne.
4. (*) Navrhněte dynamickou datovou strukturu pro vyhledávání v textu. Jehla je pevná, v seně lze průběžně měnit jednotlivé znaky a struktura má odpovídat, zda se v seně právě vyskytuje jehla.

**12. 2.**

1. Algoritmus Aho-Corasicková.
2. Je dán neorientovaný graf a číslo k. Zjistěte, zda graf je vrcholově k-souvislý.

3. Vymyslete pseudopolynomiální algoritmus pro "problém tří loupežníků": Je dána posloupnost přirozených čísel, lze ji rozdělit na 3 části se stejným součtem?
4. (*) Navrhněte datovou strukturu, která dostane množinu obdélníků v rovině (v osové poloze) a bude umět rychle odpovídat na dotazy typu "v kolika obdélnících z množiny se nachází tento bod?".

http://mj.ucw.cz/vyuka/1112/ads2/zk.html

**23. 12.**

1. Goldbergův algoritmus.
2. Uvažujme problém "Je dána soustava lineárních rovnic v celých číslech. Existuje vektor složený z nul a jedniček, který ji řeší?" Dokažte, že tento problém je NP-úplný.
3. Náhrdelník je cyklický řetězec, který nemá určený ani začátek, ani směr čtení. Jak rozhodnout, zda jsou si dva náhrdelníky rovny?
4. (*) Je dáno více náhrdelníků, rozdělte je na ekvivalenční třídy.

**13. 1.**

1. Násobení polynomů pomocí Fourierovy transformace.
2. Hradlová síť, která o dvojici binárních čísel zjistí, zda je první větší než druhé.
3. Hledání největší nezávislé množiny v intervalovém grafu (to je graf, jehož vrcholy jsou intervaly a hrany spojují dvojice intervalů mající neprázdný průnik).

**18. 1. dopoledne**

1. Třídící sítě.
2. Je dán slovník a text. Navrhněte algoritmus, který pro každé slovo ze slovníku spočte, kolikrát se v textu vyskytuje jako podřetězec.
3. Mějme strom, jehož vrcholy jsou opatřeny celočíselnými vahami. Chceme nalézt nezávislou množinu, jejíž součet vah je největší možný.
4. (*) Uvažujme funkci f(x) = a sin(kx) + b cos(lx) navzorkovanou v N bodech rovnoměrně rozmístěných v intervalu [0,2π). Jak z vektoru vzorků poznat hodnoty a, b, k, l?

**18. 1. dopoledne**

1. NP-úplnost 3D-párování.
2. Jak zjistit, jestli je zadaný řetězec periodický? Tedy zda pro daný řetězec α existuje řetězec β a číslo k>1 tak, že $\alpha = \beta^k$.
3. Je dán orientovaný graf a jeho vrcholy u, v. Chceme nalézt co nejvíce hranově disjunktních cest z u do v.
4. (*) Stejně jako dopoledne.

**25. 1. dopoledne**

1. NP-úplnost: definice tříd, Cookova věta, důkaz NP-úplnosti vybraného problému.
2. Mějme děravou šachnovnici. Jak ji pokrýt co nejvíce kostkami 1× 2 políčka?
3. Najděte pro daný řetězec co nejdelší podřetězec, který je současně prefixem i suffixem (vlastním).

**1. 2. dopoledne**

1. Problém batohu – pseudopolynomiální algoritmus a aproximační schéma.
2. Jak nalézt průsečíky zadaných parabol (tvaru $ax^2+bx+c$ pro a>0)? (*) Bez omezení na a.
3. Definujme permanent matice stejně jako determinant, ale bez znaménkového pravidla (všechny členy přispívají kladně). Chceme pro danou nula-jedničkovou matici zjistit, zda má nenulový permanent.

**1. 2. odpoledne**

1. Algoritmus na nalezení všech průsečíků zadaných úseček.
2. Jak nalézt průsečíky zadaných parabol (tvaru $ax^2+bx+c$ pro a>0)?
3. Je dán řetězec a číslo K. Který podřetězec délky K je nejčetnější?

4. (*) Je dána množina bodů v rovině. Lze ji rozdělit na dvě disjuktní středově symetrické podmnožiny?

**10. 2. dopoledne**

1. Algoritmus Knuth-Morris-Pratt.
2. Nalezněte polynomiální algoritmus, který v daném bipartitním grafu najde nejmenší vrcholové pokrytí.
3. Navrhněte hradlovou síť pro výpočet dvojkového logaritmu (jinými slovy nalezení pozice nejlevější jedničky ve dvojkovém čísle).
4. (*) V daném řetězci nad abecedou {a,b} chceme nalézt nejdelší Fibonacciho podslovo. Fibonacciho slova jsou definována takto: $F_1$=a, $F_2$=b, $F_{n+2}=F_nF_{n+1}$.

**10. 2. odpoledne**

1. Goldbergův algoritmus a jeho chování pro jednotkové kapacity.
2. Uvažujme problém nezávislé množiny v grafech s maximálním stupněm 4 resp. 2. Rozhodněte, zda tento problém patří do P nebo je NP-úplný.
3. Navrhněte algoritmus, který pro dva zadané (ne nutně konvexní) mnohoúhelníky zjistí, zda mají nějaký společný bod.
4. (*) Dokažte, že vektor y, který je diskrétní Fourierovou transformací n-složkového reálného vektoru, platí, že $y_j$ a $y_{n-j}$ jsou komplexně sdružené (pro všechna j).

**15. 2. dopoledne**

1. NP-úplnost: definice tříd, Cookova věta, důkaz NP-úplnosti vybraného problému.
2. Navrhněte algoritmus, který pro zadaný mnohoúhelník (ne nutně konvexní) najde nejdelší úsečku rovnoběžnou s osou x, která je v něm obsažená.
3. Jak zjistit, jestli je zadaný řetězec periodický? Tedy zda pro daný řetězec α existuje řetězec β a číslo k>1 tak, že $\alpha = \beta^k$.
4. (*) Jsou dány permutace α a β na množině {1,…n}. Existuje k takové, že $\alpha = \beta^k$? (Mocněním permutace se myslí k-násobné složení se sebou samou.)

**15. 2. odpoledne**

1. Dinicův algoritmus
2. Hradlová síť, která o dvojici binárních čísel zjistí, zda je první větší než druhé.
3. Jsou dány Fourierovy obrazy dvou vektorů. Jak podle nich rozhodnout, zda je jeden vektor rotací druhého?
4. (*) Stejně jako dopoledne.

[http://mj.ucw.cz/vyuka/0910/ads2/zk.html](http://mj.ucw.cz/vyuka/0910/ads2/zk.html)

**20. 1.**

1. Algoritmus RSA.
2. Rabinův-Karpův algoritmus.
3. Jsou dány dva pěstované stromy, zjistěte, jestli je jeden podstromem druhého. (Definice: pěstovaný strom má určen kořen a v každém vrcholu pořadí jeho synů; podstrom je určen vrcholem a obsahuje všechny jeho potomky.)
4. Mějme posloupnost N dominových kostek, na každé jsou dvě čísla v rozsahu 0 až T – horní a dolní číslo. Určete, které kostky otočit (prohodit horní a dolní číslo), aby se součet všech horních a všech dolních čísel lišily co nejméně.

**27. 1.**

1. Goldbergův algoritmus (formulace a každý svou část analýzy).
2. Spočítejte diskrétní Fourierovu transformaci vektoru (2,1,2,1,2,1,2,1).
3. Navrhněte hradlovou síť, která dostane dvě N-bitová binární čísla A a B a rozhodne, zda A>B.
4. Rozhodněte, zda je následující problém v P nebo NP-úplný: "Je dán graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň nejvýše 4, a číslo K. Existuje v grafu nezávislá množina o alespoň K vrcholech?"

**3. 2.**

1. Algoritmus Aho-Corasicková pro vyhledávání v textu.
2. 2-aproximace problému obchodního cestujícího.
3. Je dána množina parabol tvaru $y=ax^2+bx+c$, kde $a>0$. Nalezněte jejich průsečíky. (*) Co když může být koeficient a také záporný?
4. Nalezněte polynomiální algoritmus pro následující problém: Mějme šachovnici m×n s některými políčky děravými. Lze ji pokrýt kostkami 1×2 tak, aby kostky nezasahovaly do děr a všechna ostatní políčka byla pokryta právě jednou kostkou? (Kostky je možno otáčet.)

**10. 2.**

1. Dinicův algoritmus.
2. Definice: třídy P a NP, NP-úplné problémy. Cookova věta.
3. Navrhněte komparátorovou síť pro zatřídění jednoho prvku do setříděné poslopnosti.
4. Je dán text a číslo K. Nalezněte podřetězec délky K, který se v textu vyskytuje nejčastěji.
5. (*) Spočtěte $2\uparrow n \bmod 13$ (přičemž $2\uparrow 1=2$, $2\uparrow(n+1) = 2^{2\uparrow n}$).

**17. 2.**

1. Problém batohu: pseudopolynomiální algoritmus a aproximační schéma.
2. Spočítejte diskrétní Fourierovu transformaci vektoru (i,-1,-i,1,i,-1,-i,1).
3. Algoritmus na výpočet obsahu n-úhelníku (ne nutně konvexního).
4. Ukažte, jak převést SAT na řešitelnost soustavy kvadratických rovnic (polynomy stupně 2 v libovolně mnoha proměnných, řešitelnost v reálných číslech).

**9. 4.**

1. Goldbergův algoritmus.
2. Rabinův-Karpův algoritmus.
3. Jsou dány dva řetězce. Zjistěte, zda je jeden rotací druhého.
4. Je dáno N množin bodů v rovině. Zjistěte, zda jsou jejich konvexní obaly disjunktní.
5. (*) Spočtěte kombinační číslo "n nad k" modulo 42.