- ∗ horn´ı a doln´ı za´vora mnoˇziny, supremum, infimum

Suprema a infima, úplnost $\mathbb{R}$. Když $X \subset \mathbb{R}$ a $c \in X$, pak $c = \min(X)$, c je *minimum* nebo též *nejmenší prvek* X, pokud $c \leq a$ pro každé $a \in X$.

Podobně se definuje $\max(X)$, *maximum* nebo *největší prvek* X. Číslo $c \in \mathbb{R}$ je *horní mez* množiny $X \subset \mathbb{R}$, když $c \geq a$ pro každé $a \in X$. Podobně se definuje *dolní mez*. Když $X \subset \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$, pak c je *supremum* množiny X, $c = \sup(X)$, když

$$c = \min(\{\text{horní meze množiny } X\}) ,$$

tedy c je nejmenší horní mez X. Supremum X nemusí v X ležet a když existuje, je určeno jednoznačně. Ještě jednou řečeno, $c = \sup(X)$, právě když

1. pro každé $a \in X$ je $a \leq c$ (tj. c je horní mez X) a
2. pro každé $d \in \mathbb{R}$, $d < c$, existuje $a \in X$, že $a > d$ (tj. c nelze nijak zmenšit na d, aby zůstalo horní mezí, c je nejmenší horní mez X).

Podobně se definuje *infimum* množiny $X \subset \mathbb{R}$:

$$\inf(X) = \max(\{\text{dolní meze množiny } X\}) ,$$

je to největší dolní mez množiny X. Úplně stejně definujeme supremum a infimum pro podmnožiny $\mathbb{Q}$ v uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ (a obecně v každé lineárně nebo i částečně uspořádané množině). Množina $X \subset \mathbb{R}$ je *shora omezená*, má-li alespoň jednu horní mez. Podobně se definuje *omezenost zdola*. Následující výsledek je základní vlastnost reálných čísel, kterou racionální čísla nemají.

- ∗ spoˇcetna´ mnoˇzina

Nespočetnost $\mathbb{R}$. Množina M je nekonečná, právě když existuje injekce $f : M \to M$, že $f(M) \neq M$. Nekonečná množina M je *spočetná*, když existuje bijekce $f : \mathbb{N} \to M$. Spočetnost M tedy znamená, že existuje posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \dots)$ s těmito vlastnostmi:

1. pro každé n je $a_n \in M$,
2. pro každé $n \neq m$ je $a_n \neq a_m$ a
3. pro každé $x \in M$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $a_n = x$.

Podstatný je první a třetí požadavek: když je (a_n) splňuje, vypuštěním duplikací a přeindexováním z (a_n) snadno vyrobíme posloupnost (a'_n), jež splňuje všechny tři požadavky. Množina je *nespočetná*, když není spočetná. Uvidíme, že taková je množina $\mathbb{R}$. Nejprve ale uvedu příklady spočetných množin.

• ∗ vlastn´ı a nevlastn´ı limita posloupnosti, konvergentn´ı a divergentn´ı posloupnost

Když $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je posloupnost reálných čísel a $a \in \mathbb{R}$ je číslo, pak *a je limitou* (a_n), psáno $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ či jen $\lim a_n = a$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon\ .$$

(Zde ε bereme z $\mathbb{R}$, n_0 a n z $\mathbb{N}$ a $\exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow \ldots$ je totéž jako $\exists n_0\ \forall n :\ n > n_0 \Rightarrow \ldots$.) Tuto limitu nazýváme podrobněji *vlastní limitou* a když ji posloupnost (a_n) má, pak též řekneme, že *konverguje.*

Nevlastní limita posloupnosti (a_n) je $+\infty$ či $-\infty$:

$$\lim a_n = +\infty \iff \forall c\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow a_n > c$$

a podobně $\lim a_n = -\infty$, platí-li totéž s $a_n < c$.

• ∗ˇrada, souˇcet ˇrady, konvergence a divergence ˇrady

Základní definice. *Nekonečná řada*, krátce *řada*, je posloupnost reálných čísel $(a_n) \subset \mathbb{R}$ uvedená v zápisu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ ,$$

spolu s metodou přiřazující řadě její *součet*, což je reálné číslo (někdy povolíme i $\pm\infty$). Motivací a hnací myšlenkou je snaha rozšířit sčítání reálných čísel na nekonečně mnoho sčítanců. Nejběžnější sčítací metodou je metoda *částečných součtů*, což je posloupnost

$$(s_n) \text{ definovaná jako } s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\ .$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*, když konvergují její částečné součty (s_n), to jest $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pak definujeme jako tuto limitu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \in \mathbb{R}\ .$$

Je-li $\lim s_n$ nevlastní nebo neexistuje, řekneme, že řada *diverguje* (pak nemá žádný součet). Pokud $\lim s_n = \pm\infty$, píšeme též $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

- ∗ limita funkce v bodˇe

Definice (limita funkce v bodě). *Nechť $f: M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod M a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak definujeme*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \; f(P(a,\delta)\cap M) \subset U(A,\varepsilon)$$

— funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A.

Jinak řečeno, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že když $x \in P(a,\delta)$ a f je v x definovaná, pak nutně $f(x) \in U(A,\varepsilon)$. Jak a tak A může být i $\pm\infty$. Je důležité, že $\lim_{x\to a} f(x)$ nezávisí na hodnotě $f(a)$, ba ani $f(x)$ nemusí být v bodě a definovaná (tj. $a \notin M$).

A co kdyby a nebyl hromadným bodem M? Pak by existovalo $\delta > 0$, že $P(a,\delta)\cap M = \emptyset$, tedy $f(P(a,\delta)\cap M) = \emptyset$ a inkluze $f(P(a,\delta)\cap M) \subset U(A,\varepsilon)$ by platila pro každé A a $\varepsilon > 0$. Cokoli by pak bylo limitou $f(x)$ v a, což není šikovná definice. Proto se požaduje, aby a byl hromadným bodem M.

Tato definice zobecňuje limitu posloupnosti: když posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ chápeme jako funkci $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pak zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} a(x)\ ,$$

existuje-li alespoň jedna strana.

- ∗ spojitost funkce v bodˇe a na intervalu

Definice (spojitost funkce v bodě). *Nechť $f: M \to \mathbb{R}$, $a \in M$. Pak řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, když*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \; f(U(a,\delta)\cap M) \subset U(f(a),\varepsilon)\ .$$

Jinými slovy, spojitost $f(x)$ v a znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \; x \in M,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon\ .$$

Dostatečně malá změna v argumentu funkce f tedy způsobí jen (předem omezenou) malou změnu funkční hodnoty.

Rozebereme souvislost s limitou. Když $a \in M$ není hromadným bodem množiny $M\backslash\{a\}$, čili $U(a,\delta)\cap M = \{a\}$ pro nějaké $\delta > 0$, postulovali jsme v hořejší definici, že $\lim_{x\to a} f(x)$ není definovaná. Nicméně v této situaci podle právě uvedené definice je stále $f(x)$ spojitá v a. Je-li $a \in M$ hromadným bodem množiny $M\backslash\{a\}$, pak spojitost $f(x)$ v a znamená přesně, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ .$$

Definuje se i jednostranná spojitost: když $a \in M$, $f: M \to \mathbb{R}$ a

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0: \; f(U^+(a,\delta)\cap M) \subset U(f(a),\varepsilon)\ ,$$

pak řekneme, že $f(x)$ je v a *zprava spojitá*. Podobně pro spojitost zleva.

- ∗ derivace funkce v bodˇe

Definice (derivace funkce). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ a $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. Derivace funkce f v bodě a je hodnota limity*

$$f'(a) := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(když tato limita existuje).

Jednostranné derivace $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ definujeme zřejmým způsobem pomocí limity zleva a limity zprava. Hodnota derivací $f'(a)$, $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ může být i nevlastní a platí ekvivalence

$$f'(a) = A \iff f'_-(a) = A \,\&\, f'_+(a) = A\,.$$

Nechť $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ (pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$). Je-li f v a spojitá, je v okolí a funkce f dobře aproximována konstantní funkcí $g(x) = f(a)$. Těsněji lze aproximovat pomocí tečny.

- ∗ Taylor˚uv polynom

Definice (Taylorův polynom). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a existuje vlastní n-tá derivace $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ (pro $n = 0$ to chápeme jako požadavek spojitosti f v a). Taylorů polynom řádu n funkce f v bodě a je polynom*

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) \;&:=\; \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &=\; f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}\,. \end{aligned}$$

Všimněme si, že platí identita

$$\left(T_n^{f,a}(x)\right)' = T_{n-1}^{f',a}(x)$$

(takže $(T_n^{f,a}(x))^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$). Ta nám umožní dokázat, že $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n, který aproximuje f v okolí $x = a$ až do řádu n.