

Relaxační algoritmy

Co je relaxace? Je Dijkstra relaxační algoritmus?

Co se stane když spustíme Dijkstru na graf se zápornými hranami?

Jak se liší Bellman-Ford a Dijkstra? Co když je pustíme na grafu s nezápornými délkami hran?

Ukažte, že každé ohodnocení vrcholu odpovídá délce nějakého sledu z v_0 .

Relaxujme v n fázích všechny vrcholy. Bude výsledek korektní?

Ukažte, že ať už vybíráme otevřené vrcholy k relaxaci jakkoliv, relaxační algoritmus skončí právě když graf neobsahuje záporný cyklus.

Bellman-Ford

Záporné cykly Jak pomocí Bellman-Forda poznáme, že (souvislý) graf obsahuje záporný cyklus? Jak nějaký takový cyklus najít?

Hranová relaxace Původní Bellman-Fordův algoritmus relaxoval hrany místo vrcholů. Definujte hranovou relaxaci, dokažte korektnost a určete časovou složitost takového algoritmu.

Floyd-Warshall

Ukažte, že každá hodnota vrcholu odpovídá délce nějakého sledu.

Ukažte, že každá hodnota odpovídá dokonce délce nějaké cesty. Hint: využijeme toho, že vzdálenost v grafu je metrika.

Ukažte, že F-W nalezne všechny cesty délky nejvýše 2.

Ukažte, že do konce i -té fáze uvaží F-W všechny nejkratší cesty obsahující pouze vrcholy s indexy $\leq i$.

Prostorová složitost F-W je $\mathcal{O}(n^3)$ protože vytvoří $n + 1$ matic vzdáleností. Prostor můžeme snadno snížit na $\mathcal{O}(n^2)$ pamatováním pouze dvou matic, jak?

Co se stane, když budeme ignorovat to, že stavíme několik matic a budeme používat pouze jednu?

Jak rekonstruovat nejkratší cestu?

Domácí úkol

První část

Chtěli bychom algoritmus, který vypíše všechny nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy. Ukažte, že takto definovaný problém nemůže mít asymptoticky lepší než exponenciální algoritmus, tzn. problém je z pohledu časové složitosti $2^{\Omega(n)}$.

Druhá část

Na burze se obchoduje s n měnami. V každý okamžik se dá situace popsat pomocí cenové matice C , kde $C_{i,j}$ udává, kolik jednotek j -té měny dostaneme za jednu jednotku i -té měny.

Plán na zbohatnutí je jasný. Chceme si napsat algoritmus, který dostane matici C a vyhodnotí zda začít s nějakým obnosem českých korun a nějakou posloupností směn skončit s větším počtem českých korun. Pokud taková posloupnost směn existuje, chceme ji popsat jinému programu, který umí příslušné směny provést.

Jak ověřit, že posloupnost směn existuje? Jak rekonstruovat cestu? Není třeba explicitně psát pseudokód, popište řešení jako adaptaci algoritmů známých z přednášek. Ukažte korektnost (v sázce jsou celé vaše úspory) a časovou složitost - opřete se při tom o vlastnosti známých algoritmů.

Bonusová část

Pro jaké třídy grafů platí, že na nich Dijkstra je asymptoticky optimální? Zdůvodněte, alespoň neformálně. Uvažujme třídy obsahující souvislé grafy neomezené velikosti. Třída obsahuje pouze grafy, neomezuje nijak nastavení délek hran.