1. Viz řešení písemky z 4.5.2004. Je důležité si uvědomit, že se snažíme nejen, aby nová gramatika generovala vše co gramatika původní, ale také to, aby negenerovala nic navíc. Důkaz by měl ukázat jak k odvození v nové gramatice nalezneme odvození v gramatice původní (permutace provádění pravidel tak, abychom dostali posloupnost bloků použitých pravidel, kde každý blok odpovídá jednomu původnímu pravidlu).

2. Jednoduchou úvahou zjistíme, že se jedná o jazyk slov obsahujících buď $aabb$ nebo $bbaa$. Takový automat dostaneme konstrukcí dosažitelných stavů kartézského součinu automatu přijímajícího slova obsahující $aabb$ a automatu přijímajícího slova obsahující $bbaa$ (liší se jen přehozením písmen $a \leftrightarrow b$). Vzniklý automat můžeme již při konstrukci zredukovat ztotožněním koncových stavů (v nichž automat setrvává). Standardním postupem zkontrolujeme, že automat je již zredukovaný (tabulka viz příklady z předchozích let).

3. To že pumping lemma vyvrátí jak regularitu tak bezkontextovost jazyka $\{a^{n^2}\}$ nebude těžké ukázat. Je-li k delší než maximální možný součet délek pumpovaných částí v dostatečně dlouhém slově $x \in \{a^{n^2}\}$, pak nutně pumpováním dostáváme posloupnost slov, jejichž rozdíl délek je nejvýš k. Vezmeme-li v této posloupnosti slovo $y = a^{m^2}$ delší než k^2 (pak nutně následující prvek do $\{a^{n^2}\}$ nepatří protože $(m+1)^2 - m^2 = 2m+1 > k$.

Nebudeme se proto pokoušet hledat gramatiku typu 3 či 2, pokusíme se nalézt gramatiku typu 1 tedy monotónní. Slova délky 0 či 1 vygenerujeme přímo, slova délky aspoň 2^2 budeme generovat „programem“. Nejprve vygenerujeme zarážky # a mezi nimi stejný počet symbolů $\rightarrow$ a $\leftarrow$ s tím, že $\leftarrow$ jsou vždy napravo od $\rightarrow$. Pak necháme postupně „šipky“ běžet směrem, kam ukazují s tím, že při každém překřížení šipek vznikne neterminál A, který se nakonec přemění v a. Šipky mohou beztrestně přeskakovat A, přeskočením zarážky # je šipka nahrazena aa. Zarážky # mohou přeskakovat A, ale přeskokem se z A stává a. Dvě sousedící zarážky ## jsou nahrazeny $aaaa$ (existuje mnoho jiných rovnocenných programů/gramatik):

$$
\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & \lambda | a | \#\# | \# S' \# \\
S' & \rightarrow & \rightarrow S' \leftarrow | \rightarrow\leftarrow \\
\rightarrow\leftarrow & \rightarrow & \leftarrow A \rightarrow \\
\rightarrow A & \rightarrow & A \rightarrow \\
A \leftarrow & \rightarrow & \leftarrow A \\
\# \leftarrow & \rightarrow & aa\# \\
\rightarrow \# & \rightarrow & \# aa \\
\# A & \rightarrow & a\# \\
A\# & \rightarrow & \# a \\
\#\# & \rightarrow & aaaa
\end{array}
$$

Kolik znikne symbolů a? Je-li nejprve vygenerováno k dvojic šipek, pak při jejich křížení vznikne k^2 neterminálů A. Každá šipka zanikne přeskočením zarážky, takto vznikne $4k$ písmen a. Z každého A vznikne přeskokem zarážky a, a s dvojicí zarážek změněnou na $aaaa$ to je dohromady $(k+2)^2$ písmen a.

4. Automat s jedním kamínkem … převod na nedeterministický (jednocestný) automat:

Začneme jinou konstrukcí převodu z nedeterministického dvoucestného automatu A_0 na jednocestný nedeterministický automat A:

Definujeme směrové přechodové funkce. Jsou to funkce závislé na jednostranném kontextu pozice ve vstupním slově. $\delta_w^{\leftarrow}$ a $\delta_w^{\rightarrow}$ jako funkce $Q_0 \rightarrow P(Q_0)$ následovně: $q' \in \delta_w^{\rightarrow}(q)$ právě když existuje výpočet dvoucestného automatu vzniklého z A_0 náhradou q za počáteční stav na slově w, který toto slovo opustí vlevo ve stavu q'. Obdobně $q' \in \delta_w^{\leftarrow}(q)$ právě když existuje výpočet dvoucestného automatu vzniklého z A_0 náhradou q za počáteční stav a změnou směrů pohybu na slově w^R, který toto slovo opustí vlevo ve stavu q'. Triviálně $\delta_\lambda^{\leftarrow}$ a $\delta_\lambda^{\rightarrow}$ jsou konstantně $\emptyset$.

Stavem automatu A bude trojice znaků abecedy rozšířené o blank $a^{\leftarrow}$, a, $a^{\rightarrow}$, dvojice směrových přechodových funkcí $\delta^{\leftarrow}$, $\delta^{\rightarrow}$ a množina stavů S automatu A_0 uzavřená jak na $\bigcup_{q\in S} \delta_{A_0}(q,a)^\wedge\{\rightarrow\} \circ \delta^{\rightarrow}$, tak na $\bigcup_{q\in S} \delta_{A_0}(q,a)^\wedge\{\leftarrow\} \circ \delta^{\leftarrow}$.

Velikost množiny stavů automatu A je konečná — přesněji menší než

$$\Sigma^3 \cdot \left(2^{|Q_0|}\right)^{|Q_0|} \cdot \left(2^{|Q_0|}\right)^{|Q_0|} \cdot 2^{|Q_0|} = \Sigma^3 \cdot 2^{2|Q_0|^2+|Q_0|}.$$

Interpretace významu stavu automatu v přijímacím výpočtu je následující: Je-li hlava automatu pod k-tým písmenem slova $x_1x_2\dots x_n$, pak $a^{\leftarrow} = x_{k-1}$, $a = x_k$, $a^{\rightarrow} = x_{k+1}$, $\delta^{\leftarrow} = \delta^{\leftarrow}_{x_1\dots x_{k-1}}$, $\delta^{\rightarrow} = \delta^{\rightarrow}_{x_{k+1}\dots x_n}$ a S je množina stavů, do nichž se automat A_0 může dostat na k-té pozici slova $x_1 \dots x_n$.

Stav automatu A je počáteční, pokud $a^{\leftarrow}$ je blank, $\delta^{\leftarrow}$ je konstantně $\emptyset$ a S je uzávěrem množiny počátečních stavů automatu A_0 vůči $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_0}(q,a)\hat{}\{\rightarrow\}\circ\delta^{\rightarrow}$.

Stav automatu A je koncový, pokud $a^{\rightarrow}$ je blank, $\delta^{\rightarrow}$ je konstantně $\emptyset$ a $(\star)$: $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_0}(q,a)\hat{}\{\rightarrow\}$ obsahuje koncový stav.

Přechodová funkce automatu A:

Musíme stanovit, za jakých podmínek pro stavy $(a_1^{\leftarrow},a_1,a_1^{\rightarrow},\delta_1^{\leftarrow},\delta_1^{\rightarrow},S_1)$, $(a_2^{\leftarrow},a_2,a_2^{\rightarrow},\delta_2^{\leftarrow},\delta_2^{\rightarrow},S_2)$ automatu A platí $(a_2^{\leftarrow},a_2,a_2^{\rightarrow},\delta_2^{\leftarrow},\delta_2^{\rightarrow},S_2)\in\delta_A((a_1^{\leftarrow},a_1,a_1^{\rightarrow},\delta_1^{\leftarrow},\delta_1^{\rightarrow},S_1),x)$:

Nutnou podmínkou je $x=a_1=a_2^{\leftarrow}$, $a_1^{\rightarrow}=a_2$.

Další nutná podmínka je kompatibilita $\delta_2^{\leftarrow}$, $\delta_1^{\leftarrow}$ a a_1 a kompatibilita $\delta_1^{\rightarrow}$, $\delta_2^{\rightarrow}$ a a_2: Předpokládáme, že pro nějaké $w^{\leftarrow}$ je $\delta_1^{\leftarrow}=\delta_{w^{\leftarrow}}^{\leftarrow}$ a ověřujeme, že pro totéž $w^{\leftarrow}$ je $\delta_2^{\leftarrow}=\delta_{w^{\leftarrow}\cdot a_1}^{\leftarrow}$. (obdobně předpokládáme, že pro nějaké $w^{\rightarrow}$ je $\delta_2^{\rightarrow}=\delta_{w^{\rightarrow}}^{\rightarrow}$ a ověřujeme, že $\delta_1^{\rightarrow}=\delta_{a_2\cdot w^{\rightarrow}}^{\rightarrow}$). Tato podmínka znamená $q''\in\delta_2^{\leftarrow}(q')$ právě když pro uzávěr S množiny $\{q'\}$ vůči $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_0}(q,a_1)\hat{}\{\leftarrow\}\circ\delta_1^{\leftarrow}$ je $q''\in\bigcup_{q\in S}\delta_{A_0}(q,a_1)\hat{}\{\rightarrow\}$ (obdobně $q''\in\delta_1^{\rightarrow}(q')$ právě když pro uzávěr S množiny $\{q'\}$ vůči $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_0}(q,a_2)\hat{}\{\rightarrow\}\circ\delta_2^{\rightarrow}$ je $q''\in\bigcup_{q\in S}\delta_{A_0}(q,a_2)\hat{}\{\leftarrow\}$). Poslední nutnou podmínkou je vzájemná kompatibilita S_1, a_1, S_2, a_2 a $\delta_2^{\rightarrow}$ (a kompatibilita S_2, a_2, S_1, a_1 a $\delta_1^{\leftarrow}$). Musí být S_2 uzávěrem množiny $\bigcup_{q\in S_1}\delta_{A_0}(q,a_1)\hat{}\{\rightarrow\}$ vůči $\bigcup_{q\in S_2}\delta_{A_0}(q,a_2)\hat{}\{\rightarrow\}\circ\delta_2^{\rightarrow}$ (a S_1 musí být uzávěrem množiny $\bigcup_{q\in S_2}\delta_{A_0}(q,a_2)\hat{}\{\leftarrow\}$ vůči $\bigcup_{q\in S_1}\delta_{A_0}(q,a_1)\hat{}\{\leftarrow\}\circ\delta_1^{\leftarrow}$).

Pokud existuje přijímací výpočet automatu A, pak existuje i přijímací výpočet automatu A_0: Přechodové funkce garantují, že znaky abecedy byly uhodnuty v souladu s interpretací. Přechodové funkce $\delta^{\leftarrow}$ zakódované ve stavech v průběhu výpočtu odpovídají uvedené interpretaci, protože počáteční stav jí odpovídá a kompatibilita garantovaná přechodovou funkcí zajišťuje indukční krok dle vzdálenosti hlavy od počátku slova. Obdobně přechodové funkce $\delta^{\rightarrow}$ zakódované ve stavech v průběhu výpočtu odpovídají uvedené interpretaci, protože koncový stav jí odpovídá a kompatibilita garantovaná přechodovou funkcí zajišťuje indukční krok dle vzdálenosti od konce slova. Vzhledem k tomu, že množiny S vznikají jako uzávěry z množiny počátečních stavů stroje A_0 kompatibilně s přechodovou funkcí stroje A_0 i se směrovými přechodovými funkcemi odpovídajícími vstupnímu slovu a vzhledem k vlastnosti $(\star)$ koncového stavu stroje A, přijímací výpočet automatu A garantuje existenci přijímacího výpočtu stroje A_0.

Na druhou stranu, existuje-li přijímací výpočet stroje A_0, pak stavy, uhodnuté v souladu s interpretací budou na sebe dle přechodové funkce navazovat a slovo bude přijato strojem A.

Poznámka: Funkci $\delta^{\leftarrow}$ a uzavřenost „doleva“ jsme v důkazu nepotřebovali. Indukcí zleva je vlastnost množin S možno dokázat i bez nich (poté co zprava ověříme interpretaci $\delta^{\rightarrow}$).

Nyní máme již jednodušší část za sebou a můžeme se pustit do převodu dvoucestného automatu A_1 s jedním kamínkem na jednocestný automat A:

Nejprve definice dvoucestného automatu s kamínkem: Přechodová funkce je $(Q\times\{0,1\})\times(\Sigma\times\{0,1\})\rightarrow P((Q\times\{0,1\})\times\{0,1\}\times\{\leftarrow,\rightarrow\})$ s omezením, že pro $((q',k_1'),k_2',s)\in\delta((q,k_1),(a,k_2))$ platí $k_1+k_2=k_1'+k_2'\in\{0,1\}$. Interpretace je taková, že stroj může na nějaké políčko položit kamínek a když se na políčko vrátí, kamínek tam bude ležet. Stroj dokáže reagovat jak na to, že má kamínek u sebe tak na to, že leží na daném políčku. Počáteční konfigurace je $Q_0\times\{1\}$, v koncové konfiguraci stroj kamínek mít nemusí.

Zjednodušení zápisu: $Q'=Q\times\{0,1\}$ přechodová funkce je $(Q'\times\Sigma\times\{0,1\})\rightarrow P(Q'\times\{0,1\}\times\{\leftarrow,\rightarrow\})$, s omezením, že pro $(q',k',s)\in\delta(q,a,k)$ platí $k'\le k\in\{0,1\}$ a ($k=k_1+k_2$ a $k'=k_2'$) dle původní definice. Interpretace je opět taková, že stroj může na nějakém políčku zanechat kamínek ($k'=1$) a když se na políčko vrátí, kamínek tam bude ležet. Zápis nedokáže rozlišit, zda má kamínek u sebe či leží na daném políčku.

Nechť A_1 je dvoucestný automat s kamínkem zapsaný dle zjednodušeného zápisu.

„Kamínkový výpočet“ jsou ty kroky výpočtu, kdy je kamínek zdvižen. Definujeme kamínkové přechodové funkce. Jsou to funkce $\kappa_{(w^{\leftarrow},a,w^{\rightarrow})}$ závislé na oboustranném kontextu pozice ve vstupním slově jako funkce $Q_1\rightarrow P(Q_1)$ následovně: $(q',s)\in\kappa(q)$, pokud se nedeterministický stroj A_1 může poprvé vydat s kamínkem ve směru s ve stavu q' (odpovídá nejbližšímu možnému kroku nějakého „kamínkového výpočtu“).

Na kontextu $(w^{\leftarrow},a,w^{\rightarrow})$ závisí výpočet, kdy se stroj A_1 pohybuje bez kamínku. Dobrá zpráva je, že výpočet bez kamínku stroje A_1 můžeme uhádnout tak, jak jsme jej hádali při simulaci stroje A_0 uhodnutím bezkamínkových směrových přechodových funkcí $\delta^{\leftarrow}$, $\delta^{\rightarrow}$. Kamínkovou přechodovou funkci $(q'',s)\in\kappa(q')$ jsme při znalosti $\delta_{w^{\leftarrow}}^{\leftarrow}$, a a $\delta_{w^{\rightarrow}}^{\rightarrow}$ již schopni lokálně dodefinovat: Nechť S je současný uzávěr

$\{q'\}$ vůči $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a,1)^\wedge\{(\to,1)\}\circ\delta^{\to}_{w^{\to}}$ a $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a,1)^\wedge\{(\leftarrow,1)\}\circ\delta^{\leftarrow}_{w^{\leftarrow}}$, pak nutnou a postačující podmínkou je $(q'',s,0)\in\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a,1)$. Formálně můžeme zavést značení $\kappa(q')=K(\delta^{\to}_{w^{\to}},a,\delta^{\leftarrow}_{w^{\leftarrow}})(q')$. Kde funkce $K:(2^{Q_1})^{Q_1}\times\Sigma\times(2^{Q_1})^{Q_1}\to(2^{Q_1\times\{\leftarrow,\to\}})^{Q_1}$.

Simulace „kamínkového výpočtu“ bude probíhat obdobně jako simulace automatu A_0. Potíž je v tom, že kamínkové směrové přechodové funkce $\kappa^{\leftarrow}$, $\kappa^{\to}$ závisejí na proměnných přechodových funkcích κ (které závisejí na oboustranném kontextu). Definujeme $\kappa^{\to}_{\kappa_1,\ldots,\kappa_\ell}$ pro libovolný seznam přechodových funkcí κ_i (nemusí odpovídat žádnému levému kontextu). Definujeme $q'\in\kappa^{\to}_{\{\kappa_i\}}(q)$ právě když existuje výpočet dvoucestného automatu s počátečním stavem q na slově délky i který se na i-té pozici slova řídí přechodovou funkcí κ_i a který toto slovo opustí vlevo ve stavu q'. Symetricky je definováno $\kappa^{\leftarrow}_{\{\kappa_i\}}$.

Simulaci celého výpočtu můžeme rozložit na část, kde je simulován kamínkový výpočet a na část, od posledního položení kamínku (pokud je kamínek položen na konci výpočtu).

Stavem automatu A bude trojice znaků abecedy rozšířené o blank $a^{\leftarrow}$, a, $a^{\to}$, dvojice směrových přechodových funkcí $\delta^{\leftarrow}$, $\delta^{\to}$, (to určuje jednoznačnou kamínkovou přechodovou funkci $\kappa=K(\delta^{\leftarrow},a,\delta^{\to})$), dvojice kamínkových směrových funkcí $\kappa^{\leftarrow}$, $\kappa^{\to}$, množina stavů $S^\bullet$ automatu A_1 uzavřená jak na $\bigcup_{q\in S}\kappa(q)^\wedge\{\to\}\circ\kappa^{\to}$, tak na $\bigcup_{q\in S}\kappa(q)^\wedge\{\leftarrow\}\circ\kappa^{\leftarrow}$, směr s k případnému místu posledního položení kamínku z $\{\leftarrow,\circ,\bullet,\to\}$, a množina stavů S automatu A_1 následující vlastnosti v závislosti na s: Pro $s=\bullet$ je $S=\emptyset$, pro $s=\circ$ je S uzávěrem $S^\bullet$ na $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a)^\wedge\{(\to,1)\}\circ\delta^{\to}$, tak na $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a)^\wedge\{(\leftarrow,1)\}\circ\delta^{\leftarrow}$ pro $s=\circ$, pro $s=\leftarrow$ je S uzavřená na $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a)^\wedge\{(\to,0)\}\circ\delta^{\to}$ a pro $s=\to$ je S uzavřená na $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a)^\wedge\{(\leftarrow,0)\}\circ\delta^{\leftarrow}$ pro $s=\to$.

Velikost množiny stavů automatu A je konečná — přesněji menší než

$$\Sigma^3\cdot\left(2^{|Q_1|}\right)^{|Q_1|}\cdot\left(2^{|Q_1|}\right)^{|Q_1|}\cdot\left(2^{|Q_1|}\right)^{|Q_1|}\cdot\left(2^{|Q_1|}\right)^{|Q_1|}\cdot 2^{|Q_1|}\cdot 4\cdot 2^{|Q_1|}=4\Sigma^3\cdot 2^{4|Q_1|^2+2|Q_1|}.$$

Zaveďme značení $\kappa_{x_1\ldots x_n|k}=\kappa_{x_1\ldots x_{k-1},x_k,x_{k+1}\ldots x_n}$.

Interpretace významu stavu automatu v přijímacím výpočtu je následující: Je-li hlava automatu pod k-tým písmenem slova $w=x_1x_2\ldots x_n$, pak $a^{\leftarrow}=x_{k-1}$, $a=x_k$, $a^{\to}=x_{k+1}$, $\delta^{\leftarrow}=\delta^{\to}_{x_1\ldots x_{k-1}}$, $\delta^{\to}=\delta^{\to}_{x_{k+1}\ldots x_n}$, (čemuž odpovídá jednoznačně $\kappa=K(\delta^{\leftarrow},a,\delta^{\to})=\kappa_{w|k}$), $\kappa^{\leftarrow}=\kappa^{\leftarrow}_{\kappa_{w|1},\ldots\kappa_{w|k-1}}$, $\kappa^{\to}=\kappa^{\to}_{\kappa_{w|k+1},\ldots\kappa_{w|n}}$, $S^\bullet$ je množina stavů kamínkového výpočtu, do nichž se automat A_1 může dostat na k-té pozici slova $x_1\ldots x_n$. Na závěr s a S odpovídající jednomu konkrétnímu kamínkovému výpočtu, jenž je součástí přijímacího výpočtu automatu A_1: s je $\bullet$ pokud výpočet přijímá s kamínkem, s je $\leftarrow$ končí-li výpočet s kamínkem položeným na pozici $<k$, s je $\circ$ končí-li výpočet s kamínkem položeným na pozici k a s je $\to$ končí-li výpočet s kamínkem položeným na pozici $>k$, S je množina stavů, do nichž se automat A_1 mohl dostat na k-té pozici slova $x_1\ldots x_n$ poté, co naposledy položil kamínek ve výpočtu, který se již nevrátí na políčko, na němž na konci výpočtu skončil kamínek.

Stav automatu A je počáteční, pokud $a^{\leftarrow}$ je blank, $\delta^{\leftarrow}$ je konstantně $\emptyset$, $\kappa^{\leftarrow}$ je konstantně $\emptyset$ a $S^\bullet$ je uzávěrem množiny počátečních stavů automatu A_1 vůči $\bigcup_{q\in S^\bullet}\kappa(q)^\wedge\{\to\}\circ\kappa^{\to}$ a $s\in\{\circ,\bullet,\to\}$.

Stav automatu A je koncový, pokud $a^{\to}$ je blank, $\delta^{\to}$ je konstantně $\emptyset$, $\kappa^{\to}$ je konstantně $\emptyset$ a buď $s=\bullet$ a $(\star^\bullet)$: $\bigcup_{q\in S^\bullet}\kappa(q)^\wedge\{\to\}$ obsahuje koncový stav automatu A_1 nebo $s\in\{\leftarrow,\circ\}$ a $(\star)$: $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a)^\wedge\{(\to,0)\}$ obsahuje koncový stav automatu A_1.

Přechodová funkce automatu A:

Musíme stanovit, za jakých podmínek pro dané stavy $(a_1^{\leftarrow},a_1,a_1^{\to},\delta_1^{\leftarrow},\delta_1^{\to},\kappa_1,\kappa_1^{\leftarrow},\kappa_1^{\to},S_1^\bullet,s_1,S_1)$, $(a_2^{\leftarrow},a_2,a_2^{\to},\delta_2^{\leftarrow},\delta_2^{\to},\kappa_2,\kappa_2^{\leftarrow},\kappa_2^{\to},S_2^\bullet,s_2,S_2)$ platí $(a_2^{\leftarrow},a_2,a_2^{\to},\delta_2^{\leftarrow},\delta_2^{\to},\kappa_2,\kappa_2^{\leftarrow},\kappa_2^{\to},S_2^\bullet,s_2,S_2)\in\delta_A((a_1^{\leftarrow},a_1,a_1^{\to},\delta_1^{\leftarrow},\delta_1^{\to},\kappa_1,\kappa_1^{\leftarrow},\kappa_1^{\to},S_1^\bullet,s_1,S_1),x)$:

Nutnou podmínkou je $x=a_1=a_2^{\leftarrow}$, $a_1^{\to}=a_2$.

Další nutná podmínka je kompatibilita $\delta_2^{\leftarrow}$, $\delta_1^{\leftarrow}$ a a_1 a kompatibilita $\delta_1^{\to}$, $\delta_2^{\to}$ a a_2: Předpokládáme, že pro nějaké $w^{\leftarrow}$ je $\delta_1^{\leftarrow}=\delta^{\leftarrow}_{w^{\leftarrow}}$ a ověřujeme, že pro totéž $w^{\leftarrow}$ je $\delta_2^{\leftarrow}=\delta^{\leftarrow}_{w^{\leftarrow}\cdot a_1}$. (obdobně předpokládáme, že pro nějaké $w^{\to}$ je $\delta_2^{\to}=\delta^{\to}_{w^{\to}}$ a ověřujeme, že $\delta_1^{\to}=\delta^{\to}_{a_2\cdot w^{\to}}$). Tato podmínka znamená $q''\in\delta_2^{\leftarrow}(q')$ právě když pro uzávěr S množiny $\{q'\}$ vůči $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a_1)^\wedge\{\leftarrow\}\circ\delta_1^{\leftarrow}$ je $q''\in\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a_1)^\wedge\{\to\}$ (obdobně $q''\in\delta_1^{\to}(q')$ právě když pro uzávěr S množiny $\{q'\}$ vůči $\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a_2)^\wedge\{\to\}\circ\delta_2^{\to}$ je $q''\in\bigcup_{q\in S}\delta_{A_1}(q,a_2)^\wedge\{\leftarrow\}$).

Další nutná podmínka je kompatibilita $\kappa_2^{\leftarrow}$, $\kappa_1^{\leftarrow}$ a κ_1 a kompatibilita $\kappa_1^{\to}$, $\kappa_2^{\to}$ a κ_2: Předpokládáme, že pro nějaké slovo funkcí $k^{\leftarrow}$ je $\kappa_1^{\leftarrow}=\kappa^{\leftarrow}_{k^{\leftarrow}}$ a ověřujeme, že pro totéž $k^{\leftarrow}$ je $\kappa_2^{\leftarrow}=\kappa^{\leftarrow}_{k^{\leftarrow}\cdot\kappa_1}$. (obdobně předpokládáme, že pro nějaké slovo funkcí $k^{\to}$ je $\delta_2^{\to}=\delta^{\to}_{k^{\to}}$ a ověřujeme, že $\delta_1^{\to}=\delta^{\to}_{\kappa_2\cdot k^{\to}}$). Tato podmínka znamená $q''\in\kappa_2^{\leftarrow}(q')$ právě když pro uzávěr S množiny $\{q'\}$ vůči $\bigcup_{q\in S}\kappa_1(q)^\wedge\{\leftarrow\}\circ\kappa_1^{\leftarrow}$ je $q''\in\bigcup_{q\in S}\kappa_1(q)^\wedge\{\to\}$ (obdobně $q''\in\kappa_1^{\to}(q')$ právě když pro uzávěr S množiny $\{q'\}$ vůči $\bigcup_{q\in S}\kappa_2(q)^\wedge\{\to\}\circ\kappa_2^{\to}$ je $q''\in\bigcup_{q\in S}\kappa_2(q)^\wedge\{\leftarrow\}$).

Další nutnou podmínkou je vzájemná kompatibilita $S_1^\bullet$, κ_1, $S_2^\bullet$, κ_2 a $\kappa_2^\rightarrow$ (a kompatibilita $S_2^\bullet$, κ_2, $S_1^\bullet$, κ_1 a $\kappa_1^\leftarrow$). Musí být $S_2^\bullet$ uzávěrem množiny $\bigcup_{q\in S_1^\bullet} \kappa_1(q)\hat{}\{\rightarrow\}$ vůči $\bigcup_{q\in S_2^\bullet} \kappa_2(q)\hat{}\{\rightarrow\} \circ \kappa_2^\rightarrow$ (a $S_1^\bullet$ musí být uzávěrem množiny $\bigcup_{q\in S_2^\bullet} \kappa_2(q)\hat{}\{\leftarrow\}$ vůči $\bigcup_{q\in S_1^\bullet} \kappa_1(q)\hat{}\{\leftarrow\} \circ \kappa_1^\leftarrow$).

Poslední nutnou podmínkou je vzájemná kompatibilita s_1, S_1, a_1, s_1, S_2, a_2, $\delta_2^\rightarrow$ a $\delta_1^\leftarrow$. Je-li $s_1 = \circ$, pak musí být $s_2 =\leftarrow$ a S_2 („kompatibilita doprava") je uzávěrem množiny $\bigcup_{q\in S_1} \delta_{A_1}(q, a_1)\hat{}\{(\rightarrow, 1)\}$ vůči $\bigcup_{q\in S_2} \delta_{A_1}(q, a_2)\hat{}\{(\rightarrow, 0)\} \circ \delta_2^\rightarrow$. Je-li $s_2 = \circ$, pak musí být $s_1 =\rightarrow$ a S_1 („kompatibilita doleva") musí být uzávěrem množiny $\bigcup_{q\in S_2} \delta_{A_1}(q, a_2)\hat{}\{(\leftarrow, 1)\}$ vůči $\bigcup_{q\in S_1} \delta_{A_1}(q, a_1)\hat{}\{(\leftarrow, 0)\} \circ \delta_1^\leftarrow$) Není-li ani jedno z s_1, s_2 rovno $\circ$, pak $s_1 = s_2$ a je-li $s_1 = s_2 =\leftarrow$, pak („kompatibilita doprava") S_2 je uzávěrem množiny $\bigcup_{q\in S_1} \delta_{A_1}(q, a_1)\hat{}\{(\rightarrow, 0)\}$ vůči $\bigcup_{q\in S_2} \delta_{A_1}(q, a_2)\hat{}\{(\rightarrow, 0)\} \circ \delta_2^\rightarrow$. a je-li $s_1 = s_2 =\rightarrow$, pak („kompatibilita doleva") S_1 musí být uzávěrem množiny $\bigcup_{q\in S_2} \delta_{A_1}(q, a_2)\hat{}\{(\leftarrow, 0)\}$ vůči $\bigcup_{q\in S_1} \delta_{A_1}(q, a_1)\hat{}\{(\leftarrow, 0)\} \circ \delta_1^\leftarrow$).

Poznámka: Vzhledem k tomu, že dle naší definice přijímací výpočet končí na pravém konci slova, není důvod zavádět stavy kde $S \neq \emptyset \wedge s =\rightarrow$ (informace, do jakých stavů se stroj mohl dostat v nepřijímajícím výpočtu). A není ani potřeba hlídat „uzavřenost doleva".

Pokud existuje přijímací výpočet automatu A, pak existuje i přijímací výpočet automatu A_1:

Přechodové funkce garantují, že znaky abecedy byly uhodnuty v souladu s interpretací.

Přechodové funkce $\delta^\leftarrow$ zakódované ve stavech v průběhu výpočtu odpovídají uvedené interpretaci, protože počáteční stav jí odpovídá a kompatibilita garantovaná přechodovou funkcí zajišťuje indukční krok dle vzdálenosti hlavy od počátku slova. Obdobně přechodové funkce $\delta^\rightarrow$ zakódované ve stavech v průběhu výpočtu odpovídají uvedené interpretaci, protože koncový stav jí odpovídá a kompatibilita garantovaná přechodovou funkcí zajišťujě indukční krok dle vzdálenosti od konce slova.

Proto jsou jednoznačně dopočítávané κ určeny v souladu s interpretací a přechodové funkce $\kappa^\leftarrow$ zakódované ve stavech v průběhu výpočtu odpovídají uvedené interpretaci, protože počáteční stav jí odpovídá a kompatibilita garantovaná přechodovou funkcí zajišťuje indukční krok dle vzdálenosti hlavy od počátku slova. Obdobně přechodové funkce $\kappa^\rightarrow$ zakódované ve stavech v průběhu výpočtu odpovídají uvedené interpretaci, protože koncový stav jí odpovídá a kompatibilita garantovaná přechodovou funkcí zajišťujě indukční krok dle vzdálenosti od konce slova.

Vzhledem k tomu, že množiny $S^\bullet$ vznikají jako uzávěry z množiny počátečních stavů stroje A_1 kompatibilně s přechodovou funkcí stroje A_1, jsou i ony v souladu s interpretací a končí-li výpočet v koncovém stavu s $s = \bullet$, pak všechny stavy výpočtu obsahují $s = \bullet$ a přijímací výpočet automatu A garantuje existenci přijímacího výpočtu stroje A_1 končící se zdviženým kamínkem kvůli podmínce $(\star^\bullet)$. Končí-li výpočet v koncovém stavu s $s \in \{\leftarrow, \circ\}$, pak mezi stavy výpočtu musel být právě jeden stav s $s = \circ$ (před ním vždy $s =\rightarrow$ a za ním vždy $s =\leftarrow$) a vzhledem k tomu, že na této pozici S vzniká jako uzávěry z množiny stavů $S^\bullet$, dá se indukcí doprava dle vzdálenosti od této pozice ukázat, že S odpovídá interpretaci. K tomu je třeba využít uzavřenosti S a kompatibility „doprava" garantované přechodovou funkcí. Vzhledem k vlastnosti $(\star)$ koncového stavu pak stroj A_1 přijímá.

Na druhou stranu, existuje-li přijímací výpočet stroje A_1, pak stavy, uhodnuté v souladu s interpretací budou na sebe dle přechodové funkce navazovat a slovo bude přijato strojem A.