Silná Mengerova věta

Pro dvě množiny vrcholů A, B t.ž. neexistuje AB-separátor (množina vrcholů jejímž odebráním z grafu zaniknou všechny cesty mezi A a B) velikosti menší než s, potom existuje s (zcela) vrcholově disjunktních cest mezi A a B.

Příklad 1: Dokažte ze slabé Mengerovy věty alespoň za předpokladu, že graf je vrcholově s-souvislý. Navrhněte znění hranové verze a dokažte.

Příklad 2: Dokažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu libovolných k vrcholů leží na společné kružnici.

Vhodné nástroje: spor, indukce, Mengerova věta, Dirichletův princip

Dvojí počítání

Příklad 3: Ukažte platnost následujících identit:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = F(n+1)$$

Příklad 4: Profesor u zkoušky má připraveno $n+1$ témat různých obtížností. Student si vybere jedno téma o kterém bude mluvit. Profesor mu následně zadá jednu teoretickou a jednu početní otázku z nějakých (ne nutně různých) témat nižší obtížnosti. Z úvahy kolika způsoby může probíhat zkouška dokažte identitu

$$\sum_{i=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Příklad 5: Mějme pravidelný šestiúhelník o délce strany k vydlážděný jednotkovými rovnostrannými trojúhelníky (trojúhelníkovou mřížku). Nahlédněte, že počet perfektních párování sousedních trojúhelníků je roven počtu zobrazní $f : [k] \times [k] \to [k+1]$ t.ž. jsou neklesající v obou argumentech.

Příklad 6: Určete počet vrcholů rovinné kvadrangulace s f stěnami. Určete vztah pro rovinný graf jehož nejkratší cyklus má délku alespoň 4.

Silná Mengerova věta

Pro dvě množiny vrcholů A, B t.ž. neexistuje AB-separátor (množina vrcholů jejímž odebráním z grafu zaniknou všechny cesty mezi A a B) velikosti menší než s, potom existuje s (zcela) vrcholově disjunktních cest mezi A a B.

Příklad 1: Dokažte ze slabé Mengerovy věty alespoň za předpokladu, že graf je vrcholově s-souvislý. Navrhněte znění hranové verze a dokažte.

Příklad 2: Dokažte, že ve vrcholově k-souvislém grafu libovolných k vrcholů leží na společné kružnici.

Vhodné nástroje: spor, indukce, Mengerova věta, Dirichletův princip

Dvojí počítání

Příklad 3: Ukažte platnost následujících identit:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = F(n+1)$$

Příklad 4: Profesor u zkoušky má připraveno $n+1$ témat různých obtížností. Student si vybere jedno téma o kterém bude mluvit. Profesor mu následně zadá jednu teoretickou a jednu početní otázku z nějakých (ne nutně různých) témat nižší obtížnosti. Z úvahy kolika způsoby může probíhat zkouška dokažte identitu

$$\sum_{i=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Příklad 5: Mějme pravidelný šestiúhelník o délce strany k vydlážděný jednotkovými rovnostrannými trojúhelníky (trojúhelníkovou mřížku). Nahlédněte, že počet perfektních párování sousedních trojúhelníků je roven počtu zobrazní $f : [k] \times [k] \to [k+1]$ t.ž. jsou neklesající v obou argumentech.

Příklad 6: Určete počet vrcholů rovinné kvadrangulace s f stěnami. Určete vztah pro rovinný graf jehož nejkratší cyklus má délku alespoň 4.