Přednáška 1, 3. října 2014

Přednáška z Matematické analýzy I má pět částí:

1. Úvod, opakování, reálná čísla.
2. Limita nekonečné posloupnosti.
3. Nekonečné řady.
4. Limita funkce v bodě a spojitost funkce.
5. Derivace funkce.

Část 1: úvod, opakování, reálná čísla

Paradoxy nekonečna. Co analyzuje Matematická analýza? Nekonečné procesy a operace. Třeba nekonečné součty (kterým se spíše říká nekonečné řady). Například

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$$

a

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$$

nebo

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

a tudíž i

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}\ .$$

Úloha: *dokažte si první dvě rovnosti (první asi znáte ze střední školy) a ze třetí rovnosti (jejíž důkaz je obtížný) zkuste odvodit rovnost čtvrtou.*

Ale jak vlastně těch nekonečně mnoho čísel v uvedených příkladech sčítáme? Řadu čteme v uvedeném pořadí (zleva doprava) a vytváříme posloupnost částečných součtů (což jsou obyčejné konečné součty), například ve čtvrté rovnosti to je posloupnost

$$(1,\ 1-\tfrac{1}{4},\ 1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9},\ 1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16},\ \dots)=(1,\ \tfrac{3}{4},\ \tfrac{31}{36},\ \tfrac{115}{144},\ \dots)\ ,$$

a když se členy této posloupnosti neomezeně přibližují k nějakému číslu α, ve čtvrtém příkladu to nastává pro $\alpha = \pi^2/12$, definujeme součet dané nekonečné řady jako toto α. Čtyři uvedené příklady jsou hezké v tom, že v nich vlastně na pořadí čtení řady vůbec nezáleží. Dá se totiž dokázat:

> V uvedených čtyřech nekonečných řadách žádné zpřeházení sčítanců nezmění součet řady.

Znamená to tedy, například, že když vezmeme jakoukoli nekonečnou posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, jejíž členy a_k nějak probíhají převrácené čtverce (tj. každý člen je tvaru $a_k = 1/n^2$ pro nějaké $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ a každé číslo $1/n^2$ se v posloupnosti objeví právě jednou), pak se posloupnost částečných součtů

$$(a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \dots)$$

neomezeně přibližuje vždy k jednomu a témuž číslu $\pi^2/6$.

Může se ale stát, že zpřeházení sčítanců součet nekonečné řady změní? Může, nastává to třeba pro

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \log 2$$

nebo pro

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

(důkazy těchto dvou rovností nejsou snadné, ale minimálně ta první bude na konci semestru v naší moci). Jak ukázal *Bernhard Riemann (1826–1866)*, u těchto dvou nekonečných řad lze zpřeházením sčítanců součet libovolně změnit. Přesně to znamená, že, například, pro každé reálné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ (nebo i $\alpha = -\infty$ či $\alpha = +\infty$) existuje zpřeházení sčítanců v první řadě, tj. posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, jejíž členy a_k nějak probíhají čísla $1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots$, že se částečné součty $(a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots)$ neomezeně přibližují k zadanému číslu α. (Nebo lze zpřeházením vyrobit řadu bez součtu, jejíž posloupnost částečných součtů se chová chaoticky a k ničemu se neblíží.)

Pro první čtyři řady tedy při sčítání platí nekonečný komutativní zákon, ale poslední dvě řady tento zákon porušují. Jak to s ním u nekonečných řad přesně je se dozvíme ve třetí části přednášky. Uvedu ale ještě jeden příklad, který ukazuje, že nekonečné řady mohou porušovat i asociativní zákon sčítání. Když v libovolné obdélníkové tabulce, jejíž položky jsou čísla, sečteme položky v každém řádku a tyto řádkové součty pak sečteme, dostaneme stejný výsledek, jako když totéž provedeme se sloupci — výsledek je prostě součet všech položek v celé tabulce. Například v následující 3×3 tabulce jsou řádkové součty $-2, 6$ a 2, sečteno dává 6, totéž jako součet sloupcových součtů $3, 12$ a -9:

1	5	-8	-2
2	4	0	6
0	3	-1	2
3	12	-9	$6 \setminus 6$

Uvažme ale tabulku, která je nekonečná (řádky i sloupce jsou očíslovány přirozenými čísly $1, 2, \dots$) a která má na hlavní diagonále číslo 1, na diagonále nad ní číslo -1, a všude jinde nuly:

1	-1	0	0	0	$\dots$	0
0	1	-1	0	0	$\dots$	0
0	0	1	-1	0	$\dots$	0
0	0	0	1	-1	$\dots$	0
0	0	0	0	1	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
1	0	0	0	0	$\dots$	$1 \setminus 0$

Zde je každý řádkový součet nula a jejich součet je rovněž 0, první sloupcový součet ale je 1 a protože všechny další už jsou nulové, je součet sloupcových součtů roven 1. Sčítání přes řádky tedy u nekonečných tabulek může dát jiný výsledek než sčítání přes sloupce, $0 \neq 1$. Navíc jsou všechny uvažované součty fakticky konečné, kromě nul vždy sčítáme nanejvýš dva nenulové sčítance, což činí tento paradox ještě více znepokojivým. Asociativní zákon tedy obecně pro nekonečné součty neplatí — po přeskupení se součet může změnit (což se u konečných součtů nikdy nestane). I k tomuto paradoxu se vrátíme ve třetí části přednášky.

Co je to funkce? Matematická, nikoli politická! Stručně si to teď zopakujeme — z názvů částí přednášky je jasné, že to pro nás bude důležitý pojem. Jsou-li M a N nějaké množiny (konečné nebo nekonečné), jejich *kartézský součin* $M \times N$ je další množina

$$M \times N = \{(a, b) \mid a \in M, b \in N\}$$

sestávající přesně z těch uspořádaných dvojic (a, b), že a probíhá prvky první množiny M a b probíhá prvky druhé množiny N. *Binární relace R mezi M a N* je každá podmnožina R tohoto kartézského součinu,

$$R \subset M \times N \; .$$

Podobně se definují kartézské součiny více množin a relace s vyšší aritou (ternární, kvaternární, ...), mezi více než dvěma množinami. Důležité typy binárních relací jsou (částečná) uspořádání a relace ekvivalence, ale v analýze jsou nejdůležitější funkce. Řekneme, že R je *funkce (jiný termín je* zobrazení*) z M do N*, pokud

$$\forall a \in M \; \exists! b \in N : \; (a, b) \in R$$

— pro každý prvek a z M existuje právě jeden prvek b z N, že dvojice (a, b) leží v R. Nestane se tedy, že by nějaký $a \in M$ neměl přiřazen žádný prvek z N, ani že by měl přiřazen dva či více prvků z N. Funkce značíme obvykle f (g, h, ...) a místo $f \subset M \times N$ a $(a, b) \in f$ se používá značení

$$f : \; M \to N \;\; \text{a} \;\; f(a) = b \; .$$

Prvek a je *vzor* prvku b v zobrazení f a naopak b je *obraz* a. Množině M se říká *definiční obor (funkce f)* a N je *obor hodnot*.

Termín „posloupnost“ znamená rovněž funkci, s definičním oborem $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Takže $(a_1, a_2, \dots)$ s $a_n \in \mathbb{R}$ je zobrazení $a : \; \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kde místo $a(n)$ je zažité značení a_n. Funkce v množinovém pojetí se rovná svému grafu, například funkce cosinus, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo i $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, je

$$\cos = \{(x, \cos(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \; .$$

V analýze je funkce obvykle zadána vzorcem či formulí. Někdy je pak zapotřebí určit, jaký je přesně její definiční obor, protože pro některé numerické hodnoty nemusí být formule definovaná, třeba pro nulu ve jmenovateli nebo pro záporný argument logaritmu. Například

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3} : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

není úplně správný zápis funce (i když s určitou dávkou dobré vůle ho lze přijmout), neboť hodnoty $f(\sqrt{3})$ a $f(-\sqrt{3})$ vedou na dělení nulou a nejsou definované. Správný je zápis

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 3} : \; \mathbb{R} \backslash \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\} \to \mathbb{R} \; .$$

Funkce $f: M \to N$ je *prostá* (synonymum: *injektivní*), když $x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Jinými slovy, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Injektivní zobrazení tedy nikdy neposílá dva různé prvky na týž prvek. Řekneme, že zobrazení $f: M \to N$ je *zobrazení na* (synonymum: *surjektivní*), když $\forall y \in N\ \exists x \in M: f(x) = y$, jinými slovy, každý prvek v N má v f alespoň jeden vzor. *Bijektivní* (synonymum: *vzájemně jednoznačné*) zobrazení, krátce *bijekce*, je to, jež má obě vlastnosti, je prosté i na. Bijekce tedy páruje dohromady prvky v M s prvky v N tak, že každý prvek M i N se vyskytuje v právě jednom páru.

Úloha: *dokažte, že pro konečnou množinu M každé zobrazení $f: M \to M$, které je injektivní, už musí být na, a naopak.*

Pro nekonečnou M to ale nemusí platit. Například $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$, je prosté zobrazení, které není surjektivní.

Úloha: *(i) nalezněte zobrazení $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je na, ale ne prosté; (ii) nalezněte $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které je na a každé $n \in \mathbb{N}$ má nekonečně mnoho vzorů.*

Dva příklady matematických důkazů. Postup v matematickém důkazu ozřejmím dvěma příklady. První je důkaz indukcí a druhý důkaz sporem.

Tvrzení (Bernoulliova nerovnost). *Pro každé reálné číslo $x \geq -1$ a celé číslo $n \geq 0$ je pravda, že*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\ .$$

Důkaz. Indukcí podle exponentu n. Začátek indukce: nerovnost dokážu pro počáteční hodnotu $n = 0$. To je jasné, LS (levá strana) je $(1+x)^0 = 1$ a PS též $1 + 0x = 1$. Indukční krok: předpokládám platnost nerovnosti (resp. tvrzení, které indukcí dokazuju) pro danou hodnotu n a odvodím platnost pro o 1 zvětšenou hodnotu $n+1$. Postupuju takto:

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &\geq 1 + nx \\
(1+x)(1+x)^n &\geq (1+x)(1+nx) \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)x\ .
\end{aligned}$$

Předpoklad (1. řádek) jsem vynásobil (LS i PS) *nezáporným* číslem $1 + x$, což platnost nerovnosti zachová. Ve vzniklé nerovnosti je LS co potřebuju (tj. LS B. nerovnosti pro $n+1$), ale PS má navíc člen nx^2 (viz 2. a 3. řádek). Tento člen je ale naštěstí vždy nezáporný, $nx^2 \geq 0$, takže po jeho vypuštění se PS nezvětší a dostávám platnou nerovnost na 4. řádku, což je přesně B. nerovnost pro $n+1$. Tím je důkaz indukcí dokončen. Podle začátku indukce totiž B. nerovnost platí pro $n=0$. Podle ind. kroku tedy platí i pro $n=1$. Znovu podle ind. kroku tedy platí i pro $n=2$. A tak dál a dál, proběhneme celé $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ a B. nerovnost platí pro každé $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Několik poznámek. Historická: nerovnost se jmenuje po basilejském matematikovi *Jacobu Bernoullim (1655–1705).* V důkazu jsme obě strany nerovnosti násobili nezáporným činitelem. Častou příčinou chyb v manipulaci s nerovnostmi bývá, že činitel může nabýt zápornou hodnotu (v našem případě se to nestane), ale my zapomeneme změnit směr nerovnosti. Dále jsme využili toho, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je $a^2 \geq 0$, což je jednoduchá ale užitečná nerovnost, která se často používá. Není příliš přehnané říci, že celá matematická analýza se svými aplikacemi (analytická teorie čísel, numerická matematika a další) je založena na umění zacházet s nerovnostmi a odhady.

Tvrzení (iracionalita čísla $\sqrt{2}$). *Pro žádný zlomek a/b není pravda, že $(a/b)^2 = 2$. To jest, rovnice*

$$x^2 = 2$$

nemá v oboru racionálních čísel $\mathbb{Q}$ řešení.

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $a/b \in \mathbb{Q}$ je zlomek, jehož čtverec se rovná dvěma. Víme, že a/b můžeme vzít v základním tvaru, kdy $b \in \mathbb{N}$ a čísla $a \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ a b jsou nesoudělná (tj., když $c \in \mathbb{N}$ dělí a i b, pak $c = 1$). Z $(a/b)^2 = 2$ máme rovnost

$$a^2 = 2b^2 \ .$$

Tedy 2 dělí a^2 a tedy 2 dělí a (kdyby a bylo liché, $a = 2c+1$, bylo by liché i $a^2 = (2c+1)^2 = 2(2c^2+2c)+1$). Tedy $a = 2c$ pro nějaké $c \in \mathbb{Z}$ a dosazení dává $4c^2 = 2b^2$, čili $2c^2 = b^2$. Stejný argument dává, že b je sudé. Takže číslo 2 dělí a i b. To je ale spor s výchozí nesoudělností a a b. Dostali jsme spor, výchozí předpoklad existence zlomku a/b s $(a/b)^2 = 2$ je tedy nepravdivý a takový zlomek neexistuje.

Geometrický důkaz. Kdyby $a^2 = 2b^2$ pro nějaká dvě čísla $a, b \in \mathbb{N}$ (všimněte si, že to platí pro $a = b = 0$), existoval by (podle Pythagora) pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami délek $|AB| = |BC| = b$ a přeponou o délce

$|AC| = a$. (Nemám už sílu se malovat s obrázkem, kreslete si ho!) Sestrojíme menší takový Δ (tj. rovnoramenný, pravoúhlý a s celočíselnými délkami stran). Na AC vyneseme délku $|AD| = b$ (jistě $b < a$). Z bodu D spustíme kolmici na AC, jež protne BC v bodě E. Klíčové pozorování je, že $|BE| = |ED| = |DC| = a - b$. První rovnost platí díky symetrii čtyřúhelníka $ABED$ ($|AB| = |AD| = b$ a oba úhly u B i D jsou pravé), druhá díky rovnoramennosti trojúhelníka EDC (úhel u D je pravý a u C je $45°$, tedy i u E je úhel $45°$) a třetí podle definice bodu D. Tudíž $|EC| = b - (a - b) = 2b - a$. Rovnoramenný a pravoúhlý Δ EDC má tedy celočíselné délky stran, odvěsny mají délku $a - b$ a přepona délku $2b - a$. Ovšem tento Δ je menší než výchozí Δ ABC, např. přepony mají délky $a > 2b - a$. S Δ EDC můžeme provést tutéž konstrukci a opakovat ji dále. Dostaneme nekonečnou posloupnost zmenšujících se trojúhelníků, která dává nekonečnou ostře klesající posloupnost přirozených čísel, např. délek přepon. Taková nekonečná posloupnost přirozených čísel ale neexistuje, máme spor. Takže rovnice $a^2 = 2b^2$ nemá v $\mathbb{N}$ řešení. $\square$

Upřímně řečeno, celá ta geometrie v druhém důkazu je zbytečná. Stručně ho lze shrnout následovně. Když $a^2 = 2b^2$ pro $a, b \in \mathbb{N}$, pak $a/2 < b < a$ a $(2b - a)^2 = 2(a - b)^2$. Protože $2b - a, a - b \in \mathbb{N}$ a $2b - a < a$, opakování transformace $a, b \rightsquigarrow 2b - a, a - b$ dává nekonečnou ostře klesající posloupnost přirozených čísel — spor.

O reálných číslech až příště.

Přednáška 2, 10. října 2014

Číselné obory. Dobře známe číselné obory

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}\ .$$

Zde $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ jsou *přirozená čísla*, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$ *celá čísla* (symbol pro ně pochází z německého die Zahlen), $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ jsou *racionální čísla* čili *zlomky*, $\mathbb{R}$ *reálná čísla* a $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ s $i^2 = -1$ jsou čísla *komplexní*, jimiž se dále podrobně zabývat nebudeme.

Co je $\mathbb{R}$ řeknu za chvíli. Prvky množiny $\mathbb{Q}$ jsou přesně řečeno třídy vzájemně ekvivalentních zlomků, přičemž $\frac{a}{b}$ a $\frac{c}{d}$ jsou ekvivalentní, právě když $ad - bc = 0$. Každá taková třída má jako reprezentanta *zlomek* $\frac{a}{b}$ *v základním tvaru*, v němž $b > 0$ a čitatel a a jmenovatel b jsou nesoudělná čísla. Rozšíření číselného oboru do většího je vždy motivováno řešitelností rovnic. Rovnice $5 + x = 3$ nemá řešení v $\mathbb{N}$, ale v $\mathbb{Z}$ již ano ($x = -2$), $5x = 3$ ho nemá v $\mathbb{Z}$, ale má ho ve $\mathbb{Q}$ ($x = \frac{3}{5}$), $x^2 = 3$ je neřešitelná ve $\mathbb{Q}$, ale řešitelná v $\mathbb{R}$ ($x = \sqrt{3}$) a $x^2 = -3$ v $\mathbb{R}$ nemá řešení, ale v $\mathbb{C}$ ho má ($x = i\sqrt{3}$).

Ze čtyř hořejších inkluzí je zcela přesná jen první, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, zbylým třem rozumíme jako vnořením, kdy skutečnou inkluzi dostaneme změnou formátu prvku: číslo $z \in \mathbb{Z}$ je prvek $\mathbb{Q}$, když ho napíšeme jako $\frac{z}{1}$, zlomek $\alpha \in \mathbb{Q}$ je prvkem $\mathbb{R}$ po napsání v desetinném zápisu (při pojetí $\mathbb{R}$ jako desetinných rozvojů), např. $\frac{1}{9} = 0.11111\dots$, a číslo $a \in \mathbb{R}$ je prvek $\mathbb{C}$, když ho napíšeme jako $a + 0i$.

Na všech uvedených číselných oborech máme aritmetické operace sčítání $+$ a násobení $\cdot$, spolu s binární relací $<$ uspořádání (na $\mathbb{C}$ relace $<$ není). Vzhledem k oběma operacím $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tvoří to, čemu algebraici říkají *okruh*: obě operace jsou asociativní a komutativní, platí distributivita, obě mají neutrální prvky a sice 0 a 1, a při sčítání má každý prvek inverz. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ je *uspořádané těleso*: je to okruh a navíc každý nenulový prvek má při násobení inverz a relace $<$ splňuje: (i) $a < b, b < c \Rightarrow a < c$, (ii) ze tří možností $a < b, a = b, a > b$ vždy nastává právě jedna, (iii) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ a (iv) $a < b, c > 0 \Rightarrow ac < bc$. Rovněž $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ je uspořádané těleso. Co má $\mathbb{R}$ navíc proti $\mathbb{Q}$ je (1) úplnost (má ucpány díry, které jsou ve $\mathbb{Q}$) a (2) nespočetnost (je mnohem početnější než $\mathbb{Q}$). Obé bude vysvětleno dále. Je třeba říci, že přechod od oboru $\mathbb{Q}$ k oboru $\mathbb{R}$ je ve srovnání s ostatními třemi přechody skok na naprosto odlišnou úroveň.

Reálná čísla jako nekonečné desetinné rozvoje. Jedno z možných pojetí množiny $\mathbb{R}$ je to, že reálná čísla jsou nekonečné desetinné rozvoje, jako třeba

$$0 = -0.000\ldots,\ -5089.33506\ldots,\ +40.125000\ldots \text{ či } -\pi = -3.141592\ldots .$$

(Později se zmíním o dvou dalších — a známějších — zavedeních reálných čísel, o Cantorových fundamentálních posloupnostech a Dedekindových řezech.) Reálné číslo a je tedy oznaménkovaná nekonečná posloupnost *cifer* a_n s $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$a = \pm a_0.a_1a_2a_3\ldots\ ,$$

kde $a_0 \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a pro $n > 0$, $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Např. třetí z čísel nahoře má znaménko + a cifry $a_0 = 40$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ a $a_n = 0$ pro $n \geq 4$ (je to vlastně $\frac{321}{8}$). Konvence zápisu je, že znaménko + se nepíše a nekonečný úsek nul vynechává, takže píšeme jen 40.125. Číslo nula, jehož všechny cifry jsou 0, může mít obě znaménka, $-0.000\ldots$ a $+0.000\ldots$ ztotožňujeme.

Tento zápis je skoro vždy jednoznačný, ale, jak známo, některá reálná čísla mají zápisy dva: kromě $-0.000\cdots = +0.000\ldots$ též

$$-40.125000\ldots = -40.124999\ldots,\ 1.000\ldots = 0.999\ldots$$

a podobně. Nastává to přesně pro nenulové *končící desetinné rozvoje* $a = \pm a_0.a_1a_2\ldots$, v nichž pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$ je $a_k > 0$, ale $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0$. Pak $b = \pm b_0.b_1b_2\ldots$ (totéž znaménko jako v a), kde $b_n = a_n$ pro $n < k$, $b_k = a_k - 1$ a $b_n = 9$ pro $n > k$, je totéž reálné číslo jako a. Jak tedy rozumět rovnostem jako $1 = 0.999\ldots$? Samozřejmě, že napravo a nalevo od = máme dosti různé věci, nekonečné slovo a jednopísmenné slovo. Z hlediska operací + a $\cdot$ v $\mathbb{R}$ i porovnávání $<$ to ale pro nás je totéž reálné číslo. Stejný „paradox“ se objevuje už v $\mathbb{Q}$, kde vesele píšeme $\frac{12}{4} = \frac{-6}{-2}$ a podobně, i když napravo a nalevo od = jsou dost odlišné dvojice celých čísel, a myslíme tím, že z hlediska aritmetických operací a porovnávání v $\mathbb{Q}$ hrají roli téhož racionálního čísla.

Připomenu, jak reálná čísla porovnáváme relací $<$, což jistě každý ví. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou různá čísla (speciálně nemáme zápisy jako $\alpha = 1.000\ldots$ a $\beta = 0.999\ldots$). Pro jednoduchost buďte obě čísla kladná, se znaménkem +, obecný případ se na tento snadno převede (rozmyslete si jak). Pak

$$\alpha < \beta \iff \exists k \in \mathbb{N}_0:\ \alpha_j = \beta_j \text{ pro } 0 \leq j < k, \text{ ale } \alpha_k < \beta_k\ .$$

Nejde o nic jiného než o *lexikografické* (slovníkové) uspořádání podle cifer.

Úloha: *dokažte, že když $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou různá čísla, která mohou mít dva zápisy, pak výsledek jejich porovnání — buď $\alpha < \beta$ anebo $\alpha > \beta$ — je týž bez ohledu na volbu zápisu (tedy nikdy se nestane něco jako, že v jednom zápisu $\alpha = 1.000\ldots > 0.9997589\cdots = \beta$ a ve druhém $\alpha = 0.999\ldots < 0.9997589\cdots = \beta$, což v tomto příkladu skutečně pravda není).*

Jak se taková reálná čísla sčítají a násobí? Stručně řečeno, máme-li spočítat $\alpha \circ \beta$, kde $\alpha = \pm\alpha_0.\alpha_1\alpha_2\ldots$ a $\beta = \pm\beta_0.\beta_1\beta_2\ldots$ jsou dvě reálná čísla a $\circ$ je sčítání nebo násobení, usekáváme jejich zápisy po n-té cifře (tj. další cifry nahradíme nulami, znaménka samozřejmě neměníme), $n = 0, 1, 2, \ldots$, a počítáme posloupnost částečných součtů či součinů (rozmyslete si, že tyto částečné součty či součiny počítáme vlastně v rámci $\mathbb{Q}$)

$$\pm\alpha_0 \circ \pm\beta_0,\ \pm\alpha_0.\alpha_1 \circ \pm\beta_0.\beta_1,\ \pm\alpha_0.\alpha_1\alpha_2 \circ \pm\beta_0.\beta_1\beta_2,\ \ldots .$$

Dá se ukázat, že pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ se k-tá cifra výsledků pro dostatečně velké n přestane měnit, stabilizuje se, a totéž nastane pro znaménko. Tím je výsledek operace $\alpha \circ \beta$ dobře a jednoznačně definován. Například pro $\alpha = +1.000\ldots$ a $\beta = -0.999\ldots$ (tj. $\alpha = -\beta$) částečné součty pro $\alpha+\beta$ vycházejí

$$+1,\ +0.1,\ +0.01,\ +0.001$$

a tak dál, takže vskutku $\alpha + \beta = +0.000\cdots = 0$. Vlastnosti aritmetických operací a uspořádání na $\mathbb{R}$ podrobně dokazovat a odvozovat nebudu, není to tak lehké, jak se člověku na začátku zdá. Dá se ale dokázat následující věta.

Věta (aritmetika $\mathbb{R}$). $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$*, kde* $\mathbb{R}$ *je množina oznaménkovaných nekonečných desetinných rozvojů, tvoří uspořádané těleso (po aplikaci ztotožnění* $-0.000\cdots = +0.000\ldots$ *a všech ztotožnění typu* $1.000\ldots = 0.999\ldots$*).*

Jako příklad asociativity sčítání v $\mathbb{R}$ máme třeba (vypočteno výše popsaným postupem):

$$(-0.999\cdots + 1) + 0.999\cdots = +0.000\cdots + 0.999\cdots = 0.999\ldots ,$$

což je totéž jako

$$-0.999\cdots + (1 + 0.999\ldots) = -0.999\cdots + 1.999\cdots = 1.000\ldots .$$

Suprema a infima, úplnost $\mathbb{R}$. Když $X \subset \mathbb{R}$ a $c \in X$, pak $c = \min(X)$, c je *minimum* nebo též *nejmenší prvek* X, pokud $c \leq a$ pro každé $a \in X$.

Podobně se definuje $\max(X)$, *maximum* nebo *největší prvek* X. Číslo $c \in \mathbb{R}$ je *horní mez* množiny $X \subset \mathbb{R}$, když $c \geq a$ pro každé $a \in X$. Podobně se definuje *dolní mez.* Když $X \subset \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$, pak c je *supremum* množiny X, $c = \sup(X)$, když

$$c = \min(\{\text{horní meze množiny } X\}) \ ,$$

tedy c je nejmenší horní mez X. Supremum X nemusí v X ležet a když existuje, je určeno jednoznačně. Ještě jednou řečeno, $c = \sup(X)$, právě když

1. pro každé $a \in X$ je $a \leq c$ (tj. c je horní mez X) a
2. pro každé $d \in \mathbb{R}$, $d < c$, existuje $a \in X$, že $a > d$ (tj. c nelze nijak zmenšit na d, aby zůstalo horní mezí, c je nejmenší horní mez X).

Podobně se definuje *infimum* množiny $X \subset \mathbb{R}$:

$$\inf(X) = \max(\{\text{dolní meze množiny } X\}) \ ,$$

je to největší dolní mez množiny X. Úplně stejně definujeme supremum a infimum pro podmnožiny $\mathbb{Q}$ v uspořádání $(\mathbb{Q}, <)$ (a obecně v každé lineárně nebo i částečně uspořádané množině). Množina $X \subset \mathbb{R}$ je *shora omezená*, má-li alespoň jednu horní mez. Podobně se definuje *omezenost zdola.* Následující výsledek je základní vlastnost reálných čísel, kterou racionální čísla nemají.

Věta (úplnost $\mathbb{R}$). *Každá neprázdná a shora omezená množina reálných čísel má supremum.*

Podobně má každá neprázdná a zdola omezená množina reálných čísel infimum. Před důkazem věty uvedu pár příkladů. Když $X = \emptyset$, rovná se množina horních mezí X celému $\mathbb{R}$ (pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí implikace $a \in X \Rightarrow a \leq c$). Nejmenší horní mez tedy neexistuje a $\sup(\emptyset)$ též neexistuje. Když $X = \mathbb{N}$, množina horních mezí X je prázdná, protože X není shora mezená, a $\sup(\mathbb{N})$ neexistuje. Věta říká, že prázdnost X a neomezenost X shora jsou jediné dvě překážky pro existenci suprema. V rámci $\mathbb{R}$,

$$\sup([0,1]) = \sup([0,1)) = \sup([0,1) \cap \mathbb{Q}) = 1 \ .$$

V rámci číselného oboru $\mathbb{Q}$ věta o supremu neplatí:

Tvrzení (neúplnost $\mathbb{Q}$). *Množina $X = \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha > 0, \alpha^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ je neprázdná a shora omezená, ale nemá v $\mathbb{Q}$ supremum.*

Důkaz. Jistě $1 \in X$ a $a < 2$ pro každé $a \in X$, což dokazuje první část. Nechť $c \in \mathbb{Q}$ je libovolné pevné číslo. Ukážu, že není supremem množiny X. Když $c \leq 0$, jistě není horní mezí X, a proto nechť $c > 0$.

1. Nechť $c^2 < 2$. Pak existuje $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta > 0$, že stále $(c+\beta)^2 < 2$. Pak ale $c + \beta \in X$ a $c + \beta > c$, takže c není horní mezí X. (Potřebujeme, aby číslo $\beta > 0$ splňovalo, že $2c\beta + \beta^2 < 2 - c^2$. Protože pro $0 < \beta < 1$ je $\beta^2 < \beta$, číslo $\beta = (2-c^2)/(2c+2) < 1$ vyhovuje — rozmyslete si proč.)

2. Nechť $c^2 = 2$. Jak jsme na minulé přednášce dokázali, tento případ nenastává.

3. Nechť $c^2 > 2$. Podobně jako v 1. případu existuje $\beta \in \mathbb{Q}$, $0 < \beta < c$, že stále $(c-\beta)^2 > 2$. Pro každé $a \in X$ máme $a^2 < 2 < (c-\beta)^2$, tedy $a < c-\beta$. Takže $c-\beta$ je horní mez X a vzhledem k $c-\beta < c$ není číslo c nejmenší horní mez. (Odhad, jak malé β stačí vzít, je zde přenechán čtenáři jako úloha.)

Žádné $c \in \mathbb{Q}$ tedy není supremem naší množiny X. □

Důkaz věty o úplnosti $\mathbb{R}$. Nechť $X \subset \mathbb{R}$ je libovolná neprázdná a shora omezená množina reálných čísel. Budu postupně definovat cifry jistého čísla $c \in \mathbb{R}$, které se ukáže být supremem X. Bez újmy na obecnosti jsou všechna čísla v X kladná (obecný případ se na tento snadno převede). Položím $X_0 = X$ a pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ postupně definuju cifry c_n a množiny $X_n \subset X$,

$$c_n := \max(\{\alpha_n \mid \alpha \in X_n\}) \text{ a } X_{n+1} := \{\alpha \in X_n \mid \alpha_n = c_n\}\ .$$

Tvrdím, že číslo

$$c = +c_0.c_1c_2\ldots$$

je dobře definované a je supremem X. Protože je X shora omezená, je shora omezená (a tedy konečná) i množina cifer $\{\alpha_0 \mid \alpha \in X_0\} \subset \mathbb{N}_0$ a cifra c_0 je dobře definovaná. Pro $n > 0$ už beru maximum z nějaké podmnožiny $\{0, 1, \ldots, 9\}$ a jediným problémem by bylo, kdyby $X_n = \emptyset$. Z definice těchto množin ale snadno indukcí plyne, že jsou všechny neprázdné. Číslo c je tedy korektně definované.

Ukažme, že c je horní mez X. Nechť $\alpha \in X = X_0$. Z definice c_0 plyne, že $\alpha_0 \leq c_0$. Když $\alpha_0 < c_0$, pak $\alpha < c$. Když $\alpha_0 = c_0$, pak z definice c_1 a X_1 plyne, že $\alpha \in X_1$ a $\alpha_1 \leq c_1$. Když $\alpha_1 < c_1$, pak $\alpha < c$. Když $\alpha_1 = c_1$, pak z definice c_2 a X_2 plyne, že $\alpha \in X_2$ a $\alpha_2 \leq c_2$. A tak dále. Když pro nějaké

$n \in \mathbb{N}_0$ (poprvé) nastane $\alpha_n < c_n$, pak $\alpha < c$. Když pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ stále $\alpha_n = c_n$, pak $\alpha = c$ (a v tomto případu je $c = \alpha = \max(X)$).

Ukažme, že c je nejmenší horní mez X. Nechť $d \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo s $d < c$. Lze předpokládat, že $d > 0$. Podle definice uspořádání na $\mathbb{R}$ existuje takové $n \in \mathbb{N}_0$, že $d_j = c_j$ pro každé $0 \leq j < n$, ale $d_n < c_n$. Vezmeme $\alpha \in X_n$, že $\alpha_n = c_n$. Z definice množiny X_n plyne, že $\alpha_j = c_j$ pro každé $0 \leq j \leq n$. To ale znamená, že $d < \alpha \in X$. Takže c je nejmenší horní mez X. □

Důsledek (existence $\sqrt{2}$ v $\mathbb{R}$). *Rovnice $x^2 = 2$ má v oboru $\mathbb{R}$ řešení.*

Důkaz. Položme, v oboru $\mathbb{R}$,

$$c := \sup(\{a \in \mathbb{R} \mid a > 0, a^2 < 2\}) .$$

Supremum je korektně definované, protože daná množina je neprázdná a shora omezená (obsahuje číslo 1 a její každý prvek je menší než např. 2). Stejně jako v předešlém tvrzení se ukáže, že případy $c^2 > 2$ a $c^2 < 2$ jsou nemožné, protože při nich c není supremem dané množiny. Nutně $c^2 = 2$ a c je řešení dané rovnice. □

Přednáška 3, 17. října 2014

Důsledek (Cantorova věta o vnořených intervalech). *Nechť* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$ *jsou reálné intervaly. Pak*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

— některé reálné číslo leží ve všech intervalech. Pokud navíc délky intervalů jdou k 0 *(tj. pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje* n_0*, že* $n > n_0 \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon$*), pak navíc*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$$

— existuje právě jedno reálné číslo, jež leží ve všech intervalech.

Důkaz. Podle předpokladu máme dány takové dvě posloupnosti reálných čísel (a_n) a (b_n), že

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \quad \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1 \ .$$

Položme

$$\alpha = \sup(\{a_1, a_2, \ldots\}) \ .$$

Množina $\{a_1, a_2, \ldots\}$ je jistě neprázdná a shora omezená — každé b_n je její horní mezí — a definice čísla α je proto korektní. Protože α je její horní mezí, pro každé n je $a_n \leq \alpha$. Protože to je nejmenší horní mez, pro každé n je $\alpha \leq b_n$. To přesně znamená, že pro každé n je $\alpha \in [a_n, b_n]$ — α leží v průniku všech intervalů. Je-li $\beta \in \mathbb{R}$ jakékoli jiné číslo, pak $\beta \in [a_n, b_n]$ znamená, že $|\beta - \alpha| \leq b_n - a_n$. Leží-li β ve všech intervalech a jdou-li jejich délky $b_n - a_n$ k 0, pak $|\beta - \alpha| < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$. Tedy $\beta = \alpha$ a průnik je pouze jednoprvkový. $\square$

Nespočetnost $\mathbb{R}$. Množina M je nekonečná, právě když existuje injekce $f : M \to M$, že $f(M) \neq M$. Nekonečná množina M je *spočetná*, když existuje bijekce $f : \mathbb{N} \to M$. Spočetnost M tedy znamená, že existuje posloupnost $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$ s těmito vlastnostmi:

1. pro každé n je $a_n \in M$,
2. pro každé $n \neq m$ je $a_n \neq a_m$ a
3. pro každé $x \in M$ existuje $n \in \mathbb{N}$, že $a_n = x$.

Podstatný je první a třetí požadavek: když je (a_n) splňuje, vypuštěním duplikací a přeindexováním z (a_n) snadno vyrobíme posloupnost (a'_n), jež splňuje všechny tři požadavky. Množina je *nespočetná*, když není spočetná. Uvidíme, že taková je množina $\mathbb{R}$. Nejprve ale uvedu příklady spočetných množin.

Příklady spočetných množin. Pochopitelně $\mathbb{N}$ sama je spočetná, za bijekci f vezmeme identickou funkci $f(n) = n$. I množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je spočetná: posloupnost $(0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots)$ celých čísel vyčerpává celou $\mathbb{Z}$. Množina dvojic celých čísel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ je též spočetná: označíme-li pro $n \in \mathbb{N}_0$ jako p_n konečný seznam všech dvojic $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ s $|a| + |b| = n$ v nějakém pořadí (např. $p_0 = ((0, 0))$, $p_1 = ((1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1))$), pak posloupnost vzniklá zřetězením těchto seznamů

$$(p_0, p_1, p_2, \dots)$$

postupně projde celou $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Nebo lze pro tento účel použít spirálovitou posloupnost začínající v $(0, 0)$, kterou jsem nakreslil na přednášce. Tedy i množina zlomků $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Cantorova věta. Následující výsledek německého matematika *Georga Cantora (1845–1918)* byl bez přehánění matematickým přelomem.

Věta (Cantor, 1873). *Množina reálných čísel* $\mathbb{R}$ *je nespočetná.*

Důkaz. Ukážeme, že množina

$$X = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_n \in \{0, 1\}\}$$

všech 0-1 posloupností je nespočetná. Dokážeme přesněji, že neexistuje surjektivní zobrazení $f: \mathbb{N} \to X$. Protože fakticky $X \subset \mathbb{R}$ (uvažte reálná čísla tvaru $0.c_1c_2\dots$, kde každá desetinná cifra c_n je jen 0 nebo 1), neexistuje ani surjektivní zobrazení $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (každé surjektivní zobrazení $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se „přesměrováním“ hodnot $f(n) \in \mathbb{R}\backslash X$ do X lehce změní na surjekci $g: \mathbb{N} \to X$). Žádná posloupnost tak nedokáže vyčerpat ani množinu X ani množinu $\mathbb{R}$.

Nechť tedy

$$f: \mathbb{N} \to X,\ f(n) = (c_{n,1},\ c_{n,2},\ c_{n,3},\ \dots),\ c_{n,j} \in \{0, 1\}$$

je libovolné zobrazení. Pro $x \in \{0, 1\}$ označíme jako $\overline{x} = 1 - x$ (prohození jedničky a nuly) a vezmeme posloupnost

$$p = (\overline{c_{1,1}},\ \overline{c_{2,2}},\ \overline{c_{3,3}},\ \dots) \in X\ .$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\overline{c_{n,n}} \neq c_{n,n}$, tedy $p \neq f(n)$ (posloupnost p se od posloupnosti $f(n)$ liší alespoň na n-tém místě). Neexistuje tedy $n \in \mathbb{N}$, aby $f(n) = p$. Takže f není zobrazení na. $\square$

Posloupnost p jsme dostali z nekonečné tabulky hodnot zobrazení f (posloupnost $f(n)$ je v n-tém řádku) jako změněnou diagonálu tabulky. Důkazová metoda se proto nazývá *diagonální metoda*. Lze pomocí ní třeba dokázat, že pro žádnou množinu M neexistuje surjekce

$$f:\ M \to \{A \mid A \subset M\}$$

z M na množinu všech jejích podmnožin.

Množina

$$Y = \{A \mid A \subset \mathbb{N}\}$$

všech podmnožin množiny přirozených čísel se fakticky rovná množině 0-1 posloupností X z důkazu Cantorovy věty: posloupnosti $a:\ \mathbb{N} \to \{0,1\}$ odpovídá podmnožina $A = \{x \in \mathbb{N} \mid a(x) = 1\} = a^{-1}(1) \subset \mathbb{N}$ a naopak z podmnožiny snadno otočením tohoto postupu uděláme posloupnost. Takže i Y je nespočetná.

Cantorova a Dedekindova konstrukce reálných čísel. Stručně teď naznačím dvě známé metody pro sestrojení reálných čísel ze zlomků (naše zavedení pomocí desetinných rozvojů je třetí metoda).

Cantorova metoda. Posloupnost zlomků $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ nazveme *cauchyovskou* (nazváno po francouzském matematikovi *Augustinu-Louisi Cauchym (1789–1857)*), když pro každé $\varepsilon > 0$ (teď ovšem $\varepsilon \in \mathbb{Q}$) existuje index n_0, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$. Členy posloupnosti se tedy k sobě vzájemně (v tomto přesném smyslu) neomezeně přibližují, „tulí se“ k sobě. Dvě posloupnosti zlomků $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{Q}$ jsou *ekvivalentní*, značeno $(a_n) \sim (b_n)$, když pro každé $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{Q}$) existuje index n_0, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - b_n| < \varepsilon$. Odpovídající členy obou posloupností se tak k sobě neomezeně přibližují. Relace $\sim$ je relace ekvivalence. Uvažme množinu

$$R = \{\text{cauchyovské posloupnosti zlomků}\}/\sim\ .$$

R se skládá z množin vzájemně ekvivalentních cauchyovských posloupností zlomků. Na množině R lze zavést sčítání a násobení a relaci uspořádání tak, že $(R, +, \cdot, <)$ je uspořádané těleso, které je dokonce úplné (každá neprázdná a shora omezená množina má supremum).

Toto zavedení reálných čísel publikoval jako první v r. 1869 francouzský matematik *Charles Méray (1835–1911)*, o tři roky později v r. 1872 ho nastínil Cantor, jemuž je obvykle nepřesně připisováno, a na základě Cantorových poznámek ho podrobně popsal *Eduard Heine (1821–1881)*.

Dedekindova metoda řezů. Pochází od německého matematika *Richarda Dedekinda (1831–1916)*, který tuto metodu pro sestrojení $\mathbb{R}$ zveřejnil též v r. 1872, ale podle vlastních slov na ni přišel již o 14 let dříve. *Řezem* na množině $\mathbb{Q}$ nazveme každou takovou dvojici množin (A, B), že (i) $A \cup B = \mathbb{Q}$, (ii) $A, B \neq \emptyset$ a (iii) $A < B$ (což znamená, že pro každé $a \in A$ a $b \in B$ je $a < b$). Nechť

$$R = \{\text{všechny řezy na } \mathbb{Q}\} .$$

Na množině R lze opět zavést sčítání a násobení a relaci uspořádání tak, že $(R, +, \cdot, <)$ je uspořádané těleso, které je úplné.

Část 2: limita nekonečné posloupnosti

Když $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je posloupnost reálných čísel a $a \in \mathbb{R}$ je číslo, pak *a je limitou* (a_n), psáno $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ či jen $\lim a_n = a$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon .$$

(Zde ε bereme z $\mathbb{R}$, n_0 a n z $\mathbb{N}$ a $\exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow \ldots$ je totéž jako $\exists n_0\ \forall n :\ n > n_0 \Rightarrow \ldots$.) Tuto limitu nazýváme podrobněji *vlastní limitou* a když ji posloupnost (a_n) má, pak též řekneme, že *konverguje.*

Nevlastní limita posloupnosti (a_n) je $+\infty$ či $-\infty$:

$$\lim a_n = +\infty \iff \forall c\ \exists n_0 :\ n > n_0 \Rightarrow a_n > c$$

a podobně $\lim a_n = -\infty$, platí-li totéž s $a_n < c$.

Tvrzení (jednoznačnost limity). *Každá posloupnost* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *má nejvýše jednu limitu (vlastní či nevlastní).*

Důkaz. Ukážu, že posloupnost nemůže mít dvě vlastní limity, zbývající případy (vlastní a nevlastní limita, dvě nevlastní limity) jsou podobné a přenechané posluchači/čce jako úloha. Nechť $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ i $\lim a_n = b \in \mathbb{R}$, přičemž $a < b$. Vezmeme $\varepsilon > 0$ menší než $(b - a)/2$. Pro nějaký index n_0 by mělo platit $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$, tedy $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, tedy $a_n < a + (b - a)/2 = (a + b)/2$. Stejně tak pro nějaký index n_1 by mělo platit $n > n_1 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$, tedy $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$, tedy $a_n > b - (b - a)/2 = (a + b)/2$. Pro n větší než n_0 i n_1 tak současně $a_n < (a + b)/2$ i $a_n > (a + b)/2$, což je spor. $\square$

Uvedu teď pár příkladů limit. Je jasné, že třeba

$$\lim(1/n) = 0,\ \lim n = +\infty \ \text{ a } \ \lim(-1)^n \ \text{ neexistuje .}$$

Dokážu, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ .$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $n^{1/n} \geq 1$. Proto kdyby limita $n^{1/n}$ pro $n \to \infty$ nebyla 1, existovalo by $c > 0$ a nekonečná rostoucí posloupnost přirozených čísel $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$, že $n_i^{1/n_i} > 1 + c$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak ale, podle binomické věty,

$$n_i > (1 + c)^{n_i} = 1 + \binom{n_i}{1} c_i + \binom{n_i}{2} c_i^2 + \cdots + \binom{n_i}{n_i} c_i^n > n_i(n_i - 1)c_i^2/2 \ .$$

Vydělení n_i dává nerovnost

$$1 > (c^2/2)(n_i - 1),\ \text{čili} \ \ (2/c^2) + 1 > n_i \ ,$$

jež je zjevně nemožná: posloupnost $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ není shora omezená. Máme tedy spor a $\lim n^{1/n} = 1$.

Úloha: *Nalezněte* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n/2]{n}$.

Přednáška 4, 24. října 2014

Limita a monotonie a podposloupnost. Připomeňme si, že posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ splňující $a_1 \le a_2 \le \dots$ se nazývá *neklesající*, při ostrých nerovnostech *rostoucí*. Obrácením nerovností dostáváme *nerostoucí*, respektive *klesající* posloupnost. Neklesající a nerostoucí posloupnosti jsou *monotónní*.

Tvrzení (o limitě monotónní posloupnosti). *Je-li $(a_n) \subset \mathbb{R}$ neklesající a shora omezená, pak konverguje.*

Důkaz. Supremum

$$a = \sup(\{a_1, a_2, \dots\})$$

je dobře definované díky omezenosti (a_n) shora. Podle definice suprema pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \le a\ .$$

Díky monotonii (a_n) a vlastnosti suprema tyto nerovnosti platí i pro každé a_n s $n > n_0$. Ukázali jsme tedy, že $\lim a_n = a$. □

Totéž platí, je-li (a_n) nerostoucí a zdola omezená. Snadno se podobně dokáže, že je-li a_n neklesající a shora neomezená, je $\lim a_n = +\infty$. Je-li a_n nerostoucí a zdola neomezená, je $\lim a_n = -\infty$. Monotonii (a_n) stačí vždy předpokládat jen pro každé $n > n_0$.

Posloupnost $(b_n) \subset \mathbb{R}$ je *podposloupností* posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$, když existuje takové rostoucí zobrazení $f :\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že $b_n = a_{f(n)}$. Jinak napsáno, existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < \dots$, že

$$b_n = a_{k_n},\ n = 1, 2, \dots\ .$$

Je jasné, že pak $k_n \ge n$ pro každé n. Relace „být podposloupností" je tranzitivní a reflexivní, ale ne antisymetrická.

Úloha. *Uveďte příklad dvou různých posloupností (a_n) a (b_n), že (a_n) je podposloupností (b_n) i (b_n) je podposloupností (a_n).*

Tvrzení (o limitě podposloupnosti). *Je-li (a_n) podposloupnost (b_n) a $\lim b_n = b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, pak i $\lim a_n = b$.*

Důkaz. **Úloha.** □

Nalezneme-li tedy v posloupnosti (a_n) dvě podposloupnosti s různými limitami, $\lim a_n$ neexistuje. Např. konstantní posloupnosti $(1, 1, 1, \dots)$ a

$(-1,-1,-1,\dots)$ s limitami 1 a -1 jsou podposloupnostmi v $(a_n) = ((-1)^n)$, takže lim $(-1)^n$ neexistuje.

Limita a $+, \cdot, <$. Následující výsledek je základem pro výpočty konkrétních limit.

Tvrzení (aritmetika limit). *Nechť $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ jsou konvergentní posloupnosti s $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$. Pak*

1. *posloupnost $(a_n + b_n)$ též konverguje a $\lim(a_n + b_n) = a + b$,*
2. *posloupnost $(a_n b_n)$ též konverguje a $\lim(a_n b_n) = ab$,*
3. *pokud $b \neq 0$, je posloupnost (a_n/b_n) definovaná pro $n > n_0$, konverguje a $\lim(a_n/b_n) = a/b$.*

Důkaz. 1. Podle Δ-ové nerovnosti pro absolutní hodnotu,

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \ .$$

Podle předpokladu pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že pro $n > n_0$ je každá z obou posledních absolutních hodnot menší než ε. Tedy $n > n_0 \Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| < 2\varepsilon$, což dokazuje tvrzení o limitě součtu.

2. Nyní

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |a| \cdot |b_n - b| \ .$$

Pro dané ε, $0 < \varepsilon < 1$, existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon$, tedy i $|b_n| < |b| + 1$. Tedy $n > n_0 \Rightarrow |a_n b_n - ab| < \varepsilon(|a| + |b| + 1)$, což dokazuje tvrzení o limitě součinu.

3. Konečně

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \frac{|(a_n - a)b + a(b - b_n)|}{|b_n| \cdot |b|} \\ &\leq (|b_n| \cdot |b|)^{-1}\big(|a_n - a| \cdot |b| + |a| \cdot |b - b_n|\big) \ . \end{aligned}$$

Pro dané ε, $0 < \varepsilon < |b|/2$, existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $|a_n - a|, |b_n - b| < \varepsilon$, tedy i $|b_n| > |b|/2$ (speciálně $b_n \neq 0$). Tedy $n > n_0 \Rightarrow |a_n/b_n - a/b| < \varepsilon(|a| + |b|)(2/b^2)$, což dokazuje tvrzení o limitě podílu. □

Lze rozšířit i na nevlastní limity, jak podrobně vyložím později. Důležité je, že aritmetika limit funguje jen jednosměrně, rovnice jako $\lim(a_n + b_n) =$

$\lim a_n + \lim b_n$ lze použít jen při čtení zprava doleva. Není rozhodně obecně pravda, že když $(a_n + b_n)$ konverguje k a, pak konvergují i (a_n) a (b_n) a $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a$ (viz např. $a_n = (-1)^n$ a $b_n = -(-1)^n$). Totéž pro součin a podíl. V tom se při zběsilém počítání limit občas dělají chyby.

V jednom případě limity součinu postačují slabší předpoklady:

Tvrzení (násobení limitní nulou). *Nechť (a_n) je omezená a (b_n) konverguje k 0. Pak $\lim(a_n b_n) = 0$.*

Důkaz. **Úloha.** □

Příklad. *Nechť je (a_n) dána rekurencí $a_1 = 2$ a $a_{n+1} = a_n/2+1/a_n$. Existuje $\lim a_n$? Pokud ano, čemu se rovná?*

Prvních pár hodnot posloupnosti je $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{17}{12}$ a $a_4 = \frac{577}{408}$. Zřejmě vždy $a_n > 0$. Zdá se, že (a_n) je nerostoucí. Dokážeme to. Potřebujeme, aby pro každé $n \in \mathbb{N}$ platilo, že $a_{n+1} \le a_n$, to jest $a_n/2 + 1/a_n \le a_n$, což je ekvivalentní nerovnosti $\sqrt{2} \le a_n$. Potřebujeme tedy ukázat, že naše posloupnost má tuto lepší dolní mez. Pro $n = 1$ tato nerovnost jistě platí a pro $n > 1$ rovněž: $a_n = a_{n-1}/2+1/a_{n-1} = (a_{n-1}+2a_{n-1}^{-1})/2 \ge \sqrt{a_{n-1}2a_{n-1}^{-1}} = \sqrt{2}$ (toto není důkaz indukcí). Použili jsme pro $a = a_{n-1}$ a $b = 2a_{n-1}^{-1}$ nerovnost $(a + b)/2 \ge \sqrt{ab}$ $(a, b \ge 0)$ mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Takže (a_n) je nerostoucí. Protože je (zdola) omezená, má podle tvrzení výše vlastní limitu $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$. Patrně $a \ge \sqrt{2}$. Tvrdím, že tato limita splňuje rovnici, jež vznikne z rekurence $a_{n+1} = a_n/2+1/a_n$ smazáním indexů. Limita levé strany je $\lim a_{n+1} = \lim a_n = a$ podle tvrzení o limitě podposloupnosti a limita pravé strany je $\lim(a_n/2 + 1/a_n) = (\lim a_n)/2 + 1/\lim a_n = a/2 + 1/a$ podle tvrzení o aritmetice limit. Takže

$$a = a/2 + 1/a, \quad \text{to jest } a^2/2 = 1 \text{ a } \ a = \sqrt{2}\,.$$

Dokázali jsme, že $\lim a_n = a = \sqrt{2}$.

Tvrzení (limita a uspořádání). *Nechť posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ mají vlastní limity $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$ a $\lim b_n = b \in \mathbb{R}$.*

1. *Když $a < b$, tak existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n < b_n$.*

2. *Když $a_n \le b_n$ pro každé $n > n_0$, pak $a \le b$.*

Důkaz. 1. Pro ε, $0 < \varepsilon < (b-a)/2$, existuje n_0, že pro $n > n_0$ je $a_n < a+\varepsilon < (a+b)/2 < b-\varepsilon < b_n$, takže $a_n < b_n$.

2. Kdyby bylo $a > b$, pro velké n by podle 1 platilo $a_n > b_n$, což je ve sporu s předpokladem. □

Toto tvrzení platí beze změny i pro nevlastní limity (kde bereme $-\infty < a < +\infty$ pro každé $a \in \mathbb{R}$). Je třeba nezapomínat, že ostrá nerovnost může v limitě přejít v rovnost: $a_n = 1 - 1/n < b_n = 1$ pro každé n, ale $\lim a_n = \lim b_n = 1$.

Tvrzení (věta o 2 policajtech). *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ *splňují, že* $\lim a_n = \lim b_n = a \in \mathbb{R}$ *a pro každé* $n > n_0$ *je* $a_n \le c_n \le b_n$. *Pak* (c_n) *konverguje a* $\lim c_n = a$.

Důkaz. Pro každé $\varepsilon > 0$ je

$$U(a,\varepsilon) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} .$$

Protože to je interval, platí: $c, d \in U(a,\varepsilon), c \le e \le d \Rightarrow e \in U(a,\varepsilon)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow a_n, b_n \in U(a,\varepsilon)$ a $a_n \le c_n \le b_n$. Tedy i $c_n \in U(a,\varepsilon)$, takže $\lim c_n = a$. □

I toto tvrzení se snadno rozšíří na nevlastní limity: pro $a = +\infty$ stačí pouze jeden policajt a_n a pro $a = -\infty$ stačí pouze policajt b_n. Smysl tvrzení je geometrický: *ε-ové okolí $U(a,\varepsilon)$ bodu a* je *konvexní*, s každými dvěma body obsahuje i je spojující úsečku (zde interval, jsme v jedné dimenzi).

Přednáška 5, 31. října 2014

Dvě základní limity. Nechť $\alpha, q \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \ldots \quad \alpha > 0 \\ 1 & \ldots \quad \alpha = 0 \\ 0 & \ldots \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \ldots \quad q > 1 \\ 1 & \ldots \quad q = 1 \\ 0 & \ldots \quad -1 < q < 1 \\ \text{neexistuje} & \ldots \quad q \le -1\ . \end{cases}$$

Ponecháváme jako úlohu.

Tři důležité věty o posloupnostech. Připomeňme si, že jako monotónní posloupnost označujeme neklesající nebo nerostoucí posloupnost.

Věta (o monotónní podposloupnosti). *Každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má monotónní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je libovolná posloupnost. Řekneme, že v indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná *dobrá posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \ldots$, že $a_{k_1} \le a_{k_2} \le \ldots$, a že v k začíná *špatná posloupnost*, existují-li takové indexy $k = k_1 < k_2 < \cdots < k_j$, že $a_{k_1} \le a_{k_2} \le \cdots \le a_{k_j} > a_n$ pro každé $n > k_j$. V prvním případě tedy členem a_k začíná nekonečná neklesající podposloupnost, a ve druhém taková konečná neklesající podposloupnost, že už ji nelze prodloužit. Zřejmě v každém indexu $k \in \mathbb{N}$ začíná dobrá posloupnost nebo v něm začíná špatná posloupnost. (Vystartujeme z k a libovolně budujeme neklesající podposloupnost. Když se nikdy nezastavíme, máme dobrou posloupnost, a když nastane krok, kdy už nemůžeme nijak pokračovat, máme špatnou posloupnost.)

Pokud v indexu 1 začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v 1 špatná posloupnost a jako $k_1 > 0$ definujeme její poslední index. Pokud v indexu $k_1 + 1$ začíná dobrá posloupnost, jsme hotovi. Když ne, začíná v k_1+1 špatná posloupnost a jako $k_2 > k_1$ definujeme její poslední index. Takto pokračujeme dále. Pokud někdy dostaneme dobrou posloupnost, jsme hotovi, protože (a_n) má neklesající podposloupnost. Pokud ji nikdy nedostaneme a máme stále špatné posloupnosti, vezmeme jejich poslední indexy $1 \le k_1 < k_2 < \ldots$. Podle definice špatné posloupnosti tvoří klesající podposloupnost $a_{k_1} > a_{k_2} > \ldots$ a jsme zase hotovi. $\square$

Úloha. *Nechť $l = (k-1)^2 + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Dokažte postupem z předchozího důkazu, že každá l-tice $(a_1, a_2, \dots, a_l) \subset \mathbb{R}$ obsahuje podposloupnost délky k, která je monotónní. (Návod: když každému $n \in \{1, 2, \dots, l\}$ přiřadíme dvojici (r, s), kde r je délka nejdelší neklesající podposloupnosti začínající v a_n a obdobně s pro nerostoucí, pak toto zobrazení je …. .)*

Výsledek se podle jeho objevitelů, maďarských matematiků *Paula (Pála) Erdőse (1913–1996)* a *Georga (Györgyho) Szekerese (1911–2005)*, nazývá *Erdősovo–Szekeresovo lemma.* Úložka: dá se při pevném k hodnota $(k-1)^2+1$ zmenšit?

Věta (Bolzanova–Weierstrassova). *Každá omezená posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Nechť $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je omezená. Podle předchozí věty má (a_n) monotónní podposloupnost (b_n), jež je zjevně omezená. Podle tvrzení o limitě monotónní posloupnosti je (b_n) konvergentní. □

Úloha. *Dokažte B.–W. větu jiným způsobem, bez použití věty o monotónní podposloupnosti, za pomoci Cantorovy věty o vnořených intervalech. (Návod: když $(a_n) \subset [a, b]$, dělte $[a, b]$ opakovaně napůl tak, že vzniklý interval stále obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n).)*

Věta se jmenuje podle pražského italsko–německého matematika, kněze a filosofa *Bernarda Bolzana (1781–1848)* a německého matematika *Karla Weierstrasse (1815–1897).* Lehce se rozšíří na neomezené posloupnosti: každá posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ má podposloupnost s vlastní nebo nevlastní limitou.

Důležitá definice. Jak jsem už zmínil ve 3. přednášce, posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je *cauchyovská* (též *Cauchyova*), pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 : \; m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \; .$$

Členy posloupnosti se tedy k sobě vzájemně (v tomto přesném smyslu) neomezeně blíží.

Věta (Cauchyho podmínka). *Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ je cauchyovská, právě když je konvergentní.*

Důkaz. Nejprve $\Leftarrow$. Když $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$. Podle Δ-ové nerovnosti,

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| < 2\varepsilon \; ,$$

a (a_n) je tedy cauchyovská.

Nyní $\Rightarrow$. Posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ buď cauchyovská. Je tedy omezená. (Nechť $\varepsilon = 1$ a n_0 splňuje, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$. Pak položíme $m = n_0 + 1$ a pro každé n je $|a_n| \le \max(\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0+1}|\})$.) Podle B.–W. věty má (a_n) konvergentní podposloupnost (a_{k_n}), $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ nyní vezmeme n_0, že $m, n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$ a i $|a_{k_n} - a| < \varepsilon$. Pro každé $n > n_0$ potom máme

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < 2\varepsilon$$

(první $|\cdot| < \varepsilon$ díky cauchyovskosti neboť $k_n \ge n$ a druhá $|\cdot| < \varepsilon$ díky $a_{k_n} \to a$) a tedy a je limitou celé posloupnosti, $\lim a_n = a$. $\square$

Nevlastní limity jsou v rozporu s cauchyovskostí: je jasné, že když $\lim a_n = \pm\infty$, pak (a_n) není Cauchyova. Cauchyovskost posloupnosti je důležitá vlastnost, která umožňuje zkoumat úplnost (nepřítomnost „děr“) daného prostoru i za situace, kdy nemáme k dispozici uspořádání jako v $\mathbb{R}$, třeba v případě komplexních čísel $\mathbb{C}$ vybavených obvyklou vzdáleností $|z_1 - z_2|$. Ve světě zlomků $\mathbb{Q}$ tato věta pochopitelně neplatí: když $(a_n) \subset \mathbb{Q}$ má za limitu $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, tak je posloupnost (a_n) cauchyovská, ale nemá ve $\mathbb{Q}$ limitu.

Aritmetika nekonečen. Jak jsem slíbil, tvrzení o aritmetice limit nyní rozšíříme na nevlastní limity. *Rozšířená reálná osa* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ vznikne přidáním obou nekonečen k reálným číslům. Porovnávání a aritmetické operace na $\mathbb{R}^*$ definujeme následovně:

$$\begin{aligned}
&\forall a \in \mathbb{R}:\ -\infty < a < +\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \ne -\infty:\ a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a \ne +\infty:\ a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a > 0:\ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \pm\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0:\ a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \mp\infty\ ;\\
&\forall a \in \mathbb{R}:\ \frac{a}{\pm\infty} = 0\ .
\end{aligned}$$

Zbylé výrazy

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty),\ 0 \cdot (\pm\infty),\ (\pm\infty) \cdot 0,\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \frac{a}{0}\ \text{ pro }\ a \in \mathbb{R}^*$$

— součet dvou nekonečen s opačnými znaménky, součin nuly a nekonečna, podíl dvou nekonečen a každý podíl s nulou ve jmenovateli — ponecháváme nedefinované, jsou to tzv. *neurčité výrazy*.

Tvrzení (rozšířená aritmetika limit). *Nechť* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ *a* $\lim b_n = b \in \mathbb{R}^*$. *Potom*

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$, *je-li tento součet definován,*
2. $\lim(a_n b_n) = ab$, *je-li tento součin definován a*
3. *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n > n_0$, *pak* $\lim(a_n/b_n) = a/b$, *je-li tento podíl definován.*

Důkaz je ponechán jako úloha. Vlastně toto tvrzení zdůvodňuje aritmetiku nekonečen: pravidlo jako například $\forall a \in \mathbb{R}^*, a < 0: \ a(-\infty) = +\infty$ je jen přepisem výsledku, že pro každé dvě posloupnosti čísel $(a_n), (b_n)$ s $\lim a_n = a < 0$ a $\lim b_n = -\infty$ platí, že $\lim(a_n b_n) = +\infty$.

Zmiňme, že neurčitý výraz je i

$$1^{\pm\infty}$$

(v tom se občas chybuje): když $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ s $\lim a_n = 1$ a např. $\lim b_n = +\infty$, pak o limitě posloupnosti $(a_n^{b_n})$ lze říci jen to, že buď neexistuje nebo to je nezáporné reálné číslo nebo $+\infty$ (vymyslete příslušné příklady). Ale (dotaz na přednášce) snadno se vidí, že $0^{+\infty} = 0$ a, obecněji, $a^{+\infty} = 0$ pro $0 \le a < 1$ a $a^{+\infty} = +\infty$ pro $a > 1$. Podobně $a^{-\infty} = +\infty$ pro $0 < a < 1$ a $a^{-\infty} = 0$ pro $a > 1$. Ale $0^{-\infty}$ je neurčitý výraz!

Je zajímavé, že některé neurčité výrazy jsou neurčitější než jiné. Třeba

$$\frac{0}{0} = \text{úplně cokoli, ale pro } a \neq 0 \text{ je } \frac{a}{0} = +\infty \text{ nebo } -\infty \text{ nebo neexistuje}\ .$$

Pro každé $\alpha \in \mathbb{R}^*$ se totiž lehce najdou posloupnosti $(a_n), (b_n)$, že $\lim a_n = \lim b_n = 0$ a $\lim(a_n/b_n) = \alpha$, popř. neexistuje. Pro druhý neurčitý výraz však máme jen tři uvedené možnosti.

Limes inferior a limes superior. Podle rozšířené B.–W. věty má každá posloupnost (a_n) konvergentní podposloupnost nebo podposloupnost jdoucí do $-\infty$ nebo jdoucí do $+\infty$. Každá (a_n) má tedy alespoň jeden *hromadný bod* $\alpha \in \mathbb{R}^*$, což je vlastní nebo nevlastní limita nějaké podposloupnosti. Označíme

$$\mathbb{R}^* \supset H = \{\text{hromadné body posloupnosti } (a_n)\}\ (\neq \emptyset)\ .$$

Snadno se vidí, že H má největší i nejmenší prvek. (Když (a_n) není shora omezená, pak je $+\infty \in H$ největším prvkem. Je-li (a_n) shora omezená číslem $c \in \mathbb{R}$, je c zřejmě i horní mez pro H. Nechť $\alpha = \sup(H) \in \mathbb{R}$. Podle vlastnosti suprema a definice množiny H pro každé $n \in \mathbb{N}$ má (a_n) podposloupnost s limitou v intervalu $[\alpha - 1/n, \alpha]$. Z těchto podposloupností pro $n = 1, 2, \ldots$ vybereme vhodně členy $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$, že $k_1 < k_2 < \ldots$ a pro každé n je $a_{k_n} \in [\alpha - 2/n, \alpha]$. Tím jsme vyrobili podposloupnost, jejíž limita je α. Tedy $\alpha = \sup(H) \in H$ a H má největší prvek. Podobně se ukáže, že H má nejmenší prvek.) Definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \min(H) \quad \text{a} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n := \max(H)\ .$$

Tyto zkratky znamenají *limes inferior*, nejmenší limita (podposloupnosti), a *limes superior*, největší limita (podposloupnosti). Na rozdíl od limity $\liminf$ a $\limsup$ vždy existují a jsou definované pro každou posloupnost.

Úloha. *Sestrojte posloupnost reálných čísel, pro niž $H = \mathbb{R}^*$, to jest každé reálné číslo, $-\infty$ i $+\infty$ je její hromadný bod.*

Příklad. Posloupnost (a_n) s $a_n = 1/n + n^{1+(-1)^n}$ má $\liminf a_n = 1$ a $\limsup a_n = +\infty$.

Uvedeme druhou, ekvivalentní, definici $\liminf$ a $\limsup$. Pro posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ definujeme dvě nové posloupnosti (b_n) a (c_n),

$$b_n = \sup(\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}) \ \text{ a } \ c_n = \inf(\{a_n, a_{n+1}, \ldots\})\ .$$

Je-li (a_n) shora neomezená, máme (resp. definujeme) $b_1 = b_2 = \cdots = +\infty$, jinak je $b_1 \geq b_2 \geq \ldots$ nerostoucí posloupnost reálných čísel. Podobně $c_1 = c_2 = \cdots = -\infty$ je-li (c_n) zdola neomezená, jinak je $c_1 \leq c_2 \leq \ldots$ neklesající posloupnost reálných čísel. V prvním případě definujeme $\lim b_n = +\infty$, ve druhém $\lim b_n$ existuje vlastní či je $-\infty$ podle tvrzení o limitě monotónní posloupnosti. Podobně klademe $\lim c_n = -\infty$ v prvním případě, a jinak je $\lim c_n$ vlastní či $+\infty$.

Tvrzení (o liminf a limsup). *Limita $\lim a_n$ existuje (vlastní či nevlastní), právě když $\liminf a_n = \limsup a_n$, pak $\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$. Dále*

$$\limsup a_n = \lim b_n \quad a \quad \liminf a_n = \lim c_n\ .$$

Důkaz. Když $\lim a_n = a \in \mathbb{R}^*$ existuje, pak podle tvrzení o limitě podposloupnosti má každá podposloupnost limitu a, tedy $H = \{a\}$, $\liminf a_n = \min(H) = a = \max(H) = \limsup a_n$. Předpokládejme naopak, že $\lim a_n$ neexistuje. Podle rozšířené B.-W. věty má (a_n) podposloupnost s limitou $a \in \mathbb{R}^*$. Protože a není limitou celé posloupnosti, pro $a \in \mathbb{R}$ existuje $\varepsilon > 0$, že mimo interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n). Pokud $a = +\infty$, existuje $\varepsilon > 0$, že mimo interval $(1/\varepsilon, +\infty)$ leží nekonečně mnoho členů posloupnosti (a_n). Podobně pro $a = -\infty$ s intervalem $(-\infty, -1/\varepsilon)$. Tyto členy posloupnosti (a_n) tvoří její podposloupnost (d_n). Posloupnost (d_n) má podle rozšířené B.-W. věty podposloupnost s limitou $b \in \mathbb{R}^*$. Podle tvrzení o limitě a uspořádání i b leží mimo interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, respektive mimo $(1/\varepsilon, +\infty)$, respektive mimo $(-\infty, -1/\varepsilon)$. Tedy $a \neq b$ a $a, b \in H$, a proto i nejmenší a největší prvek H, $\liminf a_n$ a $\limsup a_n$, se liší.

Dokážu, že $\lim b_n = \limsup a_n$, důkaz pro $\lim c_n = \liminf a_n$ je stejný. Je-li (a_n) shora neomezená pak jistě $\lim b_n = +\infty$ i $\limsup a_n = +\infty$. Nechť je (a_n) shora omezená a (d_n) je její podposloupnost s limitou rovnou $\limsup a_n$. Protože b_n je horní mezí skoro všech d_n (s možnou výjimkou $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$), máme (podle tvrzení o limitě a uspořádání) pro každé n i $b_n \geq \limsup a_n$ a tedy i $\lim b_n \geq \limsup a_n$. Na druhou stranu z definice čísel b_n snadno sestrojím podposloupnost (a_{k_n}) posloupnosti (a_n), že pro každé n je $b_n \geq a_{k_n} > b_n - 1/n$. Pak podle věty o dvou policajtech je $\lim b_n = \lim a_{k_n}$, tedy $\lim b_n \in H$ a $\lim b_n \leq \limsup a_n$. Celkem tedy $\lim b_n = \limsup a_n$. □

Jak se dá představit $\limsup a_n$ (a podobně $\liminf a_n$)? Z $+\infty$ posouváme dolů píst, dokud nenarazí na členy posloupnosti (a_n) (nedá-li se píst nikam umístit, je $\limsup a_n = +\infty$). Pak se nachází v poloze b_1. Smažeme a_1, čímž se mohlo uvolnit místo, a znovu posouváme dolů píst, dokud nenarazí na zbylé členy posloupnosti. Nachází se v poloze b_2. Smažeme a_2 a posouváme dolů píst. A tak postupujeme dále. Mezní poloha, k níž se píst přibližuje, je $\limsup a_n$. Jiný možný pohled na $\limsup a_n$ je lehkoatletický. Pro shora omezenou posloupnost (a_n) řekneme, že přeskočí laťku ve výšce $l \in \mathbb{R}$, když pro každé $\varepsilon > 0$ pro nekonečně mnoho n je $a_n > l - \varepsilon$. Pak $\limsup a_n$ je přesně nejvyšší laťka, kterou (a_n) přeskočí.

Přednáška 6, 7. listopadu 2014

Část 3: nekonečné řady

Základní definice. *Nekonečná řada*, krátce *řada,* je posloupnost reálných čísel $(a_n) \subset \mathbb{R}$ uvedená v zápisu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \ ,$$

spolu s metodou přiřazující řadě její *součet*, což je reálné číslo (někdy povolíme i $\pm\infty$). Motivací a hnací myšlenkou je snaha rozšířit sčítání reálných čísel na nekonečně mnoho sčítanců. Nejběžnější sčítací metodou je metoda *částečných součtů*, což je posloupnost

$$(s_n) \ \text{ definovaná jako } \ s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \ .$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje*, když konvergují její částečné součty (s_n), to jest $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pak definujeme jako tuto limitu,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \in \mathbb{R} \ .$$

Je-li $\lim s_n$ nevlastní nebo neexistuje, řekneme, že řada *diverguje* (pak nemá žádný součet). Pokud $\lim s_n = \pm\infty$, píšeme též $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Dvě poznámky ke značení. Řady můžeme samozřejmě sčítat i od jiného indexu než 1 nebo i přes nějakou obecnou množinu indexů. Máme tak například řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n, \ \sum_{n=m}^{\infty} b_n, \ \sum_{n \ge k} a_n \ \text{ nebo nejobecněji } \ \sum_{n \in I} a_n \ ,$$

kde $m, k \in \mathbb{N}_0$ či $m, k \in \mathbb{Z}$ a $I \subset \mathbb{N}$ je nekonečná množina přirozených čísel nebo i jakákoli jiná nekonečná spočetná množina. (Abychom se ale u takových řad mohli bavit o součtu podle uvedené definice, musí být daná či z kontextu jasná bijekce $f: \ \mathbb{N} \to I$ mezi množinou sčítacích indexů I a $\mathbb{N}$. Součet řady $\sum_{n \in I} a_n$ pak počítáme z definice jako součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, kde $b_n = a_{f(n)}$.) Místo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ budu často psát stručně jen } \ \sum a_n \ .$$

Dále se u řad objevuje trochu matoucí ale historicky ustálená dvojznačnost matematického značení, která u limit posloupností není přítomna. Jeden symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

se používá ve dvou různých významech: jednou pro zadání řady jako nekonečné posloupnosti (a_n) a jindy pro označení konkrétního reálného čísla (či $\pm\infty$), jež je jejím součtem. (Je to jako kdybychom limitu posloupnosti (a_n) označili zase (a_n).) Při čtení textů o řadách je tedy dobře mít jasno, v kterém z obou významů je daný symbol řady použit (docela dobře může být použit v obou). Vidíme-li napsáno například

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \ ,$$

můžete to znamenat, že (bez ohledu na konvergenci obou řad) pro každé n platí rovnost $a_n = b_n^2$ nebo to může znamenat, že obě řady mají stejný součet $s \in \mathbb{R}$ (popř. $s = +\infty$).

Zapišme si jednoduché, ale užitečné pozorování: když $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tak buď řada $\sum a_n$ konverguje a její součet je nezáporné reálné číslo nebo diverguje k $+\infty$ (pak totiž $s_1 \leq s_2 \leq \dots$ a použijeme tvrzení o limitě monotónní posloupnosti).

Příklady řad a jejich součtů. Řada

$$\sum (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

diverguje, neboť částečné součty $(s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ nemají vlastní ani nevlastní limitu. Naopak

$$\sum (1/2)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1 \ ,$$

protože

$$\lim s_n = \lim(1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n) = \lim(1 - 1/2^n) = 1 \ .$$

Tato řada tedy konverguje a má součet 1. Podobně má součet 1 i

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots = 1 \ ,$$

protože

$$\lim s_n = \lim \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \lim(1 - 1/(n+1)) = 1 \ .$$

A co proslulá *harmonická řada* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$? Ukážeme, že diverguje, tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \ .$$

Pro každé $m = 1, 2, \ldots$ totiž máme nerovnost

$$\sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{n} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \ .$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno a $r \in \mathbb{N}_0$ je maximální vzhledem k $2^r \leq n$. Pak $2^{r+1} > n$, takže $r > \log n / \log 2 - 1$. Podle uvedené nerovnosti,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq 1 + \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i} \geq 1 + r(1/2) > \log n/(2 \log 2) - 1/2 \ ,$$

což pro $n \to \infty$ má limitu $+\infty$. Tedy $\lim s_n = +\infty$ (jeden policajt) a harmonická řada proto diverguje (do $+\infty$). Podobná řada

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

však konverguje, jak za chvíli dokážeme. Konečně poslední triviální, ale důležitý příklad: když v $\sum a_n$ se $a_n = 0$ pro všechna n s výjimkou konečně mnoha indexů, řekněme $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, pak $\sum a_n$ konverguje a její součet je

$$\sum a_n = a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} \ .$$

Rozmyslete si proč.

Tvrzení (podmínky konvergence řady). *Nechť $\sum a_n$ je řada reálných čísel.*

1. *(nutná podmínka konvergence řady) $\sum a_n$ konverguje $\Rightarrow$ $\lim a_n = 0$.*

2. (Cauchyova podmínka pro řady) $\sum a_n$ konverguje, právě když

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 : \ m > n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon \, .$$

Důkaz. 1. Nechť $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0 \, .$$

Jako úlohu si rozmyslete, proč přesně která rovnost platí.

2. Řada $\sum a_n$ konverguje, právě když (s_n) konverguje, což platí podle věty o Cauchyho podmínkce, právě když je (s_n) cauchyovská. Podle definice částečných součtů pro $m > n$ máme $s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m$. Cauchyova podmínka pro řady je tedy jen rozepsání Cauchyovy podmínky pro posloupnost částečných součtů. □

První část se používá nejčastěji v kontrapozici: je-li dána řada $\sum a_n$, jejíž sčítanec nemá za limitu nulu (tj. $\lim a_n$ neexistuje nebo existuje, ale je nenulová), pak $\sum a_n$ nekonverguje. Opačná implikace $\Leftarrow$ obecně neplatí, jak jsme viděli na příkladu harmonické řady. Druhá část však je ekvivalence.

Dvě důležité rodinky řad. I široká veřejnost zná *geometrickou řadu* (např. „Volně žijící kočky se mohou množit geometrickou řadou“ — nalezeno na Internetu v Jindřichohradeckém deníku), alespoň jako floskuli. Přesně jde o řadu $\sum q^{n-1}$, kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr, se součtem

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \ldots \quad |q| < 1 \\ +\infty & \ldots \quad q \geq 1 \\ \text{diverguje} & \ldots \quad q \leq -1 \, . \end{cases}$$

Když $|q| \geq 1$, pak geometrická řada zjevně diverguje — $\lim q^n$ není 0 (nesplňuje nutnou podmínku konvergence). Podrobnější informaci dostaneme z identity $(n = 1, 2, \ldots)$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \ (q \neq 1), \ s_n = n \ (q = 1) \, .$$

Z ní je jasné, že pro $q \geq 1$ je $\sum q^{n-1} = +\infty$ a že pro $q \leq -1$ neexistuje vlastní ani nevlastní $\lim s_n$ (s_n je střídavě ≥ 1 a ≤ 0). Pro $|q| < 1$ máme

$$\lim s_n = \frac{1 - \lim q^n}{1 - q} = \frac{1 - 0}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \, .$$

Stojí za to si zapamatovat trochu obecnější vzorec, že pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ a $q \in \mathbb{R}$ s $|q| < 1$ je

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + q^{m+3} + \cdots = \frac{q^m}{1-q}$$

(odvoďte ho jako úlohu).

Zeta (též dzeta) funkce je řada $\sum n^{-s}$, kde $s \in \mathbb{R}$ je parametr, se součtem

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots = \begin{cases} \text{konverguje} & \ldots \quad s > 1 \\ +\infty & \ldots \quad s \leq 1\,. \end{cases}$$

Druhou, divergentní, část jsme již dokázali, plyne z divergence harmonické řady. Že pro $s > 1$ řada konverguje, dokážeme později. Pro zajímavost, je známo, že $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(4) = \pi^4/90$ a podobné vzorce pro $\zeta(2n)$, ale nejsou známy žádné podobné jednoduché vzorce pro $\zeta(2n+1)$. Je známo, že součet $\zeta(3)$ je iracionální, ale nikdo to (zatím?) neumí dokázat třeba pro $\zeta(5)$.

Absolutní konvergence. Řada $\sum a_n$ *absolutně konverguje*, konverguje-li řada $\sum |a_n|$, to jest posloupnost $(|a_1|, |a_1| + |a_2|, |a_1| + |a_2| + |a_3|, \ldots)$ má vlastní limitu, to jest existuje $c > 0$, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < c\,.$$

Například $\sum(-1/2)^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$ absolutně konverguje, stejně jako řady $\sum 1/n(n+1)$ a $\sum(-1)^n/n(n+1)$, ale $\sum(-1)^{n+1}/n$ nekonverguje absolutně (i když konverguje). Každá řada s jen konečně mnoha nenulovými sčítanci absolutně konverguje.

Tvrzení (AK $\Rightarrow$ K). *Když řada $\sum a_n$ absolutně konverguje, pak konverguje.*

Důkaz. Pro $m > n$ díky trojúhelníkové nerovnosti a vlastnostem absolutní hodnoty máme

$$\begin{aligned} &|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| \\ &= ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m||\,. \end{aligned}$$

Cauchyho podmínka pro $\sum |a_n|$, jež je splněna podle předpokladu, tedy implikuje splnění Cauchyho podmínky i pro $\sum a_n$ (a pro dané $\varepsilon > 0$ pro $\sum a_n$ funguje tentýž index n_0, jako pro $\sum |a_n|$). $\square$

Teprve absolutně konvergentní řady jsou správným zobecněním sčítání na nekonečně mnoho sčítanců, kdy se zachovají jeho pěkné vlastnosti. Dá se dokázat, že absolutně konvergentní řady splňují komutativní zákon (součet se nemění při přeházení sčítanců), asociativní zákon (součet se nemění při přeskupení sčítanců) a distributivní zákon (při vynásobení dvou absolutně konvergentních řad se součty vynásobí). Na přednášce si později dokážeme jen to první.

Tvrzení (Leibnizovo kritérium). *Nechť (a_n) je nerostoucí posloupnost nezáporných reálných čísel s $\lim a_n = 0$. Pak řada*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad \textit{konverguje} .$$

Důkaz. Ukážeme, že řada splňuje Cauchyho podmínku. Nejdřív indukcí podle n dokážeme celkem zřejmé pomocné tvrzení: když $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$, pak střídavý součet $b_1 - b_2 + b_3 - \cdots \pm b_n \in [0, b_1]$. Pro $n = 1$ platí, $b_1 \in [0, b_1]$. Nechť $n > 1$ a pomocné tvrzení platí pro každý střídavý součet s $n-1$ sčítanci. Máme $b_1 - b_2 + b_3 - \cdots \pm b_n = b_1 - c$, kde $c = b_2 - b_3 + b_4 - \cdots \pm b_n$. Podle indukčního předpokladu je $c \in [0, b_2]$. Protože $b_2 \le b_1$, je i $c \in [0, b_1]$. Tedy $b_1 - c \in [0, b_1]$, což jsme chtěli dokázat.

Zpět k naší řadě se střídajícími se znaménky. Předpokládáme, že $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge 0$ a $\lim a_n = 0$. Pro dané $\varepsilon > 0$ tedy existuje n_0, že $n > n_0 \Rightarrow 0 \le a_n < \varepsilon$. Pro každé dva indexy $m > n > n_0$ pak platí, že

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} (-1)^{i+1} a_i \right| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \cdots \pm a_m \le a_{n+1} < \varepsilon ,$$

kde první rovnost a nerovnost za ní plynou z pomocného tvrzení. Takže $\sum (-1)^{n+1} a_n$ splňuje Cauchyho podmínku pro řady a podle tvrzení o podmínkách konvergence řady konverguje. $\square$

Tento důkaz jsem na přednášce neuvedl, protože mě napadl až teď. Na přednášce jsem uvedl následující (obligátní) důkaz, který ponechám jako úlohu. Kritérium nese jméno německého filozofa a matematika, spoluobjevitele matematické analýzy, *Gottfrieda W. Leibnize (1646–1716).*

Úloha. *Dokažte Leibnizovo kritérium takto: jsou-li s_n částečné součty řady $\sum (-1)^{n+1} a_n$, pak $s_1 \ge s_3 \ge s_5 \ge \dots$, $s_2 \le s_4 \le s_6 \le \dots$, $s_{2n-1} \ge s_{2m}$, takže $\lim s_{2n-1} = \lim s_{2n} = \lim s_n \in \mathbb{R}$.*

Typické příklady řad konvergujících podle Leibnizova kritéria jsou

$$\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad \text{a} \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \ .$$

Ani jedna z nich nekonverguje absolutně.

Tvrzení (lineární kombinace řad). *Nechť $\sum a_n$ a $\sum b_n$ jsou dvě řady, $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ s $a \neq 0$. Pak $\sum a_n$ konverguje, právě když $\sum a a_n$ konverguje. Pro součty platí*

$$\sum a a_n = a \sum a_n \ .$$

Když $\sum a_n$ i $\sum b_n$ konverguje, pak konverguje i $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ a pro součty platí

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n \ .$$

Důkaz. Úloha, procvičte si definice a aritmetiku limit. □

První část tvrzení je ekvivalence, druhá jen implikace. Tyto transformace řad fungují obecně a nepotřebují absolutní konvergenci.

Přednáška 7, 14. listopadu 2014

Uvedeme bez důkazu klasické zobecnění Leibnizova kritéria (v němž $b_n = (-1)^{n+1}$).

Tvrzení (Dirichletovo a Abelovo kritérium). *Nechť* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$, *přičemž* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. *Pak platí, že*

1. *(Dirichletovo kritérium) když* $\lim a_n = 0$ *a* $\sum b_n$ *má omezené částečné součty, pak* $\sum a_n b_n$ *konverguje a*

2. *(Abelovo kritérium) když* $\sum b_n$ *konverguje, pak* $\sum a_n b_n$ *konverguje.*

Peter L. Dirichlet (1805–1859) byl německý matematik (dokázal, že každá aritmetická posloupnost $a, a+m, a+2m, \ldots$, kde $a, m \in \mathbb{N}$ jsou nesoudělná čísla, obsahuje nekonečně mnoho prvočísel) a *Niels Henrik Abel (1802–1829)* byl norský matematik (dokázal obecnou neřešitelnost rovnic pátého stupně v odmocninách). Příkladem řady, jejíž konvergence plyne z Dirichletova kritéria, je

$$\sum \sin(n)/n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{2} + \frac{\sin 3}{3} + \ldots .$$

(Návod: omezenost posloupnosti $(\sin 1 + \sin 2 + \cdots + \sin n)$ dokažte ze vzorce pro tyto součty, který odvodíte sečtením vztahů $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$, $\varphi = 1, 2, \ldots, n$).

Dokážeme, jak jsme slíbili, že pro $s > 1$ je $\zeta(s) < +\infty$, tedy že $\sum n^{-s}$ konverguje. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno a $r \in \mathbb{N}$ je libovolné číslo, pro něž $2^{r+1} > n$. Pak, označíme-li $q = 2^{1-s} < 1$,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^s} \leq \sum_{k=0}^{r} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{i^s} < \sum_{k=0}^{r} \frac{2^k}{(2^k)^s} = \sum_{k=0}^{r} (2^{1-s})^k < \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} ,$$

podle vzorce pro součet geometrické řady. Posloupnost částečných součtů $s_1 < s_2 < \ldots$ má tedy horní mez $1/(1-2^{1-s})$ a $\sum n^{-s}$ konverguje. (Proč platí první a druhá nerovnost? Sčítací obor $i = 1, 2, \ldots, n$ jsme pokryli disjunktními intervaly $2^k, 2^k+1, \ldots, 2^{k+1}-1$, kde $k = 0, 1, \ldots, r$. Počet sčítanců $1/i^s$ v k-tém intervalu je $2^{k+1} - 1 - 2^k + 1 = 2^k$ a největší z nich je $1/(2^k)^s$. Je to podobná metoda jako v důkazu divergence harmonické řady. Geometrická řada zde triumfuje nad zeta funkcí.) Argument se lehce následovně zobecní.

Tvrzení (Cauchyho kondenzační kritérium). *Když* $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$, *pak řada* $\sum 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ *konverguje, právě když konverguje řada* $\sum a_n$.

Důkaz. Úloha — kdo pochopil předchozí důkaz, nebude mít s tímto žádný problém. □

Porovnávání řad, hlavně s geometrickou. Zapišme si užitečné pozorování: když pro dvě posloupnosti $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ platí $a_n = b_n$ pro každé $n > n_0$, pak řada $\sum a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum b_n$. (Jsou-li totiž s_n a t_n částečné součty těchto řad, pak pro každé $n > n_0$ je $s_n = t_n + (s_{n_0} - t_{n_0})$, takže se posloupnosti (s_n) a (t_n) pro indexy $n > n_0$ liší jen přičtením konstanty $s_{n_0} - t_{n_0}$. Takové dvě posloupnosti současně konvergují či současně divergují.)

Tvrzení (srovnání řad). *Reálná čísla* a_n, b_n *buďte nezáporná.*

1. *Když pro každé* $n > n_0$ *je* $a_n \leq b_n$ *a řada* $\sum b_n$ *konverguje, pak konverguje i* $\sum a_n$.

2. *Nechť* $\lim a_n/b_n = l$. *Pak (i) pro* $0 < l < +\infty$ *máme, že* $\sum a_n$ *konverguje* $\iff$ $\sum b_n$ *konverguje, (ii) pro* $l = 0$ *máme, že* $\sum b_n$ *konverguje* $\Rightarrow \sum a_n$ *konverguje a (iii) pro* $l = +\infty$ *máme, že* $\sum a_n$ *konverguje* $\Rightarrow \sum b_n$ *konverguje.*

Důkaz. 1. Částečné součty řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$ označíme jako s_n a t_n. Podle hořejšího pozorování můžeme předpokládat, že nerovnost $a_n \leq b_n$ platí dokonce pro každé $n = 1, 2, \ldots$ (prvních n_0 sčítanců mohu libovolně změnit). Takže i $s_n \leq t_n$ pro každé n. Podle předpokladu existuje $c > 0$, že $t_n < c$ pro každé n. Tedy i $s_n < c$ pro každé n a řada $\sum a_n$ konverguje.

2. (i) Pro $n > n_0$ je $l/2 < a_n/b_n < 2l$, tedy $a_n < 2lb_n$ a $b_n < (2/l)a_n$. Ekvivalence konvergencí řad $\sum a_n$ a $\sum b_n$ tedy plyne z první části (a tvrzení o lineární kombinaci řad). (ii) Pro $n > n_0$ je $a_n/b_n < 1$, tedy $a_n < b_n$ a použijeme první část. (iii) Pro $n > n_0$ je $1 < a_n/b_n$, tedy $b_n < a_n$ a použijeme první část. □

Věta (odmocninové kritérium). *Reálná čísla* a_n *buďte nezáporná.*

1. *Když existuje* q, $0 < q < 1$, *a* n_0, *že pro* $n > n_0$ *je* $a_n^{1/n} < q$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*

2. *Když* $\limsup a_n^{1/n} < 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*

3. *Když* $\lim a_n^{1/n} < 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*

4. *Když* $\limsup a_n^{1/n} > 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

5. *Když* $\lim a_n^{1/n} > 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

Důkaz. 1. Pro $n > n_0$ je tedy $a_n < q^n$ a podle tvrzení o srovnání řad řada $\sum a_n$ konverguje (srovnáváme ji s konvergentní geometrickou řadou).

2. Podle definice limsupu existuje n_0 a číslo $q < 1$, že pro $n > n_0$ je $a_n^{1/n} < q$, takže podle části 1 jsme hotovi.

3. Když limita existuje, rovná se limsupu, jsme hotovi podle 2.

4 a 5. Zde je jasné, že existuje $q > 1$, že pro nekonečně mnoho indexů n (v části 5 dokonce pro každé $n > n_0$) je $a_n^{1/n} > q$. Pro tato n tedy $a_n > q^n > 1$ a není splněna nutná podmínka konvergence řady, že $\lim a_n = 0$. □

Věta (podílové kritérium). *Reálná čísla* a_n *buďte kladná.*

1. *Když existuje* q, $0 < q < 1$, *a* n_0, *že pro* $n > n_0$ *je* $a_{n+1}/a_n < q$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*

2. *Když* $\limsup a_{n+1}/a_n < 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*

3. *Když* $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *konverguje.*

4. *Existuje posloupnost* (b_n), $b_n > 0$, *že* $\limsup b_{n+1}/b_n > 1$ *a řada* $\sum b_n$ *přesto konverguje.*

5. *Když* $\lim a_{n+1}/a_n > 1$, *pak řada* $\sum a_n$ *diverguje.*

Důkaz. 1. Jak víme, prvních n_0 členů řady lze libovolně změnit (aniž by se cokoli stalo s konvergencí), a můžeme tak předpokládat, že $a_{n+1}/a_n < q$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Vynásobením n nerovností $a_1 \leq a_1, a_2/a_1 < q, a_3/a_2 < q, \ldots, a_n/a_{n-1} < q$ dostaneme nerovnost $a_n \leq a_1 q^{n-1}$ a jsme hotovi díky tvrzení o srovnání řad (opět srovnáváme s konvergentní geometrickou řadou).

2 a 3. Dokazuje se stejně jako v předešlé větě.

4. Nechť $(a_n) = ((1/2)^{n-1})$ (geometrická posloupnost, pro každé n je $a_n/a_{n-1} = 1/2$) a posloupnost (b_n) získáme z (a_n) tak, že si zvolíme libovolnou posloupnost indexů $1 < n_1 < n_2 < \ldots$, ovšem splňující $n_{i+1} > n_i + 1$ (tj. žádné dva zvolené indexy nesousedí), a pro $n \neq n_i$ položíme $b_n = a_n$ a pro $n = n_i$ položíme $b_n = 4a_n$. Pro $n = n_i$ pak je $b_n/b_{n-1} = 4a_n/a_{n-1} = 2$, takže

$\limsup b_n/b_{n-1} \geq 2$ (fakticky se rovná dvěma). Ovšem $\sum a_n$ je konvergentní geometrická řada (s kvocientem $q = 1/2$) a pro každé n je $b_n \leq 4a_n$, takže i $\sum b_n$ konverguje.

5. Máme $q > 1$ a n_0, že pro $n > n_0$ je $a_{n+1}/a_n > q$. Podobně jako v části 1 můžeme předpokládat, že že $a_{n+1}/a_n > q$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Vynásobením n nerovností $a_1 \geq a_1, a_2/a_1 > q, a_3/a_2 > q, \ldots, a_n/a_{n-1} > q$ dostaneme nerovnost $a_n \geq a_1 q^{n-1} \geq a_1 > 0$ — řada $\sum a_n$ diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence řady, že $\lim a_n = 0$. □

Důležitá poznámka: když limsup popř. limita z $a_n^{1/n}$ či a_{n+1}/a_n vyjde 1, pak kritéria neříkají nic a řada může konvergovat nebo divergovat. Např. $\zeta(s) = \sum a_n = \sum n^{-s}$ má pro každé pevné $s \in \mathbb{R}$ $\lim a_n^{1/n} = \lim a_{n+1}/a_n = 1$ (dokažte si to). Odmocninové kritérium se často spojuje se jménem A.-L. Cauchyho a podílové se jménem *Jeana-Baptisty le Ronda d'Alemberta (1717–1783)*, podle Wikipedie francouzského matematika, mechanika, fyzika, filosofa, hudebního teoretika a encyklopedisty.

Přerovnání řad. *Přerovnáním* řady $\sum a_n$ rozumíme řadu $\sum a_{p(n)} = a_{p(1)} + a_{p(2)} + a_{p(3)} + \ldots$ danou nějakou permutací p množiny přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, což je jakákoli bijekce $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (bijekce je zobrazení, jež je prosté i na). Prostě nějak zpřeházíme sčítance v $\sum a_n$.

Věta (Riemannova o přerovnání řad). *Nechť řada $\sum a_n$ konverguje, ale ne absolutně. Pak pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$ nebo $\alpha = -\infty$ nebo $\alpha = +\infty$ existuje permutace $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, že*

$$\sum a_{p(n)} = \alpha\ .$$

Důkaz. Jen naznačený. Nechť $\sum b_n$, resp. $\sum c_n$, je podřada řady $\sum a_n$ sestávající z nezáporných, resp. záporných, sčítanců a_n. Pak $\sum b_n = +\infty$ a $\sum c_n = -\infty$, avšak $\lim b_n = \lim c_n = 0$. Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, pro nekonečné α se následující postup snadno upraví. Ze $\sum b_n$ vezmeme takový nejkratší částečný součet t_{m_1}, že $t_{m_1} > \alpha$. Pak ze $\sum c_n$ vezmeme takový nejkratší částečný součet u_{n_1}, že $t_{m_1} + u_{n_1} < \alpha$. Ze zbytku $\sum b_n$ vezmeme takový nejkratší částečný součet $t_{m_2} - t_{m_1}$, $m_1 < m_2$, že $t_{m_1} + u_{n_1} + (t_{m_2} - t_{m_1}) > \alpha$. Ze zbytku $\sum c_n$ vezmeme takový nejkratší částečný součet $u_{n_2} - u_{n_1}$, $n_1 < n_2$, že $t_{m_1} + u_{n_1} + (t_{m_2} - t_{m_1}) + (u_{n_2} - u_{n_1}) < \alpha$. Takto postupujeme dále. Vzniklá řada je přerovnání $\sum a_n$, jehož částečné součty konvergují k α. □

Příkladem řady, na níž se vztahuje Riemannova věta, je třeba střídavá harmonická řada
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2 \,.$$

Věta (o přerovnání AK řady). *Nechť je řada* $\sum a_n$ *absolutně konvergentní. Pak pro každou permutaci* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *je přerovnaná řada* $\sum a_{p(n)}$ *absolutně konvergentní a má týž součet jako* $\sum a_n$.

Důkaz. Příště. $\square$

Přednáška 8, 21. listopadu 2014

Nejprve jednoduché lemma: *když* $a_n \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$*, pak* $\sum a_n$ *konverguje* $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists m : \sum_{n>m} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots < \varepsilon$. Důkaz necháváme jako úlohu.

Důkaz. Nechť $\sum a_{p(n)}$ je přerovnání řady $\sum a_n$, takže $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce. Protože $\sum a_n$ absolutně konverguje, existuje $c > 0$, že $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < c$ pro každé n. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dané. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$, že $\{p(1), p(2), \ldots, p(n)\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$, tudíž i

$$|a_{p(1)}| + |a_{p(2)}| + \cdots + |a_{p(n)}| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m| < c$$

a $\sum a_{p(n)}$ absolutně konverguje.

Dokážeme, že $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$ (součty se rovnají). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vezmeme n_0, že $\sum_{n>n_0} |a_n| < \varepsilon$ i $\sum_{n>n_0} |a_{p(n)}| < \varepsilon$ (podle lemmatu). Pak vezmeme tak velké n_1, $n_1 > n_0$, že

$$\{p(1), p(2), \ldots, p(n_0)\} \subset \{1, 2, \ldots, n_1\}$$

i

$$\{1, 2, \ldots, n_0\} \subset \{p(1), p(2), \ldots, p(n_1)\}\ .$$

Pro každé $n > n_1$ pak díky definici n_0 a n_1 a Δ-ové nerovnosti máme, že

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_{p(i)} \right| = \left| \sum_{i \in A} a_i - \sum_{i \in B} a_{p(i)} \right| \leq \sum_{i \in A} |a_i| + \sum_{i \in B} |a_{p(i)}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\ ,$$

protože $A, B \subset \mathbb{N}$ jsou jisté dvě konečné množiny indexů s $\min A, \min B > n_0$ (sčítance a_i a $a_{p(i)}$ s $i \leq n_0$ se vzájemně zruší). Tedy $\lim(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \lim(a_{p(1)} + a_{p(2)} + \cdots + a_{p(n)})$ a obě řady mají stejný součet. $\square$

Absolutně konvergentní řady tak můžeme definovat obecněji pro libovolnou (spočetnou) množinu indexů. Nechť X je nekonečná spočetná množina (např. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a podobně). Řekneme, že řada

$$\sum_{i \in X} a_i$$

(toto si lze představit jako množinu dvojic $\{(i, a_i) \mid i \in X\}$, kde $a_i \in \mathbb{R}$) *absolutně konverguje*, když existuje $c > 0$, že pro každou *konečnou* podmnožinu $A \subset X$ je

$$\sum_{i \in A} |a_i| < c\ .$$

Součet takové absolutně konvergentní řady je pak definován jako součet klasické řady, když indexy v X bijektivně přejmenujeme přirozenými čísly:

$$\sum_{i \in X} a_i := \sum a_{p(n)} = \lim_{n \to \infty} (a_{p(1)} + a_{p(2)} + \cdots + a_{p(n)}) \ ,$$

kde $p: \ \mathbb{N} \to X$ je libovolná bijekce. Podle předchozí věty tento součet existuje a nezávisí na volbě p, takže definice je korektní. Následující tvrzení nebudeme dokazovat, důkaz je podobný důkazu věty.

Tvrzení (nekonečný distributivní zákon). *Nechť X a Y jsou nekonečné spočetné množiny a $\sum_{i \in X} a_i$ a $\sum_{j \in Y} b_j$ jsou absolutně konvergentní řady se součty $a \in \mathbb{R}$ a $b \in \mathbb{R}$. Pak jejich součin, řada*

$$\sum_{(i,j) \in X \times Y} a_i b_j \ ,$$

též absolutně konverguje a má součet ab.

Exponenciální funkce

(Následující motivační příklad na přednášce bohužel nezazněl.)

$$1 + (-100)^1/1! + (-100)^2/2! + (-100)^3/3! + \cdots = ?$$

Z podílového kritéria hned plyne, že řada absolutně konverguje, ale jaký má součet? Pro $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sčítanec $(-100)^n/n!$ divoce skáče mezi stále se v absolutní hodnotě zvětšujícími kladnými a zápornými hodnotami, například pro $n = 10, 11, \ldots$ je něco jako alespoň $\pm 10^{10}$, dosáhne maxima v absolutní hodnotě (když $n = 100$ — proč?) a pak začne faktoriál vítězit nad exponenciálou (pro $n > 100$) a sčítanec se rychle zmenšuje k 0. Na první pohled ale není důvod si myslet, že by se tak různorodá čísla mohla nasčítat na něco hezkého. Opravdová magie je, že ve skutečnosti se tato čísla téměř (ale opravdu téměř) vzájemně zruší:

$$\begin{aligned} &1 + (-100)^1/1! + (-100)^2/2! + (-100)^3/3! + \ldots \\ &= \frac{1}{1 + 100^1/1! + 100^2/2! + 100^3/3! + \ldots} < 10^{-10} \ , \end{aligned}$$

což je kladné číslo, velmi blízké nule, ale nenulové. Dokážeme si to.

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ definujeme *exponenciální funkci* jako součet řady

$$e^x = \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \ .$$

Protože $\frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$ pro $n \to \infty$, podle podílového kritéria řada absolutně konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ a exponenciální funkce je všude definovaná. Zřejmě $e^0 = 1$ a $e^x \geq 1$ pro $x \geq 0$ a e^x je pro $x \geq 0$ rostoucí funkce.

Tvrzení (exp **převádí součet na součin).** *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ je*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)\ .$$

Důkaz. Spočteme to a pak kroky výpočtu, jednotlivé rovnosti, zdůvodníme. Pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ máme:

$$\begin{aligned}
\exp(x)\exp(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^m}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n+m=k} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^n y^{k-n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = \exp(x+y)\ .
\end{aligned}$$

První rovnost je z definice exponenciální funkce. Ve druhé jsme obě absolutně konvergentní řady vynásobili a použili tvrzení o nekonečném distributivním zákonu. Dostali jsme vlastně řadu $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} \dots$. Ve třetí rovnosti jsme pro její sečtení vzali bijekci mezi $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, která začne indexem $(0,0)$, pak projde množinu indexů $\{(1,0),(0,1)\}$, pak množinu indexů $\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$ a tak dále, použili jsme fakticky větu o přerovnání AK řady. Čtvrtá rovnost je úprava založená na rovnostech $\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}$ a $m = k - n$. V páté jsme použili binomickou větu, čímž jsme se dostali k závěrečné šesté rovnosti, definici exponenciální funkce. $\square$

Speciálně máme $\exp(x)\exp(-x) = \exp(0) = 1$, tedy $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, což pro $x = 100$ je úvodní příklad. Tedy $\exp(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $\exp(x)$ je rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow \exp(x) < \exp(y)$ (protože pak $\exp(y) =$

$\exp(x)\exp(y-x)$ s $\exp(y-x) > 1$). Dále je jasné, že $\lim \exp(n) = +\infty$ a $\lim \exp(-n) = 0$.

Tvrzení (logaritmus). *Pro každé kladné $y \in \mathbb{R}$ má rovnice*

$$e^x = y$$

právě jedno řešení $x \in \mathbb{R}$, které označíme jako $\log y := x$ (přirozený logaritmus čísla y).

Na přednášce jsem prohlásil, že to hned plyne z faktu, že e^x je kladná funkce, rostoucí monotóně od 0 do $+\infty$, ale naštěstí jsem se po chvíli vzpamatoval. Pro důkaz je ještě zapotřebí velmi podstatný fakt, že e^x je na svém definičním oboru $\mathbb{R}$ spojitá funkce. K pojmu spojitosti funkce se ale dostaneme až později. Důkaz tedy odložíme a jen si poznamenáme, že díky předešlému tvrzení pro každé dvě kladná čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí rovnost $\log(xy) = \log x + \log y$.

Tvrzení (exponenciála jako limita). *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n = e^x \ .$$

Důkaz. Nechť nejprve $x > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ pak podle binomické věty a rovnosti $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ máme

$$(1+x/n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x/n)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(k-1)/n) \ .$$

Každý z posledních $k-1$ činitelů je z intervalu $[0,1]$, což je i jejich součin (pro $k = 0$ je prázdný a je roven 1), tudíž máme horní odhad $(1+x/n)^n \le \sum_{k=0}^{n} x^k/k! \le \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = e^x$. Využíváme ovšem toho, že $x > 0$. Co se týče dolního odhadu, pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme tak velké $l \in \mathbb{N}$, že $\sum_{k=0}^{l} x^k/k! > e^x(1-\varepsilon)$. Pak vezmeme n_0 (větší než l), že pro $n > n_0$ je $(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(l-1)/n) > 1-\varepsilon$. Pro $n > n_0$ pak

$$\begin{aligned}(1+x/n)^n &> \sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{k!}(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(k-1)/n) \\ &> \sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{k!}(1-\varepsilon) > e^x(1-\varepsilon)^2 > e^x - 2e^x\varepsilon\end{aligned}$$

(opět díky kladnosti x). Z obou odhadů plyne, že $\lim(1+x/n)^n = e^x$.

A co když $x < 0$, kdy předchozí odhady nefungují (pro $x = 0$ rovnost zjevně platí)? Zde ukážeme, že pro $x > 0$ je $\lim 1/(1-x/n)^n = e^x$, z čehož z aritmetiky limit a vlastnosti exponenciální funkce plyne, že $\lim(1-x/n)^n = e^{-x}$, jak potřebujeme. Protože $1/(1-x/n) = 1 + x/(n-x)$, stačí dokázat limitu $\lim(1+x/(n-x))^n = e^x$. Nechť $r \in \mathbb{N}$ je libovolné číslo větší než x. Pak (díky $x > 0$) máme dolní odhad $(1+x/(n-x))^n > (1+x/n)^n$ a horní odhad

$$\left(1+\frac{x}{n-x}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n-r}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n-r}\right)^{n-r}\left(1+\frac{x}{n-r}\right)^r .$$

Dolní odhad jde pro $n \to \infty$ v limitě k e^x a horní také, protože $(1+x/(n-r))^r$ jde k 1. Takže skutečně $\lim 1/(1-x/n)^n = \lim(1+x/(n-x))^n = e^x$. □

Goniometrické funkce a exponenciála. Funkce sinus a cosinus se také dají definovat nekonečnou řadou: pro každé $x \in \mathbb{R}$ položíme

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

a

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

Podle podílového kritéria obě řady absolutně konvergují pro každé $x \in \mathbb{R}$ a obě funkce jsou tak definované na celém $\mathbb{R}$. Funkci e^x jsme definovali pro $x \in \mathbb{R}$, ale stejná definice řadou funguje obecněji pro komplexní $x \in \mathbb{C}$. Pro $x \in \mathbb{R}$ pak (protože $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$ a tak dále s periodou 4) máme známý Eulerův vzorec

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0,\ n \text{ sudé}}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=0,\ n \text{ liché}}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos x + i \sin x . \end{aligned}$$

Dá se dokázat, že definice sinu a cosinu řadou souhlasí s jejich geometrickou definicí: když na kružnici v rovině s poloměrem 1 a středem v počátku vyneseme od bodu $(1,0)$ proti směru hodinových ručiček oblouk délky a, dostaneme bod P (na kružnici) se souřadnicemi $P = (\cos a, \sin a)$.

Přednáška 9, 28. listopadu 2014

Část 4: limita funkce v bodě a spojitost funkce

Zápisem

$$f:\ M \to \mathbb{R}$$

rozumíme, že je dána funkce definovaná na neprázdné množině $M \subset \mathbb{R}$ reálných čísel, což je množina dvojic $f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in M\}$. Posloupnost $a = (a_n) \subset \mathbb{R}$ je speciální případ, je to funkce $a:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, kde $M = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Pro definici limity funkce v bodě budeme potřebovat pojem okolí bodu a značení pro něj.

Nechť $\delta > 0$ je reálné číslo. Pro $a \in \mathbb{R}$ množinu

$$U(a, \delta) := (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}\ ,$$

to jest body se vzdáleností od a menší než δ, nazveme *δ-okolím bodu a*. Pro $a = \pm\infty$ položíme

$$U(-\infty, \delta) := (-\infty, -1/\delta) \ \text{ a } \ U(+\infty, \delta) := (1/\delta, +\infty)\ .$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}^*$ se pro $\delta \to 0$ okolí $U(a, \delta)$ zmenšuje, stahuje kolem a ($0 < \delta' < \delta \Rightarrow U(a, \delta') \subset U(a, \delta)$ a také $b \in \mathbb{R}, b \neq a \Rightarrow \exists \delta > 0 :\ b \notin U(a, \delta)$). Pro $a \in \mathbb{R}$ *prstencové δ-okolí bodu a* označuje množinu

$$P(a, \delta) := U(a, \delta) \backslash \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta\}\ .$$

Pravé δ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, obyčejné a prstencové, je

$$U^+(a, \delta) := [a, a + \delta) \ \text{ a } \ P^+(a, \delta) := (a, a + \delta)\ .$$

Podobně se definuje *levé δ-okolí bodu $a \in \mathbb{R}$*, obyčejné $U^-(a, \delta) = (a - \delta, a]$ a prstencové $P^-(a, \delta) = (a - \delta, a)$. Pro $a = \pm\infty$ prstencová a jednostranná okolí definujeme jako rovná obyčejnému okolí $U(\pm\infty, \delta)$.

Když $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná, pak řekneme, že $a \in \mathbb{R}^*$ je *hromadným bodem množiny M*, když pro každé $\delta > 0$ je $P(a, \delta) \cap M \neq \emptyset$. Ekvivalentně řečeno, $a = \lim a_n$ pro nějakou posloupnost $(a_n) \subset M \backslash \{a\}$.

Definice (limita funkce v bodě). *Nechť $f:\ M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod M a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak definujeme*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ f(P(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$$

— *funkce $f(x)$ má v bodě a limitu A.*

Jinak řečeno, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že když $x \in P(a, \delta)$ a f je v x definovaná, pak nutně $f(x) \in U(A, \varepsilon)$. Jak a tak A může být i $\pm\infty$. Je důležité, že $\lim_{x\to a} f(x)$ nezávisí na hodnotě $f(a)$, ba ani $f(x)$ nemusí být v bodě a definovaná (tj. $a \notin M$).

A co kdyby a nebyl hromadným bodem M? Pak by existovalo $\delta > 0$, že $P(a, \delta) \cap M = \emptyset$, tedy $f(P(a, \delta) \cap M) = \emptyset$ a inkluze $f(P(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$ by platila pro každé A a $\varepsilon > 0$. Cokoli by pak bylo limitou $f(x)$ v a, což není šikovná definice. Proto se požaduje, aby a byl hromadným bodem M.

Tato definice zobecňuje limitu posloupnosti: když posloupnost $(a_n) \subset \mathbb{R}$ chápeme jako funkci $a:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pak zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} a(x)\ ,$$

existuje-li alespoň jedna strana.

Pár příkladů limit funkcí. Nechť $a, A \in \mathbb{R}$ a $P(a, \delta) \subset M$. Pak

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\ .$$

Nechť $a = -\infty, A = +\infty$ a $M = \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall c\ \exists d:\ x < d \Rightarrow f(x) > c$$

($c, d \in \mathbb{R}$ a představujeme si je jako hodně záporné, respektive hodně kladné, číslo).

Uvažme funkci $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definovanou jako

$$g(x) = \begin{cases} x & \dots\quad x \neq 0 \\ 2014 & \dots\quad x = 0\ . \end{cases}$$

Pak samozřejmě $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, protože pro limitu v 0 je $g(0)$ irelevantní. Funkce znaménka, signum, $\mathrm{sgn}:\ \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, je definovaná jako

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \dots\quad x < 0 \\ 0 & \dots\quad x = 0 \\ 1 & \dots\quad x > 0\ . \end{cases}$$

Pak $\lim_{x\to 0} \mathrm{sgn}(x)$ neexistuje a $\lim_{x\to a} \mathrm{sgn}(x)$ je 1 pro $a > 0$ a -1 pro $a < 0$.

Uvažme funkci $f:\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, definovanou jako

$$f(p/q) = 1/q\ ,$$

kde zlomek p/q je v základním tvaru. Tvrdíme, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0\ .$$

Jak to dokázat? Uvažme okolí $U(a, 1/2) = (a - 1/2, a + 1/2)$ a číslo $n \in \mathbb{N}$ a zamysleme se, kolik zlomků v základním tvaru a se jmenovatelem nejvýše n padne do $U(a, 1/2)$. Jistě jen konečně mnoho (přesněji, je jich nejvýše $1+2+\cdots+n$, rozmyslete si proč). Když pak $\delta > 0$ zvolíme menší než nejmenší vzdálenost od takového zlomku různého od a do a, v okolí $P(a, \delta)$ už ani jeden z těchto zlomků neleží. Takže $p/q \in P(a, \delta) \Rightarrow q > n$ a $f(p/q) = 1/q < 1/n$ a tedy $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Pro úplnost, limity $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ neexistují.

Konečně spočteme limitu

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\ .$$

Zde funkce definovaná zlomkem pro $x = 0$ ani není definovaná, dostáváme neurčitý výraz $0/0$. Řada pro exponenciální funkci pro každé $x \in P(0, 1/2)$ dá odhad

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} < \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1 - |x|} < 2|x|\ ,$$

kde jsme použili vzorec pro součet geometrické řady. Tedy, pro $0 < \delta < 1/2$, $x \in P(0, \delta) \Rightarrow (e^x - 1)/x \in U(1, 2\delta)$, což dává naši limitu (pro dané $\varepsilon > 0$ volíme $\delta = \varepsilon/2$).

Jednostranné limity funkcí. Když $f:\ M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$ a pro každé $\delta > 0$ je $P^+(a, \delta) \cap M \ne \emptyset$, pak definujeme

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ f(P^+(a, \delta) \cap M) \subset U(A, \varepsilon)$$

— funkce $f(x)$ má v bodě a *limitu zprava* rovnou A. Obdobně definujeme limitu zleva, $P^+(a, \delta)$ se nahradí levým okolím $P^-(a, \delta)$.

V $a = \pm\infty$ jednostranné limity neuvažujeme. Například $\lim_{x \to 0^-} \mathrm{sgn}(x) = -1$ a $\lim_{x \to 0^+} \mathrm{sgn}(x) = 1$.

Úloha. *Rozmyslete si, že ($a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^*$)*

$$\left(\lim_{x\to a^+} f(x) = A \ \&\ \lim_{x\to a^-} f(x) = A\right) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A$$

a

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \left(\lim_{x\to a^+} f(x) = A \ \vee\ \lim_{x\to a^-} f(x) = A\right)$$

a proč disjunkci $\vee$ nemůžeme nahradit konjunkcí $\&$.

Definice (spojitost funkce v bodě). *Nechť $f:\ M \to \mathbb{R}$, $a \in M$. Pak řekneme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě a, když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ f(U(a,\delta) \cap M) \subset U(f(a),\varepsilon)\ .$$

Jinými slovy, spojitost $f(x)$ v a znamená, že

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ x \in M,\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\ .$$

Dostatečně malá změna v argumentu funkce f tedy způsobí jen (předem omezenou) malou změnu funkční hodnoty.

Rozebereme souvislost s limitou. Když $a \in M$ není hromadným bodem množiny $M\backslash\{a\}$, čili $U(a,\delta) \cap M = \{a\}$ pro nějaké $\delta > 0$, postulovali jsme v hořejší definici, že $\lim_{x\to a} f(x)$ není definovaná. Nicméně v této situaci podle právě uvedené definice je stále $f(x)$ spojitá v a. Je-li $a \in M$ hromadným bodem množiny $M\backslash\{a\}$, pak spojitost $f(x)$ v a znamená přesně, že

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\ .$$

Definuje se i jednostranná spojitost: když $a \in M$, $f:\ M \to \mathbb{R}$ a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ f(U^+(a,\delta) \cap M) \subset U(f(a),\varepsilon)\ ,$$

pak řekneme, že $f(x)$ je v a *zprava spojitá*. Podobně pro spojitost zleva.

Tvrzení (jednoznačnost limity funkce). $\lim_{x\to a} f(x)$ *je určena jednoznačně, když existuje.*

Důkaz. Nechť $f:\ M \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod M, $A, B \in \mathbb{R}^*$ jsou dva různé prvky a $\lim_{x\to a} f(x) = A$ i $\lim_{x\to a} f(x) = B$. Pak vezmeme $\varepsilon > 0$, že $U(A,\varepsilon)$ a $U(B,\varepsilon)$ jsou disjunktní (což podle definice okolí lze). Mělo by existovat $\delta > 0$, že

$$f(P(a,\delta) \cap M) \subset U(A,\varepsilon) \cap U(B,\varepsilon) = \emptyset \, .$$

To není možné, protože $P(a,\delta) \cap M \neq \emptyset$. □

Následující věta ukazuje, že pojem limity funkce v bodě se dá ekvivalentně popsat jen pomocí pojmu limity posloupnosti.

Věta (Heineho definice limity funkce). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadným bodem M, $A \in \mathbb{R}^*$ a $f: M \to \mathbb{R}$. Následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$,
2. *pro každou takovou posloupnost $(x_n) \subset M$, že $\lim x_n = a$, ale $x_n \neq a$ pro každé n, je $\lim f(x_n) = A$.*

Důkaz. Nechť platí 1. Je dána posloupnost $(x_n) \subset M$, že $\lim x_n = a$, ale $x_n \neq a$ pro každé n. Nepřítel dal $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu o $f(x)$ vezmeme $\delta > 0$, že $f(P(a,\delta) \cap M) \subset U(A,\varepsilon)$. Podle předpokladu o (x_n) existuje n_0, že pro každé $n > n_0$ je $x_n \in P(a,\delta) \cap M$. Tedy, pro $n > n_0$, je $f(x_n) \in U(A,\varepsilon)$, což jsme chtěli dokázat — $\lim f(x_n) = A$.

Nechť 1 neplatí. Takže (negujeme definici limity funkce) existuje $\varepsilon > 0$, že pro každé $\delta > 0$ existuje bod $x \in P(a,\delta) \cap M$, že $f(x) \notin U(A,\varepsilon)$. Pro $n = 1, 2, \ldots$ a $\delta = 1/n$ zvolíme takový bod $x = x_n$ (že $x_n \in P(a, 1/n) \cap M$, ale $f(x_n) \notin U(A,\varepsilon)$). Vzniklá posloupnost $(x_n) \subset M$ popírá část 2: zřejmě $x_n \neq a$ pro každé n a $\lim x_n = a$, avšak posloupnost $(f(x_n))$ nemá za limitu A (všechny její členy mají od A „vzdálenost" alespoň $\varepsilon > 0$). □

Věta nese jméno německého matematika Eduarda Heineho (1821–1881), jehož známe již ze třetí přednášky, nikoli básníka a literáta *Heinricha Heineho (1797–1856).*

Tvrzení (aritmetika limit funkcí). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce f, g jsou definované na nějakém prstencovém okolí a, $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}^*$. Pak*

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, *je-li tento součet definován,*
2. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$, *je-li tento součin definován a*

3. *je-li navíc $g(x)$ nenulová na nějakém prstencovém okolí a, pak i $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = A/B$, je-li tento podíl definován.*

Důkaz. Pomocí Heineho definice limity funkce se to snadno převede na tvrzení o aritmetice limit posloupností. Detaily necháváme jako úlohu. □

Tvrzení (limita monotónní funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce (neklesající nebo nerostoucí). Pak obě limity*

$$\lim_{x\to a} f(x) \quad a \quad \lim_{x\to b} f(x)$$

existují (mohou být nevlastní).

Důkaz. Nechť je $f(x)$ na intervalu (a, b) neklesající, pak zřejmě

$$\lim_{x\to b} f(x) = \sup(f((a, b)))$$

(pro shora neomezenou množinu $f((a, b))$ toto supremum definujeme jako $+\infty$). Argument je stejný jako v důkazu tvrzení o limitě monotónní posloupnosti, detaily necháváme jako úlohu. Ostatní tři případy (nerostoucí $f(x)$, limita v a) jsou podobné. □

Přednáška 10, 5. prosince 2014

Tvrzení (limita funkce a uspořádání). *Funce f, g, h buďte definované na nějakém prstencovém okolí prvku $a \in \mathbb{R}^*$.*

1. *Když $\lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x)$, pak existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ je $f(x) > g(x)$.*
2. *Když existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ je $f(x) \geq g(x)$, pak $\lim_{x \to a} f(x) \geq \lim_{x \to a} g(x)$, když obě limity existují.*
3. *(dva strážníci) Když $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in P(a, \delta)$ je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pak i $\lim_{x \to a} g(x) = A$.*

Důkaz. Pomineme, velmi podobný důkazu analogických tvrzení pro limity posloupností. □

Následující tvrzení pracuje se skládáním funkcí, což je operace, která pro posloupnosti nemá obdobu.

Tvrzení (limita složené funkce). *Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, funkce f je definovaná alespoň na prstencovém okolí prvku A, $\lim_{x \to A} f(x) = B$, funkce g je definovaná na prstencovém okolí prvku a, $\lim_{x \to a} g(x) = A$. Když je splněna jedna z podmínek, že*

1. *$A, B \in \mathbb{R}$, f je v A definovaná a $f(A) = B$ (takže je f v A spojitá) nebo*
2. *existuje $\delta > 0$, že $g(x) \neq A$ pro každé $x \in P(a, \delta)$, pak*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = B\ .$$

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle předpokladů (zatím bez podmínek 1 a 2) existuje $\delta > 0$, že $f(P(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$. Pro toto $\delta > 0$ existuje $\theta > 0$, že $g(P(a, \theta)) \subset U(A, \delta)$. Platí-li první podmínka, je dokonce $f(U(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$. Tedy $f(g(P(a, \theta))) \subset f(U(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$ a $\lim_{x \to a} f(g(x)) = B$. Platí-li druhá podmínka, po případném zmenšení θ je $g(P(a, \theta)) \subset P(A, \delta)$. Tedy $f(g(P(a, \theta))) \subset f(P(A, \delta)) \subset U(B, \varepsilon)$ a zase $\lim_{x \to a} f(g(x)) = B$. □

Úloha. *Co se stane, když ani jedna z obou podmínek věty není splněna?*

Definice (spojitost na intervalu). *Nechť* $f:\ I\to\mathbb{R}$, *kde* $I\subset\mathbb{R}$ *je interval (čili neprázdná podmnožina* $\mathbb{R}$*, která s každými dvěma prvky obsahuje i každý třetí ležící mezi nimi). Řekneme, že* f *je na* I *spojitá, když je* f *spojitá v každém bodu* $a\in I$.

Věta (Darbouxova o mezihodnotě). *Nechť* $a,b,y\in\mathbb{R}$, $a<b$,

$$f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$$

je na $[a,b]$ *spojitá a* $f(a)<y<f(b)$. *Pak existuje* $\alpha\in[a,b]$, *že* $f(\alpha)=y$.

Důkaz. Nechť

$$\alpha=\sup(M)=\sup(\{x\in[a,b]\mid f(x)<y\})\ .$$

Jistě $a\in M$ a b je horní mezí M, takže definice α je korektní. Ze spojitosti f v a a b plyne, že pro nějaké $\delta>0$ je $f(x)<y$ na $[a,a+\delta)$ a $f(x)>y$ na $(b-\delta,b]$. Takže $\alpha\neq a,b$ a α je vnitřní bod intervalu $[a,b]$.

Nechť $f(\alpha)\neq y$. Ze spojitosti f v α plyne, že pro nějaké malé $\delta>0$, $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\subset[a,b]$, na celém intervalu $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)$ je buď $f(x)<y$ nebo $f(x)>y$. Což je spor s definicí α jakožto suprema — v prvním případě $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\subset M$ čili M obsahuje čísla větší než α a ve druhém je $(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\cap M=\emptyset$ čili není splněna aproximační vlastnost suprema. Tedy $f(\alpha)=y$. □

Totéž samozřejmě platí, když přepokládáme, že $f(a)>y>f(b)$. Věta nese jméno francouzského matematika *Gastona Darbouxe (1842–1917)*.

Důsledek (obraz intervalu spojitou funkcí). *Když je* $I\subset\mathbb{R}$ *interval a* $f:\ I\to\mathbb{R}$ *je na* I *spojitá, pak je obraz* $f(I)\subset\mathbb{R}$ *též interval.*

Důkaz. Z věty plyne, že když $u,v\in f(I)$, $u<v$ a $u<w<v$, potom $w\in f(I)$. Takže $f(I)$ je interval. □

Věta (princip maxima). *Nechť* $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ *a*

$$f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$$

je na $[a,b]$ *spojitá. Pak existuje* $\alpha\in[a,b]$, *že pro každé* $x\in[a,b]$ *je* $f(x)\leq f(\alpha)$ *— funkce* f *na* $[a,b]$ *nabývá v bodě* α *svou největší hodnotu.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že množina $f([a,b])$ je shora omezená. Kdyby nebyla, měli bychom posloupnost $(x_n)\subset[a,b]$, že $\lim f(x_n)=+\infty$. Podle

B.-W. věty má (x_n) konvergentní podposloupnost. Pro jednoduchost značení ji označíme také (x_n). Tedy $\lim x_n = \alpha \in [a,b]$ (podle Tvrzení o limitě a uspořádání). Protože je ale f v α spojitá, podle Heineho definice limity je $+\infty = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\alpha) \in \mathbb{R}$ — spor. Takže je $f([a,b])$ shora omezená a můžeme definovat

$$c = \sup(f([a,b])) \in \mathbb{R} \ .$$

Z vlastností suprema plyne, že existuje posloupnost $(x_n) \subset [a,b]$ (označíme ji stejně), že pro každé n je

$$c - 1/n < f(x_n) \leq c \ .$$

Tato posloupnost má opět podle B.-W. věty konvergentní podposloupnost, kterou opět pro jednoduchost značení označíme stejně, $\lim x_n = \alpha \in [a,b]$. Ze spojitosti f v α a Heineho definice limity je zas

$$c = \lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(\alpha) \ .$$

Teď nemáme spor, ale ukázali jsme, že funkční hodnota $f(\alpha)$ je c, jež je největší ze všech (c je horní mezí množiny $f([a,b])$). □

Podobně se ukáže, že když je f na $[a,b]$ spojitá, nabývá tam svou nejmenší hodnotu. Intervaly typu $[a,b]$ se nazývají *kompaktní.* Pro jiné intervaly princip maxima neplatí, např. $f(x) = 1/x : (0,1] \to \mathbb{R}$ je na intervalu $(0,1]$ spojitá, ale nenabývá na něm největší hodnotu. Snadno se na příkladu ukáže, že spojitost je podstatná, funkce $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ daná jako $f(x) = x$ pro $0 \leq x < 1$ a $f(1) = 0$, která na intervalu $[0,1]$ není spojitá, na $[0,1]$ nenabývá největší hodnotu, i když to je kompaktní interval.

Je-li $f : M \to \mathbb{R}$ prostá funkce, je definovaná její *inverzní funkce* $f^{-1} : f(M) \to M$, $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Připomeňme si, že $f : M \to \mathbb{R}$ je *rostoucí*, resp. *klesající* (na množině M), když $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, resp. $x, y \in M, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$. Při neostrých nerovnostech dostáváme *neklesající*, resp. *nerostoucí* funkci.

Tvrzení (spojitost inverzní funkce). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : J \to \mathbb{R}$ je rostoucí (resp. klesající) funkce, jež je na J spojitá. Pak je inverzní funkce*

$$f^{-1} : K = f(J) \to \mathbb{R}$$

na intervalu K spojitá a rostoucí (resp. klesající).

Důkaz. Z časových důvodů pomineme. $\square$

Operace zachovávající spojitost funkce tedy jsou: aritmetické operace $+, -, \times, /$, skládání funkcí a invertování funkcí. Přesněji: když jsou funkce f, g definované na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a jsou v a spojité, pak jsou v okolí bodu a definované a v a spojité i funkce $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ a, pokud $g(a) \neq 0$, i $f(x)/g(x)$. To plyne z Tvrzení o aritmetice limit funkcí. Dále, je-li g definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, f na okolí bodu $g(a)$, g je spojitá v a a f v $g(a)$, pak je složená funkce $f(g(x))$ definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a v a spojitá. To plyne z Tvrzení o limitě složené funkce. O spojitosti inverzní funkce hovoří předchozí tvrzení.

Tvrzení (třídy spojitých funkcí). *Následující funkce jsou spojité v každém bodě svého definičního oboru: polynomy, racionální funkce (podíly polynomů), e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log x$.*

Důkaz. Polynomy a racionální funkce se dostanou z konstantní funkce $f(x) = c \in \mathbb{R}$ a identické funkce $f(x) = x$, jež jsou zjevně spojité na $\mathbb{R}$, aritmetickými operacemi. Exponenciála je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, protože

$$|e^x - e^a| = e^a|e^{x-a} - 1| < 2e^a|x - a|, \quad \text{když} \quad |x - a| < 1/2 \; ,$$

jak plyne z rozvoje e^{x-a} do řady. Funkce $\log x : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je na $(0, +\infty)$ spojitá podle Tvrzení o spojitost inverzní funkce. Spojitost funkcí $\sin x$ a $\cos x$ plyne podobně z rozvoje do řady. $\square$

Aplikací aritmetických operací, skládání a invertování vyrobíme z těchto funkcí spoustu dalších spojitých funkcí. Třeba

$$\sqrt{1 - x^2} = e^{(1/2)\log(1 - x^2)}$$

je spojitá na svém definičním oboru $[-1, 1]$ atd.

Přednáška 11, 12. prosince 2014

Závěrem pasáže o spojitých funkcích zmíníme jejich podtřídu, *lipschitzovské funkce*, nazvané podle německého matematika *Rudolfa Lipschitze (1832–1903)*. Fukce $f:\ M \to \mathbb{R}$ je lipschitzovská, když existuje konstanta $c > 0$, že pro každé dva prvky $x, y \in M$ platí nerovnost

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|\ .$$

Část 5: derivace funkce

Derivace patří k nejdůležitějším pojmům matematické analýzy. Umožňuje danou funkci aproximovat, ba i často přesně vyjádřit, pomocí jednoduchých funkcí — lineárních, polynomů či mocninných řad — a to lokálně i globálně.

Definice (derivace funkce). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ a $f:\ U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. Derivace funkce f v bodě a je hodnota limity*

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(když tato limita existuje).

Jednostranné derivace $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ definujeme zřejmým způsobem pomocí limity zleva a limity zprava. Hodnota derivací $f'(a)$, $f'_-(a)$ a $f'_+(a)$ může být i nevlastní a platí ekvivalence

$$f'(a) = A \iff f'_-(a) = A \;\&\; f'_+(a) = A\ .$$

Nechť $f:\ U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ (pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$). Je-li f v a spojitá, je v okolí a funkce f dobře aproximována konstantní funkcí $g(x) = f(a)$. Těsněji lze aproximovat pomocí tečny.

Definice (tečna). *Řekneme, že funkce f má v a tečnu, existuje-li taková přímka $p \subset \mathbb{R}^2$ jdoucí bodem $(a, f(a))$, že pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$ existuje $\delta > 0$, že pro každé $x \in U(a,\delta)$ bod $(x, f(x))$ leží v rovinném úhlu $V \subset \mathbb{R}^2$, jehož osou je p a který má u vrcholu $(a, f(a))$ úhel ε. (Takže V jsou ty body v rovině, které leží na přímkách p_1 a p_2 a mezi nimi, přičemž p_1, resp. p_2, dostaneme pootočením p kolem bodu $(a, f(a))$ v kladném, resp. záporném, smyslu o úhel $\varepsilon/2$.)*

Není těžké ukázat, že když tečna existuje, je jednoznačně určená.

Tvrzení (tečna, sečna, derivace). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f:\ U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a p je přímka jdoucí bodem $(a, f(a))$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní.*

1. *Přímka p je tečna funkce f v a.*

2. *(tečna jako limita sečny) Označíme-li pro $x \in P(a,\delta)$ jako p_x přímku jdoucí body $(x, f(x))$ a $(a, f(a))$, pak limitní přímka*

$$\lim_{x \to a} p_x$$

existuje a rovná se p.

3. *(tečna jako derivace) Funkce f má derivaci $f'(a)$, přímka p je pro $f'(a) \in \mathbb{R}$ daná rovnicí $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ a pro $f'(a) = \pm\infty$ rovnicí $x = a$.*

Tvrzení nebudeme dokazovat, ani nebudeme rozebírat smysl limitního přechodu ve druhé části.

Uvedeme pár příkladů derivací. Když $n \in \mathbb{N}_0$ a $f(x) = x^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak $f'(x) = nx^{n-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. To plyne z binomické věty:

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} h^{i-1} \to na^{n-1},\ h \to 0\ .$$

Podobně na celém $\mathbb{R}$ máme rovnost $(e^x)' = e^x$ — exponenciální funkce se derivováním nemění. Jak víme, pro $h \to 0$ je $(e^h - 1)/h \to 1$, takže díky vlastnosti exponenciály i $(e^{a+h} - e^a)/h = e^a(e^h - 1)/h \to e^a$. Znaménková funkce $\mathrm{sgn}(x)$ má derivaci $\mathrm{sgn}'(a) = 0$ pro $a \neq 0$ a

$$\mathrm{sgn}'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sgn}(x)}{x} = +\infty\ .$$

Funkce $|x|$ má derivace $|x|' = (-x)' = -1$ pro $x < 0$, $|x|' = x' = 1$ pro $x > 0$ a derivace v 0 neexistuje, protože derivace zleva tam je -1 a zprava 1. Funkce $f(x)$ definovaná jako $f(x) = x^{1/3}$ pro $x \geq 0$ a $f(x) = -(-x)^{1/3}$ pro $x \leq 0$, která je definovaná na celém $\mathbb{R}$ a je tam spojitá, má v nule derivaci

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sgn}(x) \cdot |x|^{1/3}}{\mathrm{sgn}(x) \cdot |x|} = \lim_{x \to 0} |x|^{-2/3} = +\infty\ .$$

Tvrzení (derivace a spojitost). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f'(a) \in \mathbb{R}$. Potom je funkce f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Z definice $f'(a)$ plyne, že pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_0 < 0$, že

$$0 < |x-a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)| < |x-a|\varepsilon$$

tedy

$$|f(x) - f(a)| < |x-a|(\varepsilon + |f'(a)|) \ .$$

Tedy $f(x)$ je spojitá v a: pro dané $\varepsilon > 0$ vezmeme $\delta = \min(\delta_0, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |f'(a)|})$, pak $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$. □

Dříve uvedené příklady ukazují, že opačná implikace neplatí — $f(x)$ může být v a spojitá a nemít $f'(a)$ — a že nevlastní $f'(a)$ spojitost $f(x)$ v a nezaručuje ale ani nevylučuje. Vlastní $f'(a)$ znamená, že f má v okolí a lineární aproximaci

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \Delta(x) \ ,$$

v níž chyba $\Delta(x) \to 0$ řádově rychleji než identická funkce: $\lim_{x\to a} \frac{\Delta(x)}{x-a} = 0$.

Tvrzení (aritmetika derivací). *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, g : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce a existují derivace $f'(a), g'(a) \in \mathbb{R}^*$. Potom*

1. $(f(x) + g(x))'(a) = f'(a) + g'(a)$, *je-li pravá strana definovaná,*
2. *(Leibnizova formule)* $(f(x)g(x))'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *je-li pravá strana definovaná a $f(x)$ nebo $g(x)$ je spojitá v a,*
3. *je-li $g(a) \neq 0$ a $g(x)$ je spojitá v a, pak*

   $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \ ,$$

   je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. Dokážeme jen Leibnizovu formuli. Nechť je $g(x)$ spojitá v a (případ spojité $f(x)$ je symetrický). Hodnota $(f(x)g(x))'(a)$ podle definice derivace, předpokladu o $g(x)$ a Tvrzení o aritmetice limit funkcí je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))g(x) + f(a)(g(x)-g(a))}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x\to a} g(x) + f(a) \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ .
\end{aligned}$$

□

Je-li $f'(a)$ nebo $g'(a)$ vlastní, předpoklad o spojitosti je splněn automaticky (podle Tvrzení o spojitosti a derivaci). Pokud ale $f'(a)$ i $g'(a)$ je nevlastní a ani $f(x)$ ani $g(x)$ není v a spojitá, lze sestrojit dvě funkce, které v této situaci Leibnizovu formuli nesplňují. Ponecháváme to jako úlohu.

Tvrzení (derivace složené funkce). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, funkce f je definovaná na okolí b, funkce g je definovaná na okolí a, $g(a) = b$, $g(x)$ je v a spojitá a existují derivace $f'(b), g'(a) \in \mathbb{R}^*$. Potom*

$$(f \circ g)'(a) = (f(g(x)))'(a) = f'(b) \cdot g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a) ,$$

je-li pravá strana definovaná.

Důkaz. Nebudeme z časových důvodů dokazovat. □

Na příkladu lze opět ukázat, že předpoklad o spojitosti g v a je podstatný.

Tvrzení (derivace inverzní funkce). *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : J \to \mathbb{R}$ je na J spojitá a rostoucí či klesající, $a \in J$ je vnitřní bod intervalu, existuje derivace $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $f(a) = b$. Pak inverzní funkce $f^{-1} : K = f(J) \to J$ má v b derivaci a platí pro ni následující.*

1. *Když $f'(a) \neq 0$, pak*

$$(f^{-1}(x))'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} .$$

2. *Když $f'(a) = 0$ a f je rostoucí (klesající), pak $(f^{-1}(x))'(b) = +\infty$ $(= -\infty)$.*

Důkaz. Nebudeme z časových důvodů podrobně dokazovat, plyne to z předchozího tvrzení. □

Extrémy. Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Funkce f má v bodě a *lokální maximum*, resp. *ostré lokální maximum*, pokud existuje $\delta > 0$, že $x \in U(a, \delta) \cap M \Rightarrow f(x) \leq f(a)$, resp. $x \in P(a, \delta) \cap M \Rightarrow f(x) < f(a)$. Funkce f má v bodě a *maximum*, resp. *ostré maximum*, pokud $x \in M \Rightarrow f(x) \leq f(a)$, resp. $x \in M, x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)$. Analogicky definujeme *lokální minimum*, resp. *ostré lokální minimum*, a *minimum*, resp. *ostré minimum*, jen se otočí nerovnost na $f(x) \geq f(a)$, resp. na $f(x) > f(a)$. Minimum a maximum se souhrně označuje jako *extrém*.

Tvrzení ($f' \neq 0 \Rightarrow$ není extrém). *Nechť $f: U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$, a nechť $f'(a) \neq 0$. Pak funkce f nemá v bodě a lokální extrém.*

Důkaz. Ukážeme, že pro každé $\delta > 0$ existují body $b, c \in U(a,\delta)$, že $f(b) < f(a) < f(c)$, což vylučuje lokální extrém. Nechť $f'(a) < 0$, případ $f'(a) > 0$ je podobný. Protože $\lim_{x\to a^-}(f(x)-f(a))/(x-a) = f'(a) < 0$, je $f(x)-f(a) > 0$ na levém prstencovém okolí bodu a a podobně $\lim_{x\to a^+}(f(x)-f(a))/(x-a) = f'(a) < 0$ implikuje, že $f(x) - f(a) < 0$ na pravém prstencovém okolí bodu a. Odtud máme spoustu požadovaných bodů b a c. □

Důsledek (body podezřelé z extrému). *Nechť $a \in M \subset \mathbb{R}$ a $f: M \to \mathbb{R}$. Pak f má v a lokální extrém $\Rightarrow$ $f'(a)$ není definovaná nebo neexistuje nebo je 0.*

Jako příklad uvažme tři funkce $f_i: [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = x$ a $f_3(x) = x^2$. Body podezřelé z extrému jsou pro f_1 body $-1, 0, 1$, protože v ± 1 derivace f_1' není definovaná, v 0 neexistuje a jinde v $[-1,1]$ je 1 nebo -1. Pro f_2 jsou podezřelé body $-1, 1$, kde f_2' není definovaná, jinde je $f_2'(x) = 1$. Pro f_3 jsou podezřelé body $-1, 0, 1$: v ± 1 opět f_3' není definovaná, jinde je $f_3'(x) = 2x$, takže jediný nulový bod $f_3'(x)$ je $x = 0$. Lokální extrémy funkcí f_i tedy mohou nastat jen v uvedených bodech. Funkce f_1 a f_3 mají v -1 a 1 neostré maximum a v 0 ostré minimum. Funkce f_2 má v -1 ostré minimum a v 1 ostré maximum.

Závěrem přednášky uvedeme tři věty o střední hodnotě, z nichž první dvě dokážeme na příští přednášce.

Věta (věty o střední hodnotě). *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce (na $[a,b]$), které mají na (a,b) derivaci.*

1. *(Rolleova věta) Když $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a,b)$, že*
$$f'(c) = 0\ .$$
2. *(Lagrangeova věta) Existuje $c \in (a,b)$, že*
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$
3. *(Cauchyova věta) Když je na (a,b) derivace g' vlastní a nenulová, pak existuje $c \in (a,b)$, že*
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\ .$$

Geometricky Lagrangeova věta o střední hodnotě říká, že pro každou funkci f spojitou na intervalu $[a, b]$, jež má v každém vnitřním bodě intervalu tečnu, je některá z tečen rovnoběžná se sečnou jdoucí krajními body grafu funkce, to jest body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$. Kdo byli Rolle a Lagrange? *Michel Rolle (1652–1719)* byl francouzský matematik (nejvíc známý uvedenou větou). *Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)* byl italsko-francouzský matematik působící v Itálii (hlavně Turíně), Prusku (Berlíně) a Francii (Paříži) (po Newtonovi nově shrnul mechaniku, jeho pojetí bylo základem matematické fyziky v 19. století).

Přednáška 12, 19. prosince 2014

Důkaz. 1. Můžeme předpokládat, že f není konstantní (konstantní funkce má nulovou derivaci na celém (a,b)) a že $f(c) > f(a) = f(b)$ pro nějaké $c \in (a,b)$ (případ $f(c) < f(a) = f(b)$ je podobný). Podle principu maxima f nabývá na $[a,b]$ největší hodnotu, což nenastává ani v a ani v b, nastává to tedy ve vnitřním bodě intervalu $[a,b]$. V tomto bodě má f derivaci a ta podle předchozího Důsledku musí být nulová.

2. Funkce $h(x) = f(x) - f(a) - (x-a)(f(b) - f(a))/(b-a)$ splňuje předpoklady Rolleovy věty ($h(a) = h(b) = 0$) a $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Nulový bod $h'(x)$ je tedy hledaná hodnota c pro $f(x)$.

3. Důkaz je podobný jako ve 2. □

Uvedeme několik důsledků vět o střední hodnotě. První je populární nástroj pro výpočet limit neurčitých výrazů $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$. Dokáže se pomocí Cauchyovy věty o střední hodnotě, ale z časových důvodů důkaz na přednášce (ne však v učebním textu) pomineme.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, funkce f, g jsou definované na prstencovém okolí bodu a, mají na něm vlastní derivaci a g' je na něm nenulová. Pak*

1. *když $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, tak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$ a*

2. *když $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ a $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x) = A \in \mathbb{R}^*$, tak i $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A$.*

Guillaume Francois Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661–1704) byl francouzský matematik (l'Hospital je původní ortografie).

Tvrzení (limita derivace). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, funkce $f : [a, a+\delta) \to \mathbb{R}$ je (zprava) spojitá v a, na $(a, a+\delta)$ má vlastní derivaci a $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak i $f'_+(a) = A$. Takže platí záměna pořadí limit*

$$\lim_{x\to a^+} \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{x\to a^+} f'(x) =$$
$$= f'_+(a) = \lim_{y\to a^+} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \lim_{y\to x} \lim_{x\to a^+} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\ .$$

Důkaz. Nebudeme podrobně dokazovat, důkaz používá Lagrangeovu větu o střední hodnotě. □

Věta (derivace a monotonie). *Nechť je funkce $f : J \to \mathbb{R}$ spojitá na intervalu $J \subset \mathbb{R}$ a v jeho každém vnitřním bodě má derivaci. Když je $f' \geq 0$, resp. $f' > 0$, na vnitřku J, je f na J neklesající, resp. rostoucí. Podobně když je $f' \leq 0$, resp. $f' < 0$, na vnitřku J, je f na J nerostoucí, resp. klesající.*

Důkaz. Předpokládejme, že třeba $f' < 0$ na vnitřku J, ostatní případy jsou podobné. Když $a, b \in J$, $a < b$, existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě bod $c \in (a, b)$, že $(f(b)-f(a))/(b-a) = f'(c) < 0$, takže $f(b) < f(a)$. Proto je f na J klesající. □

Uvedeme přehled derivací elementárních funkcí. Odvození vzorců necháváme jako cvičení.

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je
$$(e^x)' = e^x \ .$$

2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je
$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{a} \quad (\cos x)' = -\sin x \ .$$

3. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$ je
$$(x^n)' = nx^{n-1} \ .$$
Stejný vzorec platí pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ a $n \in \mathbb{Z}$, a pro každé $x \in (0, +\infty)$ a $n \in \mathbb{R}$. Také $(\text{konstanta})' \equiv 0$.

4. Pro každé $x \in (0, +\infty)$ je
$$(\log x)' = \frac{1}{x} \ .$$

5. Pro každé $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ je
$$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} \ .$$

6. Pro každé $x \in (-1, 1)$ je
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{a} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

7. Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

Definice (derivace vyšších řádů). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, a $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ je funkce. Položíme $f^{(0)} = f$ a pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in U(a,\delta)$ položíme $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, je-li funkce $f^{(n-1)}$ již definovaná na nějakém okolí bodu x. Funkci (respektive její hodnotu) $f^{(n)}(x)$ nazveme n-tou derivací funkce f v bodě x.*

Hodnota $f^{(n)}(a)$ tedy existuje, právě když všechny funkce $f, f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n-1)}$ jsou definované na okolí bodu a a

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a}\ .$$

Místo $f^{(n)}$ se pro malé n používá značení pomocí čárek: $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ a $f^{(3)} = f'''$ (nebo i pomocí teček). Dále se požívá značení $f^{(n)}(a) = \frac{df^n}{dx^n}(a)$.

Definice (konvexní a konkávní funkce). *Nechť $f : J \to \mathbb{R}$ je funkce na intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f je na J konvexní (resp. konkávní), když pro každé tři body $a < b < c$ z J je*

$$f(b) \le f(a) + (f(c) - f(a))\frac{b-a}{c-a}\ (\text{resp. } \cdots \ge \ldots)\ .$$

Bod $(b, f(b))$ grafu funkce f tedy leží na přímce spojující body $(a, f(a))$ a $(c, f(c))$ grafu nebo pod ní (resp. na ní nebo nad ní). Platí-li ostrá nerovnost, mluvíme o ryzí konvexitě resp. ryzí konkavitě.

Graf konvexní funkce je vydutý dolů, graf konkávní funkce je vydutý nahoru. Následující tvrzení se lehce dokáže, ale důkaz z časových důvodů pomineme.

Tvrzení (konvexita a první derivace). *Nechť $f : J \to \mathbb{R}$ je funkce na intervalu $J \subset \mathbb{R}$, která je na J konvexní nebo konkávní. Pak pro každý vnitřní bod a z J existují vlastní jednostranné derivace $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.*

Důsledek (konvexita a spojitost). *Funkce konvexní nebo konkávní na intervalu je na něm spojitá.*

Důkaz. Víme, podle Tvrzení o derivaci a spojtosti, že vlastní derivace implikuje spojitost. Totéž, se stejným důkazem, platí i pro jednostranný případ.

Protože funkce je spojitá v bodě, právě když v něm je zleva i zprava spojitá, je f spojitá v a. $\square$

Ilustrací předchozího tvrzení a jeho důsledku je funkce $f(x) = |x|$ v okolí bodu 0 — funkce tam je ryze konvexní, takže má vlastní f'_+ a f'_- a je spojitá. Ovšem f' všude neexistuje, protože $f'_+(0) = 1$ a $f'_-(0) = -1$.

Následující výsledky o souvislosti konvexity/konkavity a druhé derivace funkce uvedeme bez důkazů.

Věta (konvexita a druhá derivace). *Nechť* $-\infty \le a < b \le +\infty$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f'' *existuje na* (a,b) *a* f' *je na* (a,b) *spojitá. Pak*

$$f'' \ge 0 \ (f'' > 0) \text{ na } (a,b) \Rightarrow f \text{ je na } (a,b) \text{ konvexní (ryze konvexní)}$$

a

$$f'' \le 0 \ (f'' < 0) \text{ na } (a,b) \Rightarrow f \text{ je na } (a,b) \text{ konkávní (ryze konkávní)}\,.$$

Definice (inflexní bod). *Nechť* $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, *a* $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$. *Řekneme, že funkce* f *má v* a *inflexní bod, když existuje vlastní* $f'(a)$ *a graf* f *přechází v okolí* a *z jedné strany tečny na druhou, to jest existuje* δ, $0 < \delta' \le \delta$, *že*

$$x \in (a - \delta', a) \Rightarrow f(x) < f(a) + f'(a)(x - a)$$

a

$$x \in (a, a + \delta') \Rightarrow f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

nebo naopak.

Například $f(x) = x^3$ má v $a = 0$ inflexní bod, protože graf této funkce křižuje v $x = 0$ tečnu $y = 0$. Zhruba řečeno, inflexní bod je ekvivalentní vynulování druhé derivace.

Tvrzení ($f' \ne 0 \Rightarrow$ není inflexe). *Nechť* $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ *a* $f''(a)$ *existuje, ale není* 0. *Pak* f *nemá v* a *inflexní bod.*

Tvrzení ($f' = 0 \Rightarrow$ je inflexe). *Nechť* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f' *je na* (a,b) *spojitá,* $c \in (a,b)$, $f'' < 0$ *na* (a,c) *a* $f'' > 0$ *na* (c,b) *či naopak. Potom je* c *inflexním bodem funkce* f.

Přednáška 13, 9. ledna 2015

Taylorův polynom. Lokální lineární aproximaci funkce (kterou máme, když existuje vlastní derivace) nyní zobecníme na aproximaci polynomem.

Definice (Taylorův polynom). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a existuje vlastní n-tá derivace $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ (pro $n = 0$ to chápeme jako požadavek spojitosti f v a). Taylorů polynom řádu n funkce f v bodě a je polynom*

$$\begin{aligned} T_n^{f,a}(x) &:= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} \ . \end{aligned}$$

Všimněme si, že platí identita

$$\left(T_n^{f,a}(x)\right)' = T_{n-1}^{f',a}(x)$$

(takže $(T_n^{f,a}(x))^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, n$). Ta nám umožní dokázat, že $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n, který aproximuje f v okolí $x = a$ až do řádu n.

Věta (charakterizace Taylorova polynomu). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a, \delta) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ a existuje vlastní n-tá derivace $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Taylorův polynom $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom $P(x)$ stupně nejvýše n s vlastností*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \ .$$

Než se pustíme do důkazu, uvědomíme si, že když $P(x)$ je polynom stupně nejvýše $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$ a

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0 \ ,$$

potom $P(x)$ je nulový polynom. Pro $n = 0$ to je jasné, protože pak $(x-a)^n = 1$ a konstanta $P(x)$ musí být nulová. Nechť $n \geq 1$. Pak, ze spojitosti $P(x)$, $\lim_{x \to a} P(x) = P(a) = 0$ a a je kořenem $P(x)$. Nechť $P(x)$ není nulový polynom. Z algebry víme, že pak $P(x) = (x-a)^m Q(x)$, kde $1 \leq m \leq$

n (násobnost kořene a v $P(x)$) a $Q(x)$ je polynom s $Q(a) \neq 0$. Pak ale $P(x)/(x-a)^n = (x-a)^{m-n}Q(x)$, což vzhledem k $m-n \leq 0$ pro $x \to a$ nemůže jít k 0. Tedy $P(x)$ musí být nulový polynom.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $T_n^{f,a}(x)$ má uvedenou vlastnost. Postupujeme indukcí podle n. Pro $n = 0$ je $T_n^{f,a}(x) = f(a)$ konstantní polynom, pro který uvedená vlastnost platí dokonce ne jen v limitě, ale identicky. Nechť $n \geq 1$. Podle výše zmíněné identity, l'Hospitalova pravidla (jehož předpoklady jsou splněny) a indukčního předpokladu je

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{\big(f(x) - T_n^{f,a}(x)\big)'}{\big((x-a)^n\big)'} = \frac{1}{n} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0\ .$$

Nechť nyní $P(x)$ s $\deg P \leq n$ má uvedenou vlastnost. Pak ale podle aritmetiky limit funkcí, předpokladu a části 1 je

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0\ .$$

Podle hořejší úvahy $P(x) - T_n^{f,a}(x)$ je nulový polynom a $P(x) = T_n^{f,a}(x)$. □

Jiný zápis aproximační vlastnosti Taylorova polynomu je pomocí symbolu *malé o*:

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + o((x-a)^n),\ x \to a\ ,$$

což přesně znamená, že *zbytek Taylorova polynomu* $R_n^{f,a}(x) := f(x) - T_n^{f,a}(x)$ jde pro $x \to a$ k nule řádově rychleji, než mocnina $(x-a)^n$:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0\ .$$

Uvedeme ještě jednu variaci na věty o střední hodnotě, přesné vyjádření zbytku $R_n^{f,a}(x)$ pomocí derivací.

Věta (obecný tvar zbytku T. polynomu). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f, \varphi : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, $n \in \mathbb{N}_0$, na $U(a,\delta)$ existují vlastní derivace $f^{(n+1)}, \varphi'$ a navíc na $U(a,\delta)$ je $\varphi' \neq 0$. Potom pro každé $x \in P(a,\delta)$ existuje číslo c ležící mezi a a x, že*

$$R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{n! \cdot \varphi'(c)} f^{(n+1)}(c)(x-c)^n\ .$$

Z časových důvodů větu nebudeme dokazovat. Konkrétní volbou funkce φ dostaneme následující vzorce pro $R_n^{f,a}(x)$:

Důsledek (zbytky T. polynomu). *Za předpokladů předchozí věty máme, pro nějaké číslo c mezi x a a,*

1. *Lagrangeův tvar zbytku*

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

a

2. *Cauchyův tvar zbytku*

$$R_n^{f,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a)}{n!} .$$

Důkaz. Stačí položit $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ a $\varphi(t) = t$. □

Taylorova řada. Má-li funkce v daném bodě všechny derivace, můžeme Taylorův polynom prodloužit do nekonečné řady.

Definice (Taylorova řada). *Nechť $a, \delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $f : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, a pro každé $n = 0, 1, 2, \ldots$ existuje hodnota n-té derivace $f^{(n)}(a)$. Řadu*

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots$$

nazýváme Taylorovou řadou funkce f se středem v a.

Tato řada vždy konverguje pro $x = a$ a pak má součet $f(a)$. Pro mnoho funkcí se ale dá pomocí posledního důsledku dokázat více: pro každé x z jistého oboru je $\lim_{n\to\infty} R_n^{f,a}(x) = 0$, takže pro takové x má Taylorova řada součet rovný $f(x)$ a funkce je vyjádřena pomocí mocninné řady. Uvedeme seznam takových vyjádření, důkazy konvergence pro nedostatek času pomineme. Pro jednoduchost značení se omezíme na případ Taylorových řad se středem v nule, tj. $a = 0$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

Pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ je totiž $(e^x)^{(n)} = e^x$ a tedy vždy $f^{(n)}(0) = 1$.

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \ ,$$

protože $(\sin^{(n)} x)_{n \ge 0} = (\sin, \cos x, -\sin x, -\cos x, \sin x, \cos x, \ldots)$ (derivace se opakují s periodou 4) a podobně pro derivace cosinu.

Užitečné jsou Taylorovy řady logaritmických funkcí:

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in (-1, 1] \\
\log(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in [-1, 1) \\
\log(1-x)^{-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro každé } x \in [-1, 1) \ .
\end{aligned}$$

Jako úlohu si spočtěte derivace $(\log(1+x))^{(n)}$ a ověřte koeficienty v těchto Taylorových řadách. Pro $x = 1$ první řada dává známý součet

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots \ .$$

Pro každé $x \in (-1, 1]$ je

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{2n-1} \ .$$

Ověřte koeficienty v této Taylorově řadě jako úlohu. Pro $x = 1$ dává známý součet

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \ .$$

Konečně pro každé $x \in (-1, 1)$ a $a \in \mathbb{R}$ je

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \ , \quad \text{kde} \quad \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} \ .$$

Tento rozvoj objevil anglický fyzik, filosof a matematik (alchymista, numerolog, ředitel mincovny, ...) *Isaac Newton (1642–1726)* (druhý spolutvůrce matematické analýzy). Pro $a \in \mathbb{N}_0$ dostáváme klasickou binomickou větu s konečným součtem, protože pak $\binom{a}{n} = 0$ pro $n > a$, ale pro $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0$ se binomický koeficient nikdy nevynuluje a Taylorova řada je nekonečná. Například pro $a = -1$ a $a = \frac{1}{2}$ dostáváme rozvoje

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad \text{(geometrická řada)}$$

a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \dots + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-3}{2})x^n}{n!} + \dots$$

(stále $x \in (-1, 1)$).

Skončíme zajímavostí — souvislostí Taylorových řad s enumerativní kombinatorikou. Nechť p_n je počet těch permutací $a_1, a_2, \dots, a_n$ čísel $1, 2, \dots, n$, že $a_1 < a_2 > a_3 < a_4 > \dots$ (říká se jim *střídavé* či *cik-cak* či *nahoru-dolů* permutace). Například $p_4 = 5$ díky permutacím 1324, 1423, 2413, 2314 a 3412. Posloupnost počtů střídavých permutací začíná

$$(p_n)_{n \geq 0} = (1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, \dots)\ .$$

Dá se dokázat, že pro x v okolí 0 platí rovnost

$$\tan x + \sec x = \tan x + \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n x^n}{n!}\ .$$