Transfert thermique

Cours de PSI – l'essentiel à savoir & comprendre

1 Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

1.1 d ou δ ?

Les notations d et δ sont à distinguer. Si elles représentent toutes deux une grandeur infinitésimale, cette grandeur est à différencier :

- pour δ, il s'agit d'une quantité ;
- pour d, il s'agit d'une variation :

$$\mathrm{d}A = A(t + \mathrm{d}t) - A(t)$$

Dans le cas où on s'intéresse à des infinitésimaux d'infinitésimaux, on notera δ^2 ou d^2.

1.2 Premier principe

Le cours de thermodynamique de première année nous a conduit à définir l'énergie interne $E = U + E_c$ et à affirmer qu'au cours d'une transformation, on a :

$$\Delta E = W + Q$$

où W désigne le travail et Q le transfert thermique. Lors d'une transformation infinitésimale (c'est-à-dire entre deux états du système voisins) le 1$^{\text{er}}$ principe devient alors :

$$\mathrm{d}E = \underbrace{\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_c}_{\text{variations}} = \underbrace{\delta W + \delta Q}_{\text{quantités}}$$

1.3 Second principe

Le cours de première année nous a également mené à définir l'entropie d'un système S telle que :

$$\Delta S = S_{\text{échangée}} + S_{\text{créée}}$$

où $S_{\text{créée}} \geq 0$. Dans le cas particulier d'une transformation monotherme (avec un thermostat par exemple), $S_{\text{échangée}} = \dfrac{Q}{T}$. Lors d'une transformation infinitésimale le second principe devient alors :

$$\mathrm{d}S = \underbrace{\delta S_{\text{échangée}} + \delta S_{\text{créée}}}_{\text{quantités}}$$

2 Transfert thermique par conduction

2.1 Les trois modes de transferts thermiques

On distingue, en physique, trois modes de transfert thermiques :

Le rayonnement : la chaleur se propage par le biais d'une onde. Par exemple, les radiations du Soleil ou d'un feu de bois réchauffent ;

La convection : la chaleur se déplace avec un déplacement macroscopique de matière dans le milieu (par exemple, un mélange brutal d'eau chaude et d'eau froide) ;

La diffusion (ou conduction) : il n'y a pas de déplacement de matière, le milieu est macroscopiquement au repos. Elle peut s'interpréter comme la transmission de proche en proche de l'agitation thermique : un atome (ou une molécule) cède une partie de son énergie cinétique à l'atome voisin.

Nous n'allons étudier que la diffusion.

2.2 Vecteur densité de courant thermique

On appelle *flux thermique à travers une surface orientée* $\mathcal{S}$ et on note φ la puissance (en W) passant à travers cette surface. φ s'interprète comme le flux du *vecteur densité de courant thermique*, sorte de « flux infinitésimal » noté $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ (ou $\overrightarrow{j_Q}$) :

$$\varphi = \iint_{M \in \mathcal{S}} \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{M \in \mathcal{S}} \delta\mathcal{E} \ \heartsuit$$

$\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ s'exprime en $\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$. La puissance infinitésimale transportée est $\delta\mathcal{E}$, en joules. On rappelle que $\mathrm{W} = \mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$.

2.3 Loi de Fourier

La *loi de* Fourier relie le vecteur densité de courant thermique au gradient du champ de température $T(M,t)$:

$$\boxed{\vec{j}_{\text{th}}(M,t) = -\lambda \,\overrightarrow{\text{grad}}\, \vec{T}(M,t)}$$

Dans laquelle λ est la *conductivité thermique*, exprimée en $\mathrm{W{\cdot}m^{-1}{\cdot}K^{-1}}$, puisque T est en kelvins, et $\overrightarrow{\text{grad}}\,\vec{T}$ homogène à $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$ donc à des $\mathrm{K{\cdot}m^{-1}}$.

Matériau	**Conductivité** ($\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)
Acier	50 (10^1)
Béton	0,8 (10^{-1})
Eau	0,6 (10^{-1})
Air	0,02 (10^{-2})

TABLE 1 – Quelques conductivités classiques. ♡

La loi de FOURIER est phénoménologique : elle est issue de constats expérimentaux. On note que l'énergie est transportée des zones chaudes aux régions froides.

On définit la *diffusivité thermique* d'un milieu, notée D_{th} ou a, caractérisant la capacité d'un matériau à transmettre un signal de température d'un point à un autre de ce matériau. Elle dépend donc de la conductivité λ mais aussi de la capacité thermique (pouvant être interprétée comme une capacité de stockage d'énergie) du matériau.

$$D_{\mathrm{th}} = \frac{\lambda}{\rho c}$$

3 Équations en géométrie cartésienne

3.1 Principe

Dans les paragraphes à venir, on va établir deux équations dans différentes géométries :

- l'équation de *continuité* ou de *conservation* de l'énergie : elle relie l'énergie interne massique u à $\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}}$;
- l'équation de *diffusion* (ou *équation de la chaleur*) : elle traduit le phénomène.

On rappelle que l'énergie interne massique s'exprime en joules par kilos.

3.2 Équation de conservation de l'énergie

On considère comme système Σ un cylindre de section $\mathcal{S}$ entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$. Il est donc de volume $\mathrm{d}\tau = \mathcal{S}\mathrm{d}x$. On considère qu'il demeure au repos pendant l'expérience et que sa surface reste indéformable.

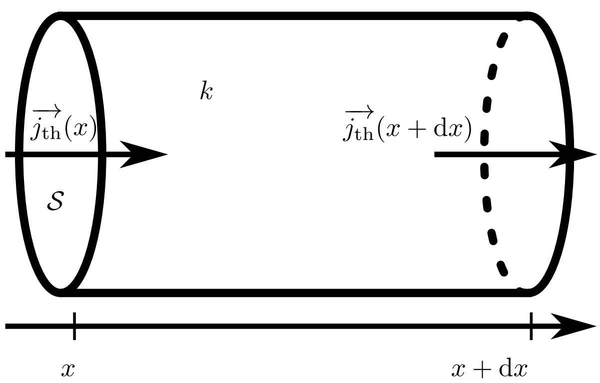

FIGURE 1 – Schéma du système.

Effectuons un bilan d'énergie au système entre t et $t + \mathrm{d}t$:

- à t, $U(t) = u(x,t)\underbrace{\rho \mathrm{d}\tau}_{\text{masse}}$;
- à $t + \mathrm{d}t$, $U(t + \mathrm{d}t) = u(x, t + \mathrm{d}t)\,\rho \mathrm{d}\tau$.

Ainsi :

$$\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t) = (u(x, t+\mathrm{d}t) - u(x,t))\,\rho\mathrm{d}\tau = \frac{\partial u}{\partial t}\rho \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

Or, la variation d'énergie interne est aussi égale à la somme de l'énergie interne gagnée en x, moins celle perdue en $x+\mathrm{d}x$, plus celle créée dans le volume. On introduit donc la puissance volumique créée, notée $\mathcal{P}_V$, exprimée en $\mathrm{W \cdot m^{-3}}$.

Or, le premier principe de la thermodynamique appliqué au système entre t et $t + \mathrm{d}t$ donne :

$$\mathrm{d}U = \underbrace{\delta W}_{\text{nul car } \mathrm{d}V = 0} + \delta Q$$

On doit alors déterminer δQ :

$$\begin{aligned}
\delta Q &= j_{\mathrm{th}}(x,t)S\mathrm{d}t - j_{\mathrm{th}}(x + \mathrm{d}x, t)S\mathrm{d}t + \mathcal{P}_V \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\
&= -(j_{\mathrm{th}}(x + \mathrm{d}x, t) - j_{\mathrm{th}}(x,t))S\mathrm{d}t + \mathcal{P}_V \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\partial j_{\mathrm{th}}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\, S + \mathcal{P}_V \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\rho\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = -\frac{\partial j_{\mathrm{th}}}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\, S + \mathcal{P}_V \mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

Or, comme $\mathrm{d}\tau = S\mathrm{d}x$, en simplifiant on obtient :

$$\boxed{\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\mathrm{th}}}{\partial x} + \mathcal{P}_V}$$

3.3 Équation de diffusion

Comme pour la diffusion de particules (voir le chapitre « Diffusion de particules »), on va chercher à utiliser la loi de FOURIER. Pour obtenir une belle équation à la fin, il faut introduire T dans l'équation de continuité.

La première loi de JOULE assure que $\mathrm{d}u = c\mathrm{d}T$, donc $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial T}{\partial t}$. L'équation de continuité peut donc s'écrire $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{\mathrm{th}}}{\partial x} + \mathcal{P}_V$.

La loi de FOURIER en projection sur l'axe Ox est : $j_{\mathrm{th}} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}$. En remplaçant dans l'équation de continuité, on a alors :

$$\boxed{\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \mathcal{P}_V}$$

ÉQUATION DE LA CHALEUR À UNE DIMENSION

4 Équations en géométrie cylindrique

4.1 Équation de conservation de l'énergie

On reprend l'expression de $\mathrm{d}U$ établie au paragraphe 3.2 que l'on démontre de la même façon.

Le bilan s'effectue à un système **compris entre deux cylindres** de hauteur h, l'un de rayon r, l'autre de rayon $r+\mathrm{d}r$. Le volume du système est $\mathrm{d}\tau$; le terme source est $\mathcal{P}_V$. On considère que $\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}}$ « sort » du cylindre intérieur, mais la démonstration est la même dans le cas inverse.

Le premier principe assure que $\mathrm{d}U = \delta Q$. On va donc chercher à exprimer δQ.

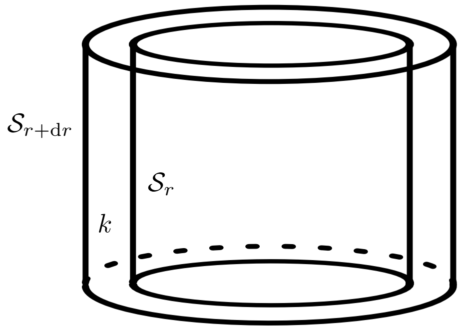

FIGURE 2 – Schéma du système.

Pendant un moment $\mathrm{d}t$, le système :
- reçoit une énergie $j_{\mathrm{th}}(r,t)\,\mathcal{S}_r\mathrm{d}t = j_{\mathrm{th}}(r,t)\,2\pi rh\,\mathrm{d}t$;
- perd une énergie $j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t)\,\mathcal{S}_{r+\mathrm{d}r}\mathrm{d}t = j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t)\,2\pi(r+\mathrm{d}r)h\,\mathrm{d}t$;
- créée une énergie $k\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\delta Q &= j_{\mathrm{th}}(r,t)\,2\pi rh\,\mathrm{d}t - j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t)\,2\pi(r+\mathrm{d}r)h\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \mathcal{P}_V\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \\ &= 2\pi h\mathrm{d}t\left(rj_{\mathrm{th}}(r,t) - (r+\mathrm{d}r)j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t)\right) + \mathcal{P}_V\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

L'astuce : on va appliquer la formule de TAYLOR au premier ordre à la fonction $f(r) = rj_{\mathrm{th}}$:

$$\begin{aligned}f(r+\mathrm{d}r,t) = (r+\mathrm{d}r)j_{\mathrm{th}} &= f(r,t) + \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r \\ &= rj_{\mathrm{th}}(r,t) + \frac{\partial rj_{\mathrm{th}}}{\partial r}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

D'où avec l'expression de δQ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\rho\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = -2\pi h\mathrm{d}t\frac{\partial rj_{\mathrm{th}}}{\partial r}\mathrm{d}r + \mathcal{P}_V\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

Or :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tau &= V_{r+\mathrm{d}r} - V_r \\ &= \underbrace{2\pi r\,h}_{\text{Surface intérieure}} \times \underbrace{\mathrm{d}r}_{\text{Largeur}}\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\rho\mathrm{d}t2\pi rh\mathrm{d}r = -2\pi h\mathrm{d}t\frac{\partial rj_{\mathrm{th}}}{\partial r}\mathrm{d}r + \mathcal{P}_V\mathrm{d}t\,2\pi r\mathrm{d}rh$$

Puis en simplifiant :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial rj_{\mathrm{th}}}{\partial r} + \mathcal{P}_V}$$

4.2 Équation de diffusion

La loi de FOURIER à une dimension projetée sur l'axe Or est :

$$\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}}(r,t) = -\lambda\frac{\partial T}{\partial r}$$

On va introduire un terme en T dans l'équation de conservation de l'énergie du paragraphe précédent.

La première loi de JOULE assure que $\mathrm{d}u = c\mathrm{d}T$, donc $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial T}{\partial t}$. L'équation de continuité peut donc s'écrire $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial rj_{\mathrm{th}}}{\partial r} + \mathcal{P}_V$. En utilisant la loi de FOURIER on a alors :

$$\boxed{\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mathcal{P}_V}$$

ÉQUATION DE LA CHALEUR EN GÉOMÉTRIE CYLINDRIQUE

5 Équations en géométrie sphérique

5.1 Équation de conservation de l'énergie

On reprend l'expression de $\mathrm{d}U$ établie au paragraphe 3.2 que l'on démontre de la même façon.

Le bilan s'effectue à un système **compris entre deux sphères** de même centre, l'une de rayon r, l'autre de rayon $r+\mathrm{d}r$ (figure 3). Le volume du système est $\mathrm{d}\tau$; le terme source est $\mathcal{P}_V$. On considère que $\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}}$ « sort » de la sphère intérieure, mais la démonstration est la même dans le cas inverse.

Le premier principe assure que $\mathrm{d}U = \delta Q$. On va donc chercher à exprimer δQ.

Pendant un moment $\mathrm{d}t$, le système :
- reçoit une énergie $j_{\mathrm{th}}(r,t)\,\mathcal{S}_r\mathrm{d}t = j_{\mathrm{th}}(r,t)\,4\pi r^2\,\mathrm{d}t$;
- perd une énergie $j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t)\,\mathcal{S}_{r+\mathrm{d}r}\mathrm{d}t = j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t)\,4\pi(r+\mathrm{d}r)^2\,\mathrm{d}t$;
- créée une énergie $\mathcal{P}_V\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\delta Q &= j_{\mathrm{th}}(r,t)\,4\pi r^2\,\mathrm{d}t - j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t)\,4\pi(r+\mathrm{d}r)^2\,\mathrm{d}t + \mathcal{P}_V\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau \\ &= 2\pi\mathrm{d}t\left(r^2j_{\mathrm{th}}(r,t) - (r+\mathrm{d}r)^2j_{\mathrm{th}}(r+\mathrm{d}r,t)\right) + \mathcal{P}_V\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

L'astuce : on va appliquer la formule de TAYLOR au premier ordre à la fonction $f(r) = r^2j_{\mathrm{th}}$:

$$\begin{aligned}f(r+\mathrm{d}r,t) = (r+\mathrm{d}r)^2j_{\mathrm{th}} &= f(r,t) + \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r \\ &= r^2j_{\mathrm{th}}(r,t) + \frac{\partial r^2j_{\mathrm{th}}}{\partial r}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

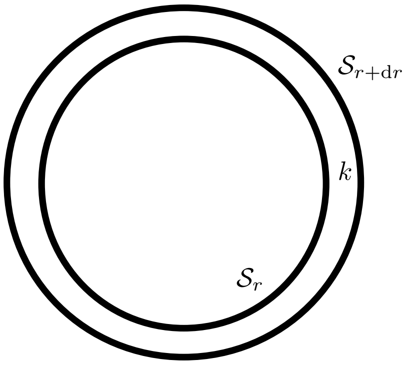

Figure 3 – Schéma du système.

D'où avec l'expression de δQ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\rho \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau = -4\pi \mathrm{d}t\frac{\partial r^2 j_{\mathrm{th}}}{\partial r}\mathrm{d}r + \mathcal{P}_V \mathrm{d}t\mathrm{d}\tau$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\tau &= V_{r+\mathrm{d}r} - V_r \\ &= \underbrace{4\pi r^2}_{\text{Surface intérieur}} \times \underbrace{\mathrm{d}r}_{\text{Largeur}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{\partial u}{\partial t}\rho \mathrm{d}t 4\pi r^2 \mathrm{d}r = -2\pi h \mathrm{d}t\frac{\partial r j_{\mathrm{th}}}{\partial r}\mathrm{d}r + \mathcal{P}_V \mathrm{d}t\, 2\pi r \mathrm{d}r h$$

Puis en simplifiant :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 j_{\mathrm{th}}}{\partial r} + \mathcal{P}_V}$$

5.2 Équation de diffusion

La loi de Fourier à une dimension projetée sur l'axe Or est :

$$\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}}(r,t) = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial r}$$

On va introduire un terme en T dans l'équation de conservation de l'énergie du paragraphe précédent.

La première loi de Joule assure que $\mathrm{d}u = c\mathrm{d}T$, donc $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial T}{\partial t}$. L'équation de continuité peut donc s'écrire $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 j_{\mathrm{th}}}{\partial r} + \mathcal{P}_V$. En utilisant la loi de Fourier on a alors :

$$\boxed{\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mathcal{P}_V}$$

Équation de la chaleur en géométrie sphérique

6 Généralisation à un volume

On admet que, pour un volume quelconque :

$$\boxed{\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}} = \mathcal{P}_V} \heartsuit$$

Équation de conservation à trois dimensions

La démonstration ne semble pas au programme. Au cas où : elle s'effectue comme pour l'équation à trois dimensions de conservation de la masse, démontrée dans le chapitre « Diffusion de particules ».

La première loi de Joule assure que $\mathrm{d}u = c\mathrm{d}T$, donc $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial T}{\partial t}$. L'équation de conservation peut donc s'écrire $\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = +\operatorname{div}\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}} = \mathcal{P}_V$.

La loi de Fourier est :

$$\overrightarrow{j_{\mathrm{th}}} = -\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T$$

En la combinant avec l'équation de conservation précédemment réécrite, on a alors :

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}\left(-\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T\right) = \mathcal{P}_V$$

Or, $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,A\right) = \Delta A$ (opérateur Laplacien), donc :

$$\boxed{\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\Delta T + \mathcal{P}_V}$$

Équation de diffusion à 3 dimensions

7 Irréversibilité du phénomène

Tous les phénomènes de diffusion sont qualifiés d'*irréversibles*. En effet, supposons que l'on remonte le temps, c'est-à-dire qu'on transforme t en $-t$. Alors l'équation de diffusion à 3 dimensions démontrée au paragraphe 6 devient :

$$\frac{\partial u}{\partial(-t)} = \lambda\Delta u \text{ soit } \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda\Delta u$$

L'équation est par conséquent modifiée, les états du système lors du « retour en arrière » ne sont plus les mêmes.

8 Nature du terme source $\mathcal{P}_V$

Le *terme source* $\mathcal{P}_V$ est une puissance volumique. On peut par exemple avoir un chauffage issu de la dissipation de l'énergie par effet Joule [1].

Dans le chapitre d'électromagnétisme, on établira que la puissance volumique dissipée par effet Joule s'exprime par :

$$\mathcal{P}_V = \frac{j^2_{\text{électrique}}}{\gamma} \heartsuit$$

Où :

1. Pour mémoire, $\mathcal{P} = RI^2$.

– $j_{\text{électrique}}$ est le vecteur densité de courant électrique (voir le chapitre « Transfert de charges ») ;
– γ (ou σ, en S·m^{-1}) est la conductivité électrique du matériau. *On rappelle que :*

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$$

où L est la longueur du matériau et S sa section.

9 Longueur et temps caractéristiques

On peut montrer que, si ℓ est la longueur caractéristique de l'objet étudié et τ la période des variations de température, alors :

$$\ell \approx \sqrt{D_{\text{th}}\tau}$$

10 Conditions aux limites

10.1 Continuité du flux thermique

Soient deux milieux séparés par une surface $\mathcal{S}$ n'absorbant pas d'énergie, placée en l'abscisse x_0. Alors :

$$\varphi(x_0^-) = \varphi(x_0^+)$$

soit encore $j_{\text{th}}(x_0^-) = j_{\text{th}}(x_0^+)$: il y a *continuité* (ou *conservation*) du flux thermique.

Dans le cas où la température est elle aussi continue à l'interface, on parle de *contact thermique parfait*.

10.2 Relation de Newton

Le programme prévoit que cette loi soit redonnée dans les énoncés.

Le transfert thermique entre 2 milieux de températures T_1 et T_2 est proportionnel à la surface de contact S, à l'écart de température et à la durée de l'échange.

On peut donc traduire mathématiquement cette loi par :

$$\delta Q = k(T_1 - T_2)\,\mathrm{d}S\mathrm{d}t,\ \varphi_{\text{th}} = kS(T_1 - T_2),\ j_{\text{th}} = k(T_1 - T_2)$$

Attention ! Il faut prendre garde au signe de $T_1 - T_2$. Le transfert s'effectue en effet des zones les plus chaudes vers les zones les plus froides.

10.3 Contact avec une paroi calorifugée

Une paroi est dite *calorifugée* lorsqu'elle empêche le transfert de chaleur. Ainsi, aucun flux thermique ne peut la traverser. On en déduit que $\overrightarrow{j_{\text{th}}}$ a une composante nulle selon la normale à la paroi, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot \overrightarrow{n} = 0}$$

11 Résistance thermique

On définit la « loi d'Ohm thermique » par :

$$\boxed{\underbrace{T_1 - T_2}_{\text{Analogue à une ddp}} = R_{\text{th}} \underbrace{\varphi_{\text{th}}}_{\text{Analogue à } i}} \ \heartsuit$$

dans laquelle R_{th} est la *résistance thermique* (en K/W).

On ne peut définir une résistance thermique qu'en régime indépendant du temps et sans terme source.

Pour déterminer l'expression de la résistance thermique dans différentes géométries, la stratégie est d'écrire la conservation du flux thermique en régime indépendant du temps et sans terme source.

11.1 Analogie électrique

Thermique	**Électrique**
flux $\varphi = \iint \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$	intensité $i = \iint \overrightarrow{j_{\text{élec}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$
$\overrightarrow{j_{\text{th}}} = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$	$\overrightarrow{j_{\text{élec}}} = -\gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$
$T_1 - T_2 = R\varphi$	$V_1 - V_2 = R\varphi$
$R = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}$	$R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$

Table 2 – Comparaison thermique-électrique.

Le chapitre « Transport de charges » apporte des compléments sur le sujet.

11.2 Résistance thermique en géométrie cartésienne

On cherche à établir la résistance thermique d'une pièce parallélépipédique, comprise entre les abscisses x_0 et x_1. Sa longueur est donc $\ell = x_1 - x_2$.

Le flux thermique se conserve :

$$\varphi_{\text{th}} = \iint_S \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot \mathrm{d}S = j_{\text{th}} S = \text{constante}$$

Or, la loi de Fourier projetée sur l'axe Ox donne :

$$j_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Soit :

$$\varphi_{\text{th}} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \text{ soit } \mathrm{d}T = -\frac{\varphi_{\text{th}}}{\lambda S}\mathrm{d}x$$

On intègre (entre $x = x_1$ et $x = x_0$) cette relation par la méthode de la séparation des variables :

$$T_0 - T_1 = -\frac{\varphi_{\text{th}}}{\lambda S}(x_0 - x_1) = \frac{\varphi_{\text{th}}}{\lambda S}(x_1 - x_0) = \frac{\varphi_{\text{th}}}{\lambda S}\ell$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme de la loi d'Ohm :

$$T_0 - T_1 = \left(\frac{\ell}{\lambda S}\right)\varphi_{\text{th}}$$

Ainsi, en géométrie cartésienne :

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda}\frac{\ell}{S}} \ \heartsuit$$

11.3 Résistance thermique dans le cas d'un cylindre calorifugé latéralement

Le flux thermique est sortant ; il se dirige vers l'extérieur du cylindre. Il traverse donc des cylindres de rayons de plus en plus grands.

Le flux thermique se conserve :

$$\varphi_{\text{th}} = \iint_S \overrightarrow{j_{\text{th}}} \cdot \mathrm{d}S = j_{\text{th}} S = \text{constante}$$

Or, la loi de Fourier projetée sur l'axe Or donne :

$$j_{\text{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

Or, comme $S = 2\pi r h$:

$$\varphi_{\text{th}} = -\lambda 2\pi r h \frac{\partial T}{\partial r} \text{ soit } \mathrm{d}T = -\frac{\varphi_{\text{th}}}{\lambda 2\pi h}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

On intègre (entre $r = R_1$ et $r = R_0$) cette relation par la méthode de la séparation des variables :

$$T_1 - T_0 = \frac{\varphi_{\text{th}}}{\lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme de la loi d'Ohm :

$$T_1 - T_0 = \varphi_{\text{th}} \frac{1}{\lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

Ainsi, en géométrie cartésienne :

$$R_{\text{th}} = \frac{1}{\lambda 2\pi h} \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)$$

11.4 Association de résistances

On garde les lois vues en électricité.

12 ARQS thermique

12.1 Justification de l'ARQS

L'ARQS thermique a lieu lorsque les phénomènes de propagation sont négligeables, c'est-à-dire lorsque :

$$\boxed{\ell^2 << D_{\text{th}} \Delta t} \ \heartsuit$$

12.2 Analogie RC

On considère une pièce dans laquelle se trouve un volume d'air de capacité thermique C (en J/K), entourée par des murs de résistance thermique R. La température extérieure est notée T_0 ; celle à l'intérieur est $T(t)$.

Appliquons le premier principe de la thermodynamique à l'air intérieur entre t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}U = \underbrace{\delta W}_{=0} + \delta Q$$

or, $\delta Q = \varphi \mathrm{d}t = \dfrac{T_0 - T(t)}{R}\mathrm{d}t$ (loi d'Ohm thermique), donc :

$$C\mathrm{d}T = \frac{T_0 - T(t)}{R}\mathrm{d}t$$

que l'on peut également écrire :

$$RC\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - T(t) = T_0$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre, régissant l'évolution d'un circuit électrique de type RC. Sa solution est de la forme :

$$T(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + K$$

- recherche de K : en remplaçant dans l'équation $T(t)$, on obtient $K = T_0$;
- $T(0) = \lambda \exp(0) + K = \lambda + T_0$, donc $\lambda = T(0) - T_0$.

La solution de l'équation est finalement :

$$T(t) = (T(0) - T_0)\left(\exp -\frac{t}{RC}\right) + T_0$$

On peut poser $\tau = RC$, temps caractéristique du circuit thermique. τ est homogène à des J·W, or W=J·s^{-1}, d'où τ est bien homogène à un temps.

13 Ondes thermiques

Voir le chapitre dédié, « Ondes thermiques », en lien avec la partie sur les phénomènes de propagation.