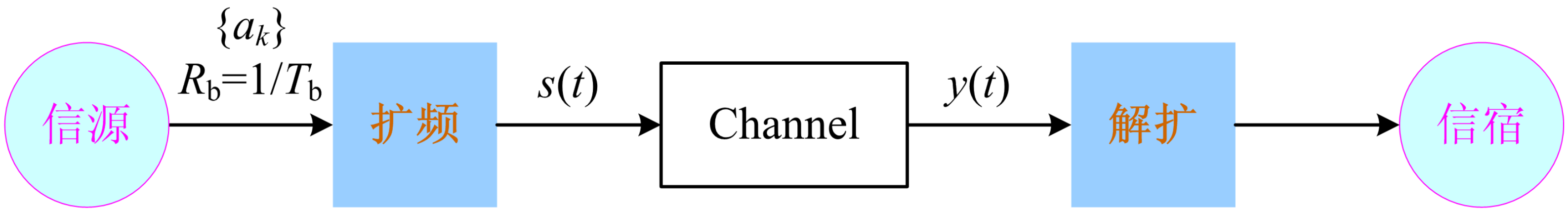
第10章 扩频通信

信息与通信工程学院
无线信号处理与网络实验室
孙卓

2011.05.21

扩频通信



- $s(t)$的带宽远大于奈奎斯特带宽
- 若图中信道是等效基带信道，则正弦调制和解调含在信道中
- 若图中信道是频带信道，则正弦调制和解调含在扩频/解扩中
- 使$s(t)$的带宽远大于奈奎斯特带宽的方法很多，本章主要考虑直序扩频（DSSS）

为什么要扩频?

- 我们肯花费宝贵的带宽去扩频，是因为它有以下的吸引力
  - 抗截获和抗干扰能力
  - 抗衰落能力
    - DSSS自有的抗多径干扰能力
    - 多径分集（Rake）
  - 多址通信能力
    - 抗其他用户的干扰

随机序列

- 在相当一部分情景下，我们希望扩频码像是随机掷硬币所产生的序列

- 随机序列的基本特性
  - 均衡性：0,1出现的概率均为1/2
  - 游程特性：长度为1的游程数为游程总数的1/2，长度为2的游程数为游程总数的1/4...长度为n的游程数为游程总数的$1/2^n$
  - 位移特性：随机序列与其位移任意个码元所形成的序列相比，对应位置的码元有一半相同,一半不同（移位相加0/1概率各半）
  - 周期无限

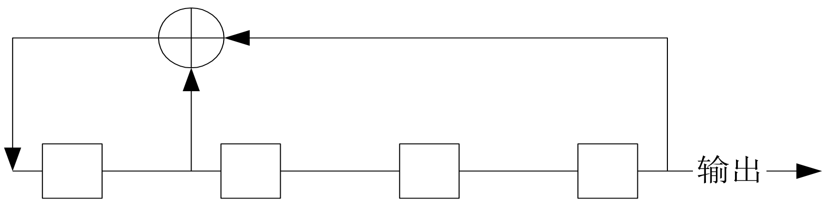
伪随机码

- 伪随机序列
  - 具有类似于随机序列特性（三个基本特性）的确定序列

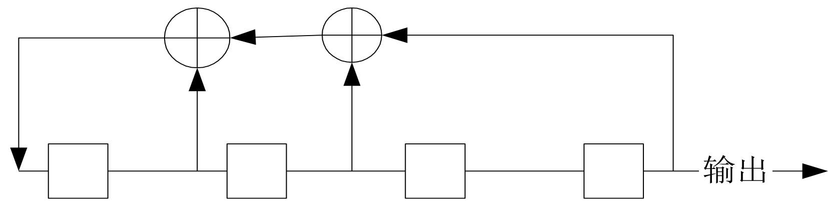
- 伪随机序列的种类
  - m序列
  - Gold码
  - 正交Gold码
  - m序列的截短码
  - M序列

序列发生器

- 例：两个线性移位寄存器序列发生器如下



——图1A——



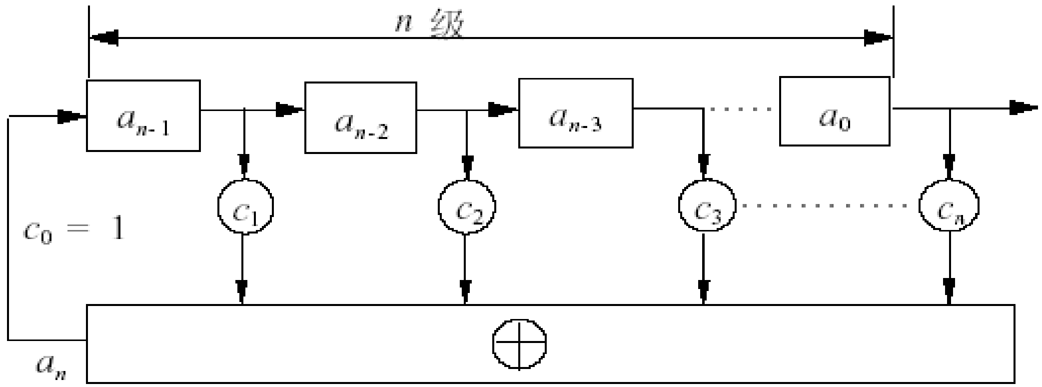
——图1B——

状态：1000 1100 1110 1111 0111 1011 0101 1010 1101 0110 0011 1001 0100 0010 0001

1000 1100 0110 1011 0101 0010 0001

- 一般说来，一个n级反馈移存器可能产生的最长周期为2^n-1。
- m序列：最长线性反馈移位寄存器序列
  - 带线性反馈的移位寄存器产生的周期最长的序列
- 反馈电路如何连接才能输出序列最长？

线性反馈移位寄存器序列的产生



- 反馈逻辑（c_i为0表示断, 1表示通）

$$a_n = c_1 a_{n-1} \oplus c_2 a_{n-2} \oplus \cdots \oplus c_n a_0$$

- 特征多项式

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

  - x为哑元, 其指数仅指明系数对应的移位寄存器单元, 系数指明对应的寄存器单元与模2和计算器的连接关系

m序列

- n级移位寄存器的线性反馈电路产生的序列周期不会超过2^n-1, 若周期为最大值2^n-1，该序列就是m序列
- 产生m序列的充要条件是特征多项式是本原多项式，即满足
  - $f(x)$是既约的，即不可分解
  - $f(x)$可整除x^m+1，$m=2^n$-1
  - $f(x)$不可整除x^q+1，$q<2^n$-1
- 本原多项式表（表9.4.1）

m序列的性质

- 均衡性
  - 一个周期中, 1 的数目为2^{n-1},0的数目为$2^{n-1}-1$. 即1和0约各占1/2
- 游程特性
  - 一个周期中, 游程总数为2^{n-1} ,其中长为n的游程数为1,长为n-1的游程数为1,长为n-2的游程数为2,长为n-3的游程数为4…长为1的游程数为2^{n-2}

m序列的性质(Cont’d)

- 移位特性
  - 一个m序列Mp与其经任意次延迟移位产生的另一序列Mr模2加后，得到的Ms仍是Mp的某次延迟移位序列

$$(1110100)\oplus(1101001)=(0011101)$$

- 自相关特性
  - 单极性码与双极性码(0对应+1, 1对应-1)，单极性码元的异或对应双极性码元的相乘
  - m序列的归一化周期性自相关函数是二值函数

$\oplus$	1	0
1	0	1
0	1	0

$\otimes$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

$$r_b(j)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}b_k b_{k+j}$$

$$r_b(j)=\begin{cases}1, & j=nm, n=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ -\dfrac{1}{m}, & j\neq km\end{cases}$$

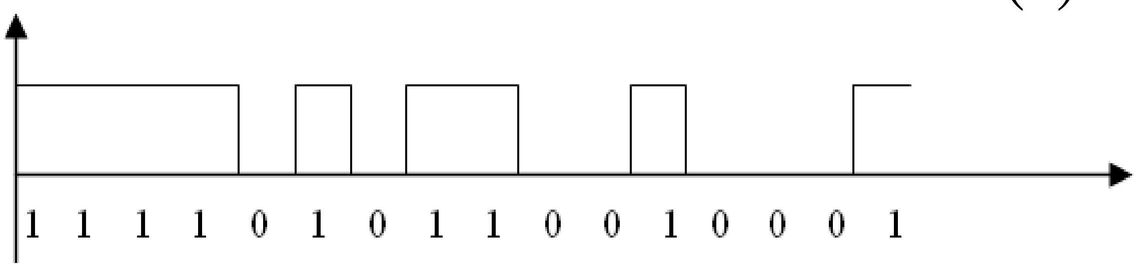
m序列波形

- 码片

$$g(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<T_c\\ 0, & t<0, t\ge T_c\end{cases}$$

- 单极性m序列波形

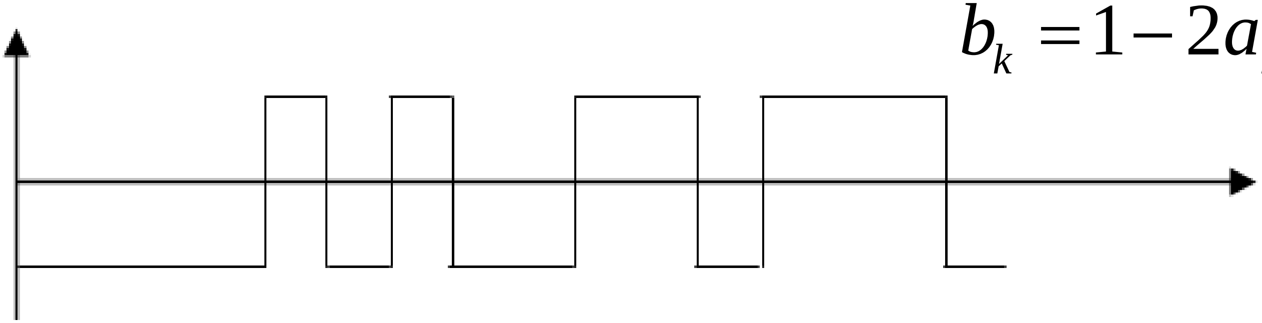
$$a(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k g\left[t-(k-1)T_c\right]$$



- 双极性m序列波形

$$b(t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k g\left[t-(k-1)T_c\right]$$

$$b_k=1-2a_k$$



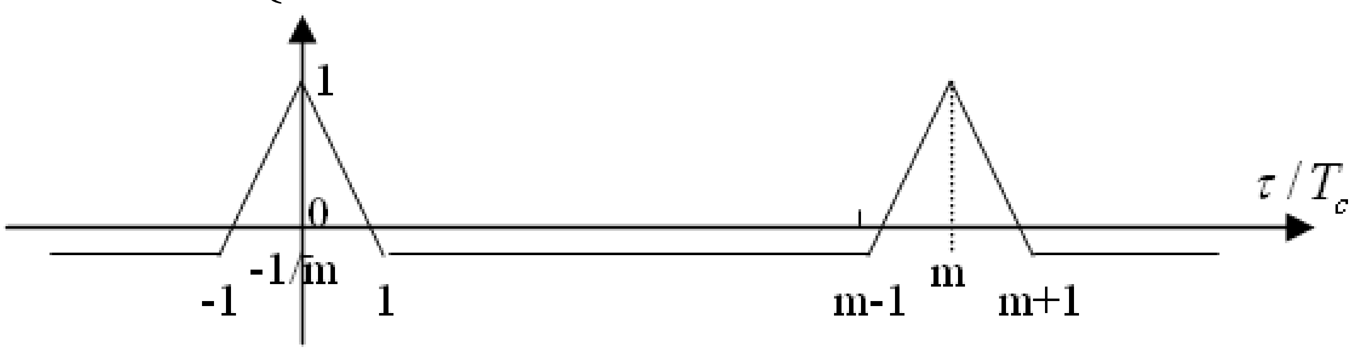
m序列波形的周期性自相关特性

- 归一化周期性自相关函数

$$r(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T b(t)b(t+\tau)dt, \quad T=mT_c$$

- m序列波形的周期性自相关特性

$$r(\tau)=\begin{cases}1-\dfrac{m+1}{m}\cdot\dfrac{|\tau-kT|}{T_c}, & |\tau-kT|\le T_c, k=0,\pm1,\pm2\cdots \\ -1/m, & otherwise\end{cases}$$

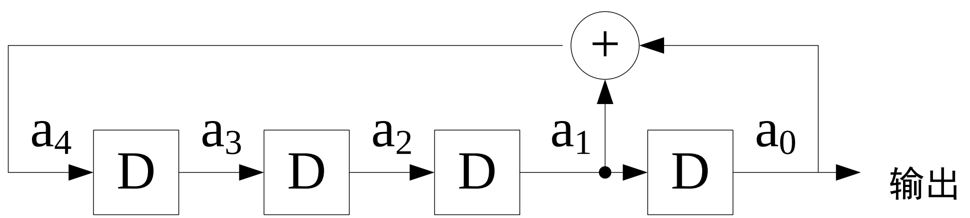


例

1个4级线性反馈移位寄存器如图所示，寄存器的初始状态为（a3,a2,a1,a0）=(0001).

（a）请写出此m序列的特征多项式；

（b）请写出移位寄存器的输出序列。



解: (a) $f(x)=1+x^3+x^4$；

(b) 因$a_k= a_{k-3} + a_{k-4}$,因此可以递推得到输出序列为:

1000 1001 1010 1111…

m序列的个数

- 设有两个同周期的序列$\{a_k\}$和$\{b_k\}$，若$\{b_k\}$不是$\{a_k\}$的移位（一个周期内循环移位），则称它们是两个不同的码。否则就是同一个码的不同移位
- 某些CDMA应用中，需要给每个用户分配一个不同的PN码。m序列不能提供足够数量的码
  - 给定n时，不同的m序列的意思是：它们有不同的特征多项式。
  - 例如n=3（m=7）时只有两个不同的特征多项式：1101和1011。对应的两个m序列是：1010011和1100101，彼此不是循环移位关系。

m序列的个数

- 相同长度不同反馈逻辑的m序列的数目等于同幂次的本原多项式的数目，其数目为

$$N_s = \frac{\Phi\left(2^n - 1\right)}{n}$$

  - 其中，Φ(x)为欧拉函数，为小于x且与x互质的数的个数（包括1）

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n-1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
N_s	1	2	2	6	6	18	16	48	60

11	12	13	14	15	16	17	18	19
2047	4095	8191	16388	32767	65535	131071	262143	524287
176	144	630	576	1800	2048	7710	7776	27594

Gold码

- Gold码的生成：由m序列的优选对移位模2加构成。
- 优选对：m_1,m_2是同长度不同反馈逻辑生成的m序列，且周期性互相关函数为三值函数

$$u_1=-1,\quad u_2=\begin{cases}2^{(n+1)/2}-1, & n=Odd\quad Number\\ 2^{(n+2)/2}-1, & n=Even\quad Number\end{cases}$$

$$u_3=\begin{cases}-\left[2^{(n+1)/2}+1\right], & n=Odd\quad Number\\ -\left[2^{(n+2)/2}+1\right], & n=Even\quad Number\end{cases}$$

$$GoldSequence=m_1\oplus m_2\left(CycleShift\right)$$

Gold码的性质

- 长为N的一个优选对可构成N个Gold码
- Gold码数目多，远大于m序列的个数
- Gold的周期性自相关函数也是三值函数（u_1, u_2, u_3）；同一优选对产生的Gold码的周期性互相关函数是三值函数；不同优选对产生的Gold码的周期性互相关函数不是三值函数
- Gold码相关函数的旁瓣特性

$$\frac{r_i(0)}{\left|r_i(\tau)\right|_{\max}} = \frac{\sqrt{N}}{1\square 3}, \quad \frac{r_i(0)}{\left|r_{ij}(\tau)\right|_{\max}} = \frac{\sqrt{N}}{1\square 3}, \quad (\tau \neq 0)$$

正交Gold码（偶位）

- 生成方法：在优选对产生的Gold码末尾加一个0，使序列长度为偶数
- 同步互正交特性

$$r_{ij}(0)=0;\quad r_{ij}(\tau)\neq 0,\quad \tau\neq 0$$

- 相关函数的旁瓣特性

$$\frac{r_i(0)}{\left|r_i(\tau)\right|_{\max}}=\frac{\sqrt{N}}{2\square 3},\quad \frac{r_i(0)}{\left|r_{ij}(\tau)\right|_{\max}}=\frac{\sqrt{N}}{2\square 3},\quad \tau\neq 0$$

伪随机码总结

- m序列的自相关特性最好，主峰与旁瓣之比为N
- 其它伪随机序列的相关特性均不如m序列，旁瓣都在$\sqrt{N}$数量级

正交的概念

- 函数的正交：$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt = 0$
  - 三角函数集
- 向量的正交：$g_1^T g_2 = 0$
  - 有限维离散空间的正交基
- 随机变量的正交：$E\{XY\} = 0$
  - 不相关RV
- 不正交程度的刻画：相关系数

$$r = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt}} \qquad r = \frac{g_1^T g_2}{\sqrt{\|g_1\|^2 \|g_2\|^2}} \qquad r = \frac{E\{XY\}}{\sqrt{E\{X^2\}E\{Y^2\}}}$$

码的正交

- 双极性码（码元取值为+1,-1）

$$\rho(x,y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i=0$$

- 单极性码（码元取值为0,1）

$$\rho(x,y)=\frac{A-D}{A+D}=\frac{A-D}{n}=0$$

  - 其中A是相同码元的个数，D为不同码元的个数

- 双极性码元的相乘等于单极性码元的异或非

$\otimes$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$\overline{\oplus}$	1	0
1	1	0
0	0	1

Hadamard矩阵

- 递推产生方法

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_{2N} = H_{2^{m+1}} = \begin{pmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{pmatrix},$$

$$H_N = H_{2^m} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{N1} & h_{N2} & \cdots & h_{NN} \end{pmatrix}$$

Walsh码

- Hadamard矩阵的行（或列）构成Walsh码
- 长度为N的Walsh码有N个，构成长度为N的Walsh码集
- 例:长度为4的Walsh码集

$$H_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Wh(0) = (1,1,\quad 1,1)$$
$$Wh(1) = (1,-1,1,-1)$$
$$Wh(2) = (1,1,-1,-1)$$
$$Wh(3) = (1,-1,-1,1)$$

Walsh函数

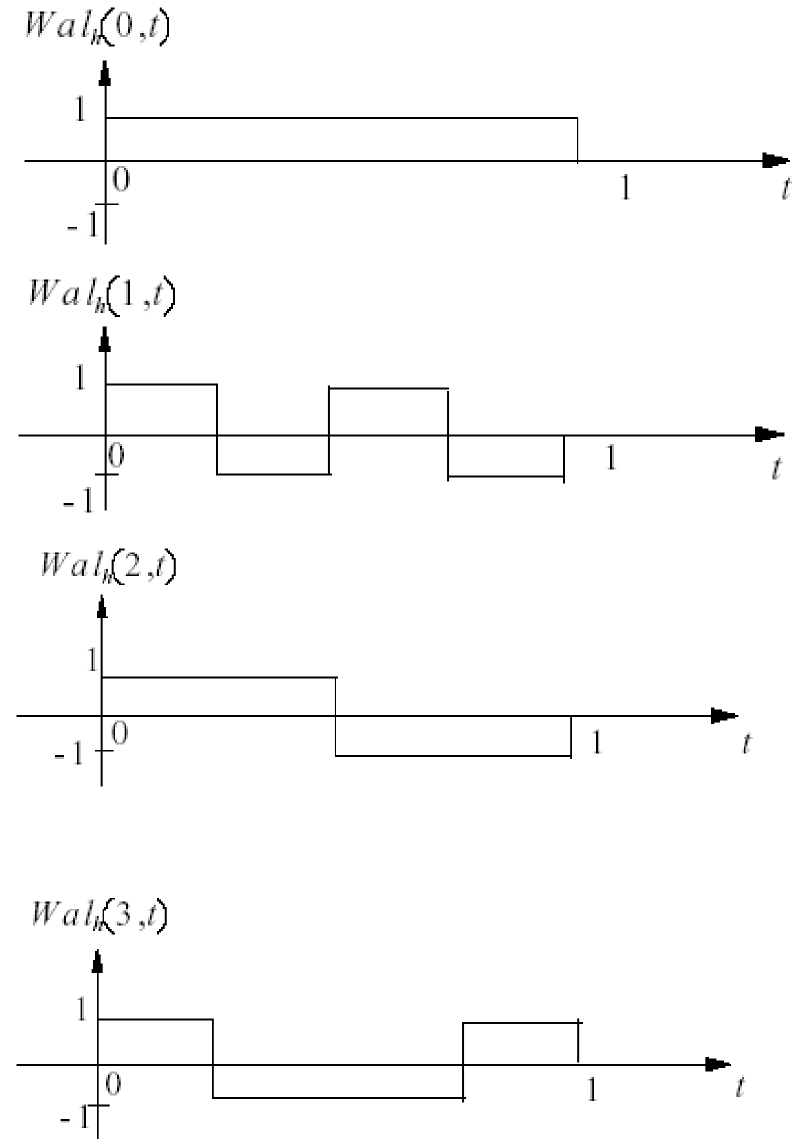
- 两种Walsh函数构成方式
  - Hadamard码生成方式：$Wal_h(i,t)$

$$Wal_h\left[(i-1),t\right]=\sum_{k=1}^{N}h_{ik}g\left[t-(k-1)T_c\right]$$

$$g(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le T_c\\ 0, & t<0,t>T_c\end{cases}$$

例： $$H_4=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

  - Rademacher 函数生成：$W_i(t)$



Walsh函数的性质

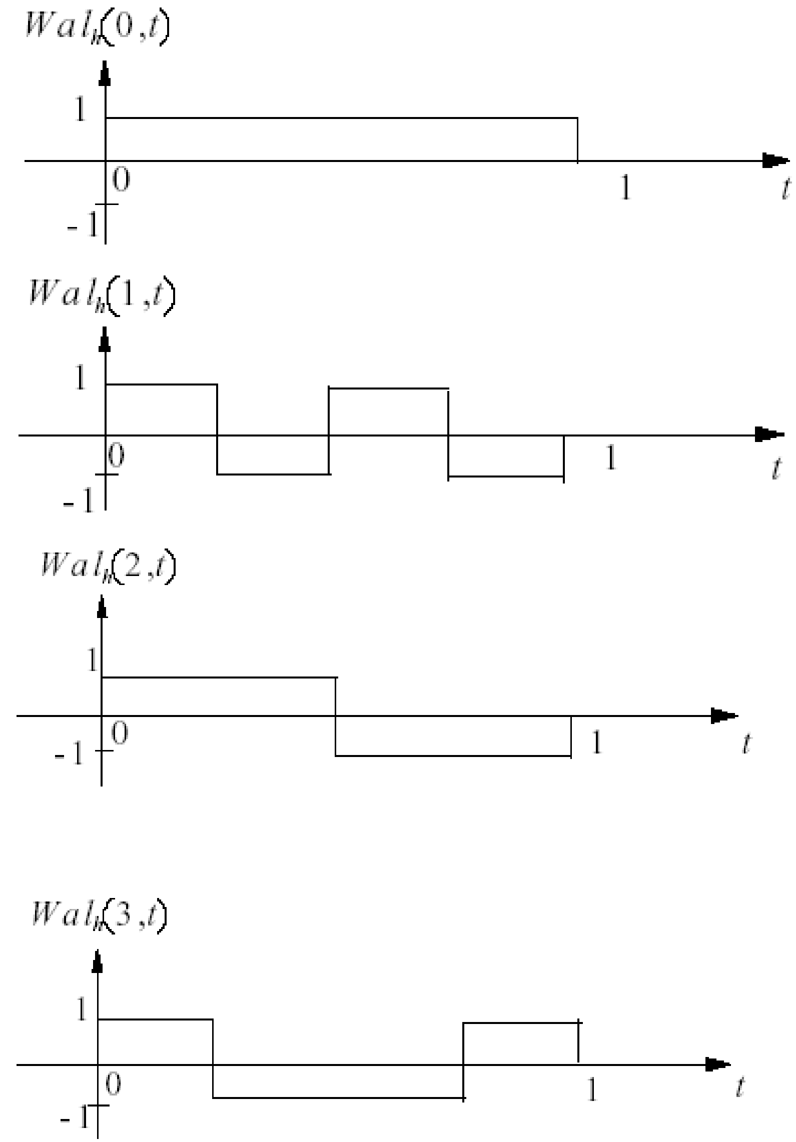
- 在[0,1)区间正交

$$\int_0^1 Wal_h(i,t)Wal_h(j,t)dt=\delta(i-j) \qquad i,j=0,1,\cdots,N-1$$

- 在[0,1)区间均值为0（$Wal_h(0,t)$均值为1）
- 两个Walsh函数相乘得另一Walsh函数（对乘法的封闭性）
- Walsh函数集是完备的（长度为N的Walsh函数有N个）

Walsh函数的频域特性

- 不同编号的Walsh函数的频带宽度不同，约等于$1/T_i$（T_i为最短游程）
- 不能直接用Walsh函数作扩频码，否则扩频增益会不同
  - 扩频：窄带信号“调制”宽带信号，使信号带宽扩大G倍。G：扩频增益



Walsh函数的周期性相关函数

- Walsh函数的周期性延拓

$$Wal_h(i,t)=0, \qquad t \notin [0,T)$$

$$W_i(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Wal_h(i,t-nT) \qquad -\infty < t < \infty$$

- Walsh函数的周期性自相关和互相关函数

$$R_i(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T W_i(t)W_i(t+\tau)dt$$

$$R_{ij}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T W_i(t)W_j(t+\tau)dt$$

Walsh函数的周期性相关特性

- 同步相关特性

$$R_{ij}(0)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

- 异步相关特性不好

$$\left|R_i(\tau)\right|_{\max}\approx R_i(0),\qquad \tau\neq nT$$

$$\left|R_{ij}(\tau)\right|_{\max}\approx R_i(0),\qquad \tau\neq nT$$

- 不利于在异步系统中的应用

码分多址系统

- 采用正交码作为多址方式：CDMA
- 同步码分多址（S-CDMA）
  - 所用用户的信号在接收端是同步到达的
  - TD-SCDMA
- 异步码分多址（A-CDMA）
  - 不同用户的信号在接收端是异步到达的
  - WCDMA，CDMA2000

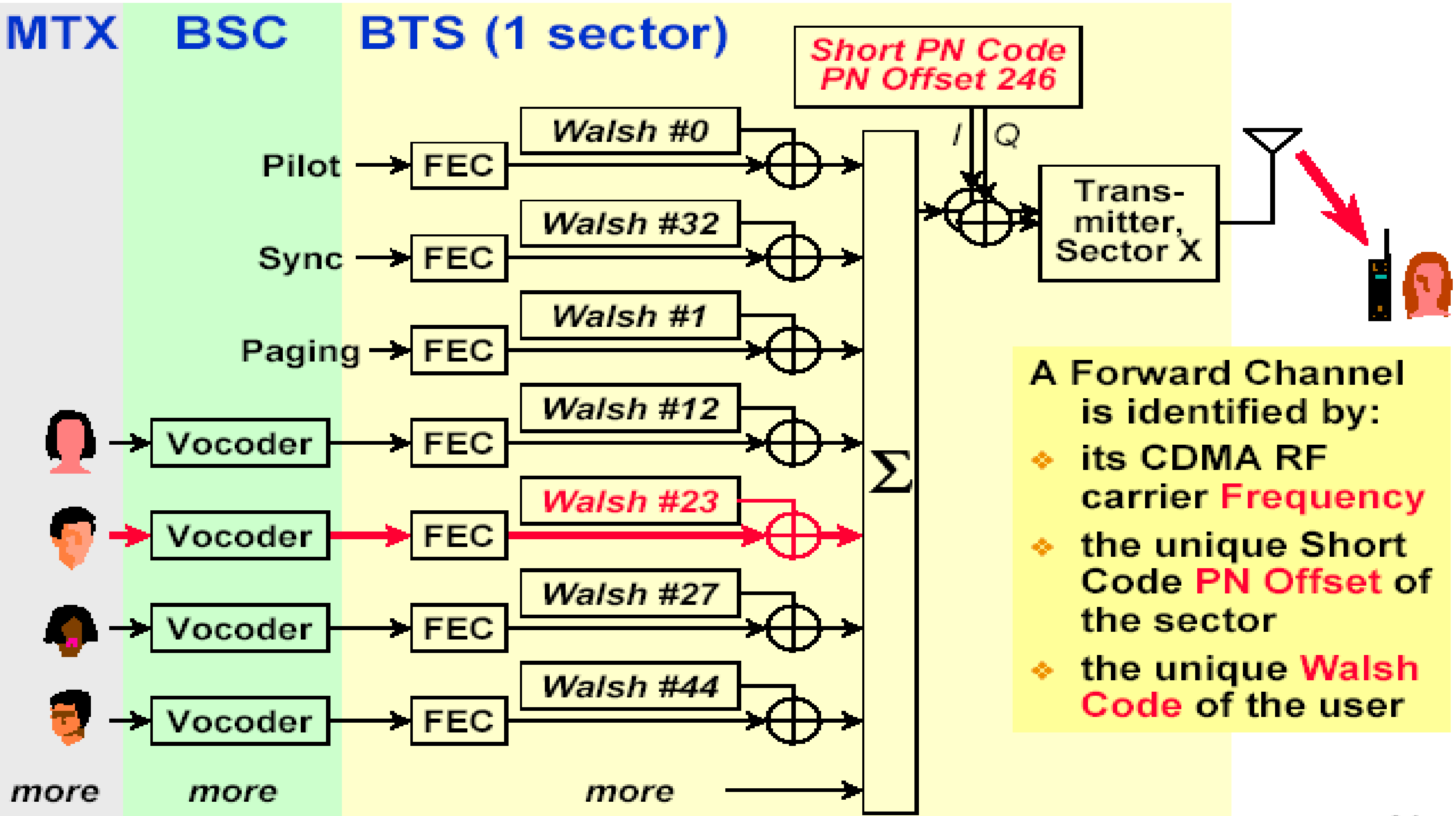
正交码与随机码总结

- 正交码
  - Walsh码：Hadamard矩阵生产方法
  - 同步时理想的相关特性
  - 异步时互相关最大值约为自相关最大值
  - 适用于：同步系统（如TD-SCDMA),或前向信道
- 随机码
  - 均衡性：0,1出现的概率均为1/2
  - 游程特性：长度为n的游程数为游程总数的2^{-n}
  - 位移特性：理想相关特性
  - 适用于：异步系统（如WCDMA,CDMA2000)

Walsh码与伪随机序列的结合

- 问题来源：Walsh码的自相关和互相关特性很不理想
- 结合方式：用一相关性好的伪随机序列（如m序列）与Walsh码模2加（单极性）或相乘（双极性）
- 同步互正交性继续保持，即 $r_{ij}(0)=0$
- 异步相关特性得以改善，旁瓣减为$\sqrt{N}$数量级

扩频结合CDMA



A Forward Channel is identified by:

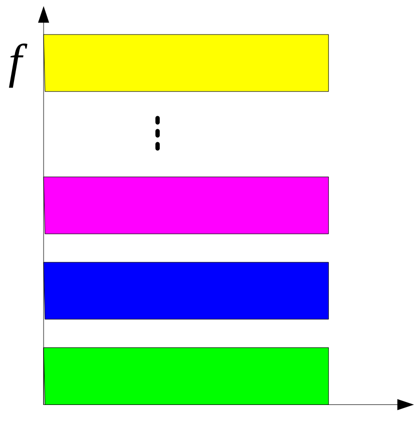
- its CDMA RF carrier Frequency
- the unique Short Code PN Offset of the sector
- the unique Walsh Code of the user

以下参考内容

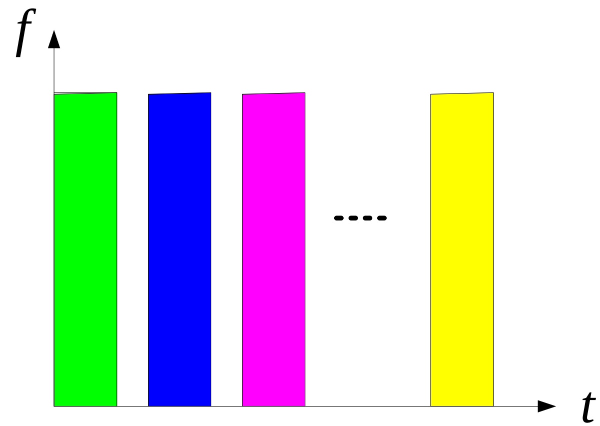
多址方式与多址干扰

- 多址方式
  - 在无线通信中，多个用户同时通话，以不同的无线信道分隔，防止相互干扰的技术方式称为多址方式
- 多址干扰（MAI: Multi-Access Interference）
  - 点对多点通信时，使用共同的传输媒质的多个用户的信号之间非严格正交时，相互之间产生的干扰
- 抑制MAI的方法：传输资源的正交划分与使用
  - 频率正交
    - 频分多址:FDMA;
    - 正交频分复用多址:OFDMA;
    - 波分复用:WDMA
  - 时间正交
    - 时分多址:TDMA
  - 空间正交
    - 空分多址:SDMA
  - 波形正交
    - 码分多址:CDMA

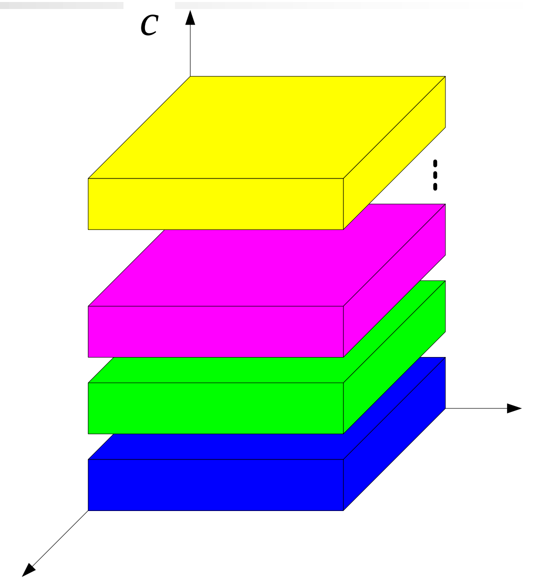
常见的多址方式



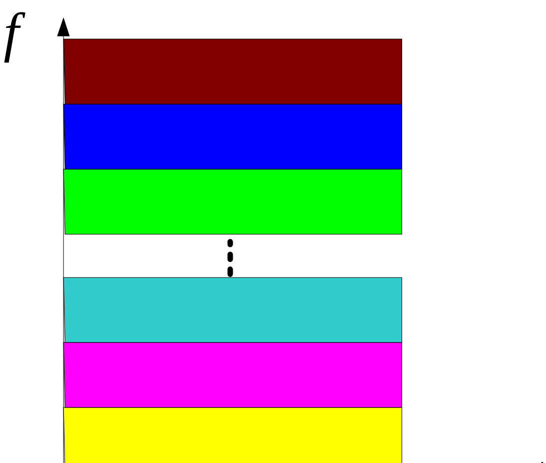
FDMA:1G



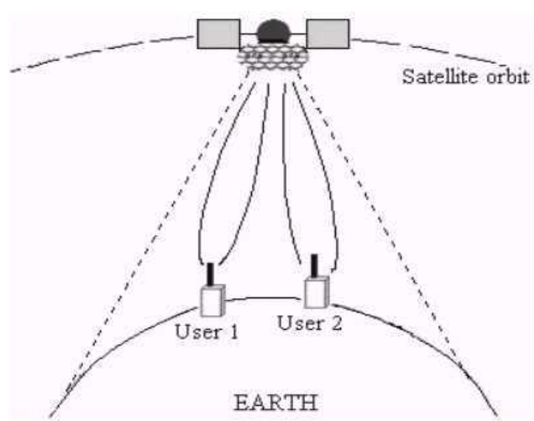
TDMA:2G



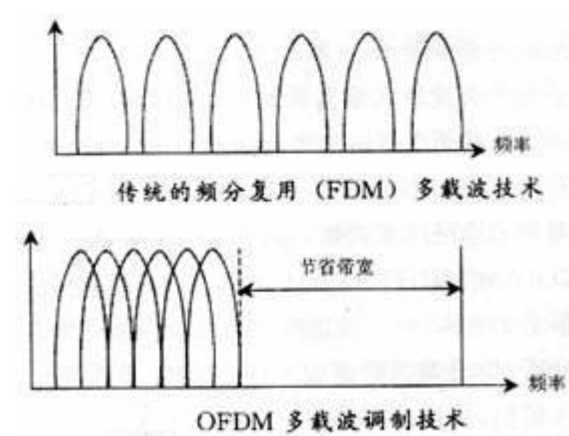
CDMA:3G



OFDMA:4G



SDMA:卫星通信、



典型多址系统

- 频分多址：以频率来区分信道。
  - 特点：使用简单，信号连续传输，满足模拟话音通信，技术成熟。
  - 缺点：多频道信号互调干扰严重，频率利用率低，容量小。
- 时分多址：在一个无线频道上，按时间分割为若干个时隙，每个信道占用一个时隙，在规定的时隙内收发信号。
  - 特点：使用简单，频谱效率较高，上下行比可调，通信质量好。
  - 缺点：同步要求严格，覆盖范围小，容量有限
- 码分多址：所有用户在同一频带同一时间内传送信号，利用不同用户信号波形之间的正交性来区分不同用户的信号。CDMA在频率、时间、空间上重叠。
  - 优点：系统容量大，抗干扰能力高，保密性好
  - 缺点：自干扰系统

正交概念的应用

- M进制无记忆调制：M组调制波形 $\left\{s_i(t)\right\}_{i=1}^{M}$
  - 一组标准正交基 $\left\{\varphi_i(t)\right\}_{i=1}^{N}$ 的线性组合 $s_i(t)=\sum_{j=1}^{N} s_{i,j}\varphi_j(t)$
- *Nyquest*采样定理（无ISI条件）
  - 叠加在一起的波形在采样时刻相互正交
- 信源编码之预测编码、变换编码
  - 消除信源的相关性→正交化
- 线性分组码之生成矩阵与校验矩阵的正交性
  - 正交的线性约束条件
- 限频带限功率高斯信道容量定理证明
  - 带宽*B*的信号以*2B*的采样频率得到*2BT*个正交样值
  - 时域采样：*Nyquest*定理；频域采样：OFDM

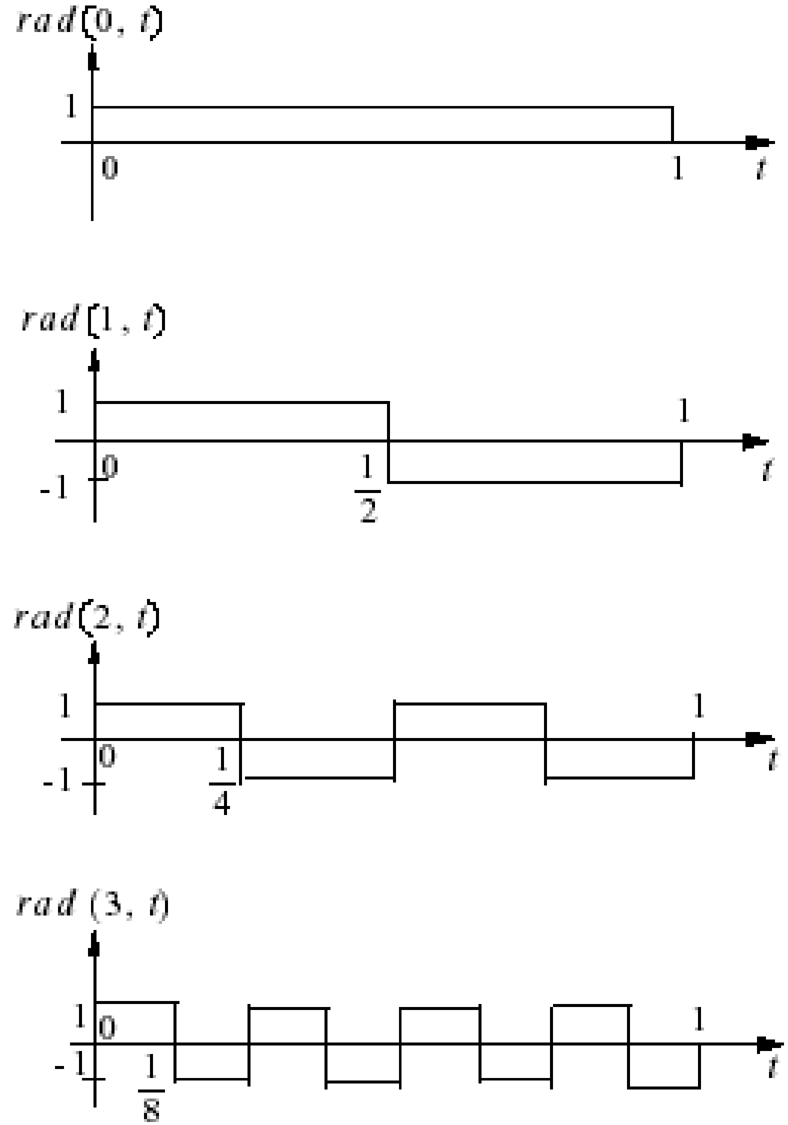
正交码

- 数字通信系统中通常采用二值的正交码，因为这样的码易于用数字电路实现和处理
  - Rademacher码、Walsh码
- Rademacher函数

$$rad(m,t) = rad\left(1, 2^{m-1}t\right) \quad t \in [0,1) \quad m = 1,2,\cdots$$

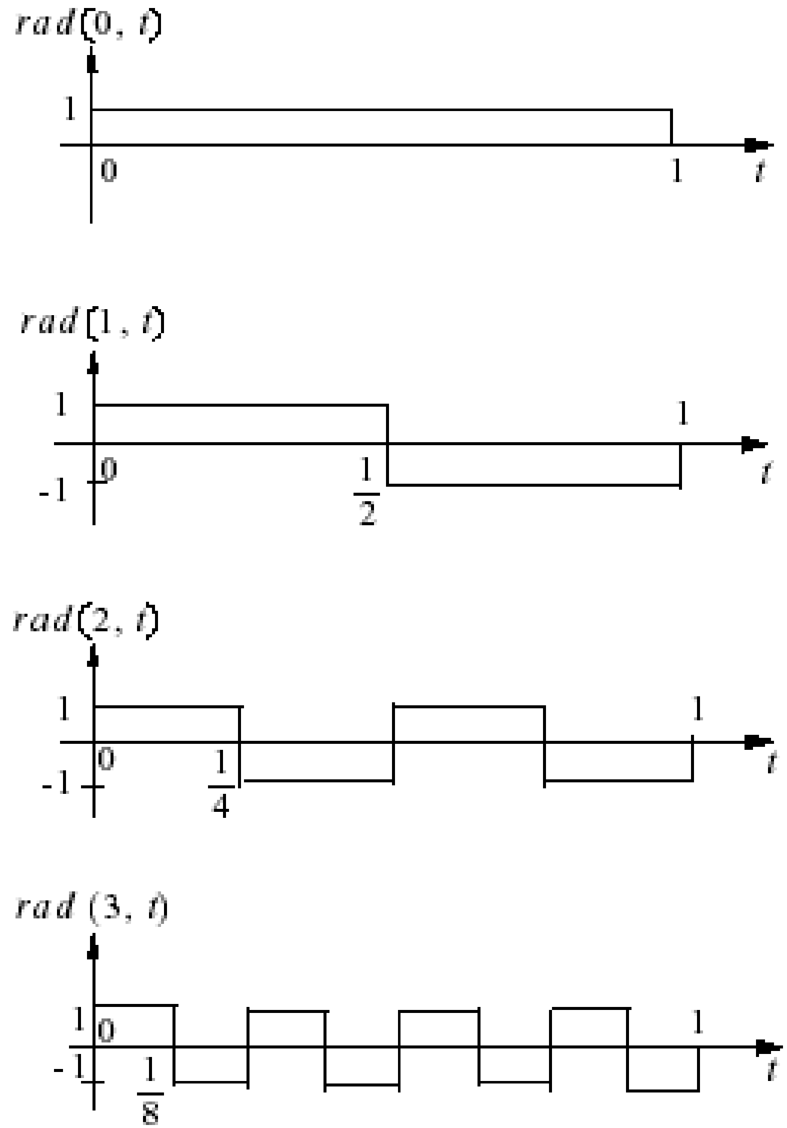
$$rad(1,t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,\frac{1}{2}) \\ -1 & t \in [\frac{1}{2},1) \end{cases}$$

$$rad(0,t) = 1 \quad t \in [0,1)$$



Rademacher函数

- 分频特性
  - 易于数字电路实现
- 性质
  - 周期为1
  - [0,1)区间形成正交集
  - 双值函数，且一个周期内均值为0（rad(0,t)例外）
  - 特点:阶数即符号改变次数
  - 不完备的正交函数集



Rademacher码

- 对Rademacher函数抽样就得到双极性Rademacher码

$$Rad(1)=(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1)$$

$$Rad(3)=(1,-1,1,-1,1,-1,1,-1)$$

- (1,-1)→(1,0),得单极性Rademacher码

$$Rad_s(1)=(1,1,1,1,0,0,0,0)$$

$$Rad_s(3)=(1,0,1,0,1,0,1,0)$$

- Rademacher码是正交码集