第二章习题答案

2-2 验证M/M/1的状态变化为一个生灭过程。

解：M/M/1排队系统在有顾客到达时，在时间$(t,t+\Delta t)$内从状态k转移到k+1（k>=0）的概率为 $l\Delta t+o(\Delta t)$， l 为状态k的出生率；

当有顾客服务完毕离去时，在时间$(t,t+\Delta t)$内从状态k转移到k-1（k>=1）的概率为 $m\Delta t+o(\Delta t)$， m 为状态k的死亡率；

在时间$(t,t+\Delta t)$内系统发生跳转的概率为$o(\Delta t)$；

在时间$(t,t+\Delta t)$内系统停留在状态k的概率为$1-(l+m)\Delta t+o(\Delta t)$；

故M/M/1排队系统的状态变化为生灭过程。

2-3 对于一个概率分布$\{p_k\}$，令$g(X)=p_0+p_1x+p_2x^2+...=\sum_{k=0}^{\infty}p_kx^k$ 称为分布$\{p_k\}$的母函数。 利用母函数求M/M/1队长的均值和方差。

解：对于M/M/1

$$p_k=r^k(1-r) \qquad k\geq 0$$

$$\therefore g(z)=(1-r)+(1-r)rz+...=(1-r)\frac{1}{1-rz}$$

$$\therefore E[k]=g^{'}(z)/_{z=1}=\frac{r}{1-r}$$

$$Var[k]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2p_k-[\sum_{k=1}^{\infty}kp_k]^2=g^{''}(z)/_{z=1}+E[k]-(E[k])^2=\frac{r}{(1-r)^2}$$

2-4 两个随机变量 X,Y 取非负整数值，并且相互独立，令 Z=X+Y，证明：Z 的母函数为 X,Y 母函数之积。根据这个性质重新证明性质 2-1。

证：设 Z(!!!此处应为 <u>X</u> ???)的分布为： $p_0,p_1,p_2...$， Y 的分布为： $q_0,q_1,q_2...$

由于

$$p\{Z=k\}=p\{X+Y=k\}=\sum_{r=0}^{k}p\{X=r,Y=k-r\}=\sum_{r=0}^{k}p\{X=r\}p\{Y=k-r\}=\sum_{r=0}^{k}p_rq_{k-r}$$

$$(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots)(q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots)=p_0q_0+(p_0q_1+p_1q_0)x+\ldots+(p_0q_k+p_1q_{k-1}+\ldots+p_kq_0)x^k+\ldots$$

所以 g(Z)=g(X)g(Y)

对于两个独立的 Poisson 流，取任意一个固定的间隔 T，根据 Poisson 过程性质，到达 k 个呼叫的概率分别为：

$$p_k(T)=\frac{(l_iT)^k}{k!}e^{-l_iT}$$ i=1,2 这两个分布独立

分布列的母函数分别为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k(T)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(l_iT)^k}{k!}x^ke^{-l_iT}=e^{l_iTx}e^{-l_iT}=e^{l_iT(x-1)}$$

他们母函数之积为合并流分布列的母函数，而母函数之积$=e^{l_1T(x-1)}e^{l_2T(x-1)}=e^{(l_1+l_2)T(x-1)}$

所以 合并流为参数 l_1+l_2 的 Poisson 过程。

2-7 求 k+1 阶爱尔兰（Erlang）分布 E_{k+1} 的概率密度。

可以根据归纳法验证，E_{k+1} 的概率密度为 $\frac{(mx)^k}{k!}me^{-mx}$ x>=0

证明：

利用两个随机变量的和的概率密度表达式：求 $Z=X+Y$ 的分布，当 X 和 Y 相互独立时，且边缘密度函数分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$。

$k+1$ 阶 Erlang 分布是指 $k+1$ 个彼此独立的参数为 m 的负指数分布的和。

用归纳法。

当 $k=1$ 时，需证 2 阶 Erlang 分布的概率密度为 xm^2e^{-mx}

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{t}me^{-mx}me^{-m(t-x)}dx=\int_{-\infty}^{t}m^2e^{-mt}dx=tm^2e^{-mt}$$

令 $n=k$ 时成立，即 $f_k(t)=\frac{(mt)^k}{k!}me^{-mt}$

则当 $n=k+1$ 时，

$$f_{k+1}(t)=\int_{-\infty}^{t} f_k(x)\, f(t-x)dx=\int_{-\infty}^{t}\frac{(mx)^k}{k!}me^{-mx}me^{-m(t-x)}dx$$

$$=\frac{m^{k+2}}{k!}e^{-mt}\int_{-\infty}^{t}x^k dx=\frac{(mt)^{k+1}}{(k+1)!}me^{-mt}$$

第三章习题答案

3-1　证明： $B(s,a)=\dfrac{aB(s-1,a)}{s+aB(s-1,a)}$

证：$\dfrac{aB(s-1,a)}{s+aB(s-1,a)}=\dfrac{a\dfrac{a^{s-1}}{(s-1)!}\Big/\sum\limits_{k=0}^{s-1}a^k/k!}{s+a\dfrac{a^{s-1}}{(s-1)!}\Big/\sum\limits_{k=0}^{s-1}a^k/k!}=\dfrac{\dfrac{a^s}{(s-1)!}}{s\sum\limits_{k=0}^{s-1}a^k/k!+\dfrac{a^s}{(s-1)!}}=\dfrac{a^s/s!}{\sum\limits_{k=0}^{s}a^k/k!}=B(s,a)$

3-2　证明：（1） $C(s,a)=\dfrac{sB(s,a)}{s-a[1-B(s,a)]}$ ，　　　$s>a$

（2） $C(s,a)=\dfrac{1}{1+(s-a)[aB(s-1,a)]^{-1}}$　　　$B(0,a)=1$，且$s>a$

（1）证：

$$\frac{sB(s,a)}{s-a[1-B(s,a)]}=\frac{s\dfrac{a^s}{s!}\Big/\sum\limits_{k=0}^{s}a^k/k!}{s-a\sum\limits_{k=0}^{s-1}a^k/k!\Big/\sum\limits_{k=0}^{s}a^k/k!}=\frac{\dfrac{a^s}{s!}}{\sum\limits_{k=0}^{s}a^k/k!-\dfrac{a}{s}\sum\limits_{k=0}^{s-1}a^k/k!}$$

$$=\frac{a^s/s!}{\dfrac{a^s}{s!}+(1-a/s)\sum\limits_{k=0}^{s-1}a^k/k!}=\frac{a^s}{s!}p_0\frac{1}{1-a/s}=C(s,a)$$

（2）证：

$$\frac{1}{1+(s-a)[aB(s-1,a)]^{-1}}=\frac{1}{1+(s-a)\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{s-1}a^k/k!}{a\dfrac{a^{s-1}}{(s-1)!}}}=\frac{a^s/s!}{a^s/s!+(1-a/s)\sum\limits_{k=0}^{s-1}a^k/k!}$$

$$=\frac{a^s}{s!}p_0\frac{1}{1-a/s}=C(s,a)$$

3-3　在例 3.3 中，如果呼叫量分别增加 10%，15%，20%，请计算呼损增加的幅度。

话务量	a=21.9	24.09	25.185	26.28
s=30	0.020	0.041	0.054	0.069
增加的幅度		103%	170%	245%

话务量	a=5.08	5.588	5.842	6.096
s=10	0.020	0.031	0.038	0.046
增加的幅度		55%	90%	130%

3-4　有大小 *a*＝10*erl* 的呼叫量，如果中继线按照顺序使用，请计算前 5 条中继线每条通过的呼叫量。

解：

第一条线通过的呼叫量：$a_1=a[1-B(1,a)]=10\times[1-0.9090]=0.910erl$

第二条线通过的呼叫量：$a_2=a[B(1,a)-B(2,a)]=10\times[0.9090-0.8197]=0.893erl$

第三条线通过的呼叫量：$a_3=a[B(2,a)-B(3,a)]=10\times[0.8197-0.7321]=0.876erl$

第四条线通过的呼叫量：$a_4=a[B(3,a)-B(4,a)]=10\times[0.7321-0.6467]=0.854erl$

第五条线通过的呼叫量：$a_5=a[B(4,a)-B(5,a)]=10\times[0.6467-0.5640]=0.827erl$

3-6　对 *M/M/s* 等待制系统，如果 *s*>*a*，等待时间为 *w*，对任意 *t*>0。

请证明： $P\{w>t\}=C(s,a)e^{-(sm-l)t}$ 。

证：$s>a$

$$P\{w>t\}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k\{w>t\}p_k=\sum_{k=s}^{\infty}P_k\{w>t\}p_k$$

$$P_k\{w>t\}=\sum_{r=0}^{k-s}\frac{(smt)^r}{r!}e^{-smt}\quad,\quad p_k=\frac{a^s}{s!}(\frac{a}{s})^{k-s}p_0\qquad k\geq s$$

$$P\{w>t\}=\sum_{k=s}^{\infty}\sum_{r=0}^{k-s}\frac{(smt)^r}{r!}e^{-smt}.\frac{a^s}{s!}(\frac{a}{s})^{k-s}p_0=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-smt}[\sum_{k=s}^{\infty}\sum_{r=0}^{k-s}\frac{(smt)^r}{r!}(\frac{a}{s})^{k-s}]\qquad 令 k-s=l$$

$$=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-smt}[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l}\frac{(smt)^r}{r!}(\frac{a}{s})^l]$$

交换次序，得：

$$P\{w>t\}=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-smt}[\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=r}^{\infty}(\frac{a}{s})^l\frac{(smt)^r}{r!}]=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-smt}[\sum_{r=0}^{\infty}(\frac{a}{s})^r\frac{1}{1-a/s}\frac{(smt)^r}{r!}]$$

$$=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-(sm-l)t}\frac{1}{1-a/s}=C(s,a)e^{-(sm-l)t}$$

3-12 考虑 *Erlang* 拒绝系统，或 *M/M/s*（*s*）系统，*a*=*λ*/*μ*。一个观察者随机观察系统并且等待到下一个呼叫到来。

请证明：到来的呼叫被拒绝的概率为： $p=\frac{a}{a+s}\cdot B(s,a)$。

证：

随机观察系统，下一个到来的呼叫被拒绝的必要条件为系统在随机观察时处于状态 s，其概率为 $B(s,a)$。

其次，下一个到来的呼叫被拒绝必须在到达间隔 T 内，正在服务得 s 个呼叫没有离去，这个事件的概率为 P。

T 服从参数为 λ 的负指数分布，在 T 内没有呼叫离去的概率为：e^{-smT}，

则：$P=\int_0^{\infty}e^{-smT}\,l\,e^{-lT}dT=\frac{l}{l+sm}=\frac{a}{s+a}$

最后，到来的呼叫被拒绝的概率为：$\frac{a}{s+a}B(s,a)$

第四章习题答案

4.1 解：$a_R = a + r a_R B(s, a_R)$

现 $r = 0.5, a = 10, s = 10$

令 $F(a_R) = a + r a_R B(s, a_R)$
$\therefore F(a_R) = 10 + 0.5 a_R B(10, a_R)$

迭代起点

$$a_R = 10.5$$
$$F(10.5) \approx 10 + 0.5 * 10.5 * 0.2373 = 11.25$$
$$F(11.25) \approx 10 + 0.5 * 11.25 * 0.270 = 11.51$$
$$F(11.51) \approx 10 + 0.5 * 11.51 * 0.281 = 11.61$$
$$F(11.61) \approx 10 + 0.5 * 11.61 * 0.285 = 11.65$$
$$F(11.65) \approx 10 + 0.5 * 11.65 * 0.287 = 11.67$$

总呼叫量 $a_R \approx 11.65 erl$

总呼损 $B(s, a_R) = B(10, 11.65) \approx 0.287$

4.4 解：

$$a_{AB} = 7.2 * B(9, 7.2) = 7.2 * 0.132 = 0.95$$
$$g_{AB} = 1.872$$
$$a_{AC} = 10 * B(12, 10) = 10 * 0.120 = 1.20$$
$$g_{AC} = 2.617$$

在 AD 上，溢出呼叫流的特征

$$a = a_{AB} + a_{AC} = 2.15$$
$$g = g_{AB} + g_{AC} = 4.489$$

利用 Rapp 方法：$z = \dfrac{g}{a} = 2.088$

$$a = g + 3z(z - 1) = 11.304$$
$$s = \frac{a(a+z)}{a+z-1} - a - 1 = 11.64$$

向下取整$[s] = 11$, 则

$$a = \frac{([s] + a + 1)(a + z + 1)}{a + z} = 10.811$$

故等效系统为：a＝10.811erl,而 s＝11

查表得，在 AD 中继线为 8 时，B（11+8，10.811）< 0.01

4.5 解：a＝10，s＝14

(1)　通过呼叫量 $a^{'} = a*(1-B(14,10)) = 10*(1-0.056) = 9.44erl$

根据例 4.3

方查 $v^{'} = a^{'}\{1-a[B(s-1,a)-B(s,a)]\} = 9.44*\{1-10(0.084-0.056)\} = 6.80$

峰值因子 $z = \frac{v^{'}}{a^{'}} = 0.72$

（2）根据 Wilkinson 定理

到达得呼叫量 $a = 10*0.056 = 0.56erl$

$$v = a(1-a+\frac{a}{s+1+a-a}) = 1.254$$

峰值因子 $z = \frac{v}{a} = 2.237$

4.7 解：首先，在直达路由时

B（2，1）＝0.2　　B(2,2)=0.4　　B(2,3)=0.53

所以，在 a＝1，2，3erl 时，网络平均呼损分别为 0.2，0.4，0.53

在由迂回路由时，由于对称关系，假定边阻塞率为 b，边上到达的呼叫量为 A，则

A=a+2b(1-b).a

考虑方程：b=B(s,A)=B(2.A)

在 a=1 时，迭代求解为 b=0.28

网络平均呼损 $= b[1-(1-b)^2] \approx 0.13$

在 $a = 2$ 时 $b \approx 0.53$ 网络平均呼损 ≈ 0.41

在 $a = 3$ 时 $b \approx 0.64$ 网络平均呼损 ≈ 0.56

第五章习题答案

5.2.

证性质 5.1(2)：对于有向图，每条边有两个端，它们和边的关系不同。$\sum_{v\in V} d^{+}(v)$ 是按端来计数，恰好将每条边计数一次。$\sum_{v\in V} d^{-}(v)$ 类似。所以有 $\sum_{v\in V} d^{+}(v)=\sum_{v\in V} d^{-}(v)=m$。

证性质 5.6：首先 $\sum_{v\in V} d(v)=2m\geq n\cdot d$，所以 $d\leq \frac{2m}{n}$。

一定存在某个端，它的度为 d，则与该端关联的边构成一个大小为 d 的割边集，所以 $b\leq d$。

考虑一个大小为 b 的割边集，将每条边换成它的邻端，这是一个大小最多为 b 的割端集，所以 $a\leq b$。

综上，$a\leq b\leq d\leq \frac{2m}{n}$。

5.4.

证明：考虑树 $T=(V,E),|V|=n,|E|=n-1$。

某个端不妨设为 v_n，$d(v_n)=\Delta(T)$。考虑其余 $n-1$ 个端 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}$，如果悬挂点最多只有 $\Delta(T)-1$ 个，则：

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)\geq \Delta(T)+(\Delta(T)-1)\times 1+2\times[(n-1)-(\Delta(T)-1)]$$
$$=\Delta(T)+\Delta(T)-1+2n-2\Delta(T)=2n-1$$

但等式左边 $=2n-2$，矛盾。

所以 T 中至少有 $\Delta(T)$ 个悬挂点。

5.6.

$$t(K_n)=\det\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} =n^{n-2}$$

$$t(K_n-e)=(n-2)n^{n-3}$$

5.7 $t(K_{n,m}) = \det\begin{bmatrix} m & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & -1 & \\ 0 & \cdots & m_{(n\times n)} & & & \\ & & & n & \cdots & 0 \\ & -1 & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & \cdots & n_{(m-1)\times(m-1)} \end{bmatrix}_{(n+m-1)\times(n+m-1)}$

将第 $n+1, n+2, \cdots, n+m-1$ 列加到第 1 列，再将第 1 列加回，得：

$$t(K_{n,m}) = \det\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & -1 & \\ 1 & \cdots & m_{(n\times n)} & & & \\ 0 & \cdots & -1 & n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1_{(m-1)\times n} & 0 & \cdots & n_{(m-1)\times(m-1)} \end{bmatrix}_{(n+m-1)\times(n+m-1)}$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & \\ 1 & \cdots & m_{(n\times n)} & & & \\ 0 & \cdots & -1 & n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -1_{(m-1)\times n} & 0 & \cdots & n_{(m-1)\times(m-1)} \end{bmatrix}_{(n+m-1)\times(n+m-1)} = n^{m-1} \cdot m^{n-1}$$

5.8.

用 Kruskal 算法：

依次选的边为：(3,6)，(1,3)，(6,7)，(1,2)，(5,6)，(1,4)

用破圈法：

依次去掉的边为：(2,7)，(4,5)，(2,3)

5.10.

（1）

用 D 算法：

v1	v2	v3	v4	v5	v6	置定端	距离	路由
0						1	0	1
	9.2	1.1	3.5			3	1.1	1
	9.2		3.5	2.9		5	2.9	3
	9.2		3.5		8	4	3.5	1
	9.2				8	6	8	5
	9.2					2	9.2	1

（2）

用 F 算法：

$$W^{(0)}=\begin{bmatrix} 0.0 & 9.2 & 1.1 & 3.5 & 100 & 100 \\ 1.3 & 0.0 & 4.7 & 100 & 7.2 & 100 \\ 2.5 & 100 & 0.0 & 100 & 1.8 & 100 \\ 100 & 100 & 5.3 & 0.0 & 2.4 & 7.5 \\ 100 & 6.4 & 2.2 & 8.9 & 0.0 & 5.1 \\ 7.7 & 100 & 2.7 & 100 & 2.1 & 0.0 \end{bmatrix},\quad R^{(0)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$W^{(6)}=\begin{bmatrix} 0.0 & 9.2 & 1.1 & 3.5 & 2.9 & 8 \\ 1.3 & 0.0 & 2.4 & 4.8 & 4.2 & 9.3 \\ 2.5 & 8.2 & 0.0 & 6.0 & 1.8 & 6.9 \\ 7.1 & 8.8 & 4.6 & 0.0 & 2.4 & 7.5 \\ 4.7 & 6.4 & 2.2 & 8.2 & 0.0 & 5.1 \\ 5.2 & 8.5 & 2.7 & 8.7 & 2.1 & 0.0 \end{bmatrix},\quad R^{(6)}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

v2 到 v4：v2 到 v1 到 v4，距离为 4.8

v1 到 v5：v1 到 v3 到 v5，距离为 2.9

（3）

$t_i=9.2, 9.3, 8.2, 8.8, 8.2, 8.7$，图的中心为 v3/v5

$s_i=24.7, 22, 25.4, 30.4, 26.6, 27.2$，图的中点为 v2

（4）

若端有权，则将端的权值除以 2 加到其各边的权上，再用 F 算法。