2-2 验证M/M/1的状态变化为一个生灭过程。

解：M/M/1排队系统在有顾客到达时，在时间$(t,t+\Delta t)$内从状态k转移到k+1（k>=0）的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，$\lambda$为状态$k$的出生率；

当有顾客服务完毕离去时，在时间$(t,t+\Delta t)$内从状态k转移到k-1（k>=1）的概率为$\mu\Delta t+o(\Delta t)$，μ为状态k的死亡率；

在时间$(t,t+\Delta t)$内系统发生跳转的概率为$o(\Delta t)$；

在时间$(t,t+\Delta t)$内系统停留在状态k的概率为$1-(\lambda+\mu)\Delta t+o(\Delta t)$；

故M/M/1排队系统的状态变化为生灭过程。

2-3 对于一个概率分布$\{p_k\}$，令$g(X)=p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}p_kx^k$ 称为分布$\{p_k\}$的母函数。 利用母函数求M/M/1队长的均值和方差。

解：对于M/M/1

$$p_k=\rho^k(1-\rho) \qquad k\geq 0$$

$$\therefore g(z)=(1-\rho)+(1-\rho)\rho z+\ldots=(1-\rho)\frac{1}{1-\rho z}$$

$$\therefore E[k]=g'(z)/_{z=1}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$Var[k]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2p_k-[\sum_{k=1}^{\infty}kp_k]^2=g''(z)/_{z=1}+E[k]-(E[k])^2=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

2-4 两个随机变量 X,Y 取非负整数值，并且相互独立，令 Z=X+Y，证明：Z 的母函数为 X,Y 母函数之积。根据这个性质重新证明性质 2-1。

证：设 Z 的分布为：$p_0,p_1,p_2\ldots$，Y 的分布为：$q_0,q_1,q_2\ldots$

由于

$$p\{Z=k\}=p\{X+Y=k\}=\sum_{r=0}^{k}p\{X=r,Y=k-r\}=\sum_{r=0}^{k}p\{X=r\}p\{Y=k-r\}=\sum_{r=0}^{k}p_rq_{k-r}$$

$$(p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots)(q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots)=p_0q_0+(p_0q_1+p_1q_0)x+\ldots+(p_0q_k+p_1q_{k-1}+\ldots+p_kq_0)x^k+\ldots$$

所以 g(Z)=g(X)g(Y)

对于两个独立的 Poisson 流，取任意一个固定的间隔 T，根据 Poisson 过程性质，到达 k 个呼叫的概率分别为：

$$p_k(T)=\frac{(\lambda_i T)^k}{k!}e^{-\lambda_i T} \qquad \text{i=1,2} \quad \text{这两个分布独立}$$

分布列的母函数分别为：

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k(T)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda_i T)^k}{k!}x^k e^{-\lambda_i T}=e^{\lambda_i Tx}e^{-\lambda_i T}=e^{\lambda_i T(x-1)}$$

他们母函数之积为合并流分布列的母函数，而母函数之积$=e^{\lambda_1 T(x-1)}e^{\lambda_2 T(x-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)T(x-1)}$

所以 合并流为参数$\lambda_1+\lambda_2$的 Poisson 过程。

2-7 求 k+1 阶爱尔兰（Erlang）分布 E_{k+1} 的概率密度。

可以根据归纳法验证，E_{k+1}的概率密度为$\dfrac{(\mu x)^k}{k!}\mu e^{-\mu x}$ x>=0

证明：

利用两个随机变量的和的概率密度表达式：求$Z=X+Y$的分布，当 X 和 Y 相互独立时，且边缘密度函数分别为$f_X(x)$和$f_Y(y)$，则$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$。

$k+1$阶 Erlang 分布是指$k+1$个彼此独立的参数为μ的负指数分布的和。

用归纳法。

当$k=1$时，需证 2 阶 Erlang 分布的概率密度为$x\mu^2e^{-\mu x}$

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{t}\mu e^{-\mu x}\mu e^{-\mu(t-x)}dx=\int_{-\infty}^{t}\mu^2e^{-\mu t}dx=t\mu^2e^{-\mu t}$$

令$n=k$时成立，即$f_k(t)=\dfrac{(\mu t)^k}{k!}\mu e^{-\mu t}$

则当$n=k+1$时，

$$f_{k+1}(t)=\int_{-\infty}^{t}f_k(x)f(t-x)dx=\int_{-\infty}^{t}\frac{(\mu x)^k}{k!}\mu e^{-\mu x}\mu e^{-\mu(t-x)}dx$$

$$=\frac{\mu^{k+2}}{k!}e^{-\mu t}\int_{-\infty}^{t}x^kdx=\frac{(\mu t)^{k+1}}{(k+1)!}\mu e^{-\mu t}$$

3-1 证明：$B(s,a)=\dfrac{aB(s-1,a)}{s+aB(s-1,a)}$

证：$$\frac{aB(s-1,a)}{s+aB(s-1,a)}=\frac{a\dfrac{a^{s-1}}{(s-1)!}\Big/\sum_{k=0}^{s-1}a^k/k!}{s+a\dfrac{a^{s-1}}{(s-1)!}\Big/\sum_{k=0}^{s-1}a^k/k!}=\frac{\dfrac{a^s}{(s-1)!}}{s\sum_{k=0}^{s-1}a^k/k!+\dfrac{a^s}{(s-1)!}}=\frac{a^s/s!}{\sum_{k=0}^{s}a^k/k!}=B(s,a)$$

3-2 证明：（**1**）$C(s,a)=\dfrac{sB(s,a)}{s-a[1-B(s,a)]}$ ，　　$s>a$

（**2**）$C(s,a)=\dfrac{1}{1+(s-a)[aB(s-1,a)]^{-1}}$　　$B(0,a)=1$，且$s>a$

（1）证：

$$\frac{sB(s,a)}{s-a[1-B(s,a)]}=\frac{s\dfrac{a^s}{s!}\Big/\sum_{k=0}^{s}a^k/k!}{s-a\sum_{k=0}^{s-1}a^k/k!\Big/\sum_{k=0}^{s}a^k/k!}=\frac{\dfrac{a^s}{s!}}{\sum_{k=0}^{s}a^k/k!-\dfrac{a}{s}\sum_{k=0}^{s-1}a^k/k!}$$

$$=\frac{a^s/s!}{\dfrac{a^s}{s!}+(1-a/s)\sum_{k=0}^{s-1}a^k/k!}=\frac{a^s}{s!}p_0\frac{1}{1-a/s}=C(s,a)$$

（2）证：

$$\frac{1}{1+(s-a)[aB(s-1,a)]^{-1}}=\frac{1}{1+(s-a)\dfrac{\sum_{k=0}^{s-1}a^k/k!}{a\dfrac{a^{s-1}}{(s-1)!}}}=\frac{a^s/s!}{a^s/s!+(1-a/s)\sum_{k=0}^{s-1}a^k/k!}$$

$$=\frac{a^s}{s!}p_0\frac{1}{1-a/s}=C(s,a)$$

3-3 在例 **3.3** 中，如果呼叫量分别增加 **10**％，**15**％，**20**％，请计算呼损增加的幅度。

话务量	a=21.9	24.09	25.185	26.28

s=30	0.020	0.041	0.054	0.069
增加的幅度		103%	170%	245%

话务量	a=5.08	5.588	5.842	6.096
s=10	0.020	0.031	0.038	0.046
增加的幅度		55%	90%	130%

3-4　有大小 a＝10*erl* 的呼叫量，如果中继线按照顺序使用，请计算前 5 条中继线每条通过的呼叫量。

解：

第一条线通过的呼叫量：$a_1=a[1-B(1,a)]=10\times[1-0.9090]=0.910erl$

第二条线通过的呼叫量：$a_2=a[B(1,a)-B(2,a)]=10\times[0.9090-0.8197]=0.893erl$

第三条线通过的呼叫量：$a_3=a[B(2,a)-B(3,a)]=10\times[0.8197-0.7321]=0.876erl$

第四条线通过的呼叫量：$a_4=a[B(3,a)-B(4,a)]=10\times[0.7321-0.6467]=0.854erl$

第五条线通过的呼叫量：$a_5=a[B(4,a)-B(5,a)]=10\times[0.6467-0.5640]=0.827erl$

3-6　对 $M/M/s$ 等待制系统，如果 $s>a$，等待时间为 w，对任意 $t>0$。

请证明： $P\{w>t\}=C(s,a)e^{-(s\mu-\lambda)t}$ 。

证：$s>a$

$$P\{w>t\}=\sum_{k=0}^{\infty}P_k\{w>t\}p_k=\sum_{k=s}^{\infty}P_k\{w>t\}p_k$$

$$P_k\{w>t\}=\sum_{r=0}^{k-s}\frac{(s\mu t)^r}{r!}e^{-s\mu t}\quad,\quad p_k=\frac{a^s}{s!}\left(\frac{a}{s}\right)^{k-s}p_0\qquad k\ge s$$

$$P\{w>t\}=\sum_{k=s}^{\infty}\sum_{r=0}^{k-s}\frac{(s\mu t)^r}{r!}e^{-s\mu t}.\frac{a^s}{s!}\left(\frac{a}{s}\right)^{k-s}p_0=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-s\mu t}\left[\sum_{k=s}^{\infty}\sum_{r=0}^{k-s}\frac{(s\mu t)^r}{r!}\left(\frac{a}{s}\right)^{k-s}\right]\qquad 令k-s=l$$

$$=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-s\mu t}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{l}\frac{(s\mu t)^r}{r!}\left(\frac{a}{s}\right)^{l}\right]$$

交换次序，得：

$$P\{w>t\}=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-s\mu t}[\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{l=r}^{\infty}(\frac{a}{s})^l\frac{(s\mu t)^r}{r!}]=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-s\mu t}[\sum_{r=0}^{\infty}(\frac{a}{s})^r\frac{1}{1-a/s}\frac{(s\mu t)^r}{r!}]$$

$$=\frac{a^s}{s!}p_0e^{-(s\mu-\lambda)t}\frac{1}{1-a/s}=C(s,a)e^{-(s\mu-\lambda)t}$$

3-12 考虑 *Erlang* 拒绝系统，或 *M/M/s*（*s*）系统，*a*＝*λ*/*μ*。一个观察者随机观察系统并且等待到下一个呼叫到来。

请证明：到来的呼叫被拒绝的概率为： $p=\frac{a}{a+s}\cdot B(s,a)$。

证：

随机观察系统，下一个到来的呼叫被拒绝的必要条件为系统在随机观察时处于状态 *s*，其概率为 *B*(*s*,*a*)。

其次，下一个到来的呼叫被拒绝必须在到达间隔 *T* 内，正在服务得 *s* 个呼叫没有离去，这个事件的概率为 *P*。

T 服从参数为 λ 的负指数分布，在 *T* 内没有呼叫离去的概率为：$e^{-s\mu T}$，

则：$P=\int_0^{\infty}e^{-s\mu T}\lambda e^{-\lambda T}dT=\frac{\lambda}{\lambda+s\mu}=\frac{a}{s+a}$

最后，到来的呼叫被拒绝的概率为：$\frac{a}{s+a}B(s,a)$