第二讲. 信源编码定理与无失真信源编码

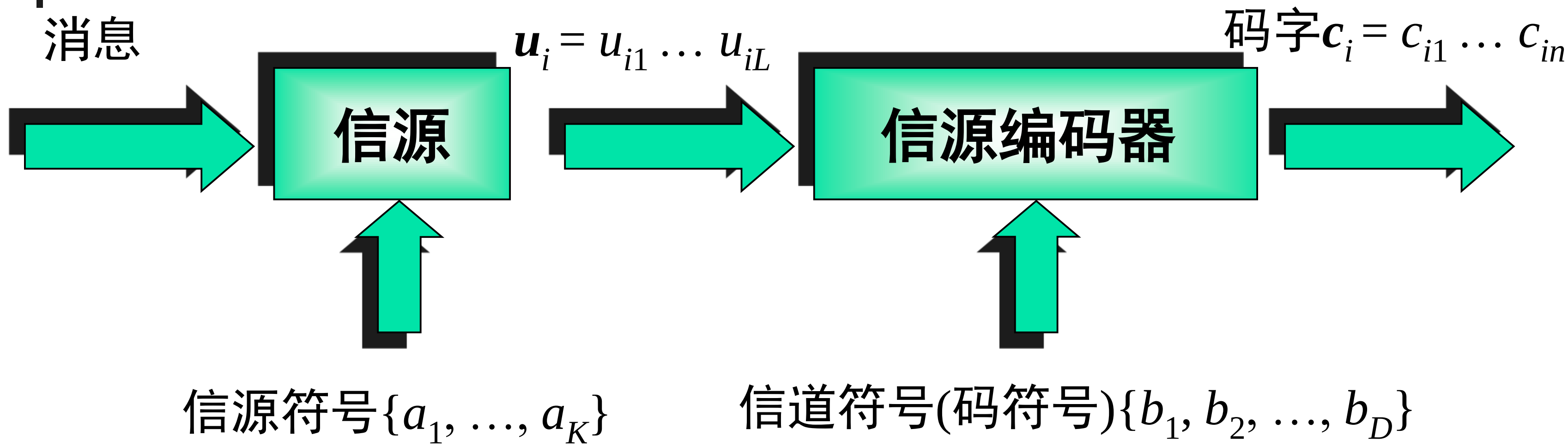
信息与通信工程学院

无线信号处理与网络实验室（WSPN）

孙卓

zhuosun@bupt.edu.cn

7.6 信源编码



$\{a_1, \ldots, a_K\}$为信源符号集，序列中每一个符号u_{ml}都取自信源符号集。

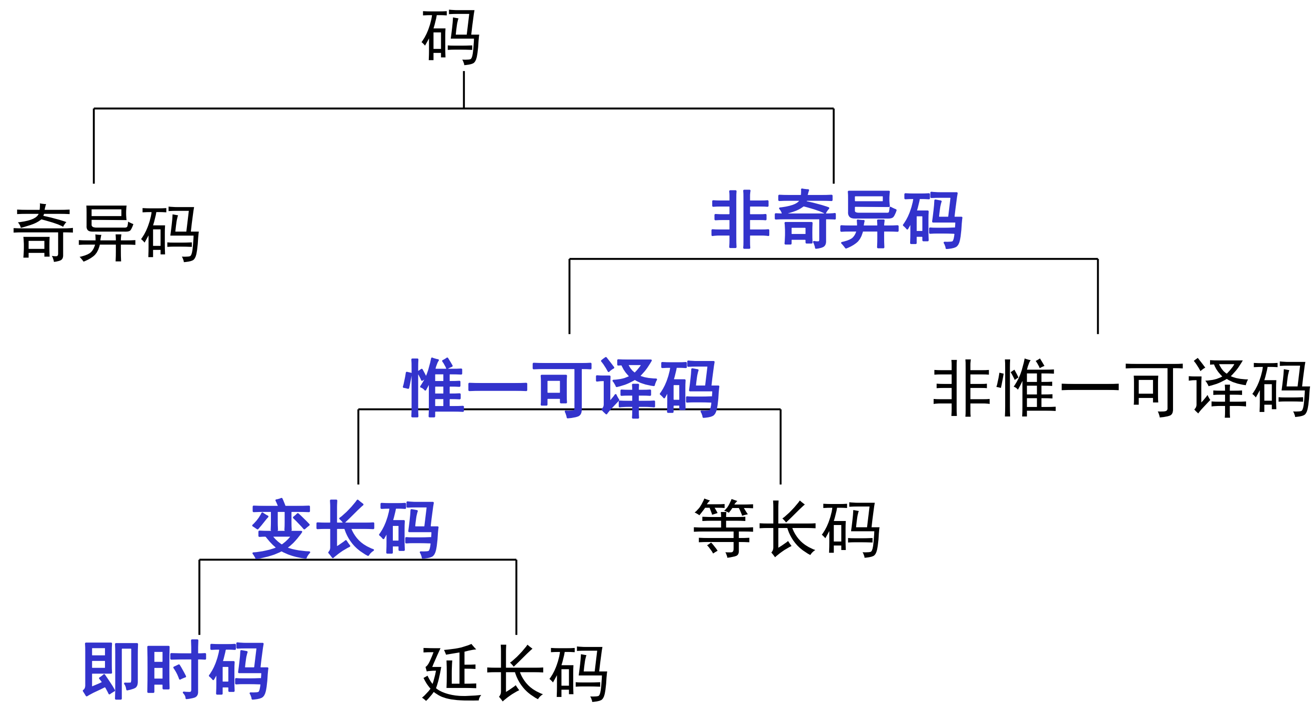
$\{b_1,\ldots,b_D\}$是适合信道传输的D个符号，用作信源编码器的编码符号。

编码输出码字$\boldsymbol{c}_i = c_{i1} \ldots c_{in}$， $c_{ik} \in \{b_1,\ldots, b_D\}$ $k = 1,\ldots, n$, n表示码字长度，简称**码长**

信源编码

- 功能
  - 将信源符号变换成适合信道传输的符号；
  - 压缩信源冗余度，提高传输效率。
- 要求
  - 编码序列要求的信息速率尽可能小
  - 以尽可能小的错误概率恢复原序列：正确译码
- 类型
  - 无失真编码 vs. 有失真编码
    - Huffman编码
    - 自适应Huffman码
    - 香农-凡诺码
    - 游程编码
    - 预测编码
    - 正交编码
    - 。。。
  - 等长编码 vs. 不等长编码

编码分类



非奇异码：从信源消息到码字的影射是一一对应的，每一个不同的信源消息都用不同的的码字对其编码。

惟一可译码：若码的任意一串有限长的码符号序列只能被惟一地译成所对应的信源符号序列，则此码称为惟一可译码，或单义可译码。

即时码：若码中任一码字都不是另一码字的字头，称该码为无前缀码，即时码是惟一可译码。不能即时译码的码字，称为非即时码，也称延长码。

例：编码分类

信源符号 s_i	符号出现概率 $p(s_i)$	码 1	码 2	码 3	码 4
s_1	1/2	0	0	1	1
s_2	1/4	11	10	10	01
s_3	1/8	00	00	100	001
s_4	1/8	11	01	1000	0001

码1：奇异码

码2：非奇异码，非惟一可译码 ----2次扩展码是奇异的

码3：惟一可译码，延长码；接收到一个完整的码字后还不能立即译码，还需等一个码字发出后才能判断是否可译。

码4：即时码

平均码长

- 对于**变长码**，码集C的平均码长$\bar{n}$定义为码C中每个码字$\boldsymbol{c}_m(m=1, \ldots, M)$其码长的概率加权平均值为

$$\boxed{\bar{n}=\sum_{m=1}^{M} n_m p(\boldsymbol{c}_m)}$$

式中n_m是码字$\boldsymbol{c}_m$所对应的码字的长度，$p(\boldsymbol{c}_m)$是码字$\boldsymbol{c}_m$出现的概率。

- 对于**等长码**，由于码集C中的每个码字的码长都相同，平均码长就等于每个码字的码长

$$\boxed{\bar{n}=\sum_{m=1} n_m p(\boldsymbol{c}_m)=n\sum_{m=1} p(\boldsymbol{c}_m)=n}$$

离散无失真信源编码定理

- 编码模型：L位输入无记忆符号序列$\boldsymbol{X}=(X_1\ldots X_l\ldots X_L)$每位有$n$种取值可能，编码器输出等长的$K$位无记忆符号序列$S=(S_1\ldots S_k\ldots S_K)$,每个符号有$m$种可能取值。
- 为实现无失真且有效地编码
  - 无失真要求：$n^L \le m^K \Rightarrow \dfrac{K}{L} \ge \dfrac{\log n}{\log m}$
  - 有效性要求：$n^L \ge m^K$

等概信源的熵

等概码元的熵

a. 通常信源不等概，所以才能进行压缩编码；

b. 仅对大概率的典型序列进行编码,而小概率的非典型序列不编码。

无失真编码：无失真或近似无失真编码

典型序列

- 由弱大数定理出发
  - 信源输出长为L的离散无记忆消息序列，序列中每个符号有n种可能取值，总共有 n^L 种可能的消息序列数。
  - 当L足够大时，根据大数定理，其中一些序列的集合以趋于1的概率出现，且该序列集合中的每一序列具有相同的出现概率，约为 $2^{-LH(X)}$，这些序列称为典型序列。典型序列的总数为 $2^{LH(X)}$ 。
  - 当L足够大时, $L \geq \dfrac{\sigma^2(x)}{\delta\varepsilon^2}$,其中 $\sigma^2(x) = E\left\{\left[I\left(x_i\right) - H\left(X\right)\right]^2\right\}$，$\delta, \varepsilon$ 是给定的任意小的正数，则如果只对典型序列进行编码，而忽略非典型序列所引入的译码差错率可小于任一正数δ。（Chebyshev不等式）

离散无失真信源编码定理

- 定长编码定理
  - 由L个符号组成的，每个符号的熵为$H(X)$ 的平稳无记忆符号序列$X_1 \ldots X_l \ldots X_L$，可用$K$个符号$Y_1 \ldots Y_k \ldots Y_K$（每个符号有$m$种可能取值）进行定长编码，对任意$\varepsilon>0$, $\delta>0$,只要

$$\frac{K}{L}\log_2 m \geq H(X)+\varepsilon$$

则当L足够大时，必可使译码差错小于δ。反之当

$$\frac{K}{L}\log_2 m \leq H(X)-2\varepsilon$$

译码必定出错。

离散无失真信源编码定理

- 变长编码定理
  - 若一离散无记忆信源的符号熵为$H(X)$，对信源符号进行m元变长编码，一定存在一种无失真编码方法，其码字平均长度K满足下列不等式

$$1+\frac{L\cdot H(X)}{\log_2 m}>\overline{K}\geq\frac{L\cdot H(X)}{\log_2 m}$$

熵编码：每个信源符号的平均编码长度与信息熵匹配

- 编码效率
  - 信息熵$H(X)$与信源平均每符号的编码长度R(*信息速率*）之比

$$\eta=\frac{H(X)}{R}$$

7.6 无失真离散信源编码

- 变长编码
  - 思路：根据符号出现概率的不同选取码字，大概率码字用短码，小概率码字用长码，使平均编码长度最短，提高编码效率
  - 应用:电报
- 例：离散单消息信源的变长编码如下，求其编码效率

$$\begin{pmatrix} X \\ p(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

变长编码　　0　　10　　110　111

解：可求得 $H(X) = -\sum_{i=1}^{4} p(x_i)\log p(x_i) = \frac{7}{4}\,\text{bit/symbol}$

进行逐位编码(L=1)，平均码长 $K = \sum_{i=1}^{4} p(x_i)K_i = \frac{7}{4}$

编码效率 $\eta = \frac{H(X)}{R} = 1$

回顾-信息度量与信源编码定理

$$\text{信源} \xrightarrow{S} \text{编码:}f \xrightarrow{X} \text{信道} \xrightarrow{Y} \text{译码:}f^{-1} \xrightarrow{S'} \text{信宿}$$

$H(\boldsymbol{S})$

$$\eta_S = \frac{H(\boldsymbol{S})}{H_0(\boldsymbol{S})}$$

<1

$H(\boldsymbol{X})$

$$\eta_X = \frac{H(\boldsymbol{S})}{\bar{L}}$$

$\square\, 1$

$I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y}) \to \max$

$\boxed{\text{信道容量}}$

$H(\boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{Y})$

$H(\boldsymbol{Y}) - I(\boldsymbol{X};\boldsymbol{Y})$

$f^{-1}: P(S' = S \mid Y; f) \to 1$

- 信源编码定理
  - 只对典型序列进行编码可获得无失真的编码效果
  - 码字空间的信息量不小于消息序列的信息量就存在一种使译码误差无限小的编码方式
  - 消息序列的信息量大于码字序列的信息量时任何编码方式都存在非0的译码错误

Huffman编码

二进制Huffman编码过程如下：

- **（1）将信源符号按概率大小排序；**
- **（2）对概率最小的两个符号求其概率之和，同时给两符号分别赋予码元“0”和“1”；**
- **（3）将“概率之和”当作一个新符号的概率，与剩下符号的概率一起，形成一个缩减信源，再重复上述步骤，直到“概率之和”为1为止；**
- **（4）按上述步骤实际上构造了一个码树，从树根到端点经过的树技即为码字。**

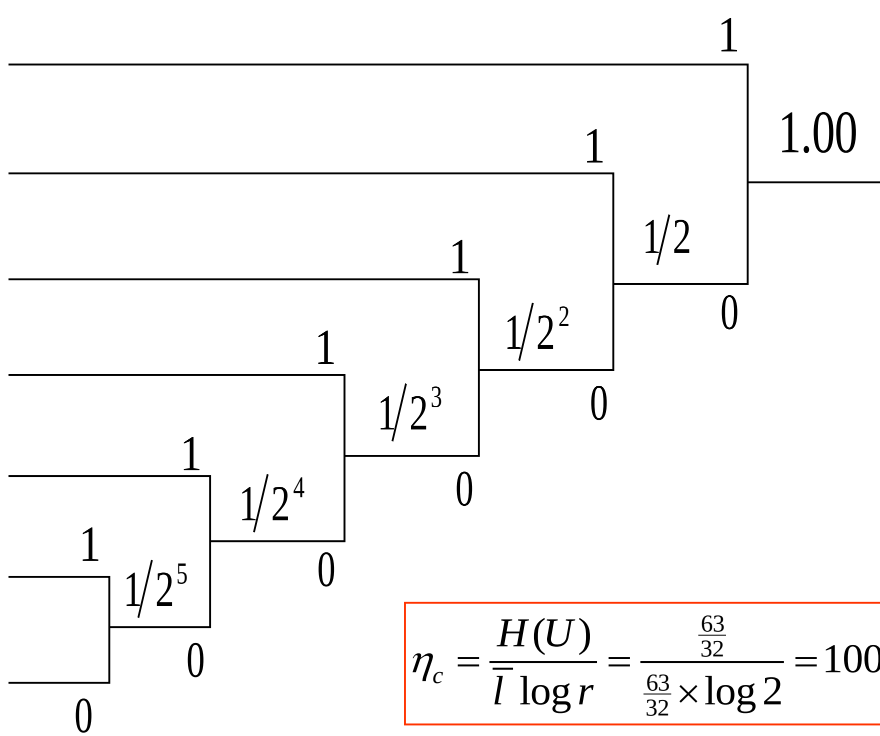
二进制Huffman编码

$$\begin{bmatrix} U \\ P_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \frac{1}{2^6} \end{bmatrix}$$

码元集：$X=\{0，1\}$

$$\bar{l} = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2^2}\times 2 + \frac{1}{2^3}\times 3 + \frac{1}{2^4}\times 4 + \frac{1}{2^5}\times 5 + \frac{1}{2^6}\times 6 + \frac{1}{2^6}\times 6 = \frac{63}{32}$$

符号 u_i	概率 $P(u_i)$	码字 W_i	码长 l_i
u_1	$1/2$	1	1
u_2	$1/2^2$	01	2
u_3	$1/2^3$	001	3
u_4	$1/2^4$	0001	4
u_5	$1/2^5$	00001	5
u_6	$1/2^6$	000001	6
u_7	$1/2^6$	000000	6



$$\eta_c = \frac{H(U)}{\bar{l}\log r} = \frac{\frac{63}{32}}{\frac{63}{32}\times\log 2} = 100\%$$

Huffman编码的基本特点

- **编出的码是非等长码**：Huffman编码实际上构造了一个码树，码树从最上层的端点开始构造，直到树根结束，最后得到一个横放的码树。
- **平均码长最小**： Huffman编码采用概率匹配方法来决定各码字的码长，概率大的符号对应于短码，概率小的符号对应于长码。
- **码字不唯一**：每次对概率最小的两个符号求概率之和形成缩减信源时，就构造出两个树枝，由于给两个树枝赋码元时是任意的，码字不唯一。

定长与变长编码编码效率比较

$$\begin{bmatrix} U \\ P_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \frac{1}{2^4} & \frac{1}{2^5} & \frac{1}{2^6} & \frac{1}{2^6} \end{bmatrix}$$

$H(U) = 63/32$ **bit/符号**

$$\gamma = 1 - \frac{H(U)}{H_{\max}(U)} = 1 - \frac{63/32}{\log 7} \approx 0.3$$

定长编码

$\bar{l} = l = 3$ **码元/符号** $\quad \eta_c = 65.625\%$

$H(X) = \frac{H(U)}{\bar{l}} = \frac{63/32}{3} = 0.65625$ **bit/符号**

$$\gamma = 1 - \frac{H(X)}{H_{\max}(X)} = 1 - \frac{0.65625}{\log 2} = 0.34375$$

变长编码

$\bar{l} = 63/32$ **码元/符号** $\quad \eta_c = 100\%$

$H(X) = \frac{H(U)}{\bar{l}} = \frac{63/32}{63/32} = 1$ **bit/符号**

$$\gamma = 1 - \frac{H(X)}{H_{\max}(X)} = 1 - \frac{1}{\log 2} = 0$$

信源编码例题

例：某模拟信源输出的信号*x(t)*是平稳随机过程，其一维概率密度为

$$p(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$$

将此信源的输出信号按*fs*=250Hz的抽样率进行抽样，样值通过一个均匀量化器量化为5个电平：

$$x_i=\frac{2i-1}{10},i=1,\cdots,5$$

（1） 将量化后的结果进行Huffman编码

（2） 计算经过Huffman编码后信源的输出速率(bps)

（3） 若抽样结果是独立序列，为无失真传输量化值，理论上需要的最低输出速率为多少？

信源编码例题

解：1.　第i个量化电平x_i的量化区间为[(i-1)/5, i/5]，因此x_i的出现概率为

$$p_i = \int_{(i-1)/5}^{i/5} 2x dx = (2i-1)/25$$

即： $$\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 & 0.9 \\ 0.04 & 0.12 & 0.20 & 0.28 & 0.36 \end{pmatrix}$$

(1) Huffman编码答案有多种，正确答案的共同特点是：

(a). 从x_1到x_5的编码长度是4 4 3 2 1 或 3 3 2 2 2;

(b). 短码不是长码的前缀。

(2) 平均码长为

(a) 0.36*1+0.28*2+0.2*3+0.12*4+0.04*4=2.16 bit/symbol

(b) 0.36*2+0.28*2+0.2*2+0.12*3+0.04*3=2.16 bit/symbol

编码后的信息速率为2.16*250=540bps

(3) 量化值的熵为 $H = -\sum_{i=1}^{5} p_i \log_2 p_i = \frac{9}{5}\log_2 5 - \frac{1}{25}\left[21\log_2 3 + 7\log_2 7\right] \approx 2$**bit/symbol**

因此无失真传输量化值所需的最低速率为500bps.

r进制Huffman编码

- 每次求缩减信源时，求r个最小概率之和，即将r个概率最小的符号缩减为一个新符号，直到概率之和为1终止。
- 新问题：缩减到最后时剩下不到r个符号了。
- 为保证平均码长最小，希望缩减到最后刚好还剩下r个符号。为达到此目的，可给信源添加几个无用的符号（概率为0的符号），使得信源符号数q满足:

$$q=(r-1)\theta+r$$

信源缩减的次数

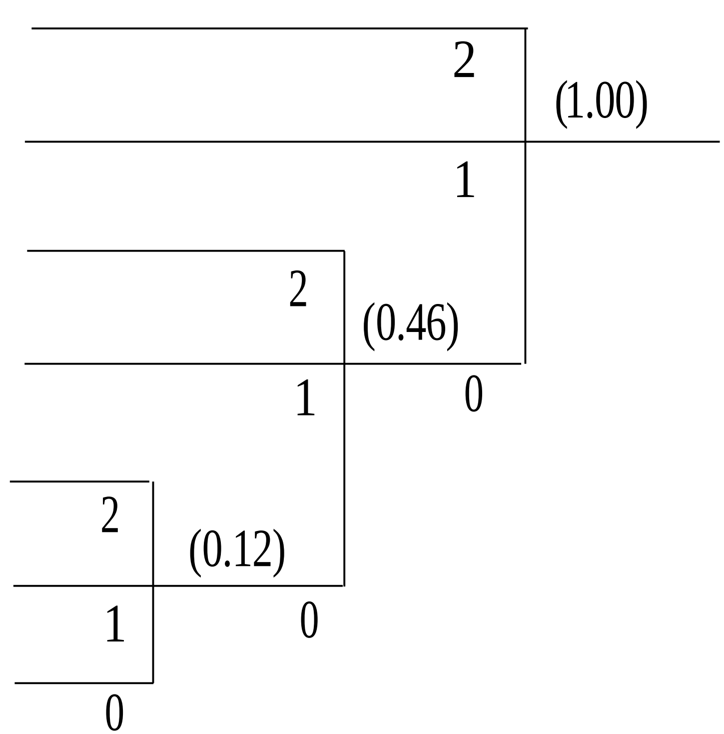
三进制Huffman编码

$$\begin{bmatrix} U \\ P_U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ 0.32 & 0.22 & 0.18 & 0.16 & 0.08 & 0.04 \end{bmatrix} \quad q=(r-1)\theta+r=2\theta+3$$

码元集：X={0，1，2}

$$\eta_c = \frac{H(U)}{\bar{l}\log r} = \frac{2.35}{1.58\times\log 3} \approx 93.8\%$$

符号 u_i	概率 $P(u_i)$	码字 W_i	码长 l_i
u_1	**0.32**	2	1
u_2	**0.22**	1	2
u_3	**0.18**	02	2
u_4	**0.16**	01	2
u_5	**0.08**	002	3
u_6	**0.04**	001	3
u_7	**0.00**		



$$\bar{l} = 0.32\times1+0.22\times1+0.18\times2+0.16\times2+0.08\times3+0.04\times3=1.58$$ **bit/符号**

回顾与解释

- 信源编码的目的：
  - 减少输出符号的剩余度：$1-H_{\infty}(x)/H_0(x)$
  - 换句话说：原先表示方法有冗余，没有有效利用符号能代表的信息
  - 信源编码需要：针对信源输出符号序列的统计特性来寻找某种方法，（1)把信源输出符号序列变换为最短的码字序列，使后者的各码元所载荷的平均信息量最大（提高符号的平均信息量）

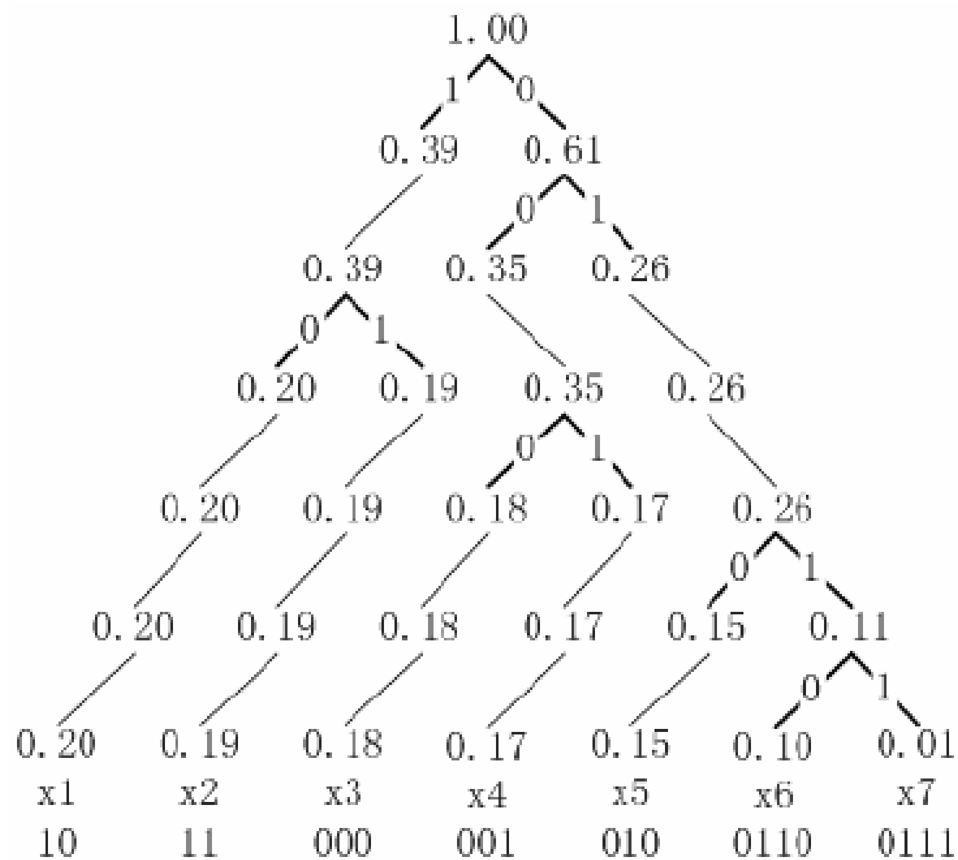
    （2）同时又能保证无失真地恢复原来的符号序列。
- 无失真编码定理的目的：
  - 如果编码后的符号具备独立等概特性（熵最大logm），那么码长应该最小为多长？
  - $K>=L*H(x)/\log m$

回顾与解释

- 编码效率= H(x)/{K×logm/L}
  - 在无失真编码定理的约束下，是小于等于1的。但我们希望他越接近1越好，这时即K越小越好。
  - Huffman编码的编码效率等于1的，所以获得平均码长最短。
- 如果$n^L=m^k$,
  - 考虑信源x={x1,x2,x3,x4} , n=8 （8进制）
  - 编码后S={s1,s2,s3} , m=16（16进制）
  - 对于特定一个信源序列x及编码后序列S，转换为二进制表示后，都是12比特. 而且，在无失真条件下，S最短序列需要3.
  - 总结：假如不考虑信源统计特性（独立等概），如考虑信源最后都归结为二进制情况（m=n=2）下，无失真的话需要K>=L, 即我们需要相同甚至更多的二进制比特。我们并没有获得任何压缩的好处（有效性）。特别地，K=L实际意味着我们没有做任何编码。

回顾与解释

- 图解Huffman编码方法
  - 1.写出消息概率
  - 2.对最小的两概率编码（0/1）
  - 3.对这两概率合并
  - 4.重复3，直至结束
  - 5.自顶而下到达某消息即得编码



- 概率求和时才输出编码符号

7.7 率失真R(D)函数

信源编码：提高传输效率，用尽可能少的信道传输符号来传递信源消息，目的是提高传输效率，这是信源编码主要应考虑的问题。这里又分两种情况讨论，即允许接收信号有一定的失真或不允许失真。

信道编码：如何增加信号的抗干扰能力，提高传输的可靠性，这是信道编码主要考虑的问题。解决这一问题，一般是采用冗余编码法，赋予信码自身一定的纠错和检错能力，只要采取适当的信道编码和译码措施，就可使信道传输的差错概率降到允许的范围之内。

综上所述，提高抗干扰能力往往是以降低信息传输效率为代价的，而为了提高传输效率又往往削弱了其抗干扰能力。这样，设计者在取舍之间就要作均衡考虑，这就是率失真优化处理要解决的问题。

率失真R(D)函数

- 在许多实际应用中，并不一定需要信息的无失真传输，而只需满足一定条件，近似地恢复信源发出的信息就可以。
  - 原因1：实际的信源常常是连续的，信息率无穷大
  - 原因2：实际信道带宽有限，信道容量受限
  - 原因3：接收方存在灵敏度和分辨力的限制，超过此能力限制的信息无意义，因此通常只要求近似地再现原始消息，即允许一定的失真存在。如听电话(20-20KHz)、看电影(0.1s的视觉暂留效应)

信息率失真理论

- Shannon定义了率失真函数R(D)
  - 在允许一定失真度D的条件下，信源输出的信息率可压缩至R(D)
- 率失真理论是限失真信源信息处理（包括量化（模数转换）、数模转换、频带压缩、数据压缩）的理论基础
- 也是信源编码、信道编码联合优化设计的基础

失真函数

- 失真函数
  - 信源符号$X=\{x_1, x_2, \ldots\ldots x_n\}$，经信道传输接收端符号$Y=\{y_1, y_2\ldots\ldots y_m\}$，对于每一对$(x_i, y_j)$定义一个非负函数$d(x_i, y_j)$ 为单个符号的失真测度或失真函数。对于连续信源连续信道，常用$d(x, y)$表示
- 常用失真函数

$$d(x_i, y_j)=\begin{cases}0 & x_i=y_j\\ a & a>0, x_i\neq y_j\end{cases} \qquad\qquad d(x_i, y_j)=(y_j-x_i)^2$$

- 平均失真度（信源）
  - 失真函数的数学期望

$$\overline{D}=E[d(x_i, y_j)]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(x_i)p(y_j/x_i)d(x_i, y_j)$$

率失真函数

- 试验信道集合P_D
  - 对信息传输的失真凡满足保真度准则$\bar{D} \le D$的信道称为D失真许可的试验信道，简称试验信道。所有试验信道构成的集合为P_D：$P_D = \{p(y_j / x_i) : \bar{D} \le D; i = 1,2,\ldots.n, j = 1,2,\ldots m\}$
- 率失真函数
  - 在P_D中可以找到使$I(X; Y)$达到最小的试验信道，即

$$R(D) = \min_{p(y_j / x_i) \in P_D} I(X;Y)$$

这个最小值$R(D)$就是信息率失真函数，简称率失真函数。

  - 信息率失真函数是在假定信源给定的情况下，在用户可以容忍的失真度内再现信源消息所必需获得的最小平均信息量。它反映的是信源可压缩的程度，是信源特性的参量。

率失真函数

- 互信息I(X;Y)的性质

凸(convex)函数: $f(\,\mathrm{E}\{x_i\}) \le \mathrm{E}\{\,f(x_i)\}$

$f''(x) \ge 0$: 凸

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y \mid X)$$

$$= -\sum_j p(y_j)\log p(y_j) + \sum_i \sum_j p(x_i)p(y_j \mid x_i)\log p(y_j \mid x_i)$$

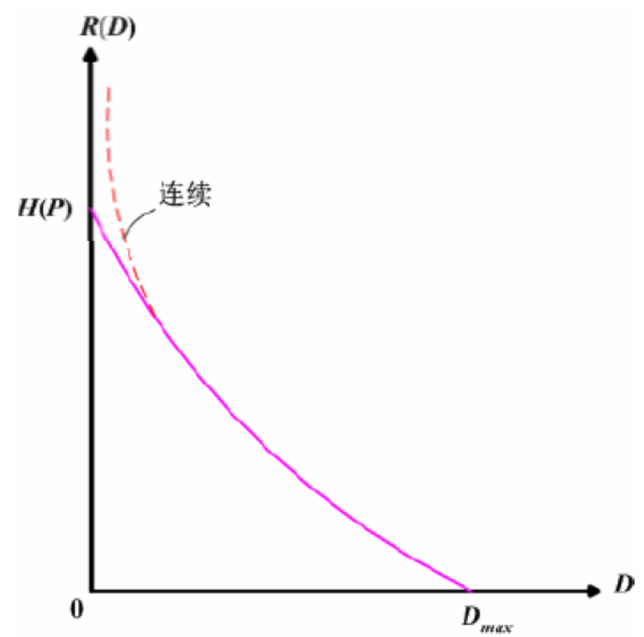
$$= \sum_i \sum_j p(x_i)p(y_j \mid x_i)\log \frac{p(y_j \mid x_i)}{\sum_i p(x_i)p(y_j \mid x_i)}$$

- $I(X;Y)$是先验概率$P(X)$的上凸函数：研究信道容量时用到。
- $I(X;Y)$是条件转移概率$P(Y|X)$的下凸函数：研究率失真函数时用到。
- 证明见参考书（中译本）P.23

率失真R(D)函数

- 概念与定义
  - 在信源和允许失真给定后，P_D是满足允许失真的实验信道集合，平均互信息$I(X;Y)$是信道传递函数的下凸函数，所以在P_D中一定存在某个实验信道，使得$I(X;Y)$ 达到最小，即 $$R(D)=\min_{p(y_j/x_i)\in P_D} I(X;Y)$$

    这个最小值$R(D)$称为信息率失真函数，简称率失真函数。
  - 传输信息允许失真，信息率可以下降



- 性质
  - 下凸性
  - 单调递减性和连续性
  - $R(D=0)=H(X)$

率失真函数实例

例7.7.1 一离散等概无记忆二进制信源: $P(x_0)=P(x_1)=0.5$,采用汉明距为度量失真度标准。现设计信源编码方案为:每传送N个码元中允许错一个码元，信道无失真，所以具体传送时仅传送$N\text{-}1$个码元，这个不传送到码元在接收端采用随机方式恢复。试求此信源编码的信息率失真函数$R'(D)$，并与理论上的$R(D)$比较

解: 编码后的实际速率 $R'=\dfrac{N\text{-}1}{N}=1\text{-}\dfrac{1}{N}$

平均失真 $D=0.5*\dfrac{1}{N}=\dfrac{1}{2N}$

信息率失真函数 $R'(D)=1\text{-}\dfrac{1}{N}=1-2\times\dfrac{1}{2N}=1-2D$

率失真函数的理论表达式 $R(D)=H\left(\dfrac{1}{2}\right)\text{-}H(D)$

率失真函数

- 信道容量和率失真函数都是求互信息I(X;Y)的极值问题，有相仿之处，故常称为对偶问题。
- 平均互信息I(X;Y)是信源概率分布P(X)的上凸函数，信道容量就是在固定信道情况下(固定P(Y|X))，求平均互信息极大值的问题，即 $C=\max\limits_{P(X)} I(X;Y)$
- 信道容量C只与信道情况，即信道的条件转移概率P(Y/X)有关，反映信道特性，与信源特性无关。
  - 由于平均互信息与信源特性有关，为排除信源特性P(X)对信道容量的影响，采用的做法是在所有的信源中以那个能使平均互信息达到最大的信源为参考。所以信道容量仅与信道特性有关，信道不同，C 亦不同。

7.8 限失真信源编码定理

- 设有一离散平稳无记忆信源，若该信源的率失真函数为R(D)，对于任意允许平均失真$D \geq 0$和任意小的$\varepsilon > 0$，若实际传输信息率R>R(D)，只要信源序列长度L足够长，一定存在一种编码方式C，使译码后的平均失真度$d \leq D + \varepsilon$；反之，若R<R(D)，则无论用什么编码方式，必有d>D
- 该定理可推广到连续平稳无记忆信源

限失真信源编码定理

- 理解1：率失真函数(D)是一个界限，只要实际传输信息率R大于这个界限，就可以通过信源编码技术将译码失真限制在给定的范围内。即通信过程中虽然有失真，但仍然能满足要求，否则就不能满足要求。
- 理解2：限失真信源编码的方向是寻求与信源的率失真函数R(D)相匹配的编码，即R→R(D)；这与无失真信源编码相似，后者寻求与信源信息熵相匹配的编码，即R→H(X)=R(D=0)

限失真信源编码定理

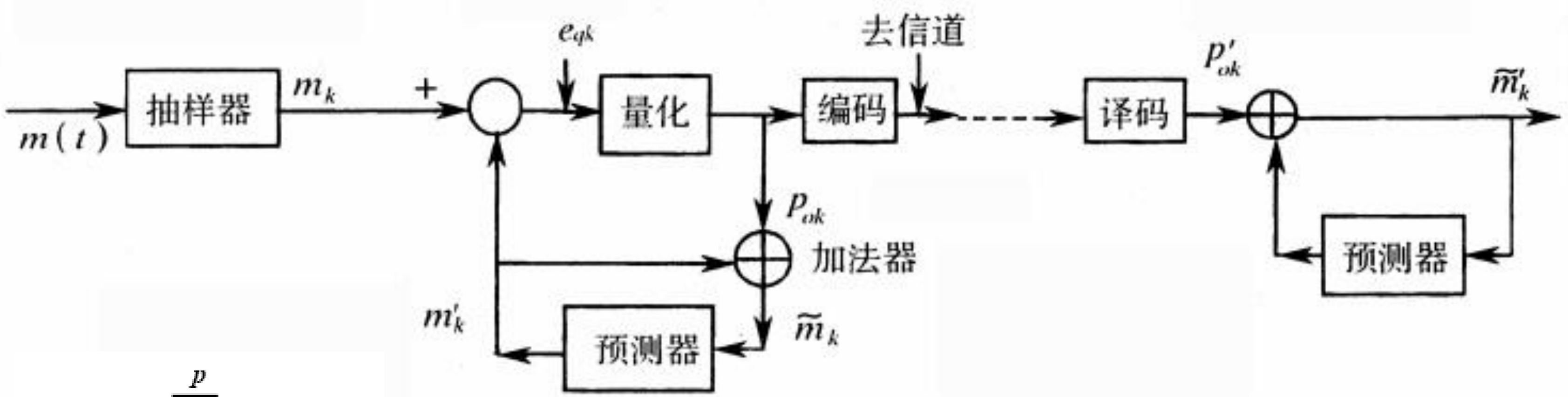
- 实现限失真信源编码的两类办法
  - 1. 适应信源方法，即寻找适应信源的客观概率统计特性的编码方法。如充分考虑信源消息序列的各消息变量(或各取样值)之间的相关性，进行矢量量化编码。
  - 2. 改造信源方法，即通过改造信源接触信源消息序列的各消息变量(或各取样值)之间的相关性。如预测编码和变换编码。

7.10 相关信源限失真编码

- 预测编码
  - 根据信源输出的各个信号之间存在统计关联性的特点，利用前面的一个或多个信号对下一个信号进行预测，然后对实际值和预测值的差(预测误差)进行编码。
  - 预测编码能压缩信源数据率的必要条件是：对预测误差进行编码的平均码长小于直接对输出信号进行编码的平均码长，也即预测误差熵小于信源熵。

线性预测编码

- 差分脉码调制（DPCM）
  - 线性预测器最佳系数
    - Wiener-Hoff方程
- 自适应差分脉码调制ADPCM
  - 根据信号统计特性的时变自适应调整预测器与量化器系数
  - 语音编码标准



$$m_k' = \sum_{i=1}^{p} a_i \tilde{m}_{k-i}$$

(a) 编码器

(b) 解码器

预测编码考虑因素

- 预测误差准则选择
  - 最小均方误差(MMSE)准则
  - 最大误差(ME)准则
  - 预测系数不变性(PCIV)准则
- 预测函数选取
  - 线性预测函数
  - 非线性预测函数
  - 预测阶
- 预测器输入数据选择
  - 原始数据
  - 预测误差数据
  - 混合数据

线性预测编码

- 增量调制(△M)
  - 1位量化的DPCM
  - 过采样：远大于Nyquist采样率
  - 量化误差
    - 纯量化误差：f_s △大于等于信号斜率
    - 过载噪声：f_s △小于信号斜率，增量变化 跟不上信号变化
      - 增加采样率→数据压缩效率降低
      - 自适应调整量化阶→自适应增量调制
    - 空载噪声：信号变化缓慢时量化输出的0、1交替序列

变换编码

- 思想：信源具有较强相关性时，通过变换，在变换域（频域或空域）消除信源相关性，从而提高信源效率
- 重要应用：图像信源编码-MPEG,JPEG
  - 二维图像分割为8*8像素的子块，通过矩阵正交变换将空间域矩阵变换为频域矩阵，能量保持不变。
  - 空间高度相关性的图像子块变换至频域后变换系数相关性很小，能量集中于少数系数内，仅对能量集中的少数系数进行编码，能大幅压缩码率。
- 正交变换
  - 一定误差准则下，寻找最佳正交变换矩阵，达到最大限度解除信源相关性

最佳正交变换

- 目标：正交变换后协方差阵对角化—消除相关性
- 准则：均方误差最小(MMSE）
- 理论最佳正交变换：Karhunan-Loeve变换
- 最佳正交变换矩阵：特征向量矩阵
- 准最佳正交变换
  - 变换矢量元素在单位圆上
    - 傅氏变换，Walsh-Hadamard变换
  - 变换矢量元素不在单位圆上
    - 正弦类：DCT
    - 非正弦类：斜变换、Haar变换

离散余弦变换(DCT)

- 离散余弦变换矩阵

$$A_{DCT}(L=2^m)=\sqrt{\frac{2}{L}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{\pi}{2L} & \cos\frac{3\pi}{2L} & \cdots & \cos\frac{(2L-1)\pi}{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\frac{(L-1)\pi}{2L} & \cos\frac{3(L-1)\pi}{2L} & \cdots & \cos\frac{(2L-1)(L-1)\pi}{2L} \end{bmatrix}$$

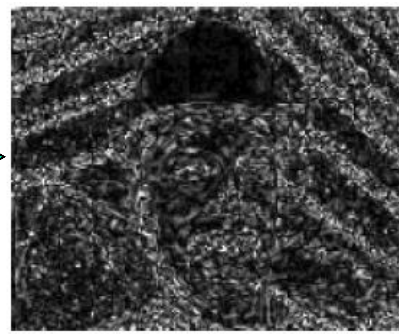
- DCT特性
  - 信源统计特性近似为一阶马尔可夫链且相关系数接近于1时，DTC性能接近K-L变换，且DTC变换后能量高度集中
  - DCT矩阵固定且有快速算法
  - 广泛应用于图像压缩编码

游程编码

- 游程
  - 数字序列中连续出现相同符号的一段，如0000111000… 连“0”的段称为“0”游程，连“1”的段成为“1”游程，上述二元序列可变为游程序列433
- 特点
  - 1游程与0游程交替出现
  - 二元序列与游程序列是一一对应的
  - 游程序列减弱了二元序列符号间的相关性，游程编码有利于有记忆信源的编码，多用于图像处理
  - 游程序列是多元序列，可采用Huffman编码
  - 先需测定二元序列或0/1游程长度的概率分布

JPEG标准：DCT与游程编码

运动预测



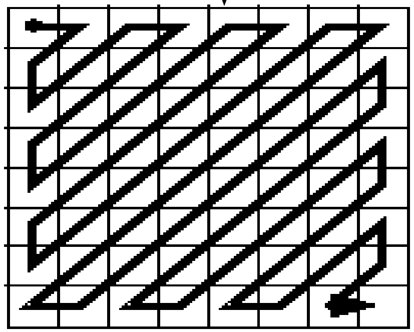
DCT变换

235.6	-1.0	-12.1	-5.2	2.1	-1.7	-2.7	1.3
-22.6	-17.5	-6.2	-3.2	-2.9	-0.1	0.4	-1.2
-10.9	-9.3	-1.6	1.5	0.2	-0.9	-0.6	-0.1
-7.1	-1.9	0.2	1.5	0.9	-0.1	0.0	0.3
-0.6	-0.8	1.5	1.6	-0.1	-0.7	0.6	1.3
1.8	-0.2	1.6	-0.3	-0.8	1.5	1.0	-1.0
-1.3	-0.4	-0.3	-1.5	-0.5	1.7	1.1	-0.8
-2.6	1.6	-3.8	-1.8	1.9	1.2	-0.6	-0.4

量化

15	0	-1	0	0	0	0	0
-2	-1	0	0	0	0	0	0
-1	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

扫描



(15 1),(0 1),(-2 1),(-1 3)…

熵编码

100100…

第七章总结

- 信息量的度量
  - 自信息、平均自信息(熵)、互信息量、平均互信息量(互信息)
  - 最大熵(等概)、熵的不增性(条件越多熵越少)
  - 联合熵、互信息的链式法则
- 无失真编码定理(最佳无失真编码存在定理)
  - 平均码长稍稍大于信源熵-熵编码
  - 前提：仅对典型序列进行编码，抛弃非典型序列产生的失真趋于0
- 无记忆信源编码
  - 思想：大概率符号用短码、小概率符号用长码或不编码；
  - 方法：Huffman编码
- 有记忆信源编码
  - 适应信源的关联特性：矢量编码；
  - 改造信源，去除相关性：预测编码、变换编码

第七章总结（Cont'd）

- 失真度与率失真函数：允许一定量的失真，降低传输速率
  - 真实与接收之间的差异：失真度
  - 失真度与信息速率之间的关系：率失真函数
  - 限失真信源编码：与率失真函数匹配的编码