第3章 微波传输线

- 3.1 TEM，TE和TM波的一般解
- 3.2 矩形金属波导
- 3.3 圆波导
- 3.4 同轴线的高次模及单模传输
- 3.5 带状线和微带
- 3.6 介质波导

3.2 矩形金属波导

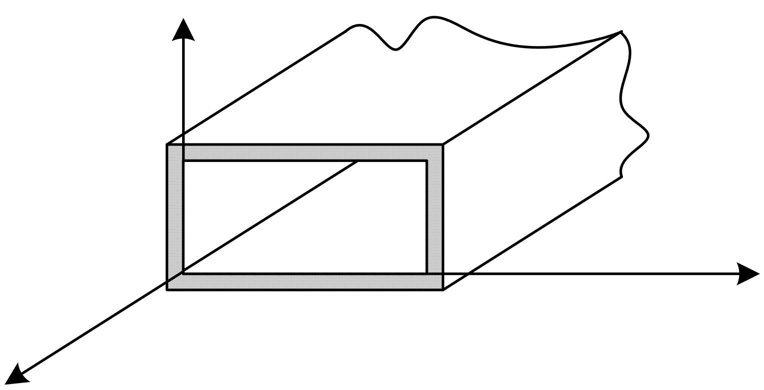
我们只研究：直的、均匀的波导

直的：不弯、无分支－

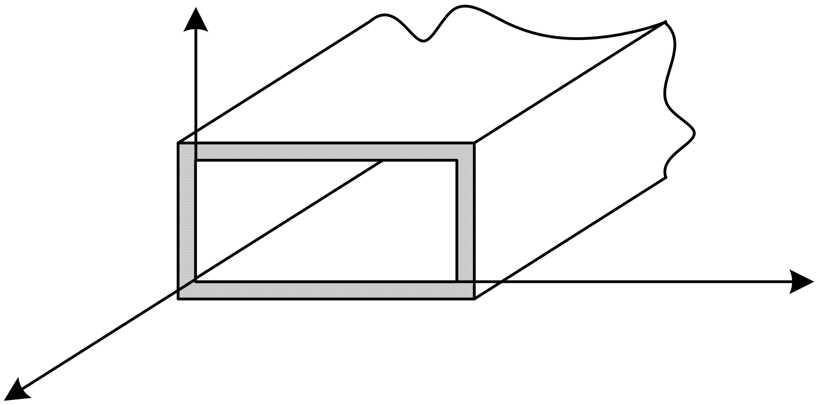
矩形、无限长

均匀：截面恒定－唯一

特例：矩形金属波导



不能传输TEM波



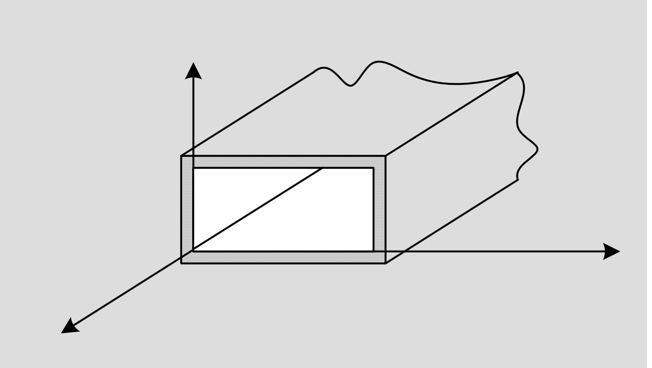
用反证法

根据边界条件

TM波?

TE波?

TM波



$$\gamma = \alpha + j\beta$$

波动方程

- 电场矢量场z方向分量波动方程为

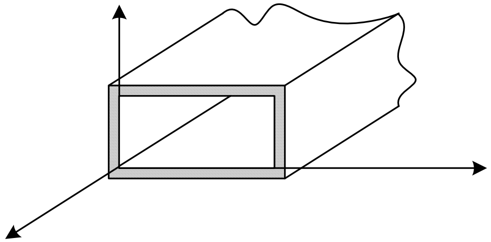
$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0$$

- 其中 $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$ $\quad E_z = F(x, y, z, t)$
- 考虑时间因子 $e^{j\omega t}$
- 对z、t部分可以写成：$e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z}$
- 因此方程写成 $\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + k^2) E_z = 0$

波动方程

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\left(\gamma^2+k^2\right)E_z=0$$

- 上式利用分离变量法求解，令



$$E_z=X\left(x\right)Y\left(y\right)e^{j\left(\omega t-\beta z\right)}e^{-\alpha z}$$

- 代入上面方程

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\left(\gamma^2+k^2\right)E_z=0$$

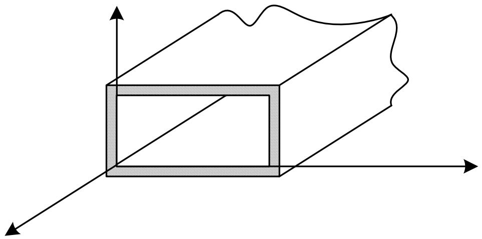
- 得到

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}+\left(\gamma^2+k^2\right)=0$$

波动方程

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}+\left(\gamma^2+k^2\right)=0$$

要使上式恒等，前两项必须分别为常数



- 可以设：

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-k_x^2$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=-k_y^2$$

所以

$$-k_x^2-k_y^2+\gamma^2+k^2=0$$

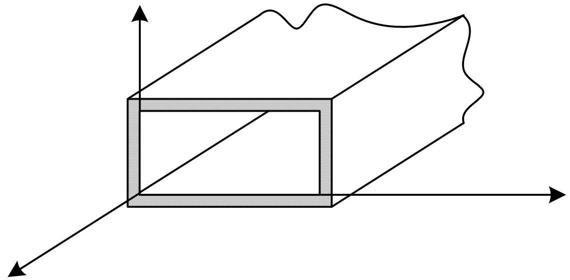
$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -k_x^2 \qquad \frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = -k_y^2$$

$$E_z = X(x)Y(y)e^{j(\omega t-\beta z)}e^{-\alpha z}$$

波动方程

- 分析边界条件有

$$E_z\Big|_{x=0,a} = 0 \qquad E_z\Big|_{y=0,b} = 0$$



取三角函数形式的通解

$$X(x) = C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x$$

$$Y(y) = C_3 \sin k_y y + C_4 \cos k_y y$$

所以波动方程的解为

$$E_z = \left(C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x\right)\left(C_3 \sin k_y y + C_4 \cos k_y y\right)e^{j(\omega t-\beta z)}e^{-\alpha z}$$

再利用边界条件来确定特解

$$E_z = \left(C_1 \sin k_x x + C_2 \cos k_x x\right)\left(C_3 \sin k_y y + C_4 \cos k_y y\right)e^{j(\omega t-\beta z)}e^{-\alpha z}$$

波动方程的解

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad C_2 = 0 \quad C_4 = 0$$

- 因此波动方程的解可写成

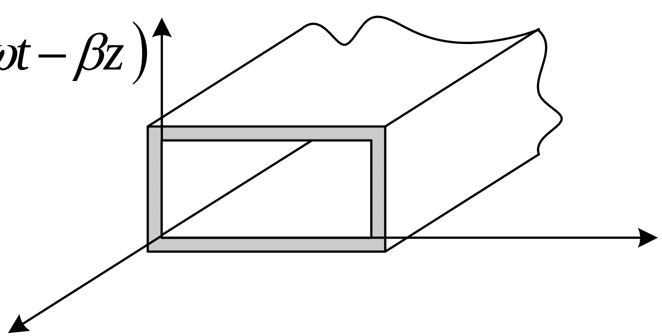
$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{j(\omega t-\beta z)}e^{-\alpha z}$$

即 $$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

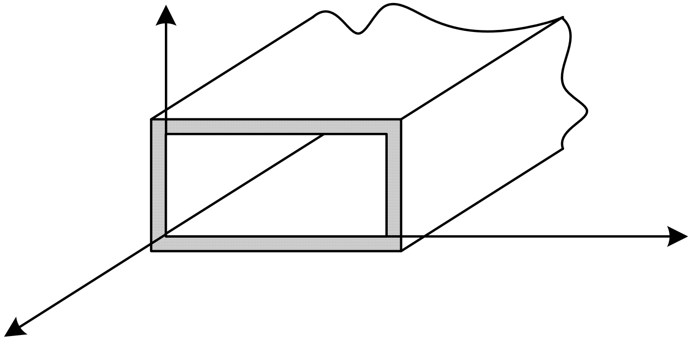
$$\gamma = \alpha + j\beta$$

- 有时把$e^{-\alpha z}$省去，波动方程的解可写成

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{j(\omega t-\beta z)}$$



对TE波



波动方程

- 磁场z分量波动方程

$$\nabla^2 H_z + k^2 H_z = 0$$

对磁场求解，直接给出结果 $E_z = 0$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

简化成

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{j(\omega t-\beta z)}$$

用纵向场求横向场

根据麦克斯韦方程

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$ （由于 $J=0$ ）

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

D对时间t求偏导有

B对时间t求偏导有

$$\frac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}=j\omega\varepsilon E$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}=\mu\frac{\partial H}{\partial t}=j\omega\mu H$$

所以

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$$

把各方向分解

$$j\omega\varepsilon E_{x,y,z}=\left(\nabla\times H\right)_{x,y,z}$$

$$-j\omega\mu H_{x,y,z}=\left(\nabla\times E\right)_{x,y,z}$$

对TM波

$$H_z = 0$$

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

不考虑衰减

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \qquad E_x = \frac{-j\beta}{k_c^2}E_0\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2}\left(-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \qquad E_y = \frac{-j\beta}{k_c^2}E_0\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$H_x = \frac{1}{k_c^2}\left(j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \qquad H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^2}E_0\frac{n\pi}{b}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$H_y = -\frac{1}{k_c^2}\left(j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \qquad H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^2}E_0\frac{m\pi}{a}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

对TE波

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

不考虑衰减

$$E_x = -\frac{1}{k_c^2}\left(\gamma\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \qquad E_x = \frac{j\omega\mu}{k_c{}^2}H_0\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$E_y = \frac{1}{k_c^2}\left(-\gamma\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \qquad E_y = \frac{-j\omega\mu}{k_c{}^2}H_0\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$H_x = \frac{1}{k_c^2}\left(j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \qquad H_x = \frac{j\beta}{k_c{}^2}H_0\frac{m\pi}{a}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$H_y = -\frac{1}{k_c^2}\left(j\omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \qquad H_y = \frac{j\beta}{k_c{}^2}H_0\frac{n\pi}{b}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

矩形波导中的波参量:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

$$k_x \to \frac{m\pi}{a}, \quad k_y \to \frac{n\pi}{b}, \quad k_z \to \beta$$

截止波数 k_c

$$k_z = \beta = 0$$

这时对应的波数k称为截止波数，表示为 k_c

所以有 $$k_x^2 + k_y^2 = k^2 = k_c^2$$

- 因此 $$k_c = \sqrt{\left(m\pi/a\right)^2 + \left(n\pi/b\right)^2}$$

电磁波波数大于截止波数 $k > k_c$ 能在波导中传输，

还是小于截止波数 $k < k_c$ 能在波导中传输？

当 $k < k_c$ 时有 $\beta^2 < 0$ 由 $e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha z}$

当 $\beta^2 < 0$ 时，β 变虚数，不是相移常数，而是衰减常数

因此电磁波波数小于截止波数 $k < k_c$ 不能在波导中传输

矩形波导中的波参量:

$$k_c = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$$

截止波长 λ_c：截止波数对应的波长

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$$

•受波导边界的限制，传输频率低于一个频率时，电磁波的传输被截止，不能传输

这个截止频率对应的波长为截止波长

电磁波波数大于截止波数 $k > k_c$ 能在波导中传输

电磁波波长大于截止波长 $\lambda > \lambda_c$ 能在波导中传输
还是小于截止波长 $\lambda < \lambda_c$ 能在波导中传输？

矩形波导中的波参量:

$$k_c = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}$$

截止波长 λ_c：截止波数对应的波长

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \Rightarrow \lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$$

- m、n：对应不同模式

λ_c与a、b、m、n大小有关

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

TE波

$$E_z = 0 \qquad H_x = \frac{j\beta}{k_c^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y) e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu}{k_c^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \qquad H_y = \frac{j\beta}{k_c^2} H_0 \frac{n\pi}{b} \cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y) e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} H_0 \frac{m\pi}{a} \sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y) e^{-\gamma z} e^{j\omega t} \qquad H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-\gamma z} e^{j\omega t}$$

m= 0,1,2...

n= 0,1,2...

截止波长 $\lambda_c = \dfrac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$

截止波长最长对应 m= 1, n= 0 　m=1,n=0 对应 TE_{10}模

TE_{10}模截止波长最长

TE_{10}模称为最低模　基模　主模

TM波

$$H_z = 0$$

$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{k_c^{\ 2}}E_0\frac{n\pi}{b}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$E_x = \frac{-j\beta}{k_c^{\ 2}}E_0\frac{m\pi}{a}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_c^{\ 2}}E_0\frac{m\pi}{a}\cos(\frac{m\pi}{a}x)\sin(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

$$E_y = \frac{-j\beta}{k_c^{\ 2}}E_0\frac{n\pi}{b}\sin(\frac{m\pi}{a}x)\cos(\frac{n\pi}{b}y)e^{-\gamma z}e^{j\omega t}$$

m= 1,2...

n= 1,2...

截止波长 $\lambda_c = \dfrac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$

TE_{10}模的参量

截止波长 $\lambda_c = \dfrac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$

m=1,n=0代入

截止波长 $\lambda_c = 2a$

把截止波长代入TE波的参量

相移常数：根据 $\beta = k\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$ 所以 $\beta = k\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}$

波导波长 $\lambda_g = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}}$

相速度 $v_p = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}}$

群速度 $v_g = c\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}$

波阻抗 $Z_{TE} = \dfrac{\eta}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2}}$

单模传输

为什么采用单模传输？

可看出：模式不同，λ_c 不同，

对应速度 v_p v_g 不同

若多个模式同时传输，

每个模式速度不同，

带来模式色散（非频率引起的失真）

若单模传输：消除模式色散

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(m/a\right)^2 + \left(n/b\right)^2}}$$

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

单模传输

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}}$$

$$v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$$

传输条件： $\lambda < \lambda_c$

截止条件： $\lambda \geq \lambda_c$

对矩形波导，通常设 $a > b$

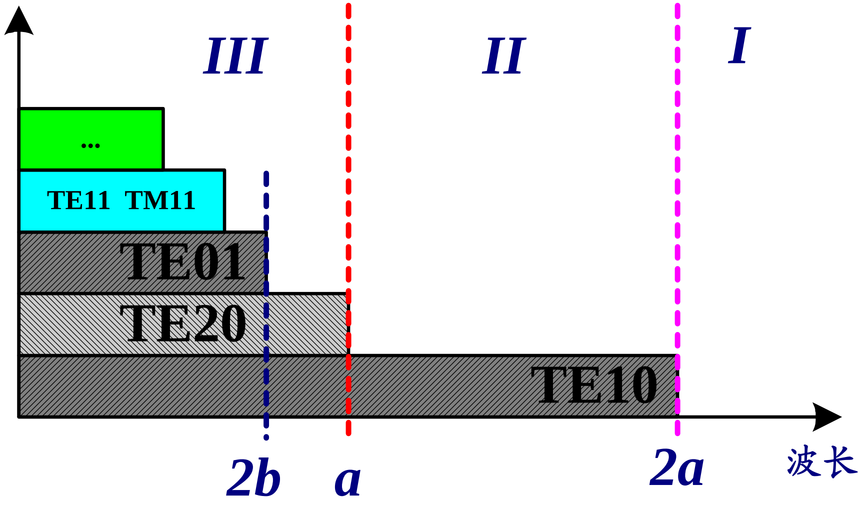
则a与2b比较 $a > 2b$ 或者 $a < 2b$

分析截止波长， （取 $a > 2b$ ）

TE_{10}模的截止波长为 2a

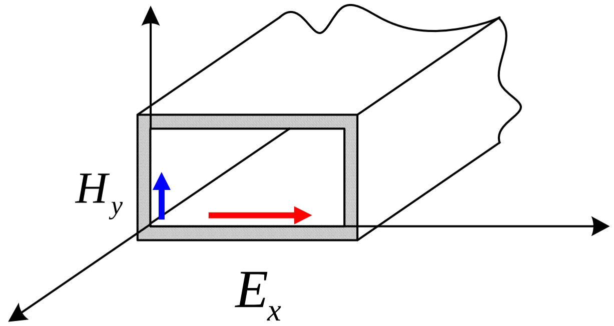
TE_{20}模的截止波长为 a

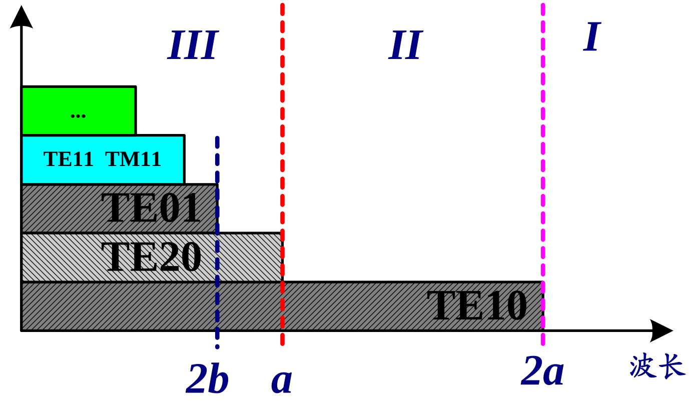
TE_{01}模的截止波长为 2b



单模传输

$$a > 2b$$





单模传输条件:

要传输TE_{10}模，必须 $a < \lambda < 2a$

若2b>a则要传输TE_{10}模条件为 $2b < \lambda < 2a$

I区为　截止区（所有模式都不能传输）

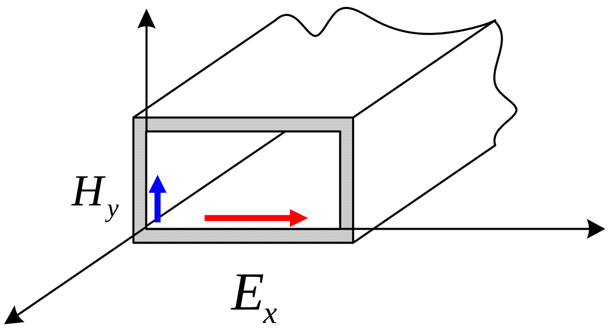
II区为　单模区（只能传输TE_{10}模）

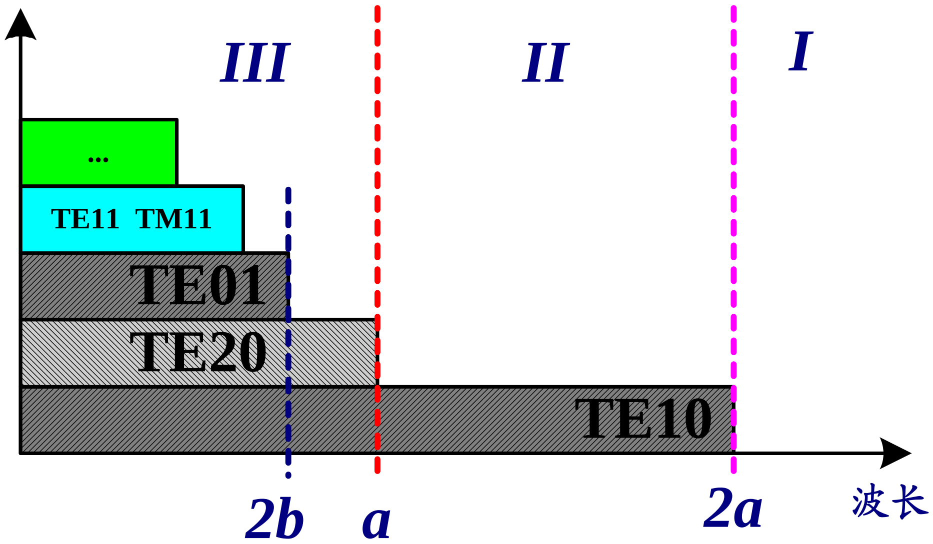
III区为　多模传输区（TE_{11}与TM_{11}的λ_c相同，为兼并模）

TE_{10}模截止波长最长

TE_{10}模称为最低模　基模　　主模

思考题





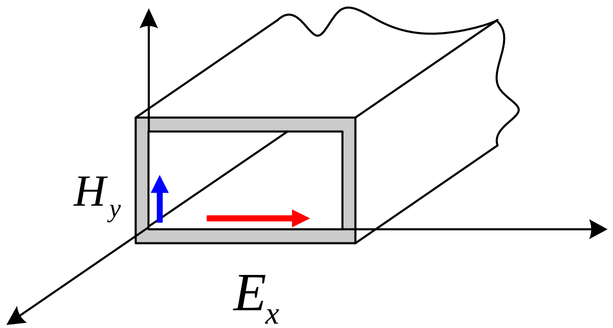
已知矩形波导(a>2b)，

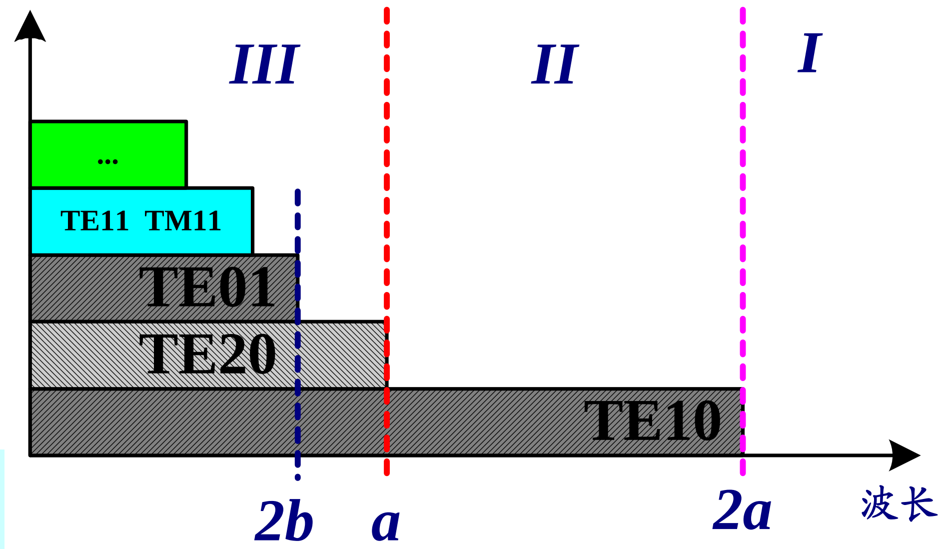
什么条件下，此波导仅支持单模传输？

答: $\because a < \lambda < 2a \quad \therefore \dfrac{\lambda}{2} < a < \lambda$

y

矩形波导中的TE波的简并





截止波长 $\lambda_c = \dfrac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}$

简并模定义:不同的模式,具有相同的截止波长

例: TE_{mn}和TM_{mn}(m、n>0)

TE_{11}与TM_{11}的 λ_c 相同，为兼并模

作业

有一矩形金属波导管尺寸为

$a=6cm,\ b=4cm$

求

（1）如下各个模的截止波长

TE_{01}，TE_{10}，TE_{02}，TM_{11}

（2）单模传输条件