第6章 微波谐振器

第1节 串联和并联谐振电路

第2节 传输线谐振器

第3节 矩形波导谐振腔

第4节 圆波导谐振腔

第5节 介质谐振器和开腔

第6节 谐振器的激励和耦合

第7节 微波谐振腔的微扰和测量

微波谐振器

在微波领域中，具有储能和选频特性的元件称为微波谐振器

相当于低频电路中的LC振荡回路

是一种用途广泛的微波元件

微波谐振器（腔）

有多种应用:

（1）微波滤波器;

（2）振荡器或调谐放大器的振荡回路;

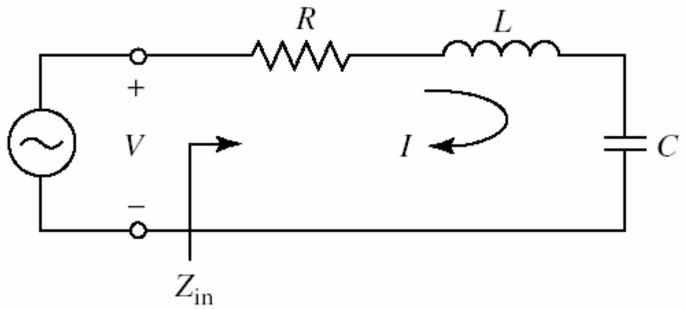
（3）频率计;

（4）可调谐放大器

（5）倍频器，频率预选器，波长计，回波箱等。

第1节 串联和并联谐振电路

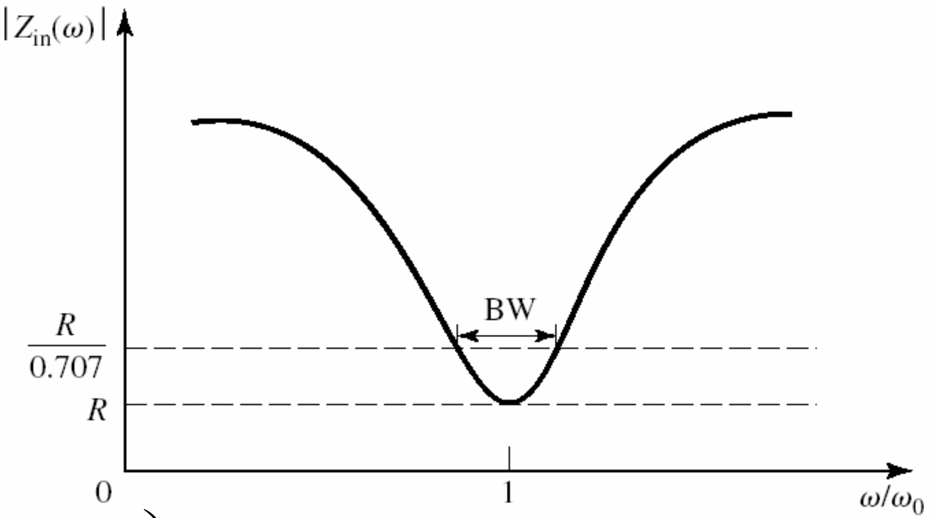
如图所示串联RLC谐振电路



(a)

输入电阻为

$$Z_{in}=R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}$$



(b)

传送到谐振器的复数功率为

$$P_{in}=\frac{1}{2}VI^{*}=\frac{1}{2}Z_{in}\left|I\right|^{2}$$

$$=\frac{1}{2}Z_{in}\left|\frac{V}{Z_{in}}\right|^{2}=\frac{1}{2}\left|I\right|^{2}\left(R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}\right)$$

串联谐振电路

输入电阻为 $Z_{in} = R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}$

传送到谐振器的复数功率为

$$P_{in} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}Z_{in}|I|^2 = \frac{1}{2}Z_{in}\left|\frac{V}{Z_{in}}\right|^2 = \frac{1}{2}|I|^2\left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right)$$

消耗在R上的功率为 $P_l = \dfrac{1}{2}|I|^2 R$

存储在电感L中的平均磁能为 $W_m = \dfrac{1}{4}|I|^2 L$

存储在电容C中的平均电能为 $W_e = \dfrac{1}{4}|V_C|^2 C = \dfrac{1}{4}|I|^2 \bullet \dfrac{1}{\omega^2 C}$

其中Vc是跨接在电容上的电压

复数功率改写为 $P_{in} = P_l + 2j\omega(W_m - W_e)$

输入阻抗改写为 $Z_{in} = \dfrac{2P_{in}}{|I|^2} = \dfrac{P_l + 2j\omega(W_m - W_e)}{|I|^2/2}$

串联谐振电路

消耗在R上的功率为 $P_l = \frac{1}{2}|I|^2 R$

存储在电感L中的平均磁能为 $W_m = \frac{1}{4}|I|^2 L$

其中Vc是跨接在电容上的电压

存储在电容C中的平均电能为 $W_e = \frac{1}{4}|V_C|^2 C = \frac{1}{4}|I|^2 \bullet \frac{1}{\omega^2 C}$

输入阻抗改写为 $Z_{in} = \frac{2P_{in}}{|I|^2} = \frac{P_l + 2j\omega(W_m - W_e)}{|I|^2/2}$

当存储磁能和电能相等即 $W_m = W_e$ 时产生谐振

代入，所以有 $Z_{in} = \frac{P_l}{|I|^2/2} = R$ 是纯实数

由 $W_m = W_e$ 所以有谐振频率 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$P_l = \frac{1}{2}|I|^2 R \qquad W_m = \frac{1}{4}|I|^2 L$$

$$W_e = \frac{1}{4}|V_C|^2 C = \frac{1}{4}|I|^2 \bullet \frac{1}{\omega^2 C}$$

串联谐振电路

谐振电路一个重要参量为品质因数Q:

$$Q = \omega \frac{(W_m + W_e)}{P_l} = \omega \times \frac{平均储能}{损耗功率}$$

Q能衡量电路损耗

根据及谐振时 $W_m = W_e$ 有

$$Q = \omega_0 \frac{2W_{in}}{P_l} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

分析当接近谐振频率时输入阻抗特性 令 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ $\Delta\omega$ 为小量

考虑 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ 应用到 $Z_{in} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}$ 所以输入阻抗为

$$Z_{in} = R + j\omega L(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}) = R + j\omega L(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2})$$

串联谐振电路

$$Z_{in} = R + j\omega L(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}) = R + j\omega L(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2})$$

由于 $\Delta\omega$ 是小量，有 $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) = \Delta\omega(2\omega - \Delta\omega) \approx 2\omega\Delta\omega$

所以输入阻抗为 $Z_{in} \approx R + j2L\Delta\omega \approx R + j\dfrac{2RQ\Delta\omega}{\omega_0}$

有损耗谐振器看成无耗谐振器来处理，需要把谐振频率换成有效谐振频率

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0(1 + \frac{j}{2Q})$$

无耗串联谐振器的输入阻抗，R=0代入有 $Z_{in} = j2L(\omega - \omega_0)$

把有效谐振频率代入有

$$Z_{in} = j2L(\omega - \omega_0 - j\frac{\omega_0}{2Q}) = \frac{\omega_0 L}{Q} + j2L(\omega - \omega_0) = R + j2L\Delta\omega$$

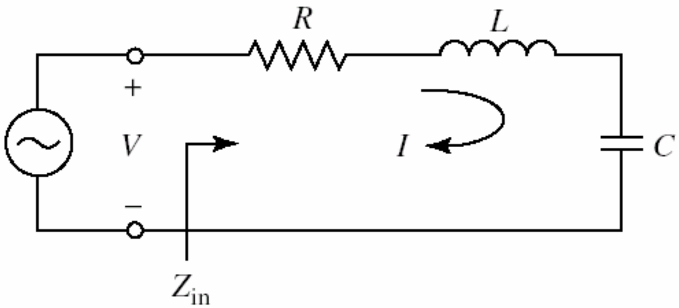
大多数实际谐振器损耗都很小，可以用这种微扰法求解

串联谐振电路　　半功率相对带宽

$$Z_{in} \approx R + j\frac{2RQ\Delta\omega}{\omega_0}$$

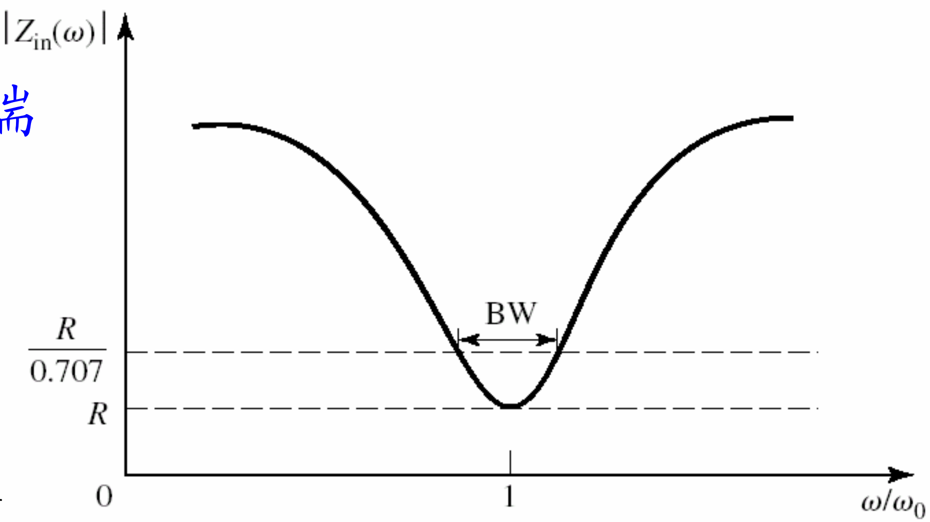
当频率使 $\left|Z_{in}\right|^2 = 2R^2$ 由

$$P_{in} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}Z_{in}\left|I\right|^2 = \frac{1}{2}Z_{in}\left|\frac{V}{Z_{in}}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|I\right|^2\left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right)$$



(a)

得到传送到电路的平均功率是谐振时传送功率的一半



(b)

设BW是相对带宽，则在频率高端

$$\frac{(\omega-\omega_0)}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{BW}{2}$$

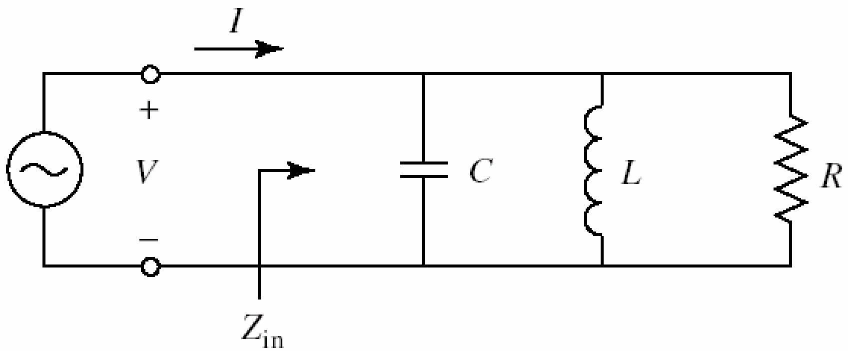
所以

$$\left|R + jRQ(BW)\right|^2 = 2R^2 \text{即} \quad BW = \frac{1}{Q}$$

大多数实际谐振器损耗都很小，可以用这种微扰法求解

第1节 串联和并联谐振电路

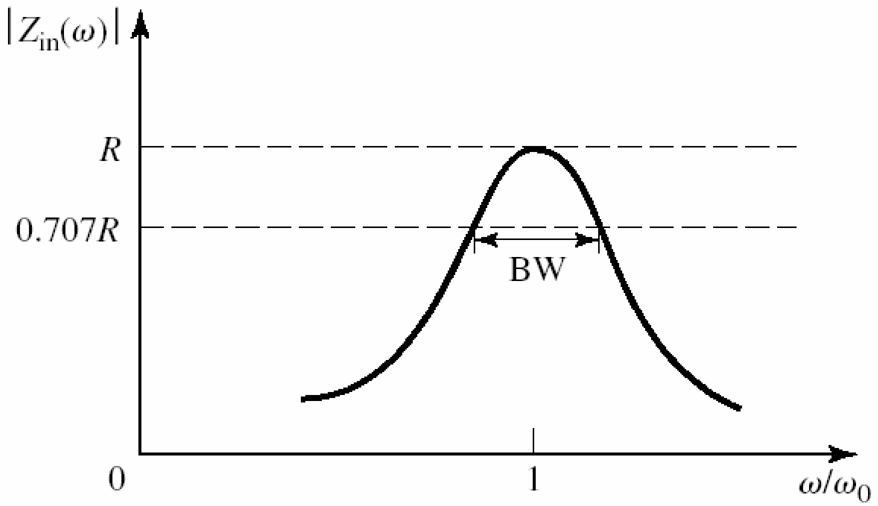
如图所示并联RLC谐振电路



(a)

输入电阻为

$$Z_{in} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)^{-1}$$



(b)

传送到谐振器的复数功率为

$$P_{in} = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}Z_{in}|I|^2$$

$$= \frac{1}{2}|V|^2 \frac{1}{Z_{in}^*} = \frac{1}{2}|V|^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{j}{\omega L} - j\omega C\right)$$

并联谐振电路

消耗在R上的功率为 $P_l = \dfrac{1}{2}\dfrac{|V|^2}{R}$

存储在电容C中的平均电能为 $W_e = \dfrac{1}{4}|V|^2 C$

其中I_L是流经电感的电流

存储在电感L中的平均磁能为 $W_m = \dfrac{1}{4}|I_L|^2 L = \dfrac{1}{4}|V|^2 \dfrac{1}{\omega^2 L}$

复数功率改写为 $P_{in} = P_l + 2j\omega(W_m - W_e)$

输入阻抗改写为 $Z_{in} = \dfrac{2P_{in}}{|I|^2} = \dfrac{P_l + 2j\omega(W_m - W_e)}{|I|^2/2}$

当平均存储磁能和电能相等时产生谐振，即 $W_m = W_e$

代入，所以有输入阻抗$Z_{in} = \dfrac{P_l}{|I|^2/2} = R$

由 $W_m = W_e$

所以谐振频率为 $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

并联谐振电路

并联谐振电路品质因数Q: 根据及谐振时 $W_m = W_e$ 有

$$Q = \omega_0 \frac{2W_m}{P_l} = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC$$

接近谐振时 利用 $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + \ldots$ 对输入阻抗化简

令 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ $\Delta\omega$ 为小量 考虑 $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$

$$Z_{in} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)^{-1}$$ 改写为

$$Z_{in} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1 - \Delta\omega/\omega_0}{j\omega_0 L} + j\omega_0 C + j\Delta\omega C\right)^{-1} \approx \left(\frac{1}{R} + j\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 L} + j\Delta\omega C\right)^{-1}$$

$$\approx \left(\frac{1}{R} + 2j\Delta\omega C\right)^{-1} \approx \frac{R}{1 + 2j\Delta\omega RC} = \frac{R}{1 + 2jQ\Delta\omega/\omega_0}$$

R趋于无穷大时上式简化为 $Z_{in} = \frac{1}{j2C(\omega - \omega_0)}$

$$R = \infty$$

并联谐振电路

$$Z_{in}=(\frac{1}{R}+\frac{1-\Delta\omega/\omega_0}{j\omega_0 L}+j\omega_0 C+j\Delta\omega C)^{-1}\approx(\frac{1}{R}+j\frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 L}+j\Delta\omega C)^{-1}$$

$$\approx(\frac{1}{R}+2j\Delta\omega C)^{-1}\approx\frac{R}{1+2j\Delta\omega RC}=\frac{R}{1+2jQ\Delta\omega/\omega_0}$$

R趋于无穷大时上式简化为

$$R=\infty \qquad Z_{in}=\frac{1}{j2C(\omega-\omega_0)}$$

有损耗谐振器看成无耗谐振器来处理，需要把谐振频率换成有效谐振频率

$$\omega_0 \Leftarrow \omega_0(1+\frac{j}{2Q})$$

并联谐振电路　　半功率相对带宽

半功率发生在频率

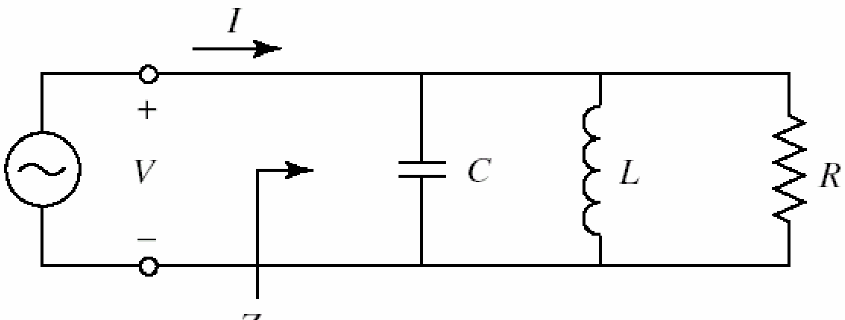
$$(\omega - \omega_0)/\omega_0 = \Delta\omega/\omega_0 = BW/2$$

满足

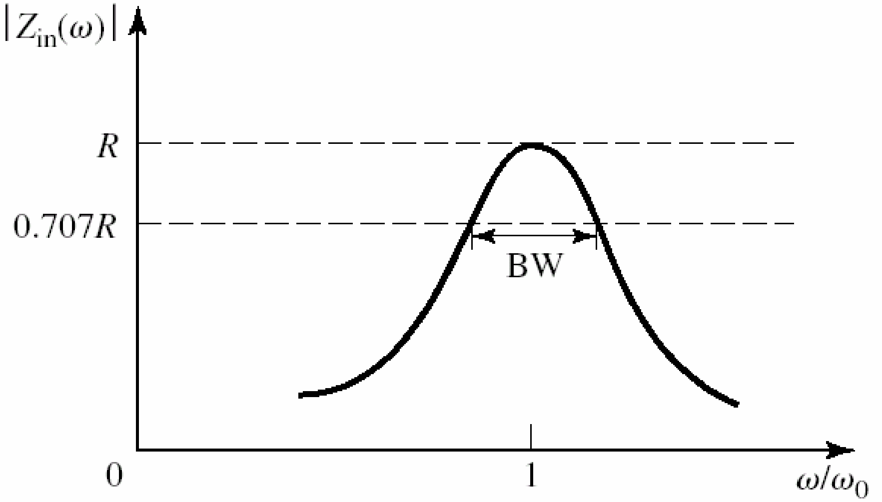
$$\left|Z_{in}\right|^2 = R^2/2$$

所以

$$BW = \frac{1}{Q}$$



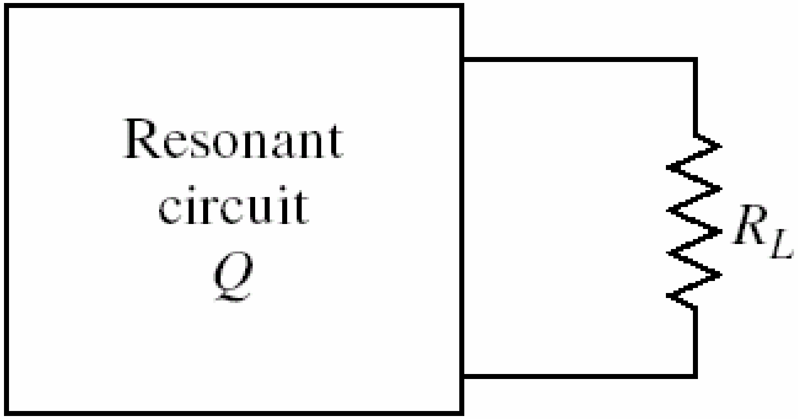
(a)



(b)

有载和无载Q

如谐振器是一个串联RLC电路



接负载 R_L

负载 R_L 与 R 串联相加

有效电阻为 $R_L + R$

如谐振器是一个并联RLC电路

接负载 R_L

负载 R_L 与 R 并联相加 有效电阻为 $R_L R/(R_L + R)$

定义外部Q为

$$Q_e = \frac{\omega_0 L}{R_L}\text{（对串联电路）}$$

$$Q_e = \frac{R_L}{\omega_0 L}\text{（对并联电路）}$$

有载Q可表示为

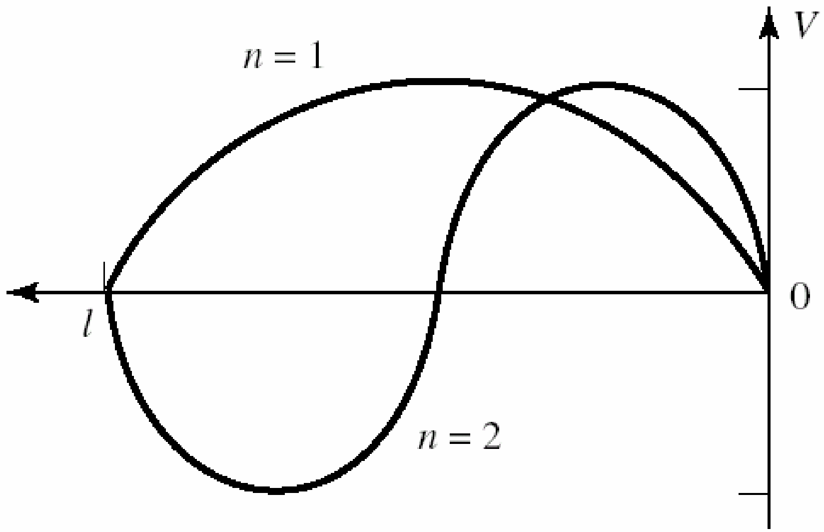
$$\frac{1}{Q_l} = \frac{1}{Q_e} + \frac{1}{Q}$$

表4.1 串联和并联谐振回路的结果摘要

参量名称	串联谐振器	并联谐振器
输入阻抗或输入导纳	$Z_{in}=R+j\omega L-j\dfrac{1}{\omega C}\approx R+j\dfrac{2RQ\Delta\omega}{\omega_0}$	$Z_{in}=R+j\omega L-j\dfrac{1}{\omega C}\approx\dfrac{1}{R}+j\dfrac{2Q\Delta\omega}{R\omega_0}$
功率损耗	$P_l=\dfrac{1}{2}\lvert I\rvert^2R$	$P_l=\dfrac{1}{2}\dfrac{\lvert V\rvert^2}{R}$
磁储能	$W_m=\dfrac{1}{4}\lvert I\rvert^2L$	$W_m=\dfrac{1}{4}\lvert V\rvert^2\dfrac{1}{\omega^2L}$
电储能	$W_e=\dfrac{1}{4}\lvert I\rvert^2\dfrac{1}{\omega^2C}$	$W_e=\dfrac{1}{4}\lvert V\rvert^2C$
谐振频率	$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
无载Q值	$Q=\dfrac{\omega_0L}{R}=\dfrac{1}{\omega_0RC}$	$Q=\omega_0RC=\dfrac{R}{\omega_0L}$
外部Q值	$Q_e=\dfrac{\omega_0L}{R_L}$	$Q_e=\dfrac{R_L}{\omega_0L}$

第2节 传输线谐振器

短路λ/2传输线

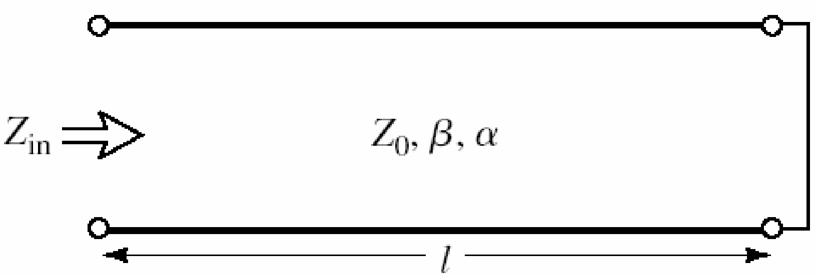


对频率 $\omega=\omega_0$

传输线长度 $l=\lambda/2$

其中 $\lambda=2\pi/\beta$

输入阻抗为 $Z_{in}=Z_0\tanh(\alpha+j\beta)l$



用双曲函数表示为

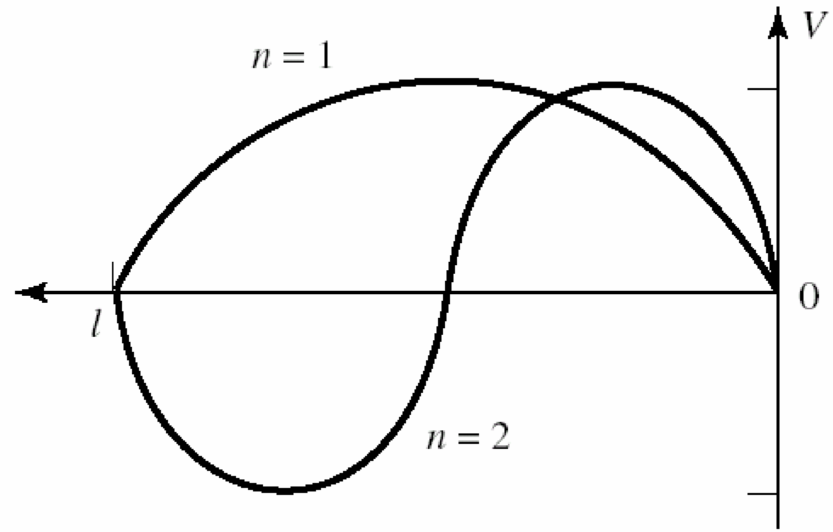
$$Z_{in}=Z_0\frac{\tanh\alpha l+j\tan\beta l}{1+j\tan\beta l\tanh\alpha l}$$

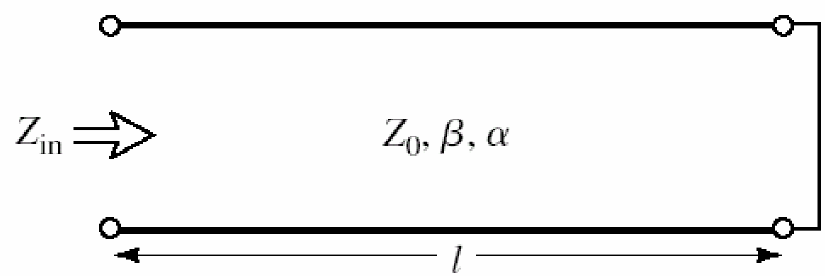
如果 $\alpha=0$ 则 $Z_{in}=jZ_0\tan\beta l$

多数传输线损耗非常小，可以设 $\alpha l\ll1$ 有 $\tanh\alpha l\approx\alpha l$

第2节 传输线谐振器

短路λ/2传输线





令 $\omega = \omega_0 + \underline{\Delta\omega}$

是小量

对TEM波传输线有

$$\beta l = \frac{\omega l}{\upsilon_p} = \frac{\omega_0 l}{\upsilon_p} + \frac{\Delta\omega l}{\upsilon_p}$$

υ_p 是传输线的相速

由于 $\omega = \omega_0$ 时 $l = \lambda/2 = \pi\upsilon_p/\omega_0$

所以 $\beta l = \pi + \dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}$

这时 $\tan\beta l = \tan(\pi + \dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}) = \tan\dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega_0} \approx \dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega_0}$

考虑 $\Delta\omega\alpha l/\omega_0 \ll 1$

$$Z_{in} = Z_0 \frac{\tanh\alpha l + j\tan\beta l}{1 + j\tan\beta l \tanh\alpha l}$$

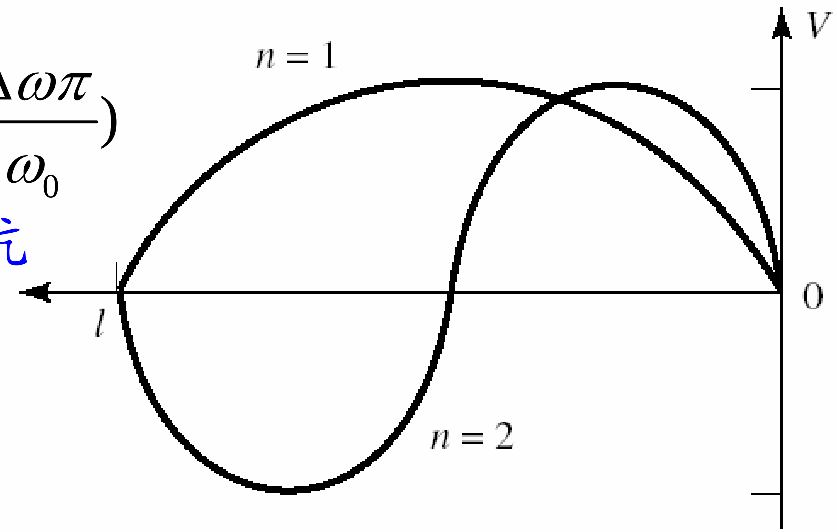
代入

所以

$$Z_{in} \approx Z_0 \frac{\alpha l + j(\Delta\omega\pi/\omega_0)}{1 + j(\Delta\omega\pi/\omega_0)\alpha l} \approx Z_0(\alpha l + j\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0})$$

短路λ/2传输线

$$Z_{in} \approx Z_0 \frac{\alpha l + j(\Delta\omega\pi/\omega_0)}{1 + j(\Delta\omega\pi/\omega_0)\alpha l} \approx Z_0(\alpha l + j\frac{\Delta\omega\pi}{\omega_0})$$



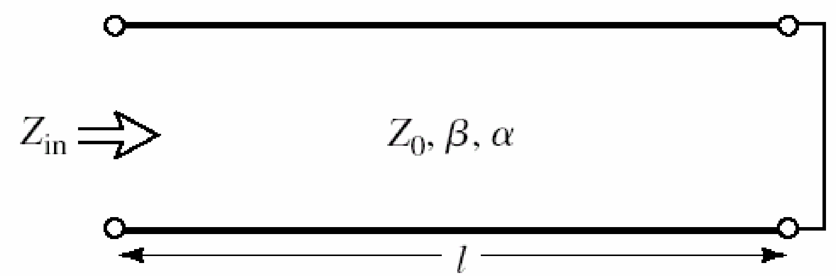
对比串联RLC谐振赌路的输入阻抗

$$Z_{in} = R + 2jL\Delta\omega$$

所以

等效电路电阻为

$$R = Z_0\alpha L$$



等效电路电感为

$$L = Z_0\pi/2\omega_0$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

等效电路电容为

$$C = 1/\omega_0^2 L$$

由 有输入阻抗为实数时谐振，所以 $\Delta\omega = 0$ 时谐振 $\omega = \omega_0 \ (l = \lambda/2)$

$l = n\lambda/2$

在这个频率上输入阻抗是 $Z_{in} = R = Z_0\alpha l$

谐振发生在n=1,2,3,… 对于n=1,n=2 谐振模式电压分布如图

由 $Q = \dfrac{\omega_0 L}{R}$ 求出谐振器Q为 $Q = \dfrac{\omega_0 L}{R} = \dfrac{\pi}{2\alpha l} = \dfrac{\beta}{2\alpha}$ 第一个谐振点 $\beta l = \pi$

例1:半波长同轴线谐振器Q的计算

$$\sigma = 5.813 \times 10^{7} (S/m)$$

一λ/2谐振腔由一段铜制同轴线组成，内导体半径为1mm 外导体半径为4mm，谐振频率5GHz，比较空气填充和聚四氟乙烯填充同轴谐振腔的Q值

解：表面电阻为 $R_S = \sqrt{\dfrac{\omega\mu_0}{2\sigma}} = 1.84 \times 10^{-2}\,\Omega$

空气填充时导体损耗引起衰减为

$$\alpha_c = \frac{R_S}{2\eta \ln b/a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{1.84\times10^{-2}}{2\times377\ln(0.004/0.001)}\left(\frac{1}{0.001}+\frac{1}{0.004}\right) = 0.022\,Np/m$$

聚四氟乙烯的 $\varepsilon_r = 2.08$ $\tan\delta = 0.0004$

导体损耗引起的衰减为

$$\alpha_c = \frac{1.84\times10^{-2}\sqrt{2.08}}{2\times377\ln(0.004/0.001)}\left(\frac{1}{0.001}+\frac{1}{0.004}\right) = 0.032\,Np/m$$

例1:半波长同轴线谐振器Q的计算

一λ/2谐振腔由一段铜制同轴线组成，内导体半径为1mm外导体半径为4mm，谐振频率5GHz，比较空气填充和聚四氟乙烯填充同轴谐振腔的Q值

解：　　空气填充介质损耗为0

聚四氟乙烯填充介质损耗为

$$\alpha_d = k_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{2} \tan\delta = \frac{104.7\sqrt{2.08} \times 0.0004}{2} = 0.030 Np/m$$

所以Q为

$$Q_{air} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{104.7}{2 \times 0.022} = 2380$$

$$Q_{teflon} = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{104.7\sqrt{2.08}}{2(0.032 + 0.030)} = 1218$$

空气填充Q值是聚四氟乙烯填充同轴谐振腔的Q值的2倍

导体表面镀银更好

短路λ/4传输线

可以获得并联谐振

长为 $\lambda/4$ 的短路传输线输入阻抗为

$-jctg\beta l$

$$Z_{in}=Z_0\tanh(\alpha+j\beta)l=Z_0\frac{\tanh\alpha l+jtg\beta l}{1+jtg\beta l\tanh\alpha l}=Z_0\frac{1-j\tanh\alpha l ctg\beta l}{\tanh\alpha l-jctg\beta l}$$

在 $\omega=\omega_0$ 处 $l=\lambda/4$

令 $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ 有 $\beta l=\frac{\omega_0 l}{\upsilon_p}+\frac{\Delta\omega l}{\upsilon_p}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}$

所以 $ctg\beta l=ctg(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0})=-tg\frac{\pi\Delta\omega}{2\omega_0}\approx\frac{-\pi\Delta\omega}{2\omega_0}$

多数传输线损耗非常小，$\tanh\alpha l\approx\alpha l$ 考虑 $\alpha l\pi\Delta\omega/2\omega_0\ll 1$

有

$$Z_{in}=Z_0\frac{1+j\alpha l\pi\Delta\omega/2\omega_0}{\alpha l+j\pi\Delta\omega/2\omega_0}\approx\frac{Z_0}{\alpha l+j\pi\Delta\omega/2\omega_0}$$

结果同RLC并联电路 $Z_{in}=\frac{1}{(1/R)+2j\Delta\omega C}$

短路λ/4传输线

$$Z_{in} \approx \frac{Z_0}{\alpha l + j\pi\Delta\omega / 2\omega_0}$$

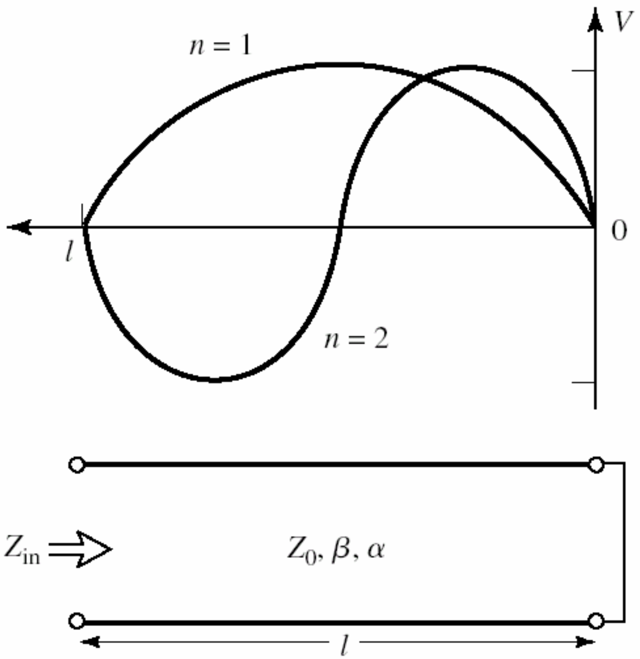
$$Z_{in} = \frac{1}{(1/R) + 2j\Delta\omega C}$$

所以

等效电路电阻为 $$R = \frac{Z_0}{\alpha l}$$

等效电路电容为 $$C = \frac{\pi}{4\omega_0 Z_0}$$

等效电路电感为 $$L = \frac{1}{\omega_0^2 C}$$



$l = \lambda / 4$ 时为并联谐振

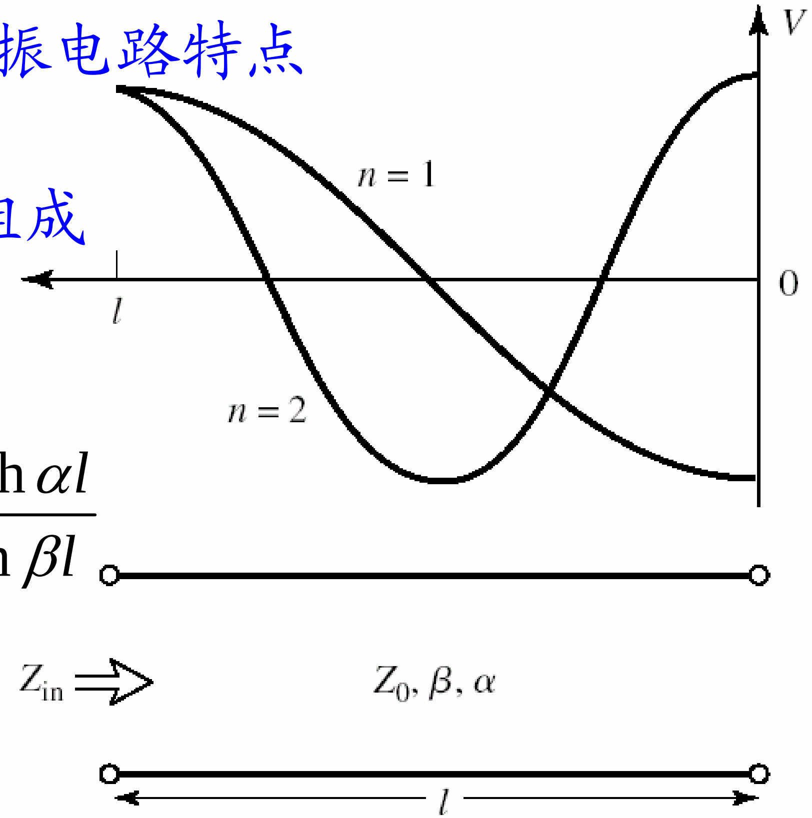
在这个频率上输入阻抗是 $Z_{in} = R = Z_0 / \alpha l$

谐振发生在 $l = \pi / 2\beta$

谐振器Q为 $$Q = \omega_0 RC = \frac{\pi}{4\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

开路λ/2传输线

有并联谐振电路特点



微带电路实际谐振器由开路线组成

传输线长度 $\lambda/2$　　$n\lambda/2$

输入阻抗为

$$Z_{in} = Z_0 \coth(\alpha + j\beta)l = Z_0 \frac{1 + j\tan\beta l \tanh\alpha l}{\tanh\alpha l + j\tan\beta l}$$

在 $\omega = \omega_0$ 处 $l = \lambda/2$

令 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$

有 $\beta l = \pi + \dfrac{\pi\Delta\omega}{\omega_0}$

所以 $\tan\beta l = \tan\dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega} \approx \dfrac{\Delta\omega\pi}{\omega}$

多数传输线损耗非常小，

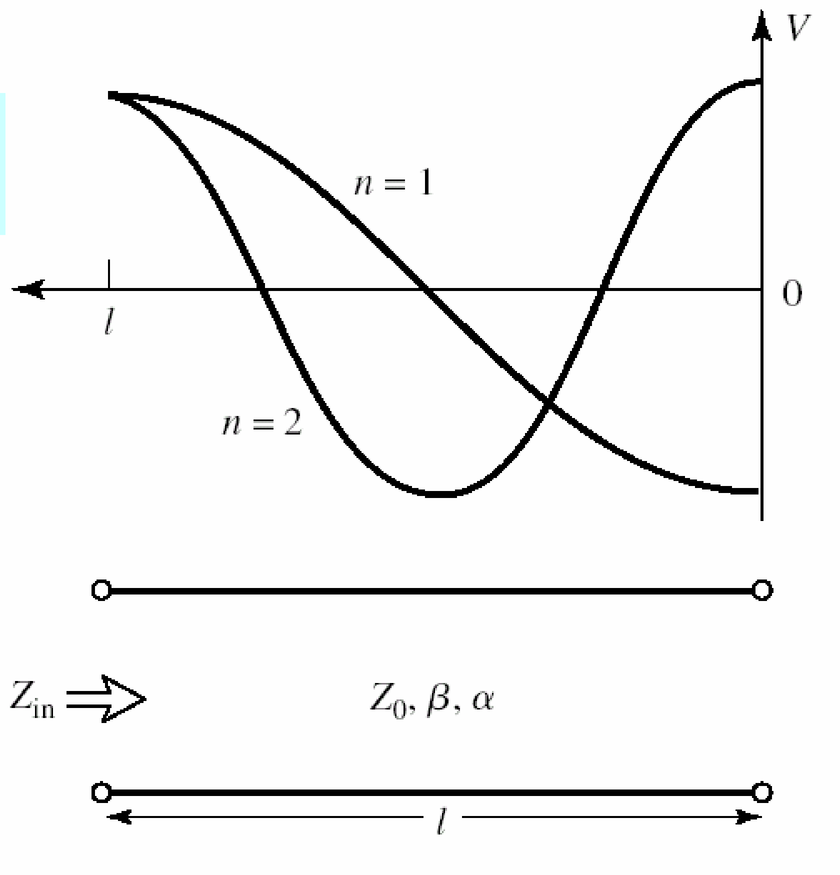
$$\tanh\alpha l \approx \alpha l$$

所以 $Z_{in} = \dfrac{Z_0}{\alpha l + j(\Delta\omega\pi/\omega_0)}$ 结果同并联电路 $Z_{in} = \dfrac{1}{(1/R) + 2j\Delta\omega C}$

开路λ/2传输线

$$Z_{in} = \frac{Z_0}{\alpha l + j(\Delta\omega\pi/\omega_0)}$$

$$Z_{in} = \frac{1}{(1/R) + 2j\Delta\omega C}$$



等效电路电阻为 $R = \dfrac{Z_0}{\alpha l}$

等效电路电感为 $L = \dfrac{1}{\omega_0^2 C}$

等效电路电容为 $C = \dfrac{\pi}{2\omega_0 Z_0}$

由6.18和6.34求出谐振器Q为

$$l = \pi/\beta$$

$$Q = \omega_0 RC = \frac{\pi}{2\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}$$

例2:半波长微带谐振器

$\varepsilon_r = 2.2, \tan\delta = 0.001$

一λ/2的50欧姆开路微带线构成的微带谐振器，基片是聚四氟乙烯厚度为0.159cm，导体为铜，计算5GHz时微带线长度和Q

解: 由式3.197,50欧姆微带线宽度 W=0.49cm

有效介电常数为 $\varepsilon_e = 1.87$

谐振长度为 $$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{\upsilon_p}{2f} = \frac{c}{2f\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{3\times10^8}{2(5\times10^9)\sqrt{1.87}} = 2.19cm$$

传播常数为 $$\beta = \frac{2\pi f}{\upsilon_p} = \frac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r}}{c} = \frac{2\pi(5\times10^9)\sqrt{1.87}}{3\times10^8} = 143.2rad/m$$

导体损耗引起的衰减为 $$\alpha_c = \frac{R_S}{Z_0 W} = \frac{1.84\times10^{-2}}{50\times0.0049} = 0.075Np/m$$

介质损耗引起的衰减为 $$\alpha_d = \frac{k_0\varepsilon_r(\varepsilon_r-1)\tan\delta}{2\sqrt{\varepsilon_r}(\varepsilon_r-1)} = \frac{104.7\times2.2\times0.87\times0.001}{2\sqrt{1.87}\times1.2} = 0.0611Np/m$$

所以Q为 $$Q = \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{143.2}{2(0.075+0.0611)} = 526$$

电容负载同轴腔（缩短腔）

自学

设同轴内导体的长度为l,特性阻抗为

$$Z_0 = 60\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}}\ln\frac{D}{d}$$

这时从参考面aa’向左看进去的输入阻抗为

$$Z_{in} = jZ_0 \tan \beta l$$

用导纳表示时为 $j\beta_L = -j\frac{1}{Z_0}\cot \beta l$

而电容C的导纳为 $jB_c = j\omega C$

谐振时，aa’面的并联导纳为零，由此可得谐振条件为

$B_C + B_L = 0$ ，即 $\omega_0 C = \frac{1}{Z_0}\cot(\frac{\omega l}{\upsilon})$ 其中 $\upsilon = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon}$

给定长l后确定谐振频率的超越方程，可用图解法或数值法求

自学

图解法求 ω_0

图4.7（a）所示的直线 $B_C = \omega C$ 与曲线 $-B_L = \dfrac{1}{Z_0}\cot(\dfrac{\omega l}{\upsilon})$

的交点，即为所求的谐振角频率 $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, \ ...$

由此可见，对于一定长度的电容负载同轴腔，可以有无穷多个谐振频率。

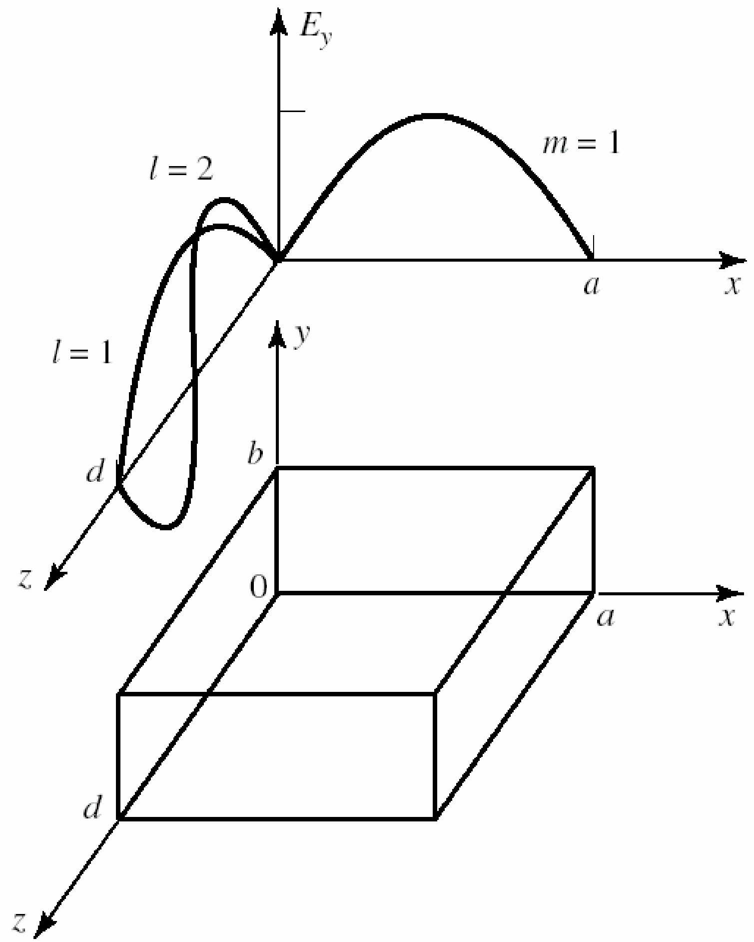
如果给定 ω_0 和电容C，改变腔长l

也可以在无穷多个长度上发生谐振，因 $\tan\beta = \tan(\beta l - p\pi)$

由（4.36)式可求得谐振时的腔长为

$$l = \frac{1}{\beta}(\arctan\frac{1}{\omega_0 C Z_0} + p\pi) = \frac{\lambda_0}{2\pi}\arctan\frac{1}{\omega_0 C Z_0} + p\frac{\lambda_0}{2}$$

第3节 矩形波导谐振腔



谐振器可由封闭波导段构成

即波导两端短路

电能磁能存储在腔内

功率消耗在腔的金属壁

及腔内电介质中

谐振频率

先推导腔无耗时的谐振频率

然后用微扰法确定Q

解波动方程，利用分离变量法、边界条件求解

可利用以前的TE，TM解（已经满足边界条件x=0,a;y=0,b）

再考虑z=0,d处边界条件即可 $E_x = E_y = 0$

谐振频率

TE_{mn} TM_{mn} 模横向电场为

$$E_t(x,y,z) = e(x,y)[A^+ e^{-j\beta_{mn}z} + A^- e^{j\beta_{mn}z}]$$

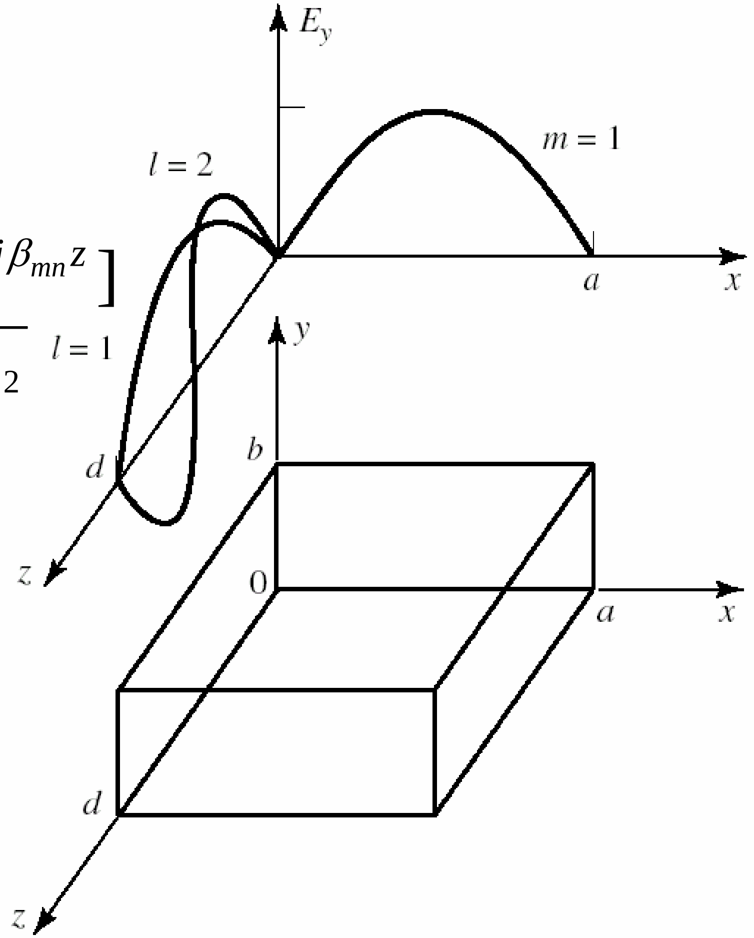
相移常数为 $\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - (\frac{m\pi}{a})^2 - (\frac{n\pi}{b})^2}$

其中 $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ μ ε

为填充材料的磁导率和介电常数

考虑z=0处边界条件 $E_t = 0$

所以 $A^+ = -A^-$



z=d处边界条件 $E_t = 0$ 所以 $E_t(x,y,d) = -e(x,y)A^+ 2j\sin\beta_{mn}d = 0$

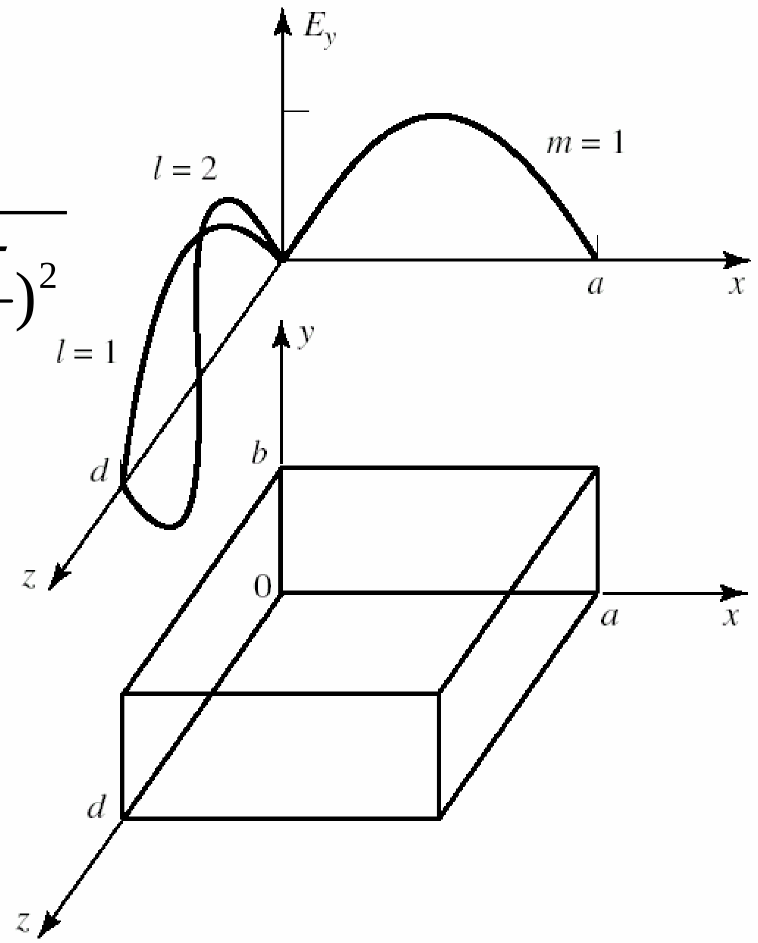
谐振时，腔的长度为半波导波长的整数倍 $\beta_{mn}d = p\pi$

矩形谐振腔是一种短路波导型的半波长传输线谐振腔

谐振频率

谐振腔截止波数

$$k_{mnp} = \sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{p\pi}{d})^2}$$



谐振频率

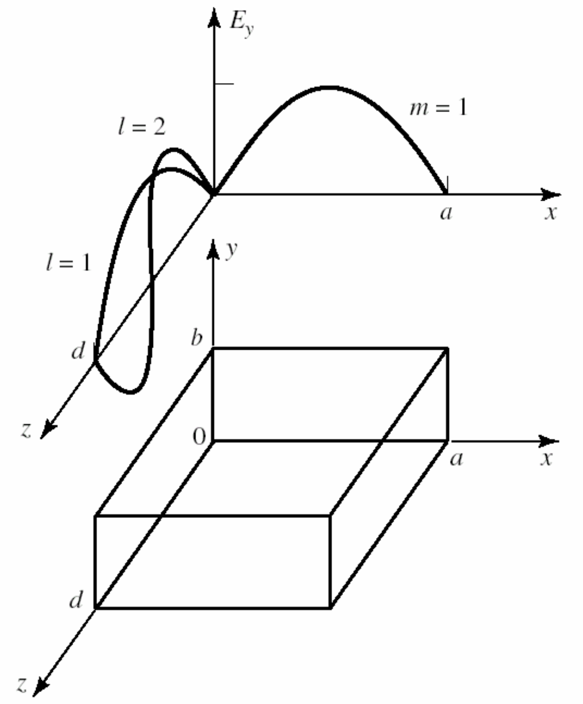
$$f_{mnp} = \frac{ck_{mnp}}{2\pi\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}\sqrt{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2 + (\frac{p\pi}{d})^2}$$

TE_{10p} 模的Q值

场为 $$E_y = A^+ \sin\frac{\pi x}{a}(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z})$$

$$H_x = \frac{-A^+}{Z_{TE}}\sin\frac{\pi x}{a}(e^{-j\beta z} + e^{j\beta z})$$

$$H_z = \frac{j\pi A^+}{k\eta a}\cos\frac{\pi x}{a}(e^{-j\beta z} - e^{j\beta z})$$



可化简为 $$E_y = E_0 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

$$H_x = \frac{-jE_0}{Z_{TE}}\sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{p\pi z}{d}$$

$$H_z = \frac{j\pi E_0}{k\eta a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{p\pi z}{d}$$

存储的电能为 $$W_e = \frac{\varepsilon}{4}\int_V E_y E_y^* dV = \frac{\varepsilon abd}{16}E_0^2$$

存储的磁能为 $$W_m = \frac{\mu}{4}\int_V (H_x H_x^* + H_z H_z^*)dV = \frac{\mu abd}{16}E_0^2\left(\frac{1}{Z_{TE}^2} + \frac{\pi^2}{k^2\eta^2 a^2}\right)$$

TE_{10p} 模的Q值

存储的电能为 $W_e = \frac{\varepsilon}{4}\int_V E_y E_y^* dV = \frac{\varepsilon abd}{16} E_0^2$

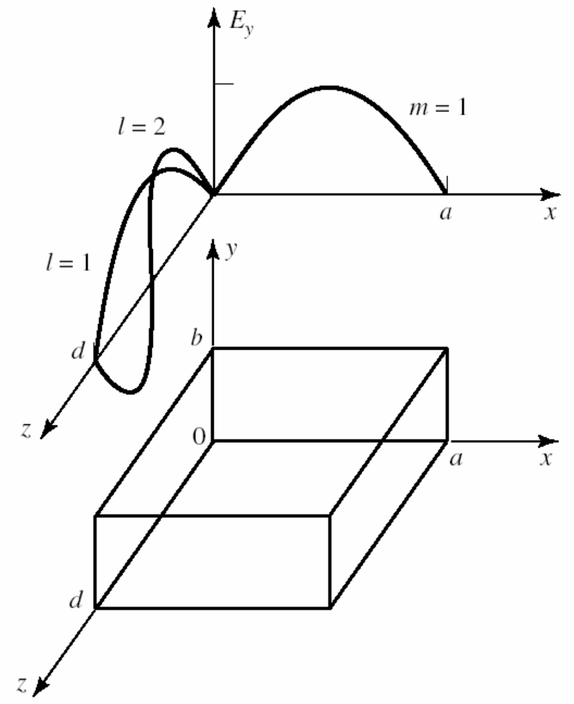
存储的磁能为

$$W_m = \frac{\mu}{4}\int_V (H_x H_x^* + H_z H_z^*) dV = \frac{\mu abd}{16} E_0^2 \left(\frac{1}{Z_{TE}^2} + \frac{\pi^2}{k^2 \eta^2 a^2}\right)$$

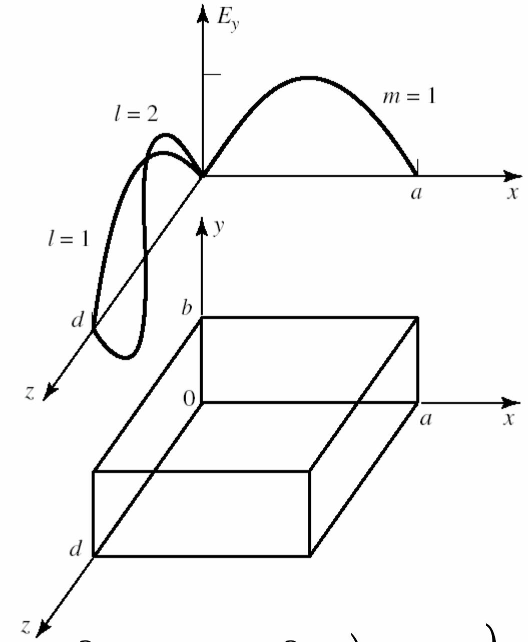
化简

可得 $W_e = W_m$

所以谐振时电能和磁能是相等的



TE_{10p} 模的Q值　　小损耗时，用微扰法



得导体壁功率损耗

$$P_c = \frac{R_S}{2}\oint_{walls}|H_t|^2\, dS$$

表面电阻为 $R_S = \sqrt{\omega\mu_0/2\sigma}$

所以

$$P_c = \frac{R_S}{2}\left\{2\int_0^b\int_0^a |H_x|^2_{z=0}\,dxdy + 2\int_0^d\int_0^b |H_z|^2_{x=0}\,dydz + 2\int_0^d\int_0^a\left(|H_x|^2_{y=0} + |H_x|^2_{y=0}\right)dxdz\right\}$$

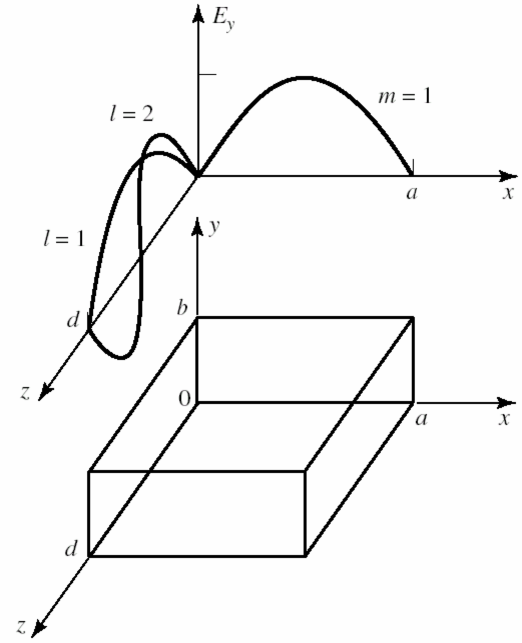
$$= \frac{R_S E_0^2\lambda^2}{8\eta^2}\left(\frac{p^2 ab}{d^2} + \frac{bd}{a^2} + \frac{p^2 a}{2d} + \frac{d}{2a}\right)$$

无耗腔的Q值

$$Q_c = \frac{2\omega_0 W_e}{P_c} = \frac{k^3 abd\eta}{4\pi^2 R_S}\frac{1}{(p^2 ab/d^2 + bd/a^2 + p^2 a/2d + d/2a)}$$

$$= \frac{(kad)^3 b\eta}{2\pi^2 R_S}\frac{1}{2p^2a^3b + 2bd^3 + p^2a^3d + ad^3}$$

TE_{10p} 模的Q值　　小损耗时，用微扰法



电介质功率损耗

$$P_d = \frac{1}{2}\int_V J \bullet E^* dV = \frac{\omega\varepsilon''}{2}\int_V |E|^2 dV = \frac{abd\,\omega\varepsilon''|E_0|^2}{8}$$

理想导体有耗的电介质Q为

$$Q_d = \frac{2\omega W_e}{P_d} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\tan\delta}$$

导体壁和电介质损耗都存在时，总功率求和，总Q为

$$Q = \left(\frac{1}{Q_c} + \frac{1}{Q_d}\right)^{-1}$$

例3:设计矩形波导谐振腔

一矩形波导腔由铜WR-187H波段波导制成 a=4.755cm,b=2.215cm

腔用聚乙烯填充 $\varepsilon_r = 2.25, \tan\delta = 0.0004$ 若 TE_{10p}模

谐振发生在f=5GHz处，求长度d和p=1,p=2谐振模式引起的Q

解：波数k为 $k = \dfrac{2\pi f\sqrt{\varepsilon_r}}{c} = 157.08m^{-1}$ 由 $k_{mnp} = \sqrt{(\dfrac{m\pi}{a})^2 + (\dfrac{n\pi}{b})^2 + (\dfrac{p\pi}{d})^2}$

所以d为 $d = \dfrac{p\pi}{\sqrt{k^2 - (\pi/a)^2}}$

p=1时 $$d = \frac{\pi}{\sqrt{157.08^2 - (\pi/0.04755)^2}} = 2.20cm$$

p=2时 $$d = 2\times 2.20 = 4.40cm$$

例3:设计矩形波导谐振腔

一矩形波导腔由铜WR-187H波段波导制成 a=4.755cm,b=2.215cm

腔用聚乙烯填充 $\varepsilon_r = 2.25, \tan\delta = 0.0004$ 若 TE_{10p}模

谐振发生在f=5GHz处，求长度d和*p*=1,*p*=2谐振模式引起的Q

解: 由 在5GHz时，铜的表面电阻 $R_S = 1.84\times 10^{-2}\Omega$

本征阻抗为 $\eta = \dfrac{377}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 251.3\Omega$ 由 $Q_c = \dfrac{(kad)^3 b\eta}{2\pi^2 R_S} \dfrac{1}{2p^2a^3b + 2bd^3 + p^2a^3d + ad^3}$

由导体损耗引起的Q为 p=1时 $Q_c = 3380$ p=2时 $Q_c = 3864$

由介质损耗引起的Q为 $Q_d = \dfrac{1}{\tan\delta} = \dfrac{1}{0.0004} = 2500$

所以总Q为 p=1时 $Q = (\dfrac{1}{3380} + \dfrac{1}{2500})^{-1} = 1437$

p=2时 $Q = (\dfrac{1}{3864} + \dfrac{1}{2500})^{-1} = 1518$

第4节 圆波导谐振腔

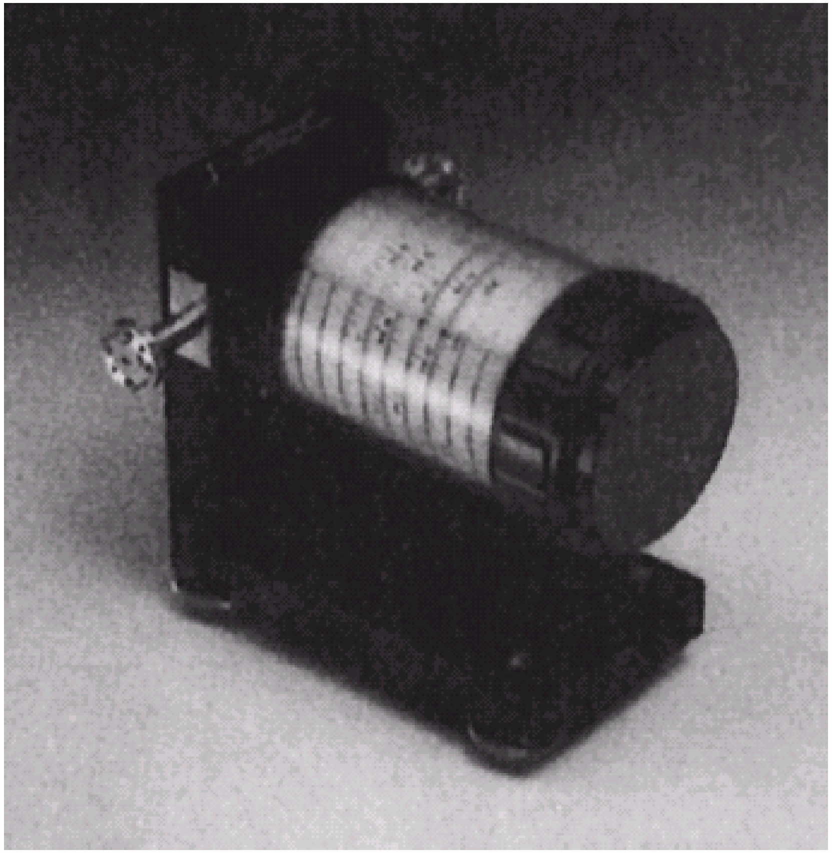
谐振器可由两端短路圆波导段构成

圆波导基模TE_{11}模

圆柱腔基模TE_{111}模

圆柱腔可制作成微波频率计

原理:



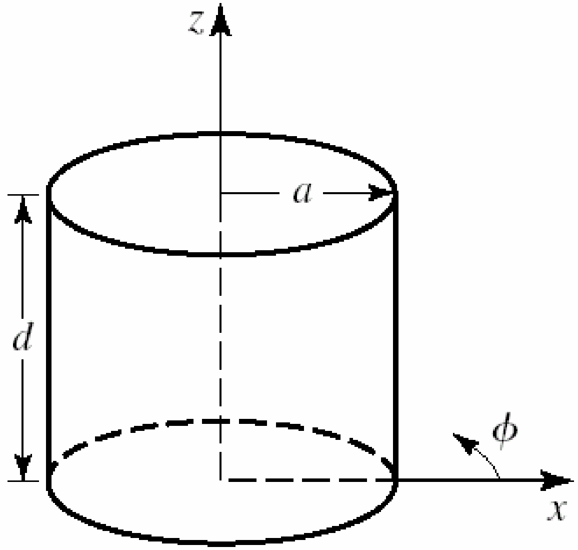
W波段波导频率计

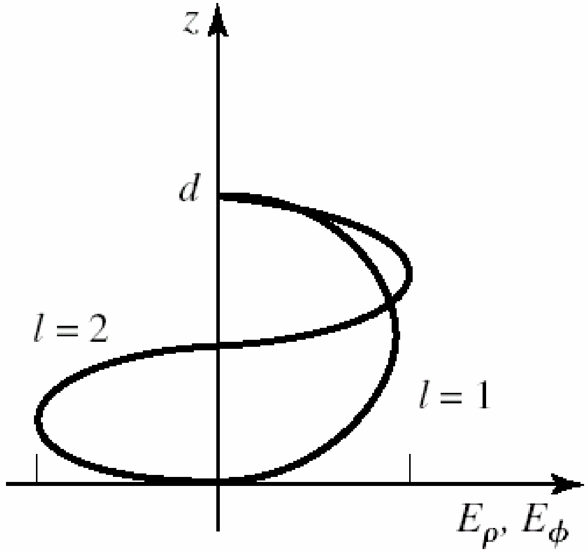
当腔调谐到系统的工作频率时

功率被腔吸收，在系统另外一处用功率计观察吸收现象

振荡模场方程

TE 波型





$$E_r = \frac{2\omega\mu_0 m}{k_c^2 r} H_0 J_m(k_c r)_{\cos m\varphi}^{\sin m\varphi} \sin(\frac{p\pi}{l} z)$$

$$E_\varphi = \frac{2\omega\mu_0}{k_c} H_0 J_m'(k_c r)_{\sin m\varphi}^{\cos m\varphi} \sin(\frac{p\pi}{l} z)$$

$$E_z = 0$$

$$H_r = -\frac{j2}{k_c}(\frac{p\pi}{l}) H_0 J_m'(k_c r)_{\sin m\varphi}^{\cos m\varphi} \cos(\frac{p\pi}{l} z)$$

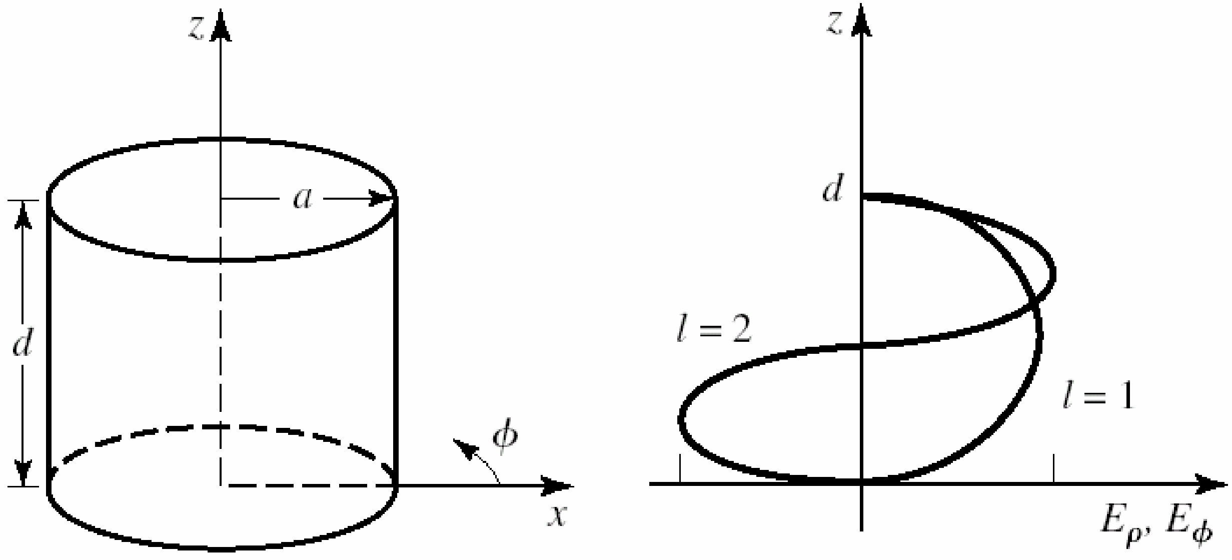
$$H_\varphi = \frac{jm}{k_c^2 r}(\frac{p\pi}{l}) H_0 J_m(k_c r)_{\cos m\varphi}^{\sin m\varphi} \cos(\frac{p\pi}{l} z)$$

$$H_z = -2jH_0 J_m(k_c r)_{\sin m\varphi}^{\cos m\varphi} \sin(\frac{p\pi}{l} z)$$

其中 $k_c = \mu'_{mn}/a$

其中 μ'_{mn} 为第一类m阶贝塞尔函数第n个根

TM 波型



$$E_r = -\frac{2}{k_c}\left(\frac{p\pi}{l}\right)E_0 J_m'(k_c r)_{\sin m\varphi}^{\cos m\varphi}\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \quad H_r = -j\frac{2m\omega\varepsilon}{k_c r}E_0 J_m(k_c r)_{\cos m\varphi}^{\sin m\varphi}\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)$$

$$E_\varphi = \frac{2m}{k_c^2 r}\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 E_0 J_m(k_c r)_{\cos m\varphi}^{\sin m\varphi}\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \quad H_\varphi = -j\frac{2\omega\varepsilon}{k_c}E_0 J_m'(k_c r)_{\sin m\varphi}^{\cos m\varphi}\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)$$

$$E_z = 2E_0 J_m(k_c r)_{\sin m\varphi}^{\cos m\varphi}\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \quad H_z = 0$$

其中 $k_c = \mu_{mn} / a$

其中 μ_{mn} 为第一类m阶贝塞尔函数第n个根

谐振波长

对于TE波 $\lambda_c = \dfrac{2\pi a}{\mu'_{mn}}$

对于TM波 $\lambda_c = \dfrac{2\pi a}{\mu_{mn}}$

代入 $\beta_{mn} = \sqrt{k^2 - (\dfrac{m\pi}{a})^2 - (\dfrac{n\pi}{b})^2}$

得 $\lambda_{0(TE_{mnp})} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\mu'_{nm}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{2l}\right)^2}}$ $\lambda_{0(TM_{mnp})} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\mu_{nm}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{2l}\right)^2}}$

空载品质因数

对于TE_{mnp}　　$m \neq 0$ 时有

$$Q_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi\delta} \bullet \frac{\left[1-\left(\frac{m}{\mu_{nm}}\right)^2\right]\left[\mu'^2_{mn}+\left(\frac{p\pi}{2}\right)^2\left(\frac{D}{l}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\mu'^2_{mn}+\left(\frac{p\pi}{2}\right)^2\left(\frac{D}{l}\right)^3+\left(\frac{m}{\mu'_{mn}}\right)^2\left(\frac{p\pi}{2}\right)^2\left(\frac{D}{l}\right)^2\left(1-\frac{D}{l}\right)}$$

对于TM波　$m \neq 0, p \neq 0$

时有

$$Q_0 = \frac{\lambda_0}{\delta} \bullet \frac{\left[\mu^2_{mn}+\left(\frac{p\pi}{2}\right)^2\left(\frac{D}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{2\pi\left(1+\frac{D}{l}\right)}$$

$m \neq 0, p = 0$ 时有 $Q_0 = \frac{\lambda_0}{\delta} \bullet \frac{\mu_{mn}}{2\pi\left(1+\frac{a}{l}\right)}$　　其中D=2a

谐振模

TE_{010}模振荡模与场结构见书P150

主要参数

谐振波长 $\lambda_0 = \dfrac{2\pi a}{\mu_{01}} = \dfrac{2\pi a}{2.405} = 2.62a$

空载品质因数 $Q_0 = \dfrac{\lambda_0}{\delta}\dfrac{\mu_{01}}{2\pi(1+a/l)} = \dfrac{2.405\lambda_0}{2\pi\delta(1+a/l)}$

考虑 $\lambda_0 = \dfrac{2\pi a}{2.405}$ 所以

$$Q_{0(TM_{010})} = \frac{2.405\times 2\pi a/2.405}{2\pi\delta(1+a/l)} = \frac{2\pi a^2 l}{\delta(2\pi al + 2\pi a^2)} = \frac{2V}{\delta S}$$

谐振模

TE_{011}模振荡模与场结构见书P151

主要参数

谐振波长 $$\lambda_0(TE_{011})=\frac{1}{\sqrt{\left(\mu'_{01}/2\pi a\right)^2+\left(1/2l\right)^2}}$$

TE_{111}模振荡模与场结构见书P151

主要参数

谐振波长 $$\lambda_{0TE_{111}}=\frac{1}{\sqrt{\left(1/3.41a\right)^2+\left(1/2l\right)^2}}$$