

Prova 2 - Estatística - 2025.1

1) (1,8 pontos) Uma indústria de pequeno porte no setor de laticínios está enfrentando sérios problemas em sua linha de produção. Estima-se que 30% do leite recebido no estabelecimento apresente um resíduo indesejado específico que não está sendo detectado pelos testes físico-químicos realizados atualmente pelo laboratório dessa indústria.

Como a empresa é pequena e possui recursos limitados, não possui acesso aos melhores testes do mercado para identificação desse novo resíduo contaminante, mas consegue adquirir um teste que apresenta as seguintes características:

- Se a amostra estiver contaminada, o teste apresenta resultado positivo, identificando a presença de contaminantes, com 70% de chance.
- Se amostra não estiver contaminada, o teste apresenta resultado negativo, identificando ausência de contaminantes, com 80% de chance.

O engenheiro responsável pelo laboratório dessa indústria realiza o teste em uma amostra do lote e o teste dá positivo. Sabendo disso, ele precisa tomar a decisão de rejeitar ou não o lote. Ele decide estabelecer que, caso a probabilidade dessa amostra realmente estar contaminada seja maior que 50%, então o lote deve ser rejeitado. Caso contrário, mesmo o teste dando positivo, ele aceita o lote. Dado esse cenário, o engenheiro deve rejeitar ou aceitar o lote de leite recebido? Justifique sua resposta com os cálculos necessários.

2) (2,65 pontos) Um dos jogos da loteria federal que vem se tornando popular ao longo dos últimos anos devido à sua aparente facilidade de ganho é a Lotofácil. Diferentemente da tradicional Mega-Sena, na Lotofácil existem apenas 25 números dos quais, na aposta comum, o jogador deve marcar 15 números, pagando o valor de R\$ 3,00. O jogador recebe um prêmio relativo à quantidade de acertos, a seguir são listados os prêmios do último sorteio:

- Prêmio ao acertar 15 números: R\$1.764.882,05
- Prêmio ao acertar 14 números: R\$1.737,36
- Prêmio ao acertar 13 números: R\$30,00
- Prêmio ao acertar 12 números: R\$12,00
- Prêmio ao acertar 11 números: R\$6,00

A seguir é apresentada uma imagem do cartão do jogo:



Sabendo disso responda:

- a) (1,9 pontos) Sabemos que, por ser um jogo da loteria federal, trata-se de um jogo em que não há fraude e, portanto, é um jogo justo nesse quesito. Entretanto, ao longo da disciplina, vimos que, atrelado ao surgimento da probabilidade, também surge o ato de verificar, por meio do uso de probabilidades, se um jogo aleatório é justo. Dessa forma, considerando a aposta comum, é possível afirmar que, baseando-se nesse conceito de justiça, o jogo da Lotofácil é justo? Justifique sua resposta realizando os cálculos necessários.
- b) (0,75 pontos) Pierre, um jogador da Lotofácil, resolve adotar a seguinte estratégia para aumentar suas chances de ganho: Ele entra na internet e busca todos os números sorteados nos sorteios realizados ao longo do ano de 2024 e monta a seguinte tabela de frequência:

Table 1: Frequência das dezenas da Lotofácil no ano de 2024

Dezena	Vezez	Frequência Relativa
10	195	67.24%
25	191	65.86%
12	185	63.79%
02	184	63.45%
01	181	62.41%
08	181	62.41%
04	178	61.38%
03	177	61.03%
15	176	60.69%
20	176	60.69%
05	175	60.34%
19	173	59.66%
07	172	59.31%
21	171	58.97%
22	171	58.97%
23	171	58.97%
18	170	58.62%
06	168	57.93%
13	167	57.59%
14	166	57.24%
09	165	56.90%
24	165	56.90%
11	164	56.55%
16	164	56.55%
17	164	56.55%

Pierre acredita que a probabilidade de um número ser sorteado está relacionada à frequência com que ele apareceu em sorteios anteriores, ou seja, considera que a probabilidade é equivalente à frequência relativa observada. Assim, os números mais frequentes seriam, segundo ele, os mais prováveis de serem sorteados. Dessa forma, com o objetivo de aumentar suas chances de ganhar, ele simplesmente escolhe marcar, no cartão de aposta, os 15 primeiros números da tabela apresentada acima.

Dado esse cenário, responda:

- i) (0,25 pontos) Qual interpretação da probabilidade Pierre está usando?
- ii) (0,5 ponto) A interpretação adotada por Pierre é a mais adequada para o contexto do problema? Se a resposta for não, qual seria a interpretação mais adequada e por que? Se for sim, diga o motivo.

3) (2,5 pontos) Uma distribuição contínua bastante importante e adotada na geração de números aleatórios em programas computacionais é a Distribuição Uniforme Contínua. Dizemos que se uma variável aleatória X segue a distribuição uniforme contínua em um intervalo $[a, b]$ (Notação: $X \sim U([a, b])$) com $b > a$, se ela assume valores no conjunto $[a, b]$ e sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sabendo disso responda:

- a) (1 ponto) Mostre que se $X \sim U([a, b])$ então $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ e $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- b) (1,5 pontos) Além da Distribuição Uniforme Contínua, também existe a Distribuição Uniforme Discreta. Dizemos que uma variável aleatória Y segue a distribuição uniforme discreta em um conjunto $\{a, a+1, a+2, \dots, b\}$ (Notação: $Y \sim \mathcal{U}\{a, b\}$) com $b > a$ se Y assume valores no conjunto enumerável $\{a, a+1, a+2, \dots, b\}$ e sua função de probabilidade é dada por:

$$p_Y(y) = \frac{1}{b-a+1} \text{ se } y \in \{a, a+1, \dots, b\}$$

Sabendo disso e dados os conceitos discutidos em sala acerca de variáveis aleatórias, responda:

- i) (0,3 pontos) O que é uma variável aleatória.
- ii) (0,2 pontos) Explique a diferença entre uma variável aleatória discreta e uma contínua.
- iii) (0,3 pontos) Explique o que é uma função de probabilidade (Explique seu aspecto funcional, incluindo os requisitos para uma função ser função de probabilidade).
- iv) (0,2 pontos) Suponha que $T \sim U([1, 6])$ e $V \sim \mathcal{U}\{1, 6\}$, obtenha $\mathbb{P}(T = 2)$ e $\mathbb{P}(V = 2)$.
- v) (0,3 pontos) Suponha que $T \sim U([1, 6])$ e $V \sim \mathcal{U}\{1, 6\}$, obtenha $F_T(4)$ e $F_V(4)$.
- vi) (0,2 pontos) Dê um exemplo de evento do mundo real que poderia ser modelado por uma variável aleatória que siga a distribuição uniforme discreta e outro que poderia ser modelado por uma que siga a uniforme contínua. Obs: O exemplo não pode ser o mesmo do enunciado da questão.

4) (2,2 pontos) Você é o Engenheiro responsável por um laboratório de controle de qualidade que está avaliando amostras de leite cru fornecido por diferentes produtores da região. Uma das análises realizadas é o teste de crioscopia, que mede o ponto de congelamento do leite.

Para verificar se os fornecedores estão adicionando água ao leite, você selecionou uma amostra aleatória de 36 lotes de leite e obteve uma média do ponto de congelamento igual a $-0,533^\circ\text{C}$.

Estudos anteriores do laboratório indicam que a variabilidade do ponto de congelamento do leite é bem conhecida, com desvio padrão populacional $\sigma = 0,072^\circ\text{C}$. Admita que a variável aleatória associada ao ponto de congelamento seja aproximadamente normal.

- (a) (0,5 pontos) Construa um intervalo de confiança com 95% de confiança para a média real do ponto de congelamento do leite entregue pelos fornecedores.

- (b) (0,6 pontos) Você decide mostrar o intervalo de confiança obtido para Leôncio, o técnico do laboratório. Ao ler seu resultado, Leôncio profere a seguinte frase para você:

“Baseado no intervalo que você me mostrou, podemos dizer que existe uma probabilidade de 95% de que a média verdadeira do ponto de congelamento do leite recebido esteja compreendida dentro desse intervalo ”

Você concorda com a afirmação do técnico do laboratório? Justifique.

- (c) (0,6 pontos) O que ocorreria com o intervalo calculado na questão *a* se o tamanho da amostra aumentasse? E se o nível de confiança aumentasse?
- (d) (0,5 ponto) Se o laboratório desejasse uma margem de erro de no máximo $0,005^{\circ}\text{C}$ para a média, mantendo o mesmo nível de confiança e desvio padrão, qual deveria ser o tamanho mínimo da amostra?

5)(1,1 pontos) Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral. Responda:

- a) (0,3) O que significa dizer que A e B são mutuamente excludentes(ou exclusivos)?
- b) (0,3) O que significa dizer que A e B são independentes? Dizer que A é independente de B implica dizer que B é independente de A ?
- c) (0,5) Se A e B são mutuamente excludentes(ou exclusivos), logo também são independentes? O contrário é valido?

Informações úteis:

- $\frac{25!}{15!10!} = 3268760$
- $\binom{15}{12} = 455$
- $\binom{15}{11} = 1365$
- $\binom{10}{4} = 210$
- $\frac{1}{\binom{25}{15}} \approx 3,06 \cdot 10^{-7}$
- $\frac{150}{\binom{25}{15}} \approx 4,59 \cdot 10^{-5}$
- $\frac{4725}{\binom{25}{15}} \approx 1,44 \cdot 10^{-3}$
- $\frac{54600}{\binom{25}{15}} \approx 5,01 \cdot 10^{-2}$
- $\frac{286650}{\binom{25}{15}} \approx 8,77 \cdot 10^{-2}$