Prova 2 - Estatística - 2025.1

1) (1,8 pontos) Uma empresa ambiental realiza análises para detectar a presença de um poluente tóxico em amostras de solo coletadas de áreas industriais. A proporção histórica de amostras contaminadas é estimada em 20%.

A empresa possui um teste rápido para detecção do poluente que apresenta as seguintes características:

- Se a amostra estiver contaminada, o teste apresenta resultado positivo com probabilidade 75%.
- Se a amostra estiver limpa, o teste apresenta resultado negativo com probabilidade 85%.

a) (0,6 pontos) Qual a probaiblidade do teste dar positivo?

b) (0,6 pontos) Calcule a probabilidade de a amostra estar realmente contaminada, dado que o teste rápido deu positivo.

c) (0,6 pontos) Calcule a probabilidade de a amostra estar realmente contaminada e o teste dar positivo. Discuta a diferença prática desse resultado para o da questão *b*.

2 (1,8 pontos) Após concluir o curso de Estatística, três alunos de Engenharia Química (Aluno A, Aluno B e Aluno C) decidem ir a um cassino aplicar seus conhecimentos de probabilidade. Eles escolhem jogar roleta.

A versão da roleta utilizada nesse cassino possui 36 casas numeradas de 1 a 36. As casas de números pares são pretas, e as ímpares, vermelhas. O funcionário do cassino gira a roleta e, ao final, a bolinha metálica indica o número sorteado.

Além de apostar diretamente nos números, é possível apostar apenas na cor onde a bolinha vai parar (vermelho ou preto). O Aluno A, responsável pela festa de formatura da turma, decide apostar metade do dinheiro arrecadado apostando na cor vermelha. Antes de apostar, discute com os colegas:

- O **Aluno A** argumenta que a chance de a bolinha parar no vermelho é igual à de parar no preto, pois as casas são equiprováveis.
- O **Aluno B** discorda, afirmando que a probabilidade não pode ser conhecida sem observar várias rodadas e calcular a frequência da cor vermelha.

a) (0,5 pontos) Suponha que você é o Aluno C. Com base no que estudou no curso, avalie qual dos colegas está correto. Explique qual interpretação de probabilidade cada um está utilizando e quais pressupostos ou garantias cada abordagem envolve.

Após essa discussão, os alunos perdem a aposta (a bolinha parou no preto), perdendo metade do dinheiro destinado à festa de formatura da turma.

Transtornado com a perda e refletindo sobre a interpretação do Aluno B, o Aluno A conclui que o colega pode estar certo e decide colocar essa abordagem em prática. No dia seguinte, retorna sozinho ao cassino.

Ele chega às 18h e passa quatro horas observando a roleta. Após registrar várias rodadas, nota que a bolinha parou no vermelho em apenas 40% das vezes.

A partir disso, conclui que a frequência do vermelho "precisará aumentar" nas próximas jogadas para atingir 50% e decide adotar a seguinte estratégia: dividir o dinheiro restante em 40 partes iguais e apostar, na cor vermelha, uma parte a cada nova rodada da roleta.

b) (0,4 pontos) O raciocínio do Aluno A está correto? Justifique sua resposta.

Por fim, considere as regras desse jogo:

- O jogador aposta um valor de x reais ($x > 0$) em uma cor (vermelho ou preto).
- Se acertar, recebe $2x$ (recupera o valor apostado mais um valor igual).
- Se errar, perde o valor apostado.

c) (1 ponto) Com base no conceito de jogo justo discutido ao longo da disciplina, analise se essa versão da roleta é um jogo justo.

3) (3,2 pontos) Uma distribuição contínua bastante importante e que é bastante adotada em problemas práticos é a distribuição Exponencial. A distribuição exponencial modela o intervalo entre a ocorrência entre eventos. Dizemos que uma variável aleatória X segue a distribuição exponencial com parâmetro λ(Notação: $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$) se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Sabendo disso responda:

a) (1 ponto) Mostre que se $X \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$ então $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$ e $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

b) (0,8 pontos) Uma das propriedades mais interessantes envolvendo a a distribuição Exponencial é a falta de memória, que diz que se X é uma variável aleatória que segue a distribuição Exponencial, então a probabilidade de X ser maior que $s + t$ dado que X é maior que s é igual a probabilidade de X ser maior que t. De maneira formal:

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > t)$$

Mostre que a relação acima é valida.

c) (1,4 pontos) Ao analisar a distribuição Exponencial, é inevitável a relacionarmos com a distribuição de Poisson. Sabendo disso, responda:

i.) (0,3 pontos) Que categoria de eventos do mundo real podem ser modelados por uma variável aleatória que siga a Distribuição de Poisson?

ii.) (0,2 pontos) De um exemplo de situação real que poderia ser modelada por uma variável aleatória que siga a distribuição Exponencial e outro que poderia ser modelado por uma que siga a distribuição de Poisson.

iii.) (0,9 pontos) Em um laboratório de Química, um analisador automático monitora continuamente uma corrente líquida de ácido acético, identificando a presença de partículas contaminantes. Dados históricos indicam que, em média, são detectadas 2 partículas contaminantes por hora de operação.

1) (0,2 pontos) O que é uma função de probabilidade. Qual a função de probabilidade de uma variável aleatória que segue a distribuição de Poisson?

2) (0,3 pontos) Qual a probabilidade de o analisador detectar exatamente 1 partícula contaminante durante um intervalo de 30 minutos?

3) (0,4 pontos) Qual a probabilidade de o equipamento detectar pelo menos 2 partículas contaminantes em uma hora?

4) (2 pontos) Um estudante de Engenharia Química está realizando uma pesquisa sobre o uso de equipamentos de segurança em laboratórios da UFRJ apra seu TCC. Como parte do estudo, ele investiga a frequência de uso do lava-olhos de emergência por parte dos alunos em atividades práticas.

O aluno entrevistou 150 estudantes que frequentam laboratórios de química. 27 deles relataram já ter utilizado o lava-olhos pelo menos uma vez durante suas atividades acadêmicas.

a) (0,5 ponto) Mostre que se $X \sim Bernoulli(p)$ então a variância máxima de X é igual a 1/4.

b) (0,5 ponto) Estime a proporção populacional de estudantes que já usaram o lava-olhos com base na amostra. Em seguida, usando o resultado do item a), construa um intervalo de confiança de 95% para essa proporção.

c) (0,5 ponto) Seu orientador sugere que você coloque no seu TCC como conclusão de sua pesquisa o seguinte parágrafo:

> Por meio da amostra coletada foi possível gerar um intervalo de confiança com 95% de confiança para a proporção verdadeira de alunos que já usaram o lava-olhos (**intervalo gerado na questão (a)**). Dessa forma, podemos dizer que, com probabilidade de 95%, a proporção verdadeira de uso do lava-olhos nos laboratórios está contida no intervalo calculado.

O que você faria nessa situação? Decidiria aceitar a surgestão do seu orientador ou diria que a sugestão dele está incorreta? Justifique sua resposta.

d) (0,5 ponto) O aluno deseja repetir a pesquisa no próximo semestre, mas agora quer garantir uma margem de erro de no máximo 4 pontos percentuais (0,04) para a proporção estimada, mantendo o nível de confiança em 95%.

Qual deve ser o tamanho mínimo da nova amostra? Novamente, assuma o resultado da questão a).

e) (0,5 ponto) Se você decidisse aumentar o tamanho da amostra, o que aconteceria com a amplitude do intervalo? E se o nível de confiança fosse aumentado?

5)(1,5 pontos) Diga se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas e justifique matematicamente suas respostas.

a) (0,2 pontos) Dados dois eventos A e B. Se A e B são mutuamente excludentes então também são independentes.

b) (0,3 pontos) Dados dois eventos F e G tal que $F \subset G$, portanto, $\mathbb{P}(G|F) = 1$

c) (1 ponto) Dados dois eventos A e B, se $\mathbb{P}(A|B) = 1$ então $\mathbb{P}(B^c|A^c) = 1$