Estatística

Prof. Ismael Bastos

Introdução à Probabilidade

Uma breve história da Probabilidade

- O surgimento da Probabilidade está diretamente ligada ao estudo de jogos de azar.

Uma breve história da Probabilidade

- O surgimento da Probabilidade está diretamente ligada ao estudo de jogos de azar.
- A Probabilidade, conforme estudamos hoje, surge em 1654 através de correspondências entre Pierre de Fermat e Blaise pascal acerca do **Problema dos Pontos** .

Uma breve história da Probabilidade

- O surgimento da Probabilidade está diretamente ligada ao estudo de jogos de azar.
- A Probabilidade, conforme estudamos hoje, surge em 1654 através de correspondências entre Pierre de Fermat e Blaise pascal acerca do **Problema dos Pontos** .
- Observação: O problema já havia sido proposto, aproximadamente, 100 anos antes por Luca Pacioli (Considerado o pai da contabilidade).

O Problema dos Pontos

Vamos voltar para 1654.

O Problema dos Pontos

Vamos voltar para 1654. Vamos jogar o seguinte jogo:

Regras do Jogo:

- O jogo tem exatamente dois jogadores.

O Problema dos Pontos

Vamos voltar para 1654. Vamos jogar o seguinte jogo:

Regras do Jogo:

- O jogo tem exatamente dois jogadores.
- Cada jogador escolhe uma face de uma moeda (Cara ou Coroa).

O Problema dos Pontos

Vamos voltar para 1654. Vamos jogar o seguinte jogo:
Regras do Jogo:

- O jogo tem exatamente dois jogadores.
- Cada jogador escolhe uma face de uma moeda (Cara ou Coroa).
- Cada jogador aposta um valor (Exemplo: R$ 25,00).

O Problema dos Pontos

Vamos voltar para 1654. Vamos jogar o seguinte jogo:
Regras do Jogo:

- O jogo tem exatamente dois jogadores.
- Cada jogador escolhe uma face de uma moeda (Cara ou Coroa).
- Cada jogador aposta um valor (Exemplo: R$ 25,00).
- A cada rodada a moeda é lançada e é anotado o resultado, somando 1 ponto para o jogador que escolheu o resultado obtido.

O Problema dos Pontos

Vamos voltar para 1654. Vamos jogar o seguinte jogo:

Regras do Jogo:

- O jogo tem exatamente dois jogadores.
- Cada jogador escolhe uma face de uma moeda (Cara ou Coroa).
- Cada jogador aposta um valor (Exemplo: R$ 25,00).
- A cada rodada a moeda é lançada e é anotado o resultado, somando 1 ponto para o jogador que escolheu o resultado obtido.
- Vence quem obtiver o total de 3 pontos. Levando o prêmio (Nesse caso, R$ 50,00)

O Problema dos Pontos

Vamos voltar para 1654. Vamos jogar o seguinte jogo:

Regras do Jogo:

- O jogo tem exatamente dois jogadores.
- Cada jogador escolhe uma face de uma moeda (Cara ou Coroa).
- Cada jogador aposta um valor (Exemplo: R$ 25,00).
- A cada rodada a moeda é lançada e é anotado o resultado, somando 1 ponto para o jogador que escolheu o resultado obtido.
- Vence quem obtiver o total de 3 pontos. Levando o prêmio (Nesse caso, R$ 50,00)

Pergunta: Esse jogo é justo?

Jogando o jogo

Vamos jogar o jogo!

Jogando o jogo

Vamos jogar o jogo!
Uma chuva de meteoros cai na UFRJ

Jogando o jogo

Vamos jogar o jogo!
Uma chuva de meteoros cai na UFRJ

Cada jogador está exatamente com dois pontos, como dividir o prêmio?

OJogando o jogo, novamente

Vamos jogar o jogo de novo!

OJogando o jogo, novamente

Vamos jogar o jogo de novo!
Uma chuva de meteoros cai na UFRJ

OJogando o jogo, novamente

Vamos jogar o jogo de novo!
Uma chuva de meteoros cai na UFRJ

Nesse caso, um jogador está com dois pontos e o outro com um ponto, como dividir o prêmio?

O Problema dos Pontos

- Esse problema ficou conhecido como problema dos pontos.

O Problema dos Pontos

- Esse problema ficou conhecido como problema dos pontos.
- Pascal e Fermat propõem uma solução para o problema envolvendo probabilidades.

O Problema dos Pontos

- Esse problema ficou conhecido como problema dos pontos.
- Pascal e Fermat propõem uma solução para o problema envolvendo probabilidades.
- Recomendação de leitura que apresenta as correspondências e realiza comentários: The Unfinished Game

Como começar pelo começo se as coisas acontecem antes de acontecer?

- De fato, a Probabilidade não começa em 1654, mas sim muito antes, talvez 2.000 ou 600 anos antes de cristo.

Como começar pelo começo se as coisas acontecem antes de acontecer?

- De fato, a Probabilidade não começa em 1654, mas sim muito antes, talvez 2.000 ou 600 anos antes de cristo.
- Mas essa é uma história longa e não será abordada em nossa disciplina.

O que significa a probabilidade de algo acontecer?

Vamos considerar a seguinte afirmação:

- A probabilidade de chover amanhã é 30%

O que significa a probabilidade de algo acontecer?

Vamos considerar a seguinte afirmação:

- A probabilidade de chover amanhã é 30%

O que de fato essa informação nos diz?

O mundo é realmente aleatório?

- As coisas realmente acontecem aleatoriamente no mundo em que vivemos?

O mundo é realmente aleatório?

- As coisas realmente acontecem aleatoriamente no mundo em que vivemos?
- A aleatoriadade realmente existe?

O mundo é realmente aleatório?

- As coisas realmente acontecem aleatoriamente no mundo em que vivemos?
- A aleatoriadade realmente existe?
- O que é a aleatóriedade?

Breve comentário sobre aleatoriedade e Teoria do Caos

Filme: De caso com o acaso (1998)

- Apesar disso, será que existe alguma espécie de ordem no caos?

Vamos jogar um jogo!

Interpretações da Probabilidade

- Intepretação Clássica: A probabilidade nada mais é que uma simples fração, onde o numerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o número de todos os casos possíveis.
- Interpretação Frequentista: A probabilidade de um evento ocorrer é igual a frequência observada na qual ele ocorre.
- Intepretação Lógica: Probabilidade como a relação entre proposições.
- Interpretação Subjetivista (Bayesiana). Probabilidade não existe.

Interpretações da Probabilidade

- Intepretação Clássica: A probabilidade nada mais é que uma simples fração, onde o numerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o número de todos os casos possíveis.
- Interpretação Frequentista: A probabilidade de um evento ocorrer é igual a frequência observada na qual ele ocorre.
- Intepretação Lógica: Probabilidade como a relação entre proposições.
- Interpretação Subjetivista (Bayesiana). Probabilidade não existe. Exceto na mente de cada um.

Experimentos Aleatórios

Exemplo 1

1. *Jogar um dado e observar a face superior.*
2. *Lançar uma moeda quatro vezes e contar o número de caras.*
3. *Em uma linha de produção, fabrica-se peças em série e conte-se o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24 horas.*
4. *Uma lâmpada é fabricada. Em seguida é ensaiada quanto à duração da vida, pela colocação em um soquete e anotação do tempo decorrido (em horas) até queimar.*
5. *Peças são fabricadas até que 10 peças perfeitas sejam produzidas. O número total de peças fabricadas é contado.*

Espaço amostral

O espaço amostral, denotado pela letra grega Ω, é definido como o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. Relacionando com os experimentos anteriores, temos:

Exemplo 2

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
3. $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$ *onde n é o número máximo que pode ser produzido em 24 horas.*
4. $\{t : t \geq 0\}$
5. $\{10, 11, 12, \ldots\}$

Importante:O espaço amostral está sempre relacionado ao experimento

Espaço amostral

Qual é o espaço amostral do experimento do lançamento de uma moeda?

- Vídeo: Lançamento de uma moeda.

Espaço amostral

Exemplo 3

Uma caixa contém 3 bolas de gude: 1 vermelha, 1 verde e uma azul. Considere um experimento que consiste em retirar uma bola de gude da caixa, colocada de volta, em seguida outra bola é retirada. Descreva o espaço amostral.

Eventos

Um evento é simplesmente um subconjunto de um espaço amostral. Note que o próprio Ω é um evento. Relacionando com os espaços amostrais construídos anteriormente:

Exemplo 4

1. *Um número par ocorre, isto é,* $A_1 = \{2, 4, 6\}$

Eventos

Um evento é simplesmente um subconjunto de um espaço amostral. Note que o próprio Ω é um evento. Relacionando com os espaços amostrais construídos anteriormente:

Exemplo 4

1. *Um número par ocorre, isto é,* $A_1 = \{2, 4, 6\}$
2. $\{2\}$*; isto é, duas caras ocorrem*

Eventos

Um evento é simplesmente um subconjunto de um espaço amostral. Note que o próprio Ω é um evento. Relacionando com os espaços amostrais construídos anteriormente:

Exemplo 4

1. *Um número par ocorre, isto é,* $A_1 = \{2, 4, 6\}$
2. $\{2\}$*; isto é, duas caras ocorrem*
3. $\{0\}$*; isto é, todas as peças são perfeitas.*

Eventos

Um evento é simplesmente um subconjunto de um espaço amostral. Note que o próprio Ω é um evento. Relacionando com os espaços amostrais construídos anteriormente:

Exemplo 4

1. *Um número par ocorre, isto é,* $A_1 = \{2, 4, 6\}$
2. $\{2\}$*; isto é, duas caras ocorrem*
3. $\{0\}$*; isto é, todas as peças são perfeitas.*
4. $\{t : t < 3\}$*; isto é, a lâmpada queima em menos de 3 horas.*

Eventos

Um evento é simplesmente um subconjunto de um espaço amostral. Note que o próprio Ω é um evento. Relacionando com os espaços amostrais construídos anteriormente:

Exemplo 4

1. *Um número par ocorre, isto é,* $A_1 = \{2, 4, 6\}$
2. $\{2\}$*; isto é, duas caras ocorrem*
3. $\{0\}$*; isto é, todas as peças são perfeitas.*
4. $\{t : t < 3\}$*; isto é, a lâmpada queima em menos de 3 horas.*
5. $\{0\}$*; isto é, nenhuma peça defeitusosa é fabricada.*

Operações envolvendo eventos

Assim como vimos anteriormente, eventos são conjuntos, logo, tudo que vimos de teoria dos conjuntos pode ser também aplicado para eventos. Nesse sentido, definimos as seguintes operações:

a) Se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem.

Operações envolvendo eventos

Assim como vimos anteriormente, eventos são conjuntos, logo, tudo que vimos de teoria dos conjuntos pode ser também aplicado para eventos. Nesse sentido, definimos as seguintes operações:

a) Se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem.

b) Se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem.

Operações envolvendo eventos

Assim como vimos anteriormente, eventos são conjuntos, logo, tudo que vimos de teoria dos conjuntos pode ser também aplicado para eventos. Nesse sentido, definimos as seguintes operações:

a) Se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem.

b) Se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem.

c) Se A for um evento, A^c será o evento que ocorrerá se, e somente se, não ocorrer A.

Operações envolvendo eventos

Assim como vimos anteriormente, eventos são conjuntos, logo, tudo que vimos de teoria dos conjuntos pode ser também aplicado para eventos. Nesse sentido, definimos as seguintes operações:

a) Se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem.

b) Se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem.

c) Se A for um evento, A^c será o evento que ocorrerá se, e somente se, não ocorrer A.

d) Se $A_1, \ldots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer.

Operações envolvendo eventos

Assim como vimos anteriormente, eventos são conjuntos, logo, tudo que vimos de teoria dos conjuntos pode ser também aplicado para eventos. Nesse sentido, definimos as seguintes operações:

a) Se A e B forem eventos, $A \cup B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A ou B (ou ambos) ocorrerem.

b) Se A e B forem eventos, $A \cap B$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A e B ocorrerem.

c) Se A for um evento, A^c será o evento que ocorrerá se, e somente se, não ocorrer A.

d) Se $A_1, \ldots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, ao menos um dos eventos A_i ocorrer.

e) Se $A_1, \ldots, A_n$ for qualquer coleção finita de eventos, então $\bigcap i = 1^n A_i$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, todos os eventos A_i ocorrer.

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos, A e B, são denominados mutuamente excludentes se eles não puderem ocorrer juntos. Isso significa dizer que $A \cap B = \emptyset$.

Noção primitiva de probabilidade

Assumindo que todos os elementos do espaço amostral são equiprováveis, de forma ingênua, definidos a probabilidade de um evento A ocorrer da seguinte forma:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{número de elementos em A}}{\text{número de elementos em } \Omega}$$

Noção primitiva de probabilidade

Assumindo que todos os elementos do espaço amostral são equiprováveis, de forma ingênua, definidos a probabilidade de um evento A ocorrer da seguinte forma:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{número de elementos em A}}{\text{número de elementos em } \Omega}$$

Exemplo 5

Uma moeda honesta é lançada duas vezes, qual a probabilidade de sair duas caras?

Noção primitiva de probabilidade

Assumindo que todos os elementos do espaço amostral são equiprováveis, de forma ingênua, definidos a probabilidade de um evento A ocorrer da seguinte forma:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{número de elementos em A}}{\text{número de elementos em }\Omega}$$

Exemplo 5

Uma moeda honesta é lançada duas vezes, qual a probabilidade de sair duas caras?

Exemplo 6

Um dado de seis faces é lançado. Qual a probabilidade de sair um número maior do que 4?

Exemplo 7

Ao lançarmos dois dados de seis faces, qual a probabilidade da soma dos dois ser igual a sete?

Probabilidade como função

A noção primitiva de probabilidade nos diz como calcular probabilidades, mas não o que de fato é probabilidade. Probabilidade, denotada por $\mathbb{P}$ é uma função que toma um evento $A \subset \Omega$ como entrada e retorna $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ como saída. Essa função deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Para todo evento A, $\mathbb{P}(A) \geq 0$
3. Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, então $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
4. Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uma sequência de eventos mutuamente exclusivos dois a dois, então $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Probabilidade - Propriedades

A partir das propriedades definidas no slide anterior, podemos derivar outras propriedades. Sejam A e B eventos, logo temos que:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

Probabilidade - Propriedades

A partir das propriedades definidas no slide anterior, podemos derivar outras propriedades. Sejam A e B eventos, logo temos que:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

Probabilidade - Propriedades

A partir das propriedades definidas no slide anterior, podemos derivar outras propriedades. Sejam A e B eventos, logo temos que:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. Se $A \subset B$ então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Probabilidade - Propriedades

A partir das propriedades definidas no slide anterior, podemos derivar outras propriedades. Sejam A e B eventos, logo temos que:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. Se $A \subset B$ então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $0 \leq \mathbb{P} \leq 1$

Probabilidade - Propriedades

A partir das propriedades definidas no slide anterior, podemos derivar outras propriedades. Sejam A e B eventos, logo temos que:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. Se $A \subset B$ então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $0 \leq \mathbb{P} \leq 1$
5. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Probabilidade - Propriedades

A partir das propriedades definidas no slide anterior, podemos derivar outras propriedades. Sejam A e B eventos, logo temos que:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. Se $A \subset B$ então $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
4. $0 \leq \mathbb{P} \leq 1$
5. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
6. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *

* Principio da inclusão-exclusão

Probabilidade

Exemplo 8

De uma dada população, 42% são ruivos, 35% tem olhos azuis e 20% são ruivos de olhos azuis. Escolhendo ao acaso uma pessoa dessa população, qual a probabilidade de

a) *Ser ruivo ou ter olhos azuis?*
b) *Não ser ruivo e ter olhos azuis?*
c) *Ser ruivo mas não ter olhos azuis?*

Probabilidade

Exemplo 9

Um lote contém peças pesando 5, 10, 15, 20, 25 gramas. Admitamos que ao menos duas peças de cada peso sejam encontradas no lote. Duas peças são retiradas do lote. Sejam X o peso da primeira peça escolhida e Y o peso da segunda.

a) *Determine o espaço amostral desse experimento.*
b) *Determine a probabilidade de X ser igual a Y.*
c) *Determine a probabilidade de Y ser maior do que X.*
d) *Determine a probabilidade da primeira peça pesar 10 gramas a menos que a segunda peça.*

Probabilidade

Um professor de uma disciplina decide montar os grupos de um trabalho da seguinte forma:

1. Serão definidos 8 temas.
2. Serão definidos dois grupos para cada tema.
3. Cada grupo deve conter exatamente 2 alunos.
4. Os alunos devem manifestar interesse no tema, respeitando o limite máximo de 4 pessoas por tema. Sendo a formação do grupo definida de forma aleatória pelo professor.

Probabilidade

Um professor de uma disciplina decide montar os grupos de um trabalho da seguinte forma:

1. Serão definidos 8 temas.
2. Serão definidos dois grupos para cada tema.
3. Cada grupo deve conter exatamente 2 alunos.
4. Os alunos devem manifestar interesse no tema, respeitando o limite máximo de 4 pessoas por tema. Sendo a formação do grupo definida de forma aleatória pelo professor.

Suponha que Ana e Marcos desejam fazer o trabalho em dupla e, portanto, se inscreveram no mesmo tema. Qual a probabilidade de que eles terminem no mesmo grupo?

Probabilidade condicional

- A probabilidade de um evento ocorrer pode ser modificada ao descobrirmos novas informações que o afete.

Probabilidade condicional

- A probabilidade de um evento ocorrer pode ser modificada ao descobrirmos novas informações que o afete.
- Considere o experimento do lançamento de dois dados. Qual a probabilidade da soma dos resultados do lançamento dos dados dar 6 ?

Probabilidade condicional

- A probabilidade de um evento ocorrer pode ser modificada ao descobrirmos novas informações que o afete.
- Considere o experimento do lançamento de dois dados. Qual a probabilidade da soma dos resultados do lançamento dos dados dar 6 ?
- Digamos que o primeiro dado apresentou o número 3. Qual a probabilidade da soma dos resultados ser igual a 6?

Probabilidade condicional

- A probabilidade de um evento ocorrer pode ser modificada ao descobrirmos novas informações que o afete.
- Considere o experimento do lançamento de dois dados. Qual a probabilidade da soma dos resultados do lançamento dos dados dar 6 ?
- Digamos que o primeiro dado apresentou o número 3. Qual a probabilidade da soma dos resultados ser igual a 6?
- Digamos que um dos dados apresentou o número 3. Qual a probabilidade da soma dos valores ser um número par?

Probabilidade condicional

O problema proposto anteriormente é chamado de probabilidade condicional.
Sejam A e B dois eventos com $\mathbb{P}(B > 0)$. Dado que sabemos que B ocorreu, a probabilidade do evento A ocorrer pode ser definida como:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Probabilidade condicional

Uma editora lançou 360 livros e pode dividi-los entre ficção e não-ficção ou entre nacionais e internacionais segundo a tabela a seguir:

Origem \ Estilo	**Ficção**	**Não-ficção**	**Total**
Nacional	90	70	160
Internacional	120	80	200
Total	210	150	360

Table: Distribuição de livros por origem e estilo

Probabilidade condicional

Uma editora lançou 360 livros e pode dividi-los entre ficção e não-ficção ou entre nacionais e internacionais segundo a tabela a seguir:

Origem \ Estilo	**Ficção**	**Não-ficção**	**Total**
Nacional	90	70	160
Internacional	120	80	200
Total	210	150	360

Table: Distribuição de livros por origem e estilo

- Um livro é escolhido. Qual a probabilidade do livro escolhido ser nacional dado que é um livro não-ficcional.

Regra da multiplicação

Sejam A e B dois eventos com $\mathbb{P}(B) > 0$. Então vale:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$$

Exemplo 10

Uma urna contém 4 bolinhas amarelas e 2 bolinhas verdes. Um experimento consiste em retirar uma bolinha, verificar sua cor e retirar uma segunda bolinha sem reposição. Calcule a probabilidade associada a cada re- sultado desse experimento.

Observação: Resolva usando a regra da multiplicação e o diagrama de árvore.

Regra da multiplicação

Podemos generalizar a regra da multiplicação para mais de 2 eventos:

Regra da multiplicação

Podemos generalizar a regra da multiplicação para mais de 2 eventos:
Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos num mesmo espaço amostral. Se $P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$, então:

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}(A_n|A_i, \ldots, A_{n-1})$$

Particionamento do espaço amostral

Uma técnica que nos será últil a partir de agora é particionar (dividir) o espaço amostral em eventos **mutuamente excludentes** de tal forma que a união deles seja o próprio espaço amostral.

Particionamento do espaço amostral

Sejam A e B dois eventos em um mesmo espaço amostral:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)$$

Particionamento do espaço amostral

Exemplo 11 (1)

Em certo hospital especializado em doenças respiratórias, 75% dos pacientes são fumantes ou ex-fumantes e são indicados pelo código F, enquanto pacientes que nunca fumaram são indicados pelo código NF. Cerca de 60% dos pacientes do grupo F precisam de internação, enquanto apenas 20% dos não-fumantes são internados. Se escolhermos ao acaso um paciente que acabou de entrar no hospital, qual a probabilidade dele precisar de internação?

Particionamento do espaço amostral

Podemos generalizar essa noção para n eventos através do Teorema abaixo, conhecido como **Lei da Probabilidade Total** Seja $\{B_1, \ldots, B_n\}$ uma partição do espaço amostral Ω, onde, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $\mathbb{P}(B_i) > 0$ e $\{B_1, \ldots, B_n\}$ disjuntos dois a dois. Se A é um evento qualquer em Ω, vale:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Particionamento do espaço amostral

Exemplo 12 (2)

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza em uma fazenda F_1, 30% de uma outra fazenda F_2 e 50% de F_3. Um orgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. Na indústria de sorvetes, os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas.

- *Qual a probabilidade do leite estar adulterado?*

Teorema de Bayes

Sejam A e B dois eventos e $\mathbb{P}(B) > 0$. Então vale:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Teorema de Bayes

Exemplo 13 (3)

Em dado aeroporto, sabe-se que 90% dos pousos atrasam em dias de chuva e 15% nos dias que não chove. Seu amigo tem um voo com destino a esse aeroporto e a previsão de tempo disse que com probabilidade 0,4 estaria chovendo na região. Dado que o pouso está atrasado, qual a probabilidade de estar chovendo na região do aeroporto?

Teorema de Bayes

Exemplo 14 (4)

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza em uma fazenda F_1, 30% de uma outra fazenda F_2 e 50% de F_3. Um orgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. Na indústria de sorvetes, os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas.

- *Qual é a probabilidade do leite ser proveniente da fazenda F_1 dado que o leite está adulterado?*

Teorema de Bayes

Exemplo 15 (5)

Uma clínica envia amostras de uma certa substância para 3 laboratórios de análises A, B e C nas seguintes proporções 0,2; 0,3; 0,5 respectivamente. A probabilidade de cada um dos laboratórios elaborar uma análise errada é de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ *respectivamente. Baseado nessas informações, pergunta-se:*

- *Qual é a probabilidade de um exame executado dar errado?*
- *Uma análise resultou errada, qual a probabilidade de ter sido feita pelo laboratório A? Pelo B? Pelo C?*

Teorema de Bayes

Exemplo 16 (6)

Pelo fato de um novo procedimento médico ter se mostrado efetivo na detecção prévia de uma doença, propôs-se um rastreamento médico da população. A probabilidade do teste identificar corretamente alguém com a doença, dando positivo, é de 0,99 e a probabilidade do teste identificar corretamente alguém sem a doença, dando negativo, é de 0,95. A incidência da doença na população é 0,0001. Você fez o teste e o resultado foi positivo. Qual a probabilidade de você ter a doença?

Independência

Dizemos que dois eventos A e B definidos em um mesmo espaço amostral são independentes se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Independência

Exemplo 17 (7)

Suponha que a probabilidade de uma pessoa ser do tipo sanguíneo O é 0,45, ser A é 0,42 e ser B é 0,10. Suponha ainda que a probabilidade de Rh^+ é se 0,90 e que o fator independe do tipo sanguíneo. Nestas condições, qual a probabilidade de uma pessoa tomada ao acaso da população ser:

- O e Rh^+
- AB e RH^-

Independência

Exemplo 18

Ao lançarmos dois dados de seis faces, considere os eventos:

- *A: O resultado do primeiro é 4*
- *B: A soma dos dois resultados é 7*

A e B são independentes?

Variáveis aleatórias

Em muitos experimentos é útil trabalhar com uma "variável resumo".

Exemplo 19 (8)

Numa pesquisa de opinião, decidimos perguntar a 20 pessoas se elas concordam ou discordam sobre determinado assunto. Nessa pesquisa, anotaremos o valor 1 se a pessoa concorda e 0 se a pessoa discorda.

- *Observe que o tamanho do espaço amostral desse experimento contém* $2^{20} = 1048576$ *elementos.*
- *Podemos estar interessados em características específicas em relação aos elementos do espaço amostral.*

Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória nada mais é que uma função que toma como entrada elementos do espaço amostral e gera como saída um número real

- Variáveis aleatórias serão denotadas em geral por letras maiúsculas do final do alfabeto: W, X, Y, Z

Variáveis aleatórias

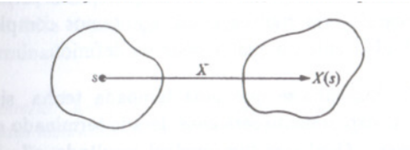
Uma variável aleatória nada mais é que uma função que toma como entrada elementos do espaço amostral e gera como saída um número real

- Variáveis aleatórias serão denotadas em geral por letras maiúsculas do final do alfabeto: W, X, Y, Z
- Denotaremos por Ω_X o conjunto de possíveis valores assumidos pela Variável Aleatória X.

Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória nada mais é que uma função que toma como entrada elementos do espaço amostral e gera como saída um número real

- Variáveis aleatórias serão denotadas em geral por letras maiúsculas do final do alfabeto: W, X, Y, Z
- Denotaremos por Ω_X o conjunto de possíveis valores assumidos pela Variável Aleatória X.
- Atenção: Note que X pode ser a função identidade, Ω_X é igual a Ω.



Variáveis aleatórias

Exemplo 20 (9)

Considere o experimento do lançamento de duas moedas. Nesse caso temos:

$$\Omega = \{(Cara, Cara), (Coroa, Coroa), (Cara, Coroa), (Coroa, Cara)\}$$

Definamos a variável aleatória X *:Número de caras obtidas nas duas moedas. Dessa forma temos,* $X((Cara, Cara)) = 2$, $X((Cara, Coroa)) = 1$, $X((Coroa, Cara)) = 1$, $X((Coroa, Coroa)) = 0$

Variáveis aleatórias discretas

Uma variável aleatória discreta é aquela que pode tomar apenas um número contável de valores, tais como $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Denotaremos por Ω_X o conjunto de possíveis valores que essa variável pode assumir.

- Variáveis aleatórias discretas geralmente estão relacionadas à contagem.

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo 21 (10)

Se lançamos três dados de seis faces podemos definir, entre outras, as seguintes variáveis aleatórias discretas:

- *X: A soma dos resultados:*

$$\Omega_X = \{3, 4, 5, \ldots, 16, 17, 18\}$$

- *: X: O produto dos dois primeiros resultados:*

$$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

- *X: O máximo entre os resultados:*

$$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- *X: O mínimo entre os resultados:*

$$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Variáveis aleatórias discretas

Exemplo 22

Experimento	Variável aleatória (x)	Valores possíveis para a variável aleatória
Contatar cinco clientes	Número de clientes que fazem um pedido de compra	0, 1, 2, 3, 4, 5
Inspecionar uma remessa de 50 rádios	Número de rádios com defeito	0, 1, 2, . . . , 49, 50
Operar um restaurante por um dia	Número de clientes	0, 1, 2, 3, . . .
Vender um automóvel	Gênero do cliente	0 se for homem; 1 se for mulher

Distribuição de uma variável aleatória discreta

A função de probabilidade de uma variável aleatória discreta é uma lista com as probabilidades associadas a cada possível valor que a variável assume. Também é chamada de função massa de probabilidade. Seja X uma variável aleatória que assume os valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, utilizaremos a seguinte notação para representar essa função:

$$p(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$$

Essa função deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $p_X(x_i) \geq 0$ para todo i,
- $\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) = 1$

Distribuição de uma variável aleatória discreta

Considere o experimento de lançar uma moeda honesta para o ar 3 vezes e anotar a sequência dos resultados

- Qual o espaço amostral desse experimento?

Distribuição de uma variável aleatória discreta

Considere o experimento de lançar uma moeda honesta para o ar 3 vezes e anotar a sequência dos resultados

- Qual o espaço amostral desse experimento?
- Definamos a variável aleatória Y: Número de caras obtidas, qual a função de probabilidade associada a essa variável?

Distribuição de uma variável aleatória discreta

Exemplo 23 (11)

Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como "passa" ou "falha". Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0,8 e que as pastilhas sejam independentes. Seja a variável resposta X definida como o número de pastilhas de um lote que passa no teste.

- *Defina o espaço amostral desse experimento*
- *Determine a função de probabilidade de X.*

Função distribuição acumulada

Seja X uma variável aleatória, definiremos sua **Função distribuição acumulada** da seguinte forma:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Função distribuição acumulada

Exemplo 24 (12)

Considere a variável aleatória X que representa o número de pedidos durante o período de 5 minutos em uma empresa de vendas online.

r	0	1	2	3	4	5	6
$Pr(X = r)$	0,129	0,264	0,271	0,185	0,095	0,039	0,017

Nesse caso:

Função distribuição acumulada

Exemplo 24 (12)

Considere a variável aleatória X que representa o número de pedidos durante o período de 5 minutos em uma empresa de vendas online.

r	0	1	2	3	4	5	6
$Pr(X = r)$	0,129	0,264	0,271	0,185	0,095	0,039	0,017

Nesse caso:

- $F_X(-1) = \mathbb{P}(X \leq -1) = 0$
- $F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 0,129$
- $F_X(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,129 + 0,264 = 0,393$
- $F_X(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0,129 + 0,264 + 0,271 = 0,664$

Função distribuição acumulada

- $F_X(-1) = \mathbb{P}(X \leq -1) = 0$
- $F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 0,129$
- $F_X(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,129 + 0,264 = 0,393$
- $F_X(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0,129 + 0,264 + 0,271 = 0,664$

$\vdots$

-
- $F_X(6) = \mathbb{P}(X \leq 6) = 1$

Variável aleatória discreta

Exemplo 25 (12)

Considere a variável aleatória X possuindo a seguinte função de probabilidade:

x	$p_X(x)$
20	0,20
25	0,15
30	0,25
35	0,40

1. *Esta distribuição de probabilidade é valida? Explique.*
2. *Qual a probabilidade de X ser igual a 30?*
3. *Qual a probabilidade de X ser menor ou igual a 25?*
4. *Qual é a probabilidade de X ser maior que 30?*

Imagine o seguinte jogo:

- O jogador aposta $R\$10,00$ e escolhe cara ou coroa
- Uma moeda honesta é jogado ao ar.
- Se a moeda mostrar o resultado cara, então o jogador ganhar $R\$10,00$. Caso contrário, perde os $R\$10,00$ apostados.

Imagine o seguinte jogo:

- O jogador aposta $R\$10,00$ e escolhe cara ou coroa
- Uma moeda honesta é jogado ao ar.
- Se a moeda mostrar o resultado cara, então o jogador ganhar $R\$10,00$. Caso contrário, perde os $R\$10,00$ apostados.

Esse jogo é justo?

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

O valor esperado, média, ou esperança matemática é uma quantidade utilizada como resumo do comportamento de uma V.A.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_i \in \Omega_X} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Historicamente, o conceito de esperança foi usado para verificar se jogos eram justos. Entretanto, esse conceito não se restringe apenas à esse campo.

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Historicamente, o conceito de esperança foi usado para verificar se jogos eram justos. Entretanto, esse conceito não se restringe apenas à esse campo.
Vamos verificar se o jogo proposto anteriormente é justo:

- Definamos X: ganho obtido no jogo.

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Historicamente, o conceito de esperança foi usado para verificar se jogos eram justos. Entretanto, esse conceito não se restringe apenas à esse campo.

Vamos verificar se o jogo proposto anteriormente é justo:

- Definamos X: ganho obtido no jogo.
- $\mathbb{E}[X] = 10 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{1}{2} = 0$

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Historicamente, o conceito de esperança foi usado para verificar se jogos eram justos. Entretanto, esse conceito não se restringe apenas à esse campo.

Vamos verificar se o jogo proposto anteriormente é justo:

- Definamos X: ganho obtido no jogo.
- $\mathbb{E}[X] = 10 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{1}{2} = 0$
- Portanto, o jogo é justo.

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Exemplo 26

Um jogo funciona da seguinte forma:

- *O jogador deve pagar R\$10,00 para participar do jogo.*
- *Se a soma dos resultados dos dois dados for igual a 10, então o jogador ganha* $R\$200,00$
- *Se a soma dos resultados dos dois dados for igual a 7, então o jogador perde* $R\$100,00$
- *Se a soma dos resultados dos dois dados for um número primo diferente de 7, então o jogador ganha* $R\$100,00$
- *Se a soma dos resultados dos dois dados for um número não-primo diferente de 10, então o jogador perde* $R\$50,00$

Sabendo disso, defina uma variável aleatória como sendo o ganho (ou perda) obtido pelo jogador, obtenha sua esperança e responda a seguinte pergunta: Esse jogo é justo?

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Vamos jogar outro jogo:

- O jogador deve apostar x reais, com $x > 0$.

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Vamos jogar outro jogo:

- O jogador deve apostar x reais, com $x > 0$.
- Uma moeda honesta é jogado ao ar até que saia cara pela primeira vez.

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Vamos jogar outro jogo:

- O jogador deve apostar x reais, com $x > 0$.
- Uma moeda honesta é jogado ao ar até que saia cara pela primeira vez.
- O número de jogadas até sair cara (inlcuindo a própria rodada que saiu cara) é denotado por n.

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Vamos jogar outro jogo:

- O jogador deve apostar x reais, com $x > 0$.
- Uma moeda honesta é jogado ao ar até que saia cara pela primeira vez.
- O número de jogadas até sair cara (inlcuindo a própria rodada que saiu cara) é denotado por n.
- O jogador ganha $R\$: 2^n$

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Vamos jogar outro jogo:

- O jogador deve apostar x reais, com $x > 0$.
- Uma moeda honesta é jogado ao ar até que saia cara pela primeira vez.
- O número de jogadas até sair cara (inlcuindo a própria rodada que saiu cara) é denotado por n.
- O jogador ganha $R\$: 2^n$
- Qual o valor de x para que esse jogo seja justo?

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

O jogo do slide anterior ficou conhecido como Paradoxo de São Petesburgo. Sua proposição provoca discussões que se estendem até os dias de hoje.

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Vamos sair um pouco do contexto dos jogos. Se eu jogo um dado simétrico de seis faces, definindo X : Resultado apresentado pelo dado.

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Vamos sair um pouco do contexto dos jogos. Se eu jogo um dado simétrico de seis faces, definindo X : Resultado apresentado pelo dado.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{s=1}^{6} s \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

Esperança Matemática para Variáveis Discretas

Vamos sair um pouco do contexto dos jogos. Se eu jogo um dado simétrico de seis faces, definindo X : Resultado apresentado pelo dado.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{s=1}^{6} s \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

Qual o significado do valor $3,5$?

Variância de Variáveis Aleatórias

A variância representa o grau de dispersão de uma variável aleatória em relação a sua média ou esperança $\mathbb{E}[X]$. A forma geral para o cálculo é:

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

Uma forma alternativa de presentar a variância é através da seguinte expressão:

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

onde

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x_i \in \Omega_X} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i)$$

Exemplos

Exemplo 27

Considere o experimento de lançar uma moeda honesta para o ar 5 vezes e anotar a sequência dos resultados

- *Qual o espaço amostral desse experimento?*
- *Definamos a variável aleatória Y: Número de tentativas até obter a primeira cara, qual a função de probabilidade associada a essa variável?*
- *Calcule o valor esperado da variável Y.*
- *Calcule a variância da variável Y.*

Exemplos

Exemplo 28 (11)

Em um processo de fabricação de semicondutores, três pastilhas de um lote são testadas. Cada pastilha é classificada como "passa" ou "falha". Suponha que a probabilidade de uma pastilha passar no teste seja 0,8 e que as pastilhas sejam independentes. Seja a variável resposta X definida como o número de pastilhas de um lote que passa no teste.

- *Defina o espaço amostral desse experimento*
- *Determine a função de probabilidade de X.*
- *Determine o valor esperado de X.*
- *Determine a variância de X.*

Outras medidas de dispersão

Também podemos calcular o desvio padrão de uma variável aleatória.

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Além disso, podemos calcular o coeficiente de variação

$$CV = \frac{DP(X)}{\mathbb{E}[X]}$$

Propriedades do Valor Esperado e Variância

$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.as independentes com $\mathbb{E}[X_i] < \infty$ então:

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + E[X_2] + \cdots + \mathbb{E}[X_n]$$

Distribuições de Probabilidade para Variáveis Aleatórias Discretas

Algumas variáveis aleatórias aparecem com bastante frequência em situações práticas e justificam um estudo mais aprofundado. Em geral, nesses casos, a **função de probabilidade** pode ser escrita de maneira mais compacta, isto é, existe uma lei para atribuir probabilidades.
As distribuições de probabilidade para variáveis discretas mais importantes são:

- Distribuição de Bernoulli
- Distribuição Binomial
- Distribuição de Poisson
- Distribuição Geométricas
- Distribuição Hipergeométrica
- Distribuição Binomial negativa

Distribuição de Bernoulli

Considere os seguintes experimentos:

- Lançamento de uma moeda
- Retirada de uma peça de um conjunto de 10 peças seguido pela verificação se a peça é defeituosa ou não
- Pesquisa de opinião se aprova ou não aprova a atual gestão da UFRJ.
- Um aluno realiza uma prova e em seguida verifica se passou ou não.
- Realização de inseminação artificial seguida pela verificação se ocorreu gravidez ou não.

O que esses experimentos tem em comum?

Distribuição de Bernoulli

Considere os seguintes experimentos:

- Lançamento de uma moeda
- Retirada de uma peça de um conjunto de 10 peças seguido pela verificação se a peça é defeituosa ou não
- Pesquisa de opinião se aprova ou não aprova a atual gestão da UFRJ.
- Um aluno realiza uma prova e em seguida verifica se passou ou não.
- Realização de inseminação artificial seguida pela verificação se ocorreu gravidez ou não.

O que esses experimentos tem em comum?
Todos os experimentos acima tem unicamente dois resultados possíveis. Sendo possível criar uma variável aleatória que associe cada resultado aos valores 1 e 0.

Distribuição de Bernoulli

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X que segue distribuição de Bernoulli com parâmetro p é dada por.

x	$p_X(x)$
1	p
0	1-p

- Notação: $X \sim Bernoulli(p)$
- A função de probabilidade da distribuição Bernoulli é dada por:

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ para x} = 0{,}1$$

Distribuição de Bernoulli

Valor Esperado

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Variância

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= p \cdot 1^2 + (1 - p) \cdot 0 - p^2 \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

Distribuição de Bernoulli: Exemplo

Exemplo 29 (13)

Experimento: *Lançamento de um dado Definamos X : Verificação se o dado apresentou uma face menor que 3*

Temos que:

- $X = 1$ *se o resultado obtido for 1 ou 2*
- $X = 0$ *se o resultado obtido for 3, 4 ou 5*

Função de probabilidade de X

Distribuição de Bernoulli: Exemplo

Exemplo 29 (13)

Experimento: *Lançamento de um dado Definamos* X : *Verificação se o dado apresentou uma face menor que 3*

Temos que:

- $X = 1$ *se o resultado obtido for 1 ou 2*
- $X = 0$ *se o resultado obtido for 3, 4 ou 5*

Função de probabilidade de X

x	$p_X(x)$
1	2/6
0	4/6

Podemos dizer que $X \sim Bernoulli(1/3)$

Distribuição Binomial

- São realizados n ensaios de Bernoulli independentes
- Cada ensaio só pode ter dois resultados possíveis: sucesso ou fracasso
- A probabilidade p de sucesso em cada ensaio é a mesma

Vamos definir a variável aleatória X como sendo o número total de sucessos nos n ensaios de Bernoulli. Portanto, X poderá assumir os valores $0, 1, \ldots, n$

Distribuição Binomial

Suponha que lancemos uma moeda n vezes. Como vimos, podemos construir uma variável aleatória associada a esse experimento que resulta em 1 caso a moeda de cara e 0 caso de coroa. Suponha que ocorra 1 apenas nos x primeiros ensaios e 0 nos $n - x$ ensaios restantes.

$$\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{x}, \underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{n-x}$$

Como os ensaios são independentes, temos que:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot p \cdots p}_{x} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdots (1-p)}_{n-x} = p^x (1-p)^{n-x}$$

Distribuição Binomial

Porém, o evento "x sucessos em n ensaios" pode ocorrer de diferentes ordens distintas, todas com a mesma probabilidade. Como o número de ordens é o número de combinações de n elementos escolhendo x, então a probabilidade de ocorrerem x sucessos em n ensaios de Bernoulli é representada por:

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, \ldots, n$$

Distribuição Binomial: Exemplo

Retira-se 3 cartas com reposição. Seja X o número de vezes que sai alguma carta de copas. Então $X \sim (3, 1/4)$.

$\Omega_X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^1$$

- 3 : Número de formas de ter 2 cartas de copas em 3 tentativas
- 2 : Número de copas nas 3 tentativas
- 1 : Número de não-copas nas 3 tentativas
- Calcule $\mathbb{P}(X = 0)$

Distribuição Binomial

Valor Esperado e Variância: $\mathbb{E}[X] = np$ e $Var(X) = np(1-p)$

Distribuição Binomial: Exemplo

Voltar ao exemplo das pastilhas.

Distribuição Binomial: Exemplo

Exemplo 30 (14)

Certo jogador de basquete costuma acertar 70% dos lançamentos na cesta. Esse jogador foi convidado para participar de um evento beneficente em que ele pode arrecadar um grande prêmio para uma instituição de sua escolha se ele fizer 10 lançamentos e acertar todos. Supondo que os lançamentos são independentes, qual a probabilidade de ele conseguir o prêmio?

Distribuição Binomial: Exemplo

Exemplo 31 (16)

Cada amostra de ar tem uma probabilidade de 10% de conter um determinado poluente orgânico. Considere 18 amostras que sejam independentes com relação à presença do poluente. Seja a variável aleatória X definida como o número de amostras de ar que contêm o poluente orgânico. pergunta-se:

- *Qual a probabilidade de que exatamente duas amostras contenham o poluente*
- *Qual a probabilidade de que pelo menos 4 amostras contenham o poluente.*

Distribuição de Poisson

Seja um experimento realizado nas seguintes condições:

1. As ocorrências são independentes
2. As ocorrências são aleatórias
3. A variável aleatória X é o número de ocorrências de um evento ao longo de algum intervalo

Vamos definir a variável aleatória Xcomo sendo o número de ocorrências em um intervalo. Portanto, X poderá assumir os valores $0, 1, \ldots$ (sem limite superior)

Distribuição de Poisson

Uma variável aleatória segue a distribuição de Poisson se sua função de probabilidade é dada por:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

em que o parâmetro $\lambda > 0$ representa a taxa média de ocorrência por unidade de medida(tempo, por exemplo)

Distribuição de Poisson

Notação: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ Esperança e Variância:
$\mathbb{E}[X] = Var(X) = \lambda$

Exemplo: Distribuição de Poisson

Sabe-se que em média ocorrem 2 terremotos por semana em certa região do mundo. Numa dada semana, qual a probabilidade de ocorrerem 4 terremotos nessa região?

Exemplo: Distribuição de Poisson

Exemplo 32 (18)

Chamadas telefônicas são recebidas à taxa de 48 por hora no balcão de reservas da Regional Airways

- *Calcule a probabilidade de serem recebidas três chamadas em um intervalo de cinco minutos?*
- *Calcule a probabilidade de serem recebidas exatamente 10 chamadas em 15 minutos.*

Variáveis aleatórias contínuas

Uma variável aleatória é contínua se assume valores em qualquer intervalo dos números reais.
Dessa forma, não é possível atribuir probabilidades para um ponto específico, apenas para intervalos da reta.
Dize-se que X é uma variável aleatória contínua, se existir uma função f_X, denominada função densidade de probabilidade (fdp) de X que satisfaça as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$ para todo x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Variáveis aleatórias contínuas

Exemplos de variáveis aleatórias contínuas:

- Altura de estudantes em uma disciplina
- Intervalo de tempo entre chegadas de um ônibus
- Peso de pessoas
- Profundidade de lagos

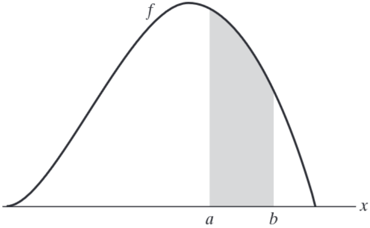
Variáveis aleatórias contínuas

Nesse caso, temos:

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

O que implica que

$$\mathbb{P}(X = a) = 0$$



$P(a \leq X \leq b)$ = área da região sombreada

Variáveis aleatórias contínuas

Exemplo 33 (20)

Suponhamos que um ponto seja escolhido no intervalo $(0, 1)$.*Representemos por* X *a variável aleatória cujo valor seja a abcissa* x *do ponto escolhido.*
Seja $I \subset (0, 1)$, *etão* $\mathbb{P}(X \in I)$ *será diretamente proporcional ao comprimento de* I.
Qual é a fdp de X? *Podemos encontrar uma função* f *tal que:*

Variáveis aleatórias contínuas

Exemplo 33 (20)

Suponhamos que um ponto seja escolhido no intervalo $(0,1)$.*Representemos por* X *a variável aleatória cujo valor seja a abcissa* x *do ponto escolhido.*
Seja $I \subset (0,1)$, *etão* $\mathbb{P}(X \in I)$ *será diretamente proporcional ao comprimento de* I.
Qual é a fdp de X? *Podemos encontrar uma função* f *tal que:*

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Variáveis aleatórias contínuas

Exemplo 33 (20)

Suponhamos que um ponto seja escolhido no intervalo $(0,1)$.*Representemos por* X *a variável aleatória cujo valor seja a abcissa* x *do ponto escolhido.*
Seja $I \subset (0,1)$, *etão* $\mathbb{P}(X \in I)$ *será diretamente proporcional ao comprimento de* I.
Qual é a fdp de X? *Podemos encontrar uma função* f *tal que:*

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Perceba que se $a < b < 0$ *ou* $1 < a < b, \mathbb{P}(a < X < b) = 0$ *e, portanto,* $f(x) = 0$. *Se* $0 < a < b < 1, \mathbb{P}(a < X < b) = b - a$ *e, portanto,* $f(x) = 1$. *Dessa forma, temos que:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Variáveis aleatórias contínuas

Exemplo 34 (21)

Suponha que X seja uma variável aleatória contínua cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

a) *Qual é o valor de C?*

b) *Determine $\mathbb{P}(X > 1)$*

Variáveis aleatórias contínuas

A quantidade de tempo, em horas, que um computador funciona sem estragar é uma variável aleatória contínua com função deinsidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Qual a probabilidade de que:

a) O computador funcione entre 50 e 150 horas antes de estragar?
b) Ele funcione pelo menos 100 horas?

Função distribuição de uma variável aleatória contínua

Vimos que sendo X uma variável aleatória discreta:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Essa definição se manterá a mesma para variáveis aleatórias contínuas, no entanto, para obter a função distribuição teremos que nos valer do uso da integral.
Seja Y uma variável aleatória contínua, temos que sua função distribuição acumulada é dada por:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)$$

Esperança de Variáveis aleatórias contínuas

Para variáveis aleatórias discretas, vimos que a esperança de uma variável aleatória discreta X é dada por:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \Omega_X} x\mathbb{P}(X = x)$$

De forma análoga, sendo X uma variável aleatória contínua, temos que:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)$$

Variância de Variáveis aleatórias contínuas

A seguinte relação ainda é valida para variáveis aleatórias contínuas:

$$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

onde:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$$

Distribuição Normal padrão

Uma variável aleatória Z tem distribuição **Normal padrão**, se:

- Z assume valores em $\mathbb{R}$
- A f.d.p f_Z é dada por:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, z \in \mathbb{R}$$

Notação $Z \sim N(0, 1)$

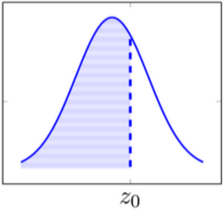
Distribuição Normal padrão

Se $Z \sim N(0,1)$, f_Z é simétrica em torno de 0

$$f_Z(z) = f_Z(-z) \forall z \in \mathbb{R}$$

Como a Normal padrão é uma distribuição contínua, a seguinte relação é valida:

$$\mathbb{P}(Z \leq z_0) = \int_{-\infty}^{z_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \text{ para } z \in \mathbb{R}$$



Essa integral é impossível de ser resolvida analiticamente, nesse sentido, surge a necessidade de utilização de uma tabela.

Utilizando a tabela da Distribuição Normal padrão

Conforme visto no slide anterior, temos que utilizar tabelas.
Algumas informações importantes:

- A Normal não é a única distribuição na qual é preciso utilizar tabelas.
- Não existe apenas uma tabela da distribuição Normal, assim como veremos nessa aula.

Distribuição Normal padrão

Seja $Z \sim N(0,1)$, calcule as seguintes probabilidades:

- $\mathbb{P}(Z > 0)$
- $\mathbb{P}(Z < 0)$
- $\mathbb{P}(Z \leq 0,76)$
- $\mathbb{P}(Z \geq 0,76)$
- $\mathbb{P}(Z \leq 1,79)$
- $\mathbb{P}(Z \geq 2,54)$
- $\mathbb{P}(Z > -0,5)$
- $\mathbb{P}(Z < -0,5)$
- $\mathbb{P}(Z < -1,43)$

Distribuição Normal(μ, σ)

Uma variável aleatória tem distribuição Normal com parâmetros μ, σ^2, se:

- X assume valores em $\mathbb{R}$
- A f.d.p f_X é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Notação: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Distribuição Normal(μ, σ)

Problema:

- Novamente temos uma função a qual não é possível calcular a integral analiticamente.
- Só temos uma tabela para calcular propriedades envolvendo a distribuição Normal e ela considera apenas distribuições normais com média 0 e variância 1, o que fazer?

Distribuição Normal(μ, σ)

Problema:

- Novamente temos uma função a qual não é possível calcular a integral analiticamente.
- Só temos uma tabela para calcular propriedades envolvendo a distribuição Normal e ela considera apenas distribuições normais com média 0 e variância 1, o que fazer?

Solução: Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ então:

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Distribuição Normal(μ, σ)

Considere $X \sim N(10, 5)$ **Exemplos:**

a) $\mathbb{P}(X \leq 13)$
b) $\mathbb{P}(X \geq 11,7)$
c) $\mathbb{P}(X > 9.75)$
d) $\mathbb{P}(X < 7.3)$
e) $\mathbb{P}(9,75 < X < 11,7)$
f) $\mathbb{P}(X < 9,75 | X < 11,7)$
g) O valor de c tal que $\mathbb{P}(X > c) = 0.95$