Prova 2 - Estatística - 2025.1

1) (1,8 pontos)Definamos os seguintes eventos:

- T_+: O teste dar positivo.
- C: Leite estar contaminado.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C|T_+) &= \frac{\mathbb{P}(T_+|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T_+)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_+|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T_+ \cap C) + \mathbb{P}(T_+ \cap C^c)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_+|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(T_+|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(T_+|C^c)\mathbb{P}(C^c)} \\
&= \frac{0,7 \cdot 0,3}{0,7 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,7} = \frac{0,21}{0,21 + 0,14} = \frac{0,21}{0,35} = 0,6
\end{aligned}$$

Resposta: O Engenheiro deve rejeitar esse lote.

2) (2,25 pontos)

Conforme vimos em sala, uma forma de avalair se um jogo é justo é através do conceito de esperança. Definamos a variável aleatória G : Ganho(ou perda) do jogador, portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G] = &-3 + 1,7649 \cdot 10^6 \cdot \mathbb{P}(G = 1,7649 \cdot 10^6) + 1,7374 \cdot 10^3 \cdot \mathbb{P}(G = 1,7374 \cdot 10^3) + \\
&+ 3 \cdot 10^1 \cdot \mathbb{P}(G = 3 \cdot 10^1) + 1,2 \cdot 10^1 \cdot \mathbb{P}(G = 1,2 \cdot 10^1) + 6 \cdot \mathbb{P}(G = 6)
\end{aligned}$$

O espaço amostral Ω do experimento são todas as possíveis combinações de 15 números dentre os 25 do cartão, logo:

$$|\Omega| = \binom{25}{15}.$$

A maior parte dos resultados abaixo está na seção de Informações Úteis da prova.

Dessa forma:

- $\mathbb{P}(G = 1,7649 \cdot 10^6) = \dfrac{1}{\binom{25}{15}} = 3,06 \cdot 10^{-7}$
- $\mathbb{P}(G = 1,7374 \cdot 10^3) = \dfrac{\binom{15}{14}\binom{10}{1}}{\binom{25}{15}} = \dfrac{150}{\binom{25}{15}} = 4,58 \cdot 10^{-5}.$

- $\mathbb{P}(G = 3 \cdot 10^1) = \frac{\binom{15}{13}\binom{10}{2}}{\binom{25}{15}} = \frac{4725}{\binom{25}{15}} = 1,44 \cdot 10^{-3}.$

- $\mathbb{P}(G = 1,2 \cdot 10^1) = \frac{\binom{15}{12}\binom{10}{3}}{\binom{25}{15}} = \frac{455 \cdot 120}{\binom{25}{15}} = \frac{54600}{\binom{25}{15}} = 5,01 \cdot 10^{-2}.$

- $\mathbb{P}(G = 6) = \frac{\binom{15}{11}\binom{10}{4}}{\binom{25}{15}} = \frac{1365 \cdot 210}{\binom{25}{15}} = \frac{286650}{\binom{25}{15}} = 8,77 \cdot 10^{-2}.$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G] &= -3 + 1,7649 \cdot 10^6 \cdot 3,06 \cdot 10^{-7} + 1,7374 \cdot 10^3 \cdot 4,58 \cdot 10^{-5} + 3 \cdot 10^1 \cdot 1,44 \cdot 10^{-3} + 1,2 \cdot 10^1 \cdot 5,01 \cdot 1\\
&= -3 + 5,4 \cdot 10^{-1} + 7,96 \cdot 10^{-2} + 4,32 \cdot 10^{-2} + 6,01 \cdot 10^{-1} + 5,26 \cdot 10^{-1}\\
&= -3 + 1,667 + 0,123\\
&= -3 + 1,79\\
&= -1,21
\end{aligned}$$

1. Haja vista que a esperança gerou um valor negativo, esse jogo não é justo, favorecendo a empresa que realiza o jogo e não o jogador.
2. i) (0,25 pontos) Pierre está usando a interpretação frequentista

   ii) (0,5 ponto) Podemos dizer que a interpretação adotada por ele não é a mais adequada, pois a interpretação clássica parece se encaixar melhor no problema, haja vista que, dado que o sorteio é feito de forma aleatória, cada número sorteado possui a mesma chance de ser sorteado. Se estivessemos em um cenário onde existem dúvidas sobre a equiprobabilidade dos resultados (por exemplo: sites de aposta online que surgiram recentemente), poderíamos dizer que a interpretação de Pierre é coerente e mais adequada que a clássica, entretanto, é importante ressaltar que a interpretação frequentista só nos da garantias assintóticas, ou seja, frequência = probabilidade quando o número de amostras (ou tentativas) tende para o infinito, dessa forma, apesar de ser mais adequada nesse contexto, na prática as garantias são frágeis.

3)

a)
- $$\mathbb{E}[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

- $$Var(X) = \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{2b^3 - 2a^3 - 3(b-a)\cdot(a+b)^2}{12(b-a)} \\
&= \frac{2b^3 - 2a^3 - 3(b^2-a^2)\cdot(a+b)}{12(b-a)} \\
&= \frac{2b^3 - 2a^3 - 3ab^2 - 3b^3 + 3a^3 + 3a^2b}{12(b-a)} \\
&= \frac{a^3 - 3ab^2 + 3a^2b - b^3}{12(b-a)} \\
&= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

i) É uma função cujo domínio é o espaço amostral Ω e o contradomínio é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.

ii) Uma variável aleatória discreta assume valores em um conjunto enumerável, já a contínua assume valores em um conjunto não-enumerável.

iii) É uma função que fornece a probabilidade da variável aleatória assumir cada um dos possíveis valores de seu suporte. Sendo X uma variável aleatória discreta e p_X é função de probabilidade de X se e somente se:

- $p_X(x) \geq 0 \forall x \in \Omega_X$
- $\sum_{x \in \Omega_X} p_X(x) = 1$

iv) $\mathbb{P}(T = 2) = 0$ e $\mathbb{P}(V = 2) = 1/6$

v) $F_T(4) = \int_1^4 \frac{1}{5} dx = 3/5$ e $F_V(4) = 4/6$

vi) Discreta: Observar o resultado apresentado por um dado de seis faces. Contínua: Tempo de resposta de uma página web.

4)

a)

$$
\begin{aligned}
IC(\mu, 95\%) &= [-0,533 - 1,96 \cdot \frac{0,072}{\sqrt{36}}; -0,533 + 1,96 \cdot \frac{0,072}{\sqrt{36}}] \\
&= [-0,533 - 1,96 \cdot 0,012; -0,533 + 1,96 \cdot 0,012] \\
&= [-0,533 - 0,02352; -0,533 + 0,02352] \\
&= [-0,5565; -0,5095]
\end{aligned}
$$

b) Não. A interpretação de Leôncio está completamente equivocada. A interpretação correta seria que se fossem coletadas outras n amostras e montados intervalos de confiança para a média utilizando cada uma das amostras, então espera-se que 95% dos intervalos contém a verdadeira média.

c) Se o tamanho da amostra aumntasse, então teríamos um intervalos mais estreito. Se o nível de confiança aumentasse, teríamos um intervalo de maior amplitude.

d)

$$1,96 \cdot \frac{0,072}{\sqrt{n}} = 0,005 \iff n = \left(\frac{1,96 \cdot 0,072}{0,005}\right)^2$$
$$\iff n = 797$$

5)

a) (0,3) Significa dizer que A e B não podem ocorrer simultaneamente. Formalmente, A e B são mutuamente excludentes se $A \cap B = \emptyset$.

b) (0,3) Dizer que A é independente de B significa dizer que a probabilidade de A ocorrer não é afetada pela ocorrência de B. Formalmente, se A é independente de B, temos que:

Verificando a ida:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

O fato de A ser independente de B implica que B é independente de A, sendo isso uma consequência direta do Teorema de Bayes :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(B)$$

c) (0,5) Se $\mathbb{P}(A) \neq 0$ e $\mathbb{P}(B) \neq 0$, então de acordo com a questão (a), se A e B são mutuamente excludentes então $A \cap B = \emptyset \implies \mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Logo:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 0 \neq \mathbb{P}(A)$$

e

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = 0 \neq \mathbb{P}(A)$$

No entanto, se $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0$ e a afirmação se torna verdadeira.

Verificando a volta:

Se A e B são independentes, então $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$, dessa forma:

$$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(B) = 0$$

Dessa forma, independência de A e B implica em eles serem mutuamente excludentes apenas caso a probabilidade de um dos evenetos ocorrer seja igual a 0.