Lista 3 - Gabarito - Estatística - 2025.1

1)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}-\frac{n\bar{x}}{n}=\bar{x}-\bar{x}=0$$

2)

- $$\bar{z}=\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(z_i-\bar{z})}{n}=0\text{(Resultado da questão anterior)}$$

- $$\begin{aligned}Var(z)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(z_i-\bar{z})^2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(z_i-0)^2}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}{n}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2 n}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1\end{aligned}$$

3) Falar sobre as interpretações vistas em sala, focando nas principais abordadas ao longo das aulas.

5)

1. 120
2. 1/120
3. $\frac{\binom{9}{6}}{\binom{10}{7}}$
4. $\left(\frac{3}{4}\right)^7$
5. $1-\left(\frac{3}{4}\right)^7$
6. (1)- Independência entre as respostas de cada pergunta; (2) A probabilidade de acerto e erro em cada questão é a mesma. O pressuposto (1) é razoável, já o (2) não parece ser razoável, haja vista que a dificuldade das questões não é a mesma.

6) Essa questão é bem semelhante ao problema da seleção dos grupos para o trabalho que vimos em sala

1. $\frac{1}{\binom{5}{2}}$

1. $\frac{\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} + \frac{\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} - \frac{1}{\binom{5}{2}}$

7) Questão semelhante a resolvida em sala

- A: A soma dar um número impar
- B: Um dos dados apresentar o valor 1

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{6}{11}$$

8)

- A: Se formando em Engenharia Química
- B: Ser mulher

a) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,02}{0,05}$

b) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,02}{0,52}$

9)

a) 250/2000

b) 100/1000

c) 150/1000

10)

a) $0,175$

b) 0.7454

11)

a) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1/2$

b) $P(B^c) = 1 - P(B) = 3/4$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/2 + 1/4 - 1/5 = 11/20$

d) $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 1/4 - 1/5 = 1/20$

e) $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 1/2 - 1/5 = 3/10$

f) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 9/20$

g) $P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 4/5$

12) Questões b,c e d usar as leis de deMorgan.

a) 1

b) 2/50

c) 17/50

d) $\sum_{i=1}^{x} \frac{1}{50} \leq 0,5 \iff \frac{x}{50} \leq 0,5 \iff x \leq 25$

e) $\left(\frac{1}{50}\right)^{50}$

f) $\left(\frac{1}{50}\right)^{x} \leq 1,6 \cdot 10^{-7} \iff x = \frac{\log(1,6 \cdot 10^{-7})}{\log(1/50)}$

13)

1. 1
2. 0

14) Não é possível resolver a questão. A questão não informa a quantidade exata de pessoas do sexo feminino. Essa questão é semelhante a que vimos em sala, chegando a conclusão que nem sempre é possível calcular probabilidades pelo ponto de vista frequentista.

15)

a) $\Omega = \{Cara, Coroa\}^2$

Para resolver as questões b,c e d precisamos das probabilidades de cara e coroa:

- $P(Cara) = 4 \cdot P(Coroa)$
- $P(Cara) + P(Coroa) = 1$

Isso implica que:

$$1 - P(Coroa) = 4 \cdot P(Coroa) \quad \implies P(Coroa) = \frac{1}{5} \implies P(Cara) = \frac{4}{5}$$

b) $2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$

c) $\frac{8}{25} + \frac{16}{25} = \frac{24}{25}$

d) $\frac{1}{25} + \frac{16}{25} = \frac{17}{25}$

16)

a) 0

b) $P(A|B) = 0$

c) Não. Claramente isso não é verdade, como pode ser visto $P(A \cap B) = 0 \neq 0,30 \cdot 0,40$. Além disso, pela questão b percebemos que a ocorrência de B anula a ocorrência de A, portanto, são dependentes.

d) Percebemos que, se $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$, então o fato de serem mutuamente excludentes implica que são dependentes. Entretanto, o contrário não é sempre válido.

17) 2/3

18)

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$; $|\Omega| = 216$

b) 0

c) 27/216

d) 1/6

e) 0

19)

a) Falso. Por exemplo, considere um experimento de um lançamento de um dado:

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- A: Saír um número par $= \{2, 4, 6\}$
- B: Sair um número primo $= \{2, 3, 5\}$

Perceba que $P(A) + P(B) = 1/2 + 1/2 = 1$, entretanto, $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$, logo, não são mutuamente excludentes.

b) Falso. Não necessariamente, isso só seria verdade se A e B formasse uma partição de Ω.

c) Verdadeiro. Consequência direta do Teorema de Bayes.

d) Falso. A ser independente de C e de B não garante que seja independente se os dois ocorrerem ao mesmo tempo.

e) Falso. Pensar na ideia de probabilidade condicional.

20)

1. $0,1^2$
2. $2 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,7^2$ ou $1 - 0,3^2$
3. $2 \cdot 0,2 \cdot 0,7$
4. Foi assumido que as retiradas são independentes. Se fosse sem reposição, as probabilidades iriam se alterar a cada retirada.

21)

- D_1 = Primeiro radio ser defeituoso
- D_2 = Segundo radio ser defeituoso

$$P(D_2|D_1) = \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1)} = \frac{P(D_1 \cap D_2|A)P(A) + P(D_1 \cap D_2|B)P(B)}{P(D_1|A)P(A) + P(D_1|B)P(B)}$$
$$= \frac{0,05^2 \cdot 0,5 + 0,01^2 \cdot 0,5}{0,05 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,5} = 0,0433$$

22)

a) $0,78665$(Resolvida em sala).

b) Seria a multiplicação das probabilidades individuais de cada teste. (Resolvida em sala).

23)

- B : Lote produzido no Reator Batelada
- O : Apresentar bolhas

$$P(B|O) = \frac{P(O|B)P(B)}{P(O)} = \frac{0,04 \cdot 0,4}{0,04 \cdot 0,4 + 0,015 \cdot 0,6} = 0,64$$

24)

$$A \cup B \cup C \leq P(A) + P(B) + P(C) = 0,1$$

25) Prova do Teorema de Bayes vista em sala

26) Usar a definição de probabilidade condicional nos dois lados e olhar para os denominadores (Fazendo o Diagrama de Venn pode ajudar)

27) Fazer o Diagrama de Venn para os três eventos. Perceber e descontar as intersecçõs mutuas.

28) Leis de DeMorgan + Regra da multiplicação.

29) Leis de DeMorgan + Definição de Probabilidade Condicional + Regra da multiplicação.

30) Aplicar o Teorema de Bayes no numerador e no denominador.