Graphes et algorithmes : TD3

Exercice 1

Sujet

Montrer qu'un graphe non orienté simple $G = (S, A)$ a un nombre pair de sommets de degré impair.

Résolution

Soit $\sum_{s \in S} d(s) = 2 \times |A|$:

- S' est un ensemble de sommets de degré pair
- S'' est un ensemble de sommets de degré impair

$$\sum_{s \in S'} d(s) + \sum_{s \in S''} d(s) = 2 \times |A|$$

Or $\sum_{s \in S'} d(s)$ est un nombre pair donc $\sum_{s \in S''} d(s)$ est un nombre pair. Et comme la somme des degrés impairs est un nombre pair, c'est qu'il y a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice 2

Sujet

Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autres ?

Résolution

Non ce n'est pas possible car $\sum_{s \in S} d(s) = 2 \times |A|$ or $15 \times 3 = 45$ donc impair, ce n'est pas possible.

Exercice 3

Sujet

Montrez que dans une assemblée de n personnes, il y a toujours au moins 2 personnes qui ont le même nombre d'amis présents. Par convention on considérera qu'une personne n'est pas amie avec elle-même, et que si a est amie avec b, alors b est amie avec a.

Résolution

- Cas où tout le monde a un ami :
  - On ne peut pas être ami avec soit même donc pour n personnes il y a $n-1$ relations possibles donc forcément, deux personnes au moins ont le même nombre d'amis.
- Cas où quelqu'un n'a pas d'amis :
  - On étudie le graphe en excluant cette personne. On a donc $n-1$ personnes et $n-2$ relations. On a donc forcément deux personnes qui ont le même nombre d'amis.

Exercice 4

Sujet

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté simple ayant 10 sommets et tel que $3 \leq \mathrm{degre(x)} \leq 5$ pour chaque sommet x de S. On suppose que tous les sommets ne sont pas de degré pair, et qu'il n'y a pas deux sommets de degré impair ayant le même degré. Quel est le nombre d'arêtes de G ?

Résolution

- Il y a 1 sommet de degré 3
- Il y a 1 sommet de degré 5
- Il y a 8 sommets de degré 4

Cela fait donc $\dfrac{3+5+8\times 4}{2} = 20$ arêtes.

Exercice 5

Sujet

Une réception se termine, et les personnes s'en vont en couple. Au moment de se dire au revoir, cent douze poignées de mains sont échangées. On cherche à savoir combien de personnes étaient présentes à cette réception ?

1. Comment modéliser le problème à l'aide d'un graphe ?
2. En déduire une solution, en justifiant.

Résolution

Question 1

- Ce problème peut être modéliser sous forme de graphe non-orienté simple en prenant un sommet pour un couple, et une arête pour 4 poignées de main.

Question 2

- $\dfrac{112}{4} = 28$ intéractions de couples
- $1+2+3+4+5+6+7 = 28 \Rightarrow 8$ couples $\Rightarrow$ 16 personnes

Vérification :

- 16 personnes vont serrer la main à 14 autres : $\dfrac{16 \times 14}{2} = 112$

Exercice 6

Sujet

Le conseil municipal d'une ville est formé de sept commissions qui vérifient les règles suivantes :

- Règle 1 : tout conseiller municipal fait parti de deux commissions, exactement.
- Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Expliquer comment on peut obtenir le nombre de membres du conseil municipal ainsi que le nombre de membres des différentes commissions à l'aide d'un graphe.

Résolution

Nous pouvons modéliser le problème par un graphe non-orienté biparti. Les sommets de la première partie sont les membres du conseil municipal et les sommets de la deuxième partie sont les commissions. On ajoute une arête entre un membre du conseil et une commission si ce membre fait parti de cette commission. Le nombre de membres par commission est le degré de la commission.

Exercice 7

Sujet

Peut-on construire un graphe simple (justifier les réponses) ayant

1. 5 sommets et 10 arêtes ?
2. 12 sommets et 68 arêtes ?

Résolution

Question 1

Oui, s'il est complet. On aurait $\sum_{s \in S} d(s) = 5 \times 4 = 2 \times |A| = 20 \Rightarrow |A| = 10$ arêtes.

Question 2

Non, s'il est complet. On aurait $\sum_{s \in S} d(s) = 12 \times 11 = 2 \times |A| = 132 \Rightarrow |A| = 66$ arêtes. Or $68 > 66$.

Exercice 8

Sujet

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté. Montrer que pour $|S| \geq 2$, il existe toujours x et y dans S tels que $x \neq y$ et $d(x) = d(y)$.

Résolution

- Cas où tous les sommets sont reliés à un autre:
  - Un sommet ne peut être relié qu'à un autre sommet donc pour n sommets, on a $n - 1$ relations possibles donc forcément, deux sommets au moins ont le même nombre de voisins.
- Cas où un sommet n'est relié à aucun autre:
  - On étudie le graphe en excluant ce sommet. On a donc $n - 1$ sommets et $n - 2$ relations. On a donc forcément deux sommets qui ont le même nombre de voisins.

Exercice 9

Sujet

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté simple et fini. Montrer que de toute chaîne finie allant de $s \in S$ à $s' \in S$ dans G on peut extraire une chaîne élémentaire.

Résolution

Exercice 10

Sujet

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté simple avec $|S| = 14$ et $|A| = 30$. On sait par hypothèse que chaque sommet de G est de degré 4 ou 5. Combien de sommets sont de degré 5 ? Construire un graphe G vérifiant les propriétés précédentes.

Résolution
