INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES HAUTS-DE-FRANCE

Université Polytechnique HAUTS-DE-FRANCE

# Graphes & Algorithmes

- ✓ Introduction & Applications
- ✓ Définitions & Terminologie
- ✓ Opérations & Représentations
- ✓ Parcours en Largeur & Profondeur
- ✓ Acyclique & Tri Topologique
- ✓ Connexité & Forte Connexité
- ✓ Arbres Couvrants

Saïd Hanafi

2020/2021

# Plan

- Graphe Orienté ou Non, Dense ou Creux
- Successeur, Prédécesseur, Voisin
- Chemin, Chaîne, Circuit, Cycle
- Complet, Connexe, Acyclique, Biparti, Régulier, Planaire, Arbre, Stable, Couplage, Coloration, Hypercube
- Isomorphisme

# Définition d'un graphe

- Un graphe est un couple $G = (S, A)$, où
  - $S$ un ensemble de $n$ sommets
  - $A$ une famille de $m$ éléments du produit cartésien $S \times S = \{(i, j): i, j \in S\}$
- Un élément $(i, j)$ peut apparaître plusieurs fois dans $A$

- Dans un $\boldsymbol{p - graphe}$, $(i, j)$ ne peut pas apparaître plus que $p$ fois
- Un multigraphe est un $p - graphe$ avec $p > 1$

- Le nombre de sommets $n$, est appelé l'*ordre* de $G$

# Hypothèses & Conséquences

**Hypothèses**

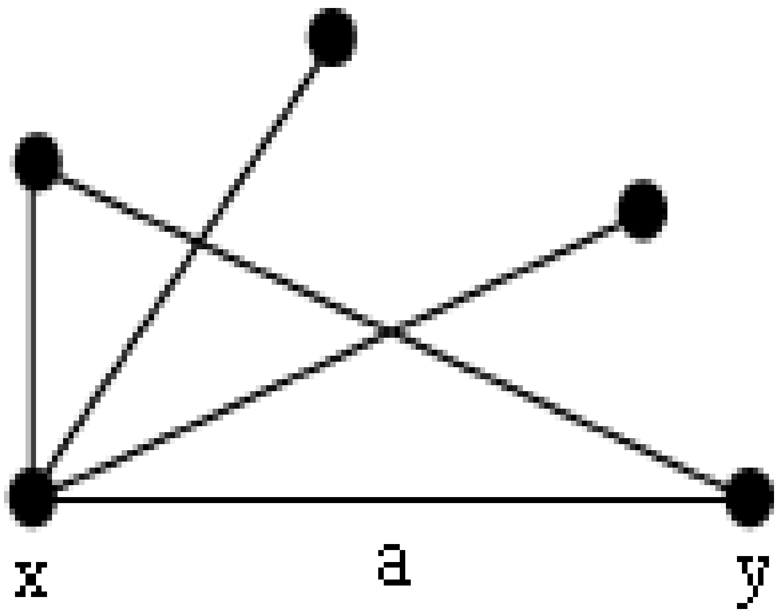
- Graphe $G = (S, A)$ est fini (i.e. $n$ et $m$ sont des entiers positifs)
- $G$ est $1 - graphe$ , dans ce cas la famille $A$ devient un sous ensemble de $S \times S = \{(i, j): i, j \in S\}$
- L'élément $(i, i)$ est appelé une *boucle*
- $G$ est ***simple*** s'il est $1 - graphe$ et sans boucle

**Conséquences**

- Un graphe $G$ est une *relation binaire* $A$ sur l'ensemble $S$
- Si la relation $A$ est *symétrique* le graphe $G$ est appelé un graphe *non orienté*, sinon $G$ est appelé graphe *orienté*

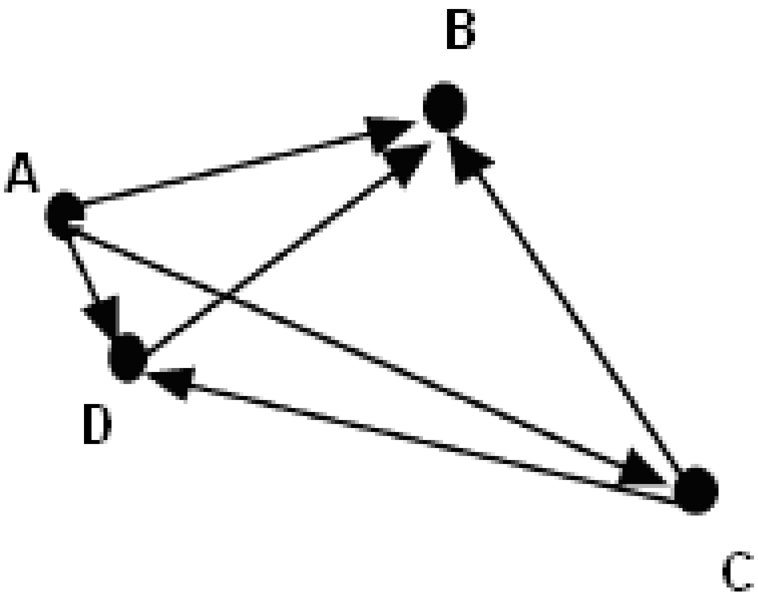
# Graphe : orienté ou non

- **Graphe non orienté**




Un ensemble de sommets
**Un ensemble d'arêtes**

- **Graphe orienté**

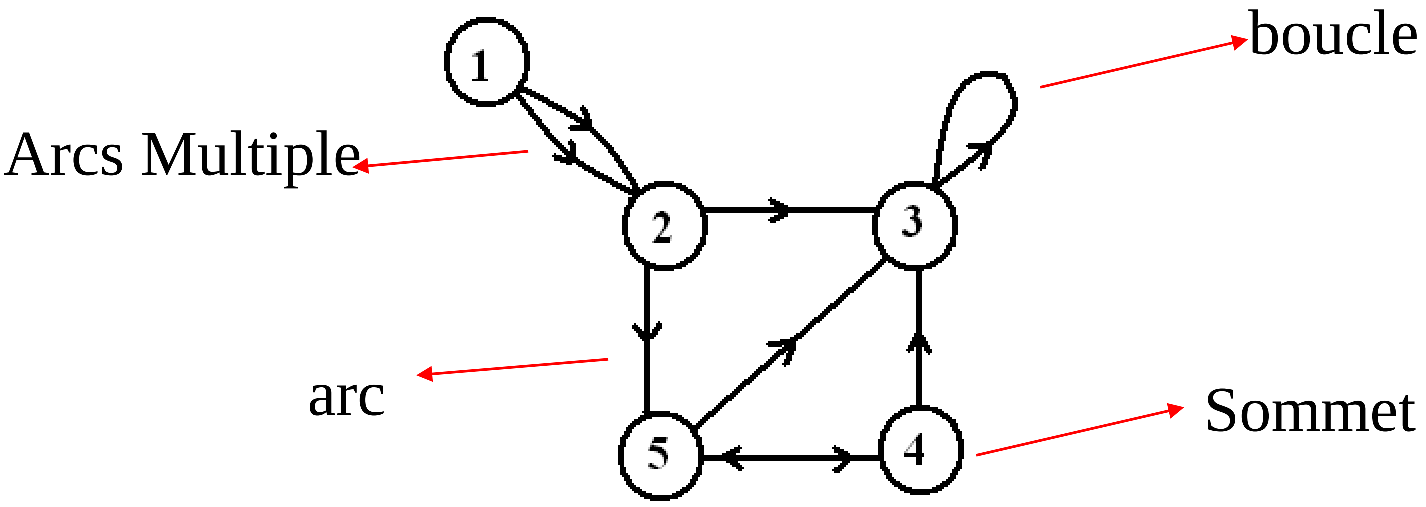



Un ensemble de sommets
**Un ensemble d'arcs**

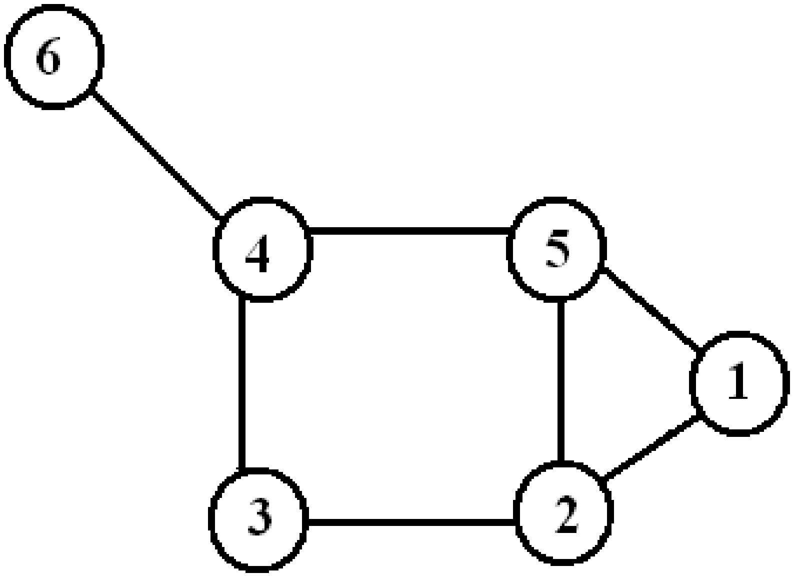
# Sommet, Arc, Arête

- Sommet
  - Elément de base: maillon, nœud, point, objet, tâche, …
  - Dessiner par un point, cercle, carré, nœud, forme, …
- Arc
  - un arc reliant $i$ à $j$ est noté $(i, j)$
  - Dessiner par une flèche de $i$ vers $j$
- Arête
  - une arête reliant $i$ à $j$ est noté $\{i, j\}$ ou $[i, j]$ ou $(i, j)$
  - Dessiner par une line ou corde reliant $i$ à $j$

# Graphe orienté



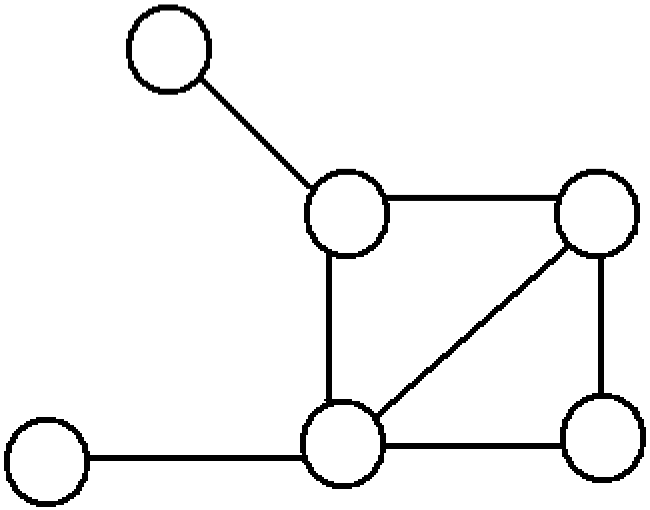
# Graphe non orienté




- $S = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $A = \{\{1,2\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\},\{4,5\},\{4,6\}\}$

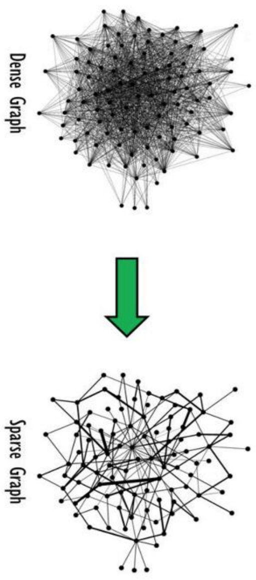
# Graphe Non Orienté Simple

- Chaque paire de sommets est reliée par au plus une arête et aucun sommet ne possède de boucle



# Graphe dense ou creux

- Sommet
  - $S(G)$ ou $S$ est l'ensemble des sommets du graphe $G$
  - $n$ nombre de sommets ($n = |S|$)
- Lien : Arc / Arête
  - $A(G)$ ou $A$ est l'ensemble des arcs / arêtes
  - $m$ nombre d'arcs / arêtes ($m = |A|$)
- Si $G$ est $1 - graphe$, on a
  - $m = |A| \leq |S \times S| = |S|^2 = n^2$
  - $G$ est *dense* si $m \cong n^2$
  - $G$ est *creux* si $m \ll n^2$



# Extrémité, Adjacence, Incidence

- Pour une arête $a = [i, j]$, les sommets $i$ et $j$ sont ses extrémités
- Pour un arc $a = (i, j)$, $i$ est son extrémité initiale et $j$ son extrémité terminale
- Deux sommets $i$ et $j$ sont adjacents si $(i, j) \in A$
- Deux arcs (ou arêtes) sont dits adjacent(e)s s'ils ont au moins une extrémité commune
- Un arc (ou arête) est dit incident à ses extrémités

# Successeur, Prédécesseur, Voisin

- Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté
- Ensemble des successeurs d'un sommet $i \in S$
$$V^+(i) = \{j \in S : (i,j) \in A\}$$
- Ensemble des prédécesseurs d'un sommet $i \in S$
$$V^-(i) = \{j \in S : (j,i) \in A\}$$
- Ensemble des voisins d'un sommet $i \in S$
$$V(i) = V^-(i) \cup V^+(i)$$
- $V$ est une application multivoque, à chaque $i \in S$ on fait correspondre un sous-ensemble $V(i) \subseteq S$

# Demi-degré, Degré

- Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté
- Demi-degré extérieur d'un sommet $i \in S$

$$d^+(i) = |V^+(i)|$$

- Demi-degré intérieur d'un sommet $i \in S$

$$d^-(i) = |V^-(i)|$$

- Degré d'un sommet $i \in S$

$$d(i) = |V(i)|$$

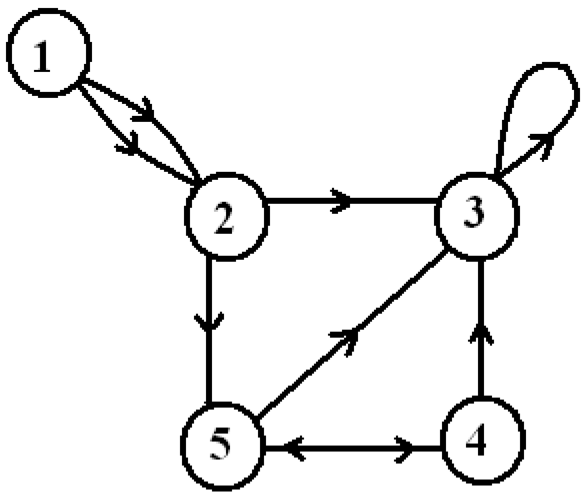
- Si $G$ est un graphe simple (sans boucle), on a

$$d(i) = d^-(i) + d^+(i)$$

$$d^-(i), d^+(i) \leq n - 1$$

# Demi-degré, Degré

- $d^+(i) =$ nombre d'arcs sortants de $i$
- $d^-(i) =$ nombre d'arcs entrants en $i$




$d^+(1) = 2$
$d^-(1) = 0$
$d^+(2) = 2$
$d^-(2) = 2$
$d^+(3) = 1$
$d^-(3) = 4$
$d^+(4) = 2$
$d^-(4) = 1$
$d^+(5) = 2$
$d^-(5) = 2$

# Voisin / Degré

- Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté
- Ensemble des voisins d'un sommet $i \in S$

$$V(i) = \{j \in S : [i, j] \in A\}$$

- Degré d'un sommet $i \in S$

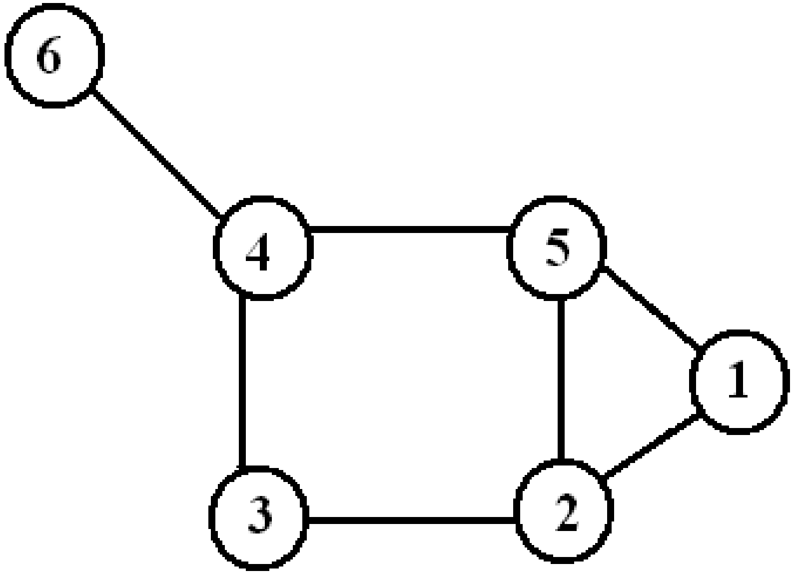
$$d(i) = |V(i)|$$

- Si $G$ est un graphe simple (sans boucle), on a

$$d(i) \leq n - 1$$

# Degré

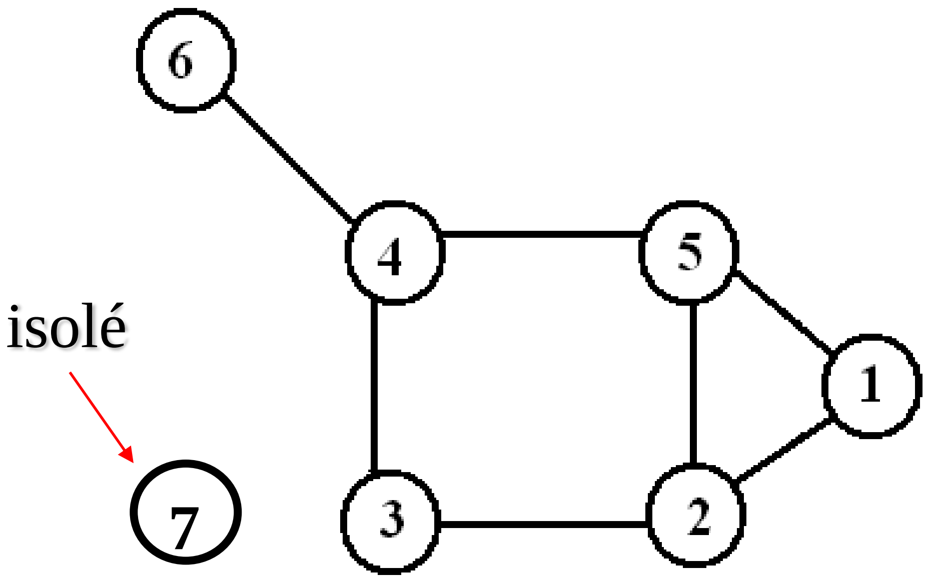
- $d(i)$ = nombre d'arêtes incidentes à $i$




$d(1) = 2$
$d(2) = 3$
$d(3) = 2$
$d(4) = 3$
$d(5) = 3$
$d(6) = 1$

# Degré

- $d(i)$ = nombre d'arêtes incidentes à $i$

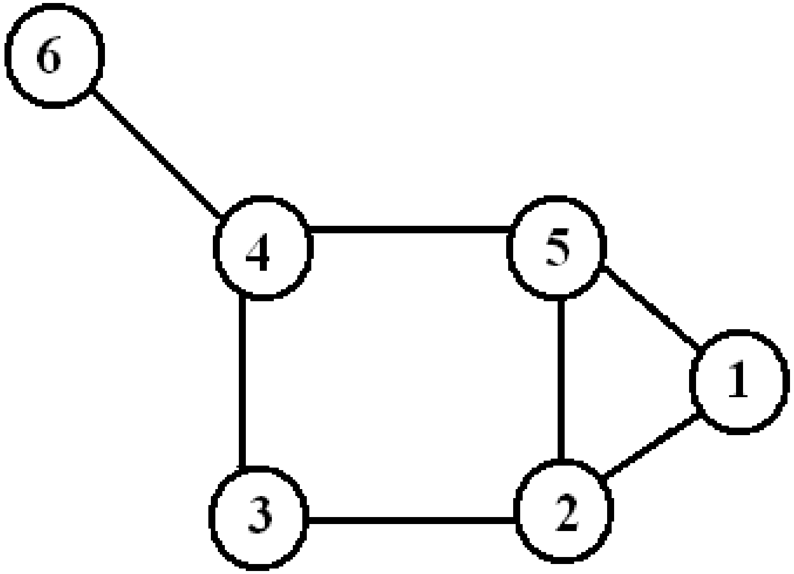



$d(1) = 2$
$d(2) = 3$
$d(3) = 2$
$d(4) = 3$
$d(5) = 3$
$d(6) = 1$
$d(7) = 0$

- Un sommet $i$ est dit isolé si $d(i) = 0$

# Voisins d'un sous ensemble

- Si $I \subseteq S$, on note $V(I) = \bigcup_{i \in I} V(i)$
- Si $j \notin I$ et $j \in V(I)$, on dit que $j$ est adjacent à $I$




$$V(\{2,5\}) = V(2) \cup V(5)$$
$$= \{1,3,4\}$$

# Degrés : Propriétés

- Soit un graphe simple $G = (S, A)$ d'ordre $n$ avec $m$ arcs / arêtes, on a

$$\sum_{i \in S} d^-(i) = \sum_{i \in S} d^+(i) = |A| = m$$

$$\sum_{i \in S} d(i) = 2|A| = 2m$$

**Conséquence**

- Le nombre de sommets de degré impair est pair

# Chaîne & Cycle

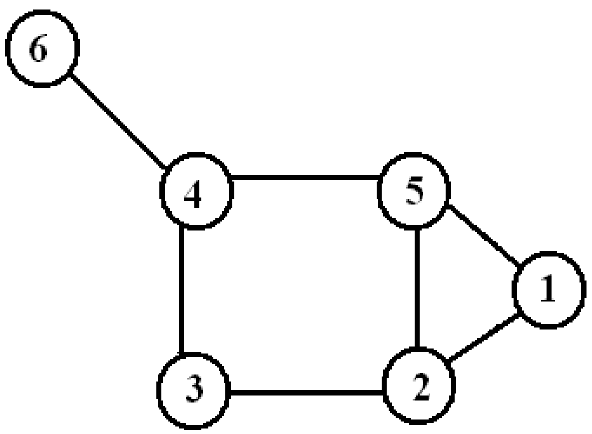
- Soit $G = (S, A)$ un graphe **non orienté**, une chaîne est une séquence $\pi = (s_1, \ldots, s_p)$ de $p$ sommets telle que
$$[s_i, s_{i+1}] \in A, \text{pour } i = 1, \ldots, p-1$$
- Les sommets $s_1$ et $s_p$ sont les extrémités de $\pi$
- Un cycle est une chaîne dont les extrémités coïncident
$$s_1 = s_p$$
- Longueur de la chaîne $\pi$ est $|\pi| = p - 1$ (nombre d'arêtes traversées)
- Un cycle $\pi = (s_1, \ldots, s_p, s_1)$ est noté $C_p$

# Chemin & Circuit

- Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté, un chemin est une séquence $\pi = (s_1, \dots, s_p)$ de $p$ sommets telle que
$$(s_i, s_{i+1}) \in A, \text{pour } i = 1, \dots, p-1$$
- Le sommet $s_1$ $(s_p)$ est l'extrémité initiale (terminale) de $\pi$
- Un circuit est un chemin dont les extrémités coïncident
$$s_1 = s_p$$
- Longueur de la chemin $\pi$ est $|\pi| = p - 1$ (nombre d'arcs traversés)
- Un circuit $\pi = (s_1, \dots, s_p, s_1)$ est noté $C_p$

# Chaîne Elémentaire / Simple

- Une chaîne élémentaire est une chaîne ne passant pas deux fois par un même sommet
- Une chaîne simple est une chaîne ne passant pas deux fois par une même arête



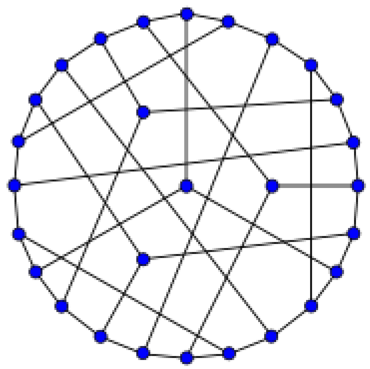

1,2,5,2,3,4 1,2,5,2,3,2,1 1,2,3,4,6

# Chemin Elémentaire / Simple

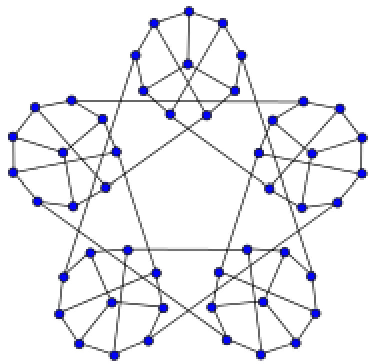
- Un chemin élémentaire est un chemin ne passant pas deux fois par un même sommet
- Un chemin simple est un chemin ne passant pas deux fois par un même arc

# Distance, Diamètre

- La distance entre deux sommets étant définie par la longueur d'un plus court chemin entre ces deux sommets
- Le diamètre d'un graphe $G = (S, A)$ est la plus grande distance possible qui puisse exister entre deux de ses sommets, noté $Diam(G)$



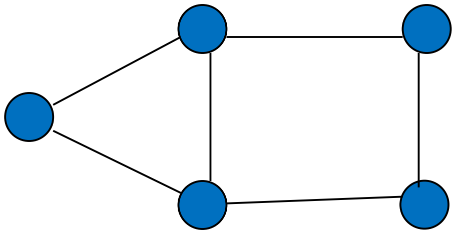
$Diam(G) = 4$



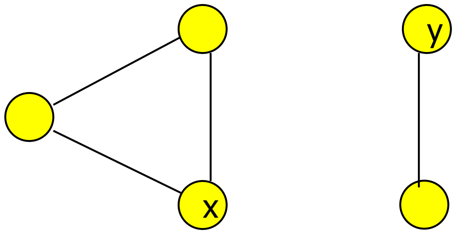
$Diam(G) = 7$

# Connexité

- Un graphe non orienté est connexe si deux sommets quelconques sont connectés par une chaîne



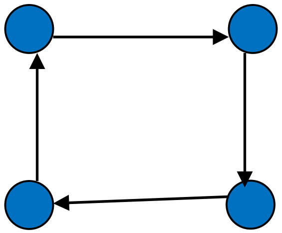
connexe



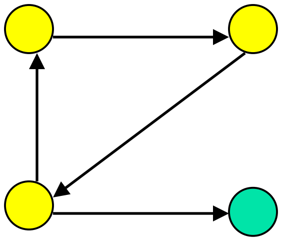

Non connexe

# Forte Connexité

- Un graphe orienté est fortement connexe s'il existe un chemin de n'importe quel sommet vers n'importe quel autre sommet



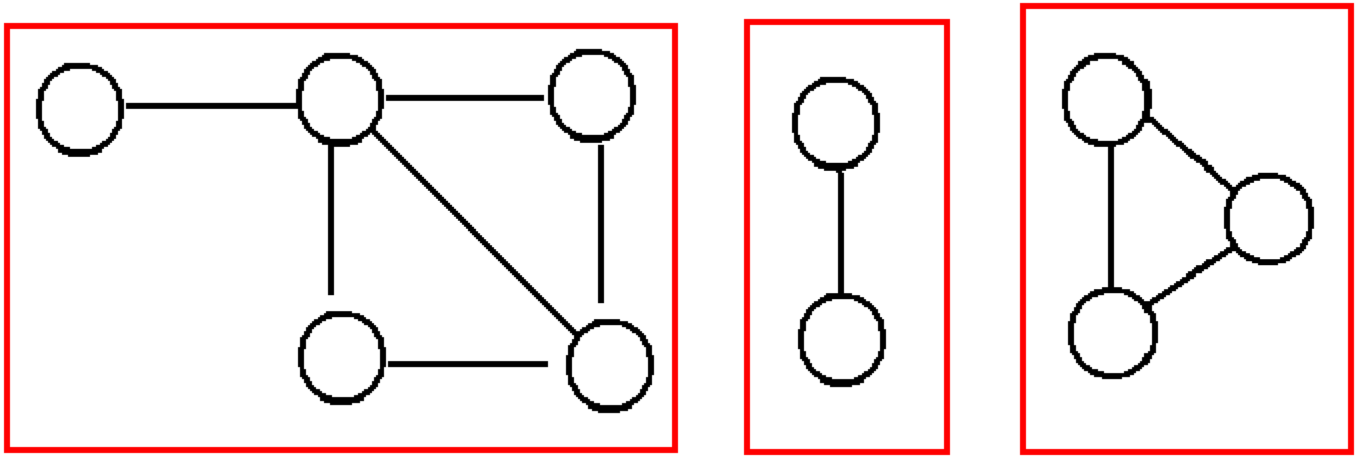
fortement connexe



Non fortement connexe

# Composante Connexe

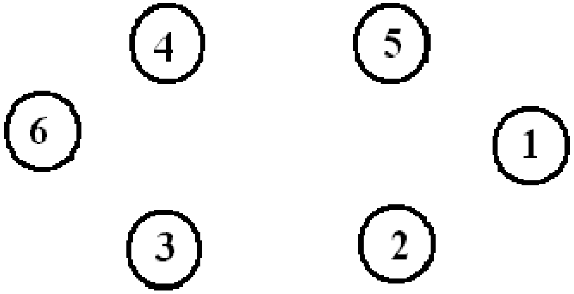
- Chaque graphe non connexe peut être partitionné en un certain nombre de composantes connexe
- Deux sommets d'une même  composante connexe  sont reliés par une chaîne



# Graphes spéciaux

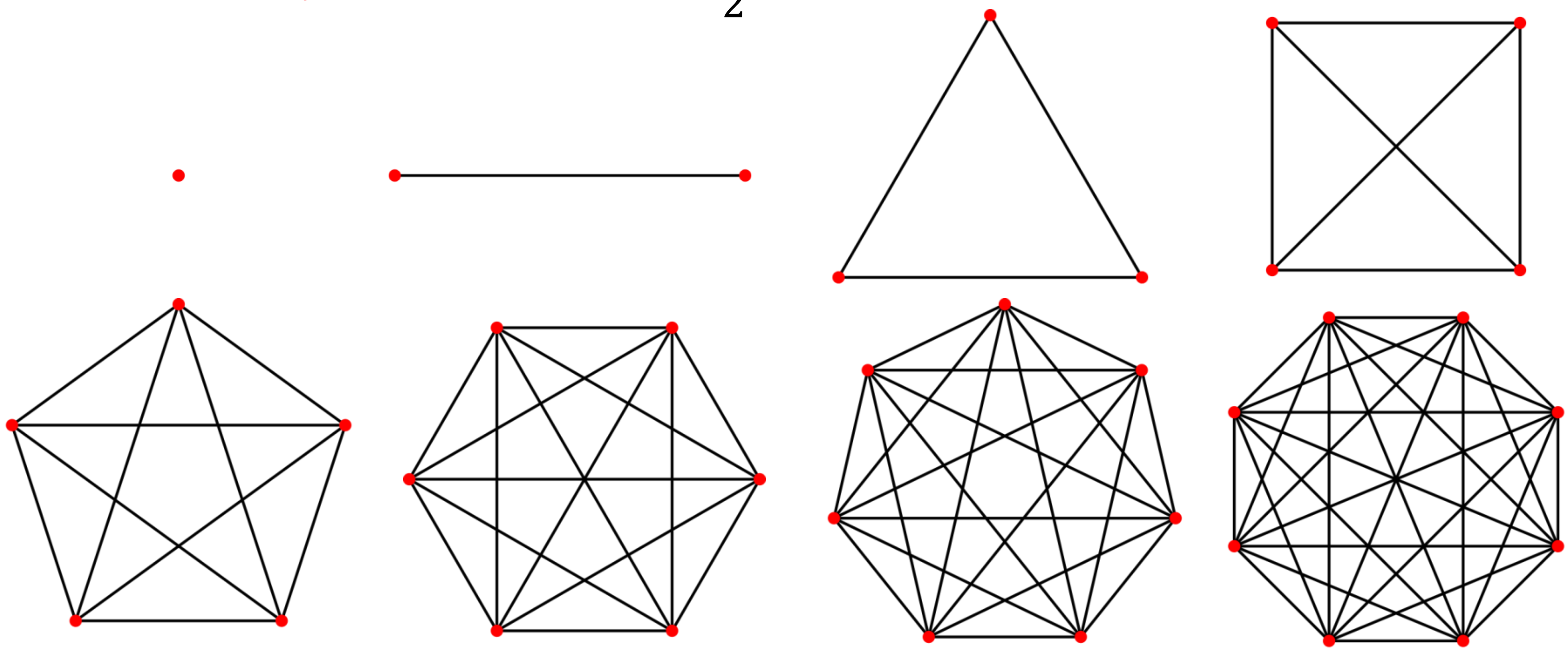
- Graphe Nul
  - $S = \emptyset$ donc $A = \emptyset$

- Graphe Vide
  - $A = \emptyset$



# Graphe Complet

- Graphe simple $G = (S, A)$ d'ordre $n = |S|$
- Tout couple de sommets disjoints est relié par une arête
- Noté $K_n$ et $m = |A| = \frac{n(n-1)}{2}$



# Graphe $k$-Régulier

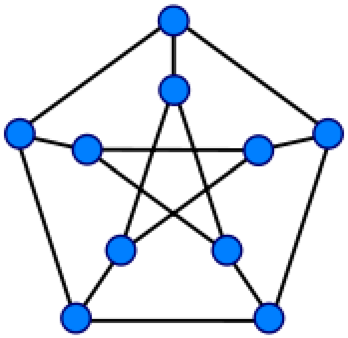
- Graphe connexe
- Pour tout $i \in S, d(i) = k$
- Un graphe est dit régulier si

$$\delta(G) = \Delta(G)$$

avec

$$\delta(G) = \min\{d(i) : i \in S\}$$

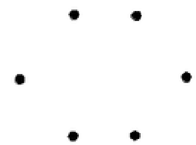
$$\Delta(G) = \max\{d(i) : i \in S\}$$



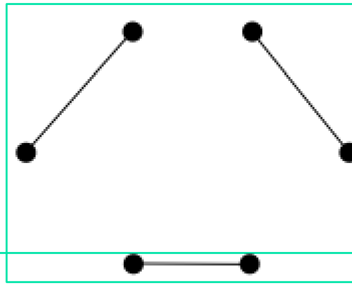
Graphe de Petersen

# Graphes réguliers spéciaux

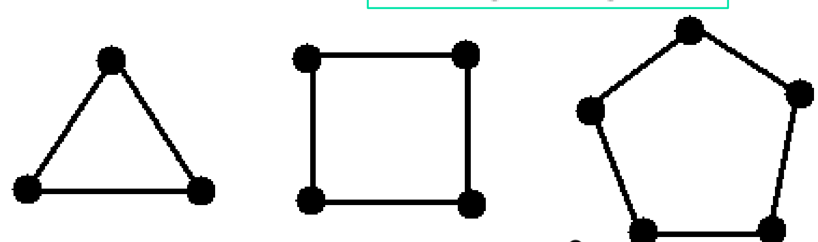
0-régulier : Graphe vide



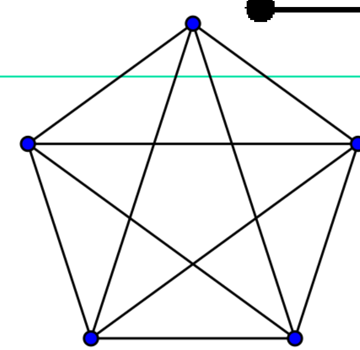
1-régulier : $A$ est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes



2-régulier : Cycle



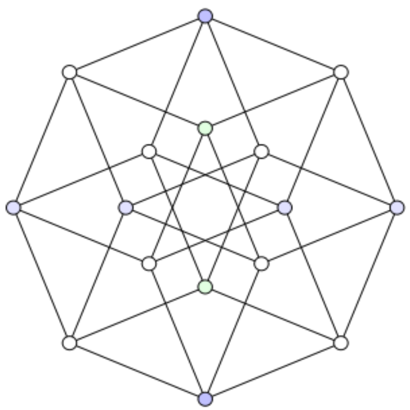
$(n-1)$ -régulier : Graphe Complet

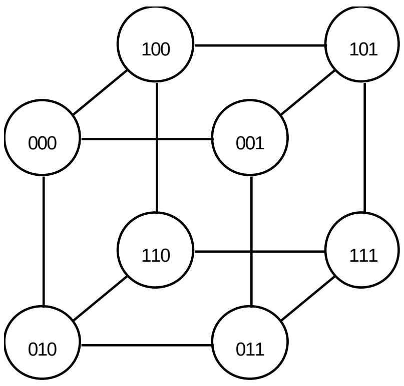


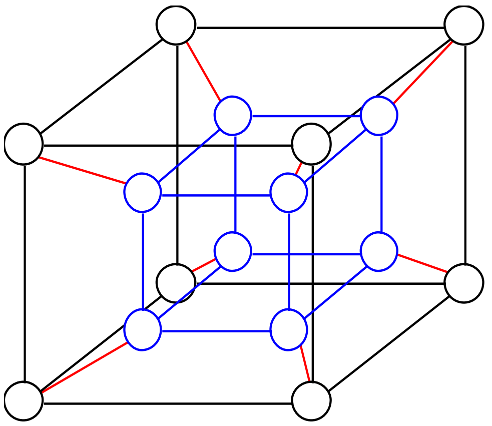
# Graphe Hypercube

Dans un hpercube $Q_n$

- Chaque sommet porte une étiquette de longueur $n$ sur un alphabet $B = \{0,1\}$ , et
- Deux sommets sont adjacents si leurs étiquettes ne diffèrent que d'un symbole

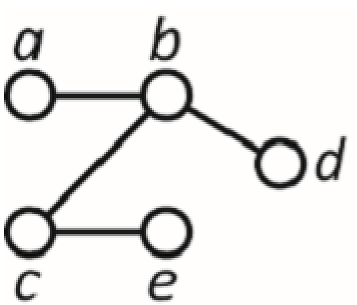




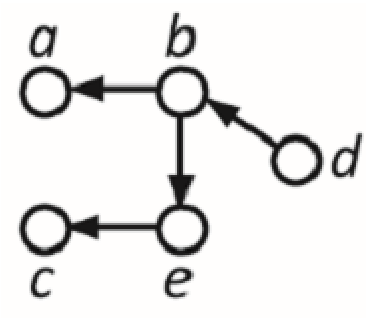



# Arbre

- Un arbre est un graphe connexe sans cycle
- Une arborescence est un arbre orienté possédant une unique racine $r$
- Une racine est un sommet $r$ tel qu'il existe un chemin de $r$ à $i$ pour tout $i \neq r$




Un arbre




Une arborescence de racine $d$

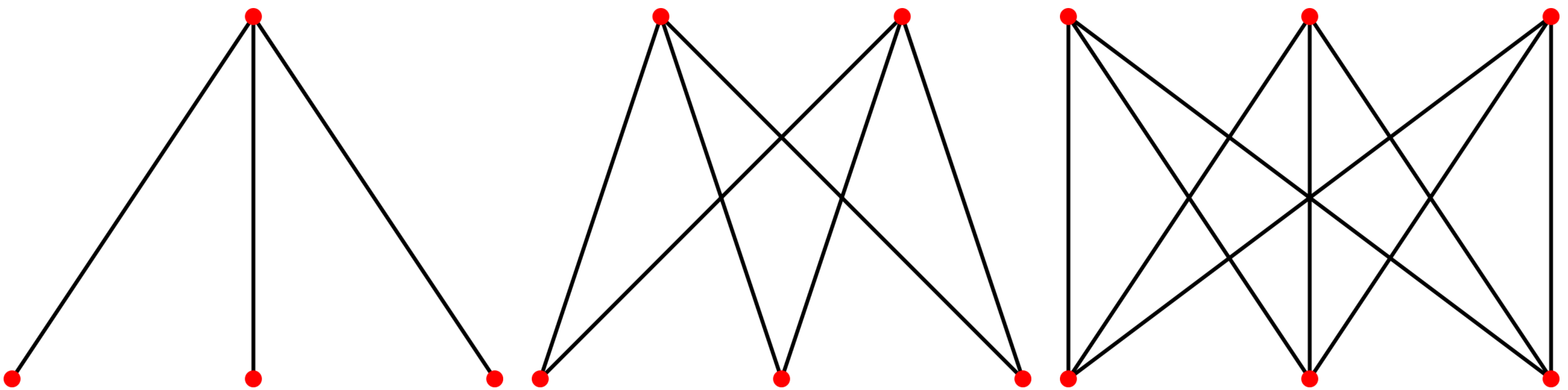
# Graphe Biparti

Un graphe $G = (S, A)$ est biparti si $S$ peut être partitionné en 2 $classes$ $S_1$ et $S_2$ tels que 2 sommets de la même classe ne soient jamais adjacents

Un graphe biparti permet de représenter une relation binaire entre $S_1$ et $S_2$

# Graphe Biparti Complet

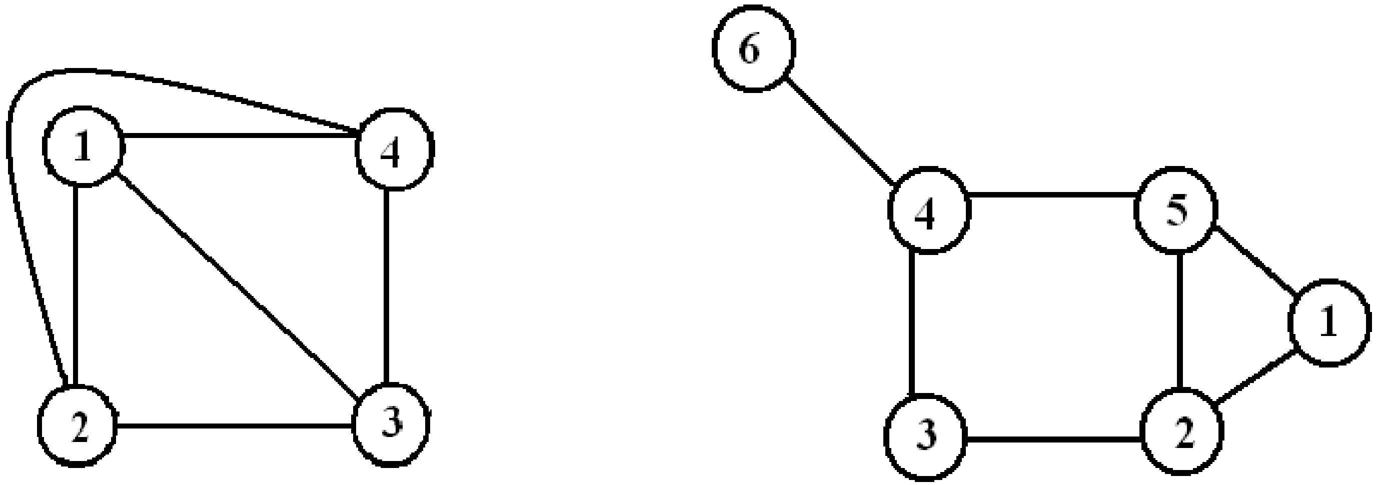
- Un graphe $G = (S, A)$ est dit biparti complet (ou **biclique**) s'il est biparti et contient le nombre maximal d'arêtes
- il existe une partition $S$ en 2 $classes$ $S_1$ et $S_2$ telle que $A = S_1 \times S_2$
- Noté $K_{n,m}$ si $n = |S_1|$ et $m = |S_2|$



Etoile

# Graphe Planaire

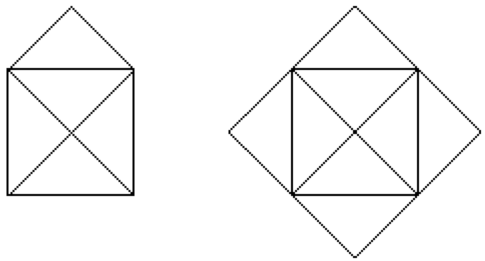
- Un graphe est « planaire » si on peut le dessiner sur un plan sans que les arêtes se croisent
- $K_4$ est le plus grand graphe complet planaire



# Graphe Eulerien

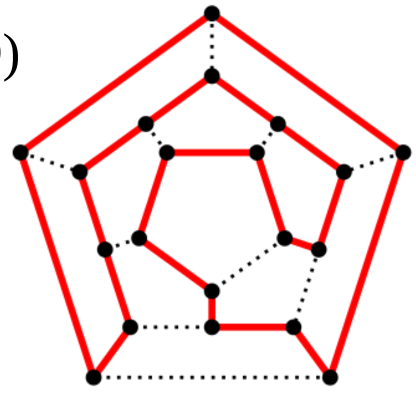
- Un circuit (cycle) eulérien est un circuit (cycle) qui passe exactement une fois par chaque arc (arête) du graphe considéré
- Un graphe $G = (S, A)$ est Eulerien s'il admet donc un circuit (cycle) eulérien
- Théorème d'Euler (1736) : Un graphe connexe est Eulérien ssi $d(i)$ est pair pour tout $i \in S$
- Un graphe Eulerien peut être tracer sans lever le crayon

**Problème du postier**



# Graphe Hamiltonien

- Un circuit (cycle) Hamiltonien est un circuit (cycle) qui passe exactement une fois par chaque sommet du graphe considéré
- Un graphe $G = (S, A)$ est Hamiltonien s'il admet donc un circuit (cycle) Hamiltonien
- Un graphe simple avec $n = |S| \geq 3$ est Hamiltonien si
  - $\forall i \in S, d(i) \geq \frac{n}{2}$ Théorème de Dirac (1952)
  - $\forall (i,j) \notin A, d(i) + d(j) \geq n$ Théorème d'Ore (1960)

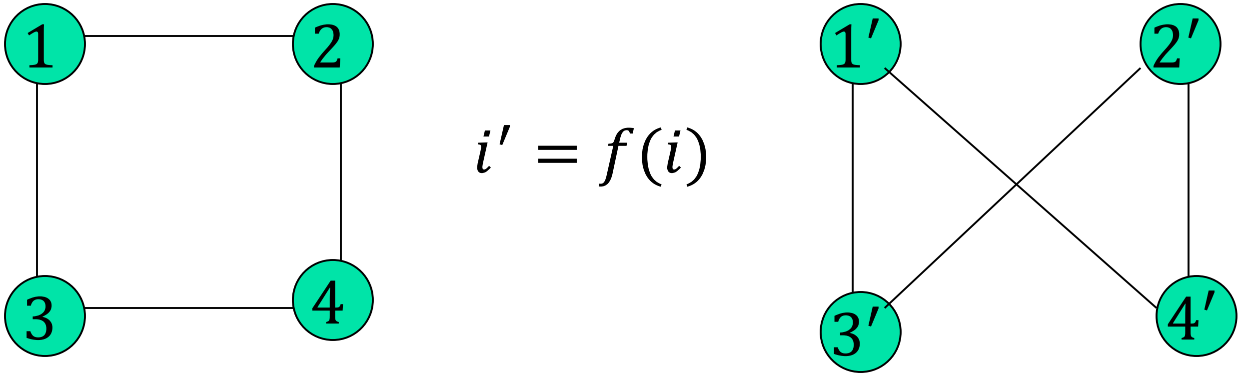


**Problème du voyageur de commerce**

# Isomorphisme

- Un isomorphisme entre $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ est une bijection $f: S \rightarrow S'$ telle que

$$(i, j) \in A \leftrightarrow (f(i), f(j)) \in A'$$



# Terminologie

| Graphe Orienté | Graphe Non Orienté |
|---|---|
| Sommet | Sommet |
| Arc | Arête |
| Chemin | Chaîne |
| Circuit | Cycle |
| Successeur | Voisin |
| Prédécesseur | Voisin |
| Voisin | Voisin |
| Extrémité Initiale | Extrémité |
| Extrémité Terminale | Extrémité |
| Demi-degré | Degré |
| Degré | Degré |
| Forte Connexité | Connexité |

$$\sum_{i \in S} d(i) = d(1) + d(2) + \cdots + d(6) = 2|A| = 2m$$