TD – Série de Fourier

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, tracez leur graphe et déterminez leur série de Fourier (sous forme réelle). Ces séries convergent-elles ? Vers quelle limite ? A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?
(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, par $f(x) = |x|$;

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x \text{ si } \in [-\pi; 0] \\ x \text{ si } x \in [0; \pi] \end{cases}$$

Graphe de la fonction

$$T = 2\pi, \int_0^T |f(x)|^2 dx < \infty$$

***f* est paire** donc $b_k = 0 \ \forall k$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x| dx = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx}_{\substack{pas\ possible \\ car\ entre\ \pi\ et \\ 2\pi\ pente\ négative}} = \cancel{2\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x dx\right) = \frac{\pi}{2} \text{ ou } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^{2a} f(x)dx}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(k\frac{2\pi}{T}x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x| \cos(kx)\, dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x| \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -x \cos(kx)\, dx$$

$$\Leftrightarrow a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx)\, dx$$

$$u = x \to u' = 1$$

$$v' = \cos(kx) \to v = \frac{\sin(kx)}{k}$$

$$\Leftrightarrow^{IPP} a_k = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{x \sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(kx)}{k} dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}$$

$$\Leftrightarrow a_k = \frac{2}{\pi} \times \frac{\cos(k\pi) - \cos(0)}{k^2} = \frac{2}{\pi} \times \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow a_k = \frac{2}{\pi} \times \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ pair} \\ -\dfrac{4}{\pi k} \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$$

La série de Fourier de f est donnée par la somme partielle $\left(S_n(f)\right)_n$ avec

$$S_n(f)(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{n} -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos\left((2k+1)x\right) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \cos(kx)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2}$$

Convergence :

$f(x) = |x| \rightarrow$ continue

$$f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

f' n'est pas continue

$$f'(0^+) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ x > 0}} f'(x) = 1 < \infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{\substack{x \to 0^- \\ x < 0}} f'(x) = -1 < \infty$$

Cependant f' est continue par morceaux sur $[-\pi; \pi]$.

f est C^1 par morceaux sur $[-\pi; \pi]$. Donc la série de Fourier converge.

$$S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2} = \frac{\overbrace{f(x^+)}^{f(x)} + \overbrace{f(x^-)}^{f(x)}}{2} = f(x)$$

f est C^1 par morceaux.

$$\left| \frac{\cos\left((2k+1)x\right)}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2}$$

Donc convergence uniforme de la série.

(b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= -1, \quad \text{si } x \in]-\pi, 0[, \\ &= 1, \quad \text{si } x \in]0, \pi[, \\ &= 2, \quad \text{si } x \in \{-\pi, 0, \pi\}; \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 \text{ si } x \in]-\pi, 0[\\ 1 \text{ si } x \in]0, \pi[\\ 2 \text{ si } x \in \{-\pi, 0, \pi\} \end{cases}$$

Graphe de la fonction

$$T = 2\pi, \int_0^T |f(x)|^2 dx < \infty$$

f se comporte comme une fonction impaire

$$\left.\begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_k = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} dx + \int_{\pi}^{2\pi} -dx\right) = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\frac{2\pi}{T}x)\,dx.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi}\sin(kx)\,dx\right)$$

$$\Leftrightarrow b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx = -\frac{2}{k\pi}(\cos(k\pi) - 1) = \frac{2}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right)$$

$$\Leftrightarrow b_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ pair} \\ \dfrac{4}{(2p+1)\pi} \text{ avec } k = 2p+1, p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La série de Fourier de f est donnée par la somme partielle $\left(S_n(f)\right)_n$ avec

$$S_n(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left((2k+1)x\right)}{2k+1}$$

La convergence :

$$S_n(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2k+1)x\right)}{2k+1}$$

f, C^1 ?

$a_0 = -\pi, a_1 = 0, a_2 = \pi$

$f(a_i^+) < \infty$ et $f(a_i^-) < \infty, \forall i = 0,1,2$

D'où f continue par morceaux sur $[-\pi; \pi]$

$f'(x) = 0 \rightarrow$ Donc f est C^1 par morceaux.

Par Dirichlet la série $S(f)(x) \xrightarrow{converge} \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ f(x) \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z} \end{cases}$

Mais pas de convergence uniforme car f est discontinue.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi + x \quad \text{si } x \in]-\pi, 0[, \\ &= x \quad \text{si } x \in]0, \pi[, \end{aligned}$$

Changeons-en :

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x \text{ si } x \in]-\pi; 0[\\ x \text{ si } x \in [0, \pi[\end{cases}$$

Graphe de la fonction

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)dx + \int_0^{\pi} xdx\right)$$

$$\Leftrightarrow a_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\left[\pi x + \frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)\cos(kx)\,dx + \int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx\right)$$

$$\Leftrightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\pi\cos(kx)\,dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos(kx)}_{impaire}\,dx}_{=0}\right) = \left[-\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0}$$

$$b_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$$

Exercice 4 Déduire de l'exercice précédent la somme des séries suivantes

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$

et montrez que, pour tout $x \in [0, \pi[$,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

$$a)\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On reprend

$S(f_a)(x) = f_a(x)$, avec $f_a(x) = |x|$

On cherche x tel que $\cos\big((2k+1)x\big) = 1$, posons $x = \pi$

$f(\pi) = \pi$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{(-1)}{(2k+1)^2} = \pi$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{(2k+1)^2} = \pi$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow \text{Parseval}$$

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx$$

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{0} (\pi + x)^2 dx + \int_0^{\pi} x^2 dx = \left[\pi^2 x + \frac{2\pi x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \pi^3 - \pi^3 + \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^3}{3}$$

$$\frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} = \frac{\pi^2}{3} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \quad \leftarrow \textit{pas compris}$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

Montrer que $\forall x \in [0, \pi[$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^2}$$

Exercice 6 Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, \quad \text{si } x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \cup [\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi], \\ &= 0, \quad \text{si } x \in]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}[. \end{aligned}$$

(a) Représentez la fonction f;

Graphe de la fonction

(b) Développez f en série de Fourier sous forme réelle et sous forme complexe;

Forme Complexe :

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x} \qquad avec \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-ik\frac{2\pi}{T}x}\, dx.$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ik\frac{2\pi}{T}x}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx}dx\right) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{\frac{ik\pi}{2}} - e^{\frac{ik\pi}{2}}}{2\pi ik} = \frac{1}{k\pi}\frac{e^{\frac{ik\pi}{2}} - e^{\frac{ik\pi}{2}}}{2i}$$

$$\Leftrightarrow c_k = \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}, k \in \mathbb{Z}^*$$

$$c_o(f) = a_o(f) = \frac{1}{2}$$

$$S(f)(x)_n = \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi} e^{ikx}$$

Forme Réelle :

$$a_o = \frac{1}{2}$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$$\Rightarrow a_k = 2c_k, k > 0$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

$$a_k = \underbrace{\frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx}_{car\ fonction\ paire} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx)\, dx$$

$$S(f)(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}\cos(kx) = \frac{1}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi}\cos(kx)$$

(c) Vérifiez que les deux séries représentent la même fonction. Coïncident-elle avec f ?

$$S(f)(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi} e^{ikx} = \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi} e^{ikx} + \frac{\sin\left(-k\frac{\pi}{2}\right)}{-k\pi} e^{-ikx} \right)$$

$$\Leftrightarrow S(f)(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{2\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)}{k\pi} \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = S(f)(x)$$

f est C^1 par morceaux. Donc en utilisant Dirichlet.

$$S(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in \left\{\frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{cases}$$

Exercice 7 Montrez que les développements en série de Fourier des fonctions suivantes ne comportent qu'un nombre fini de termes:

$f_1(x) = \sin^2 x,$ $f_2(x) = \cos^2 x,$ $f_3(x) = \sin^3 x,$ $f_4(x) = \cos^3 x.$

En déduire la valeur de

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6 x \, dx.$$

$$f_1(x) = \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$f_2(x) = \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$f_3(x) = \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3}{8i} = -\frac{\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)}{8i}$$

$$\Leftrightarrow f_3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$$

$$f_4(x) = \cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$$

En déduire la valeur

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6(x)\, dx \ ?$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6(x)\, dx = a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(a_k^2 + b_k^2\right)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^6(x)\, dx = \frac{1}{2} \times \frac{10}{16}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin^6(x)\,dx = \frac{5}{8}\pi$$

Exercice 9 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Développez en série de Fourier complexe la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2 définie sur $[-1, 1[$ par $f(t) = e^{i\pi z t}$. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\frac{2\pi}{T}x} \qquad avec \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-ik\frac{2\pi}{T}x}\, dx.$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, 2 - \text{périodique}$

$\forall t \in]-1,1[, f(t) = e^{i\pi z t}$

f est bornée sur $]-1,1[$ donc $\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt < \infty$

$$c_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{i\pi z t} e^{-ik\frac{2\pi}{2}t} dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{(i\pi z - ik\pi)t} dt = \frac{1}{2} \times \frac{e^{i\pi z - ik\pi} - e^{-i\pi z + i\pi k}}{i\pi(z-k)}$$

$e^{i\pi k} = \cos(\pi k) + i\sin(k\pi) = (-1)^k$

$e^{-i\pi k} = (-1)^k$

$$\Leftrightarrow c_k = \frac{e^{i\pi z}e^{-ik\pi} - e^{-i\pi z}e^{ik\pi}}{2i\pi(k-z)} = (-1)^k \frac{\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)}{2i\pi(z-k)}$$

$$S(f)_{\mathbb{C}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right)}{2i\pi(z-k)} e^{i\pi k t}$$

On pose $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow S(f)_{\mathbb{R}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i\pi(x-z)} e^{i\pi k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-z)} e^{i\pi k t}$$

$$\to c_k = (-1)^k \frac{\sin(\pi x)}{\pi(x-z)}$$

On cherche :

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2} \text{ avec } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$$

$a_k = c_k + c_{-k}$

$b_k = i(c_k - c_{-k})$

$$\Rightarrow \frac{a_k^2 + b_k^2}{2} = \frac{4c_k c_{-k}}{2} = 2c_k c_{-k}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 (x-z)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2}$$

TD 2 – Transformée de Fourier

Exercice 1

(a) Déterminez la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ de $f(x) = e^{-|x|}$.

$f \in L^1(\mathbb{R})$?

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 2 < \infty$$

$$\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-(1+2\pi i\xi)x} dx + \int_{-\infty}^{0} e^{(1-2\pi i\xi)x} dx$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}\big(f(x)\big)(\xi) = \left[\frac{e^{-(1+2\pi i\xi)x}}{-(1+2\pi i\xi)}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{(1-2\pi i\xi)x}}{1-2\pi i\xi}\right]_{-\infty}^{0} = 0 + \frac{1}{1+2\pi i\xi} + \frac{1}{1-2\pi i\xi} - 0 = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-(1+2\pi i\xi)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} e^{-2\pi i\xi x}$$

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx$.

$$\mathcal{F}^{-1}\big(f^1(\xi)\big)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+(2\pi\xi)^2} e^{2\pi i\xi x} d\xi = 2\int_0^{\infty} \frac{2\cos(2\pi\xi x)}{1+(2\pi\xi)^2} d\xi$$

Changement de variable : $2\pi\xi = y$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1}\big(f^1(\xi)\big)(x) = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{2\cos(xy)}{1+y^2} dy = e^{-|x|}$$

$f^1(\xi) \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow$ Théorème 5. $\mathcal{F}'\big(f^1(\xi)\big)(x) = f(x)$, en tout point x où f est continue. Donc par le théorème 5 :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$$

Exercice 2 Notons χ la fonction "porte" donnée par

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 1, \quad \text{si } |x| \le 1/2, \\ &= 0, \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Sachant que la transformée de Fourier de cette fonction est donnée par

$$\mathcal{F}[\chi](\xi) = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \text{ si } \xi \neq 0, \qquad \mathcal{F}[\chi](0) = 1,$$

trouvez la transformée de Fourier de

(a) $\chi(\frac{x-1}{2})$; (b) $x\,\chi(x)$; (c) $x^2\,\chi(x)$.

a) $\chi\left(\frac{x-1}{2}\right)$

$\chi(u)$ avec $u(x) = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ alors $g\left(\frac{1}{2}x\right) = \chi\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$$\mathcal{F}\left(\chi\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)(\xi) =_{\lambda=2} 2\mathcal{F}\big(g(x)\big)(2\xi) = 2\mathcal{F}\left(\chi\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)(2\xi)$$

$$= 2e^{-2\pi i\frac{1}{2}\times 2\xi}\mathcal{F}\big(\chi(x)\big)(2\xi)$$

$$\mathcal{F}\left(\chi\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)(\xi) = \begin{cases} 2e^{-2\pi i\xi}\dfrac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi} \text{ si } \xi \neq 0 \\ x \text{ si } \xi = 0 \end{cases}$$

b) $x.\chi(x)$

$$\mathcal{F}\big(x\chi(x)\big) = \frac{1}{-2\pi i}\Big(\mathcal{F}\big(\chi(x)\big)\Big)'$$

$f \in L^1$

$$\big(\mathcal{F}(f)\big)^{(n)} = \mathcal{F}\big((-2\pi i x)^n f(x)\big)$$

$n = 1$

$$\Leftrightarrow \big(\mathcal{F}(f)\big)'(\xi) = \mathcal{F}\big(-2\pi x i\chi(x)\big)(\xi) = -2\pi i\mathcal{F}\big(x.\chi(x)\big)(\xi)$$

Si $\xi \neq 0$:

$$\mathcal{F}\big(x.\chi(x)\big)(\xi) = \frac{1}{-2\pi i}\left(\frac{\pi^2\xi\cos(\pi\xi) - \pi\sin(\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}\right) = \frac{i}{2}\left(\frac{\cos(\pi\xi)}{\pi\xi} - \frac{\sin(\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}\right)$$

Si $\xi = 0$

$$\mathcal{F}\big(x\chi(x)\big) = \frac{1}{-2\pi i}\lim_{\xi\to 0}\frac{\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} - 1}{\xi - 0} = \frac{i}{2\pi}\lim_{\xi\to 0}\frac{(\sin(\pi\xi) - \pi\xi)}{\pi\xi^2} = \frac{i}{2\pi}\lim_{\xi\to 0}\frac{\pi\xi - \frac{(\pi\xi)^3}{6} + o(\xi) - \pi\xi}{\pi\xi^2}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}\big(x\chi(x)\big) = 0$$

c) $x^2\chi(x)$

$n = 2$:

$$\mathcal{F}\big(x^2\chi(x)\big)(\xi) = \frac{1}{(-2\pi i)^2}\mathcal{F}\big(\chi(x)\big)^{(2)}(\xi) = \frac{1}{-2\pi i}\mathcal{F}\big(x\chi(x)\big)^{(1)}(\xi)$$

Si $\xi \neq 0$:

$$\mathcal{F}\big(x^2\chi(x)\big) = \frac{i}{2\pi}\Big(\frac{i}{2}\left(\frac{\cos(\pi\xi)}{\pi\xi} - \frac{\sin(\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}\right)^{(1)}$$

Si $\xi = 0$:

$$\mathcal{F}\big(x^2\chi(x)\big)(\xi) = \frac{i}{2\pi}\lim_{\xi\to 0}\frac{\mathcal{F}\big(x\chi(x)\big)(\xi) - 0}{\xi - 0} = \frac{i}{2\pi}\lim_{\xi\to 0}\frac{\frac{i}{2}\left(\frac{\cos(\pi\xi)}{\pi\xi} - \frac{\sin(\pi\xi)}{(\pi\xi)^2}\right)}{\xi}$$
$$= -\frac{1}{4\pi}\lim_{\xi\to 0}\frac{\pi\xi\cos(\pi\xi) - \sin(\pi\xi)}{\pi^2\xi^3} = \frac{1}{12}$$

Exercice 3 En utilisant la transformée de Fourier de $e^{-|x|}$, trouvez la transformée de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = 2\int_0^\infty \frac{\cos\left(\overbrace{2\pi\xi x}^{a}\right)}{1+x^2}dx = \pi e^{-2\pi|\xi|}$

$\mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(e^{-|x|})\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi}{1+(2\pi\xi)^2}e^{2\pi i\xi x}d\xi$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-2\pi i\xi x}dx = \pi e^{-|2\pi\xi|} = \pi e^{-2\pi|\xi|}$$

$u = 2\pi\xi$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{1+u^2}e^{iux}\frac{du}{2\pi} = e^{-|x|}$$

Donc $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}e^{iux}du = \pi e^{-|x|}$

Exercice 4 Montrez que $\chi_{[-a,a]} * \sin(x) = 2\sin a \sin x$ et que $\chi_{[-a,a]} * \cos(x) = 2\sin a\cos x$.

$$\chi_{[-a,a]} \times \sin(x) = \int \chi(-a,a)(x) \times \sin(x-t)\,dt = \int_{-a}^{a}\sin(x-t)\,dt = [\cos(x-t)]_{-a}^{a}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x-a) - \cos(x+a) = \sin(a)\sin(x)$$

Exercice 5 Considérons la fonction

$$\begin{aligned}\Lambda(x) &= 1-|x|, \quad \text{si } |x| \le 1,\\ &= 0, \quad\quad\ \ \text{si } |x| > 1.\end{aligned}$$

(a) Calculez $\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}$.

$$\chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases}1 \text{ si } x \in [0,1]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

$$\chi_{[0,1]} \times \chi_{[0,1]}(x) = \int_{\mathbb{R}}\chi_{[0,1]}(t)\chi_{[0,1]}(x-t)dt = \int_0^1\chi_{[0,1]}(x-t)dt = \begin{cases}\int_{x-1}^{x} dt \text{ avec } 0 \le x \le 2\\ 0 \text{ si } x > 2 \text{ ou } x < 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \le x - t \le 1 \\ 0 \le t \le 1 \end{cases} \Big\} 0 \le x \le 2$$

On pose : $u = x - 1$

$x - t = 1, x - t = 0$

$u = x - t \to u \in [0,1]$

$du = -dt$

$$\chi_{[0,1]}(u) = \begin{cases} 1 \text{ si } u \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \to x - t < 0 \\ \Big\}0 \le x \le 2 \to \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases} \\ 0 \text{ si } x > 2 \to x - t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 2 - x \text{ si } 1 \le x \le 2 \\ 0 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

(b) Exprimez Λ en fonction de $\chi_{[0,1]}$.

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| \text{ si } |x| \le 1 \\ 0 \text{ si } |x| > 1 \end{cases} \to -1 \le x \le 1$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 + x \text{ si} - 1 \le x \le 0 \\ 1 - x \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ 0 \text{ si } |x| > 1 \end{cases} = \chi_{[0,1]} \times \chi_{[0,1]}(x + 1)$$

(c) En déduire la transformée de Fourier de Λ.

$$\mathcal{F}(\lambda(x))(\xi) = \mathcal{F}\left(\chi_{[0,1]} \times \chi_{[0,1]}(x+1)\right)(\xi)$$

$$\Leftrightarrow e^{2\pi i \xi} \mathcal{F}\left(\chi_{[0,1)}(x)\right)^2 (\xi)$$

$$\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \chi_{[0,1]}(x)$$

$$-\frac{1}{2} \le x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$$

$$0 \le x \le 1$$

$$\mathcal{F}(\Lambda(x))(\xi) = e^{2\pi i \xi} \mathcal{F}\left(\chi_{[0,1]}(x)\right)^2 (\xi) = e^{2\pi i \xi} \mathcal{F}\left(\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2 (\xi)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{F}(\Lambda(x))(\xi) = e^{2\pi i \xi} \left(e^{-2\pi i \frac{1}{2}\xi} \mathcal{F}\left(\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(x)\right)(\xi)\right)^2 = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(\pi\xi)}{(\pi\xi)^2} \text{ si } \xi \ne 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$