

Graphes et algorithmes : TD1

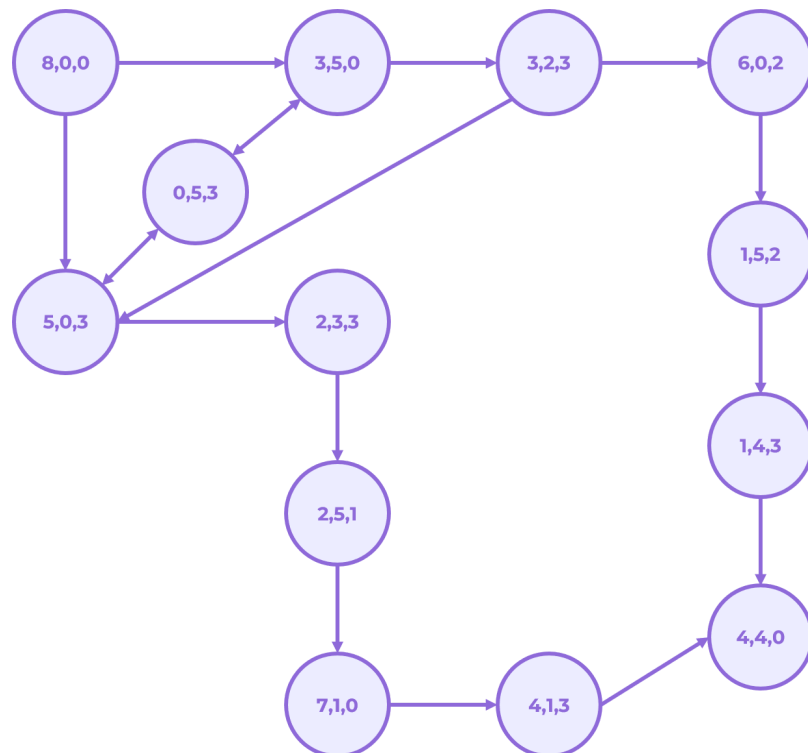
Exercice 1

Sujet

Jacques dispose d'une bouteille pleine d'une contenance de huit litres ; il a dans sa cave deux bouteilles vides, l'une de cinq litres et une autre de trois litres. Il désire partager le contenu de sa bouteille de huit litres en deux parts de quatre litres chacune, sans utiliser aucun autre moyen de mesure. Indiquez-lui la façon de procéder au moyen d'un graphe.

Résolution

- **Etat initial** : 8 litres dans la bouteille de huit litres, 0 litre dans les deux autres bouteilles.
- **Etat final** : 4 litres dans la bouteille de huit litres, 4 litres dans la bouteille de 5 litres.
- **Sommet** : état des trois bouteilles
- **Arc** : transfert réalisable



Exercice 2

Sujet

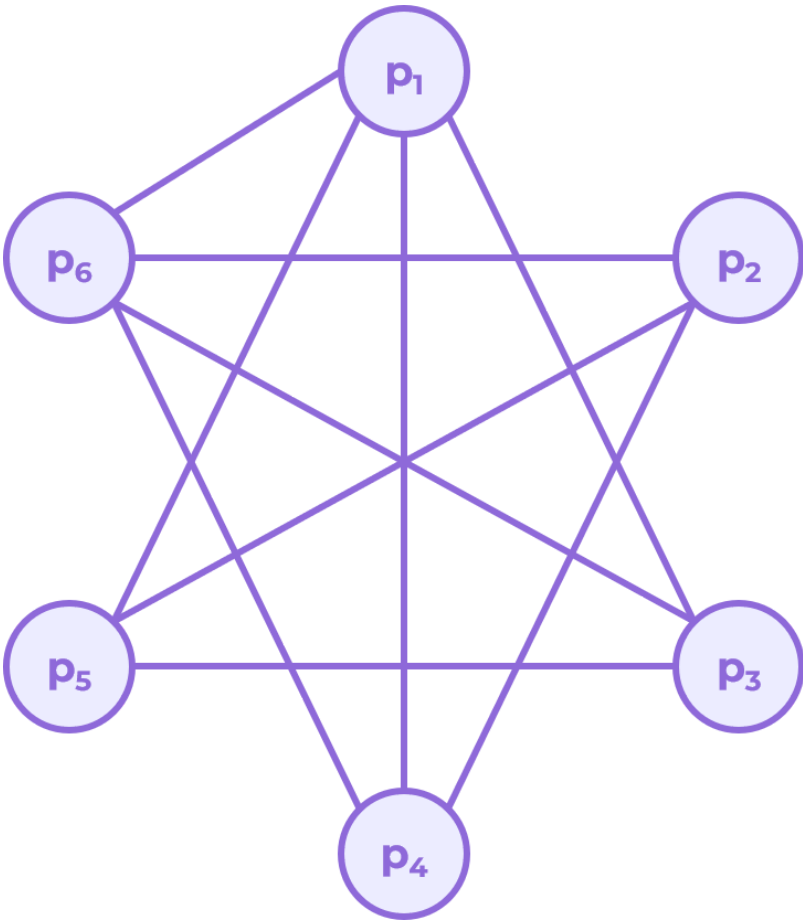
Une usine fabrique 6 produits chimiques notés p_i , $i = 1, \dots, 6$. Le stockage de certains d'entre eux dans un même entrepôt présente un réel danger représenté par

le tableau ci-dessous dans lequel un oui indique que les deux produits correspondants ne peuvent pas être stockés ensemble. Comment trouver le nombre minimum d'entrepôts nécessaires à l'usine pour stocker l'ensemble des produits à l'aide d'un graphe ?

	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	non	oui	oui	oui	oui
p_2		non	oui	oui	oui
p_3			non	oui	oui
p_4				non	oui
p_5					non

Résolution

- **Sommet** : produit chimique
- **Arête** : stockage impossible



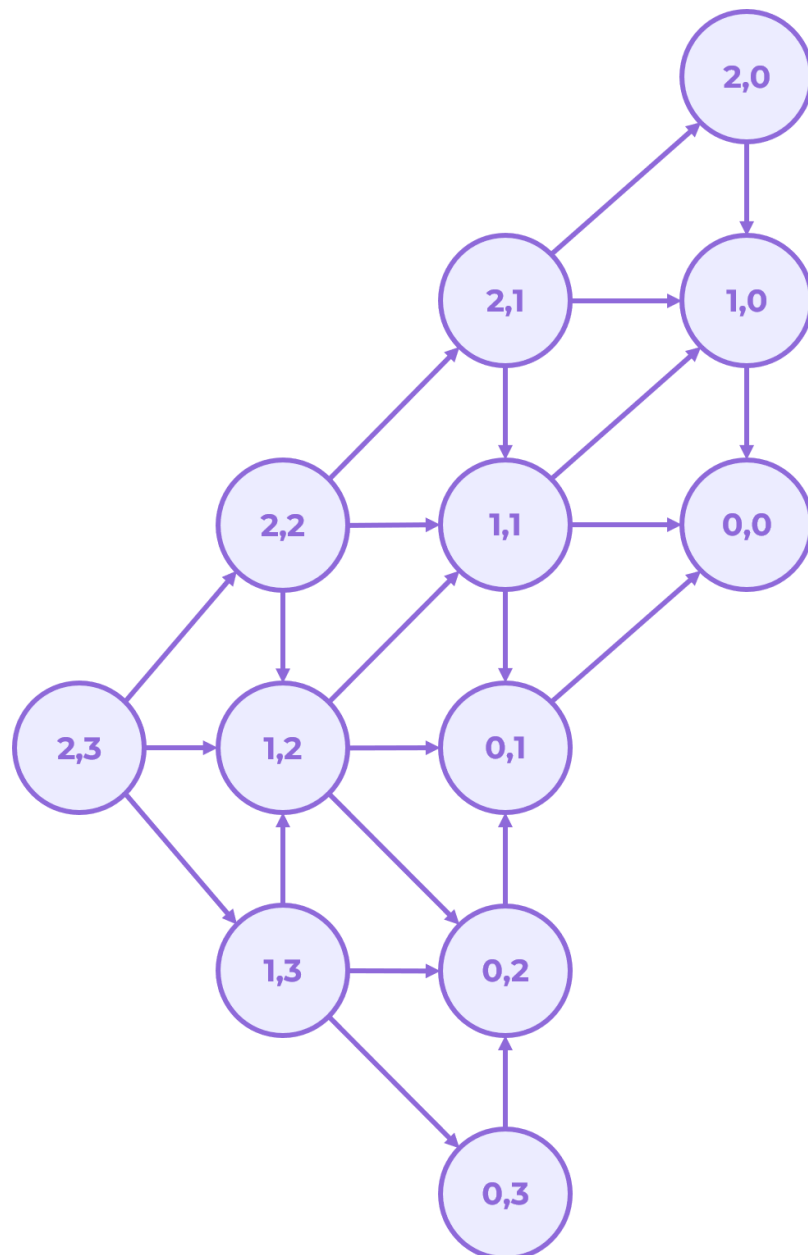
Exercice 3

Sujet

Un tas de n allumettes et un tas de $n + 1$ allumettes sont disposés sur une table. Deux joueurs, Jacques et Marc, choisissent, chacun à leur tour, soit une allumette dans l'un ou l'autre tas, soit une allumette dans chaque tas. C'est Jacques qui commence. Le joueur qui ramasse la dernière allumette gagne. Les mouvements de ce jeu peuvent être représentés en utilisant un graphe dans lequel on assigne une étiquette de la forme (x, y) aux sommets, indiquant qu'il reste x allumettes dans un tas et y dans l'autre. Pour $n = 2$ et $n = 3$, construire un graphe représentant tous les mouvements possibles du jeu. En déduire une stratégie à adopter pour gagner.

Résolution

- **Sommet** : état du jeu
- **Arc** : mouvement possible



Sujet

Soit $T = \{t_1, t_2, \dots, t_7\}$ un ensemble de sept tâches à exécuter sur un ensemble $M = \{m_1, m_2, \dots, m_7\}$ de sept machines. On suppose que le temps nécessaire au traitement de chaque tâche t_i , pour $i = 1, 2, \dots, 7$, est le même et que sa réalisation nécessite un sous-ensemble de machines $M_i \subseteq M$. De plus, deux tâches distinctes (t_i et t_j avec $i \neq j$) ne peuvent être exécutées simultanément que si elles utilisent des machines différentes ($M_i \cap M_j = \emptyset$). Les sous-ensembles de machines M_i pour $i = 1, 2, \dots, 7$ sont donnés ci-après. Comment modéliser ce problème à l'aide d'un graphe sachant que le but est de minimiser la durée totale d'exécution des tâches ?

$$M_1 = \{m_1, m_3, m_5\}$$

$$M_2 = \{m_1, m_2, m_4\}$$

$$M_3 = \{m_2, m_3, m_5\}$$

$$M_4 = \{m_2, m_4, m_7\}$$

$$M_5 = \{m_5, m_6, m_7\}$$

$$M_6 = \{m_4, m_6, m_7\}$$

$$M_7 = \{m_5, m_6, m_7\}$$

Résolution

Exercice 5

Sujet

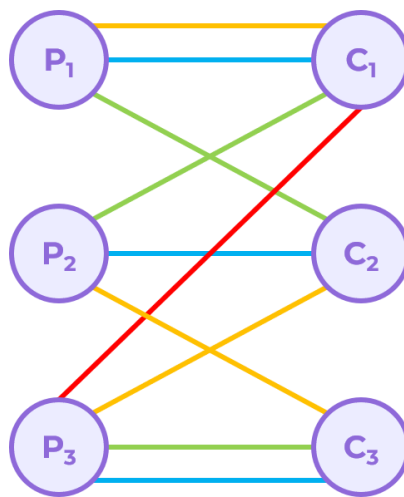
Trois professeurs notés P_1, P_2 et P_3 devront donner lundi prochain un certain nombre d'heures de cours à trois classes notées C_1, C_2 et C_3 en respectant les règles suivantes :

- P_1 doit donner 2 heures de cours à C_1 et 1 heure à C_2 ;
- P_2 doit donner 1 heure de cours à C_1 , 1 heure à C_2 et 1 heure à C_3 ;
- P_3 doit donner 1 heure de cours à C_1 , 1 heure à C_2 et 2 heures à C_3 .

Comment représenter cette situation par un graphe pour déterminer le nombre minimum de plages horaires nécessaires ?

Résolution

- **Sommet** : professeur et classe
- **Arête** : cours donné
- **Coloration** : toutes les arêtes d'un même sommet doivent avoir une couleur différente pour déterminer le nombre minimum de plages horaires nécessaires.



Exercice 6

Sujet

Un étudiant distrait s'aperçoit qu'il doit passer, le lendemain matin, un examen d'informatique. Il a la possibilité de réviser le contenu de **2** ou **3** chapitres choisis parmi les **12** vus en cours, ces chapitres n'étant pas totalement indépendants :

Chapitre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nécessite le(s) chap.	—	1	1 et 2	1 et 2	1	—	—	—	—	8	8 et 10	8 et 10

Aider cet étudiant en représentant à l'aide d'un graphe la situation (préoccupante) qui est la sienne.

Résolution

- **Sommet** : chapitre
- **Arc** : dépendance



Exercice 7

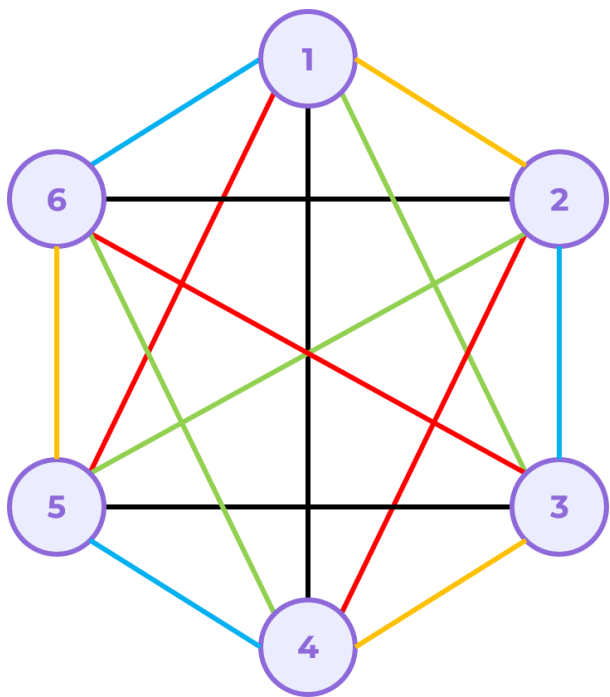
Sujet

Un tournoi d'échecs oppose **6** personnes. Chaque joueur doit affronter tous les autres. Construisez un graphe représentant toutes les parties possibles. Quel type de graphe obtenez-vous ? Si chaque joueur ne joue qu'un match par jour, combien de

jours faudra-t-il pour terminer le tournoi ? Aidez-vous du graphe pour proposer un calendrier des matches.

Résolution

- **Sommet** : joueur
- **Arête** : match
- **Coloration** : chaque joueur ne joue qu'un match par jour



C'est un graphe complet

Calendrier :

J1	J2	J3	J4	J5
1-2	2-3	1-3	2-4	1-4
3-4	4-5	4-6	1-5	2-6
5-6	1-6	2-5	3-6	3-5

Exercice 8

Sujet

On considère le système d'inégalités suivant dans lequel les variables sont binaires (elles ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1) :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 1 \\x_1 + x_3 + x_4 &\leq 1 \\x_4 + x_5 &\leq 1\end{aligned}$$

On cherche à déterminer une solution de ce système qui maximise : $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$. Montrer comment résoudre ce problème en le modélisant par un graphe. Indiquer précisément comment est construit le graphe et à quoi correspond une solution du problème.

Résolution

Exercice 9

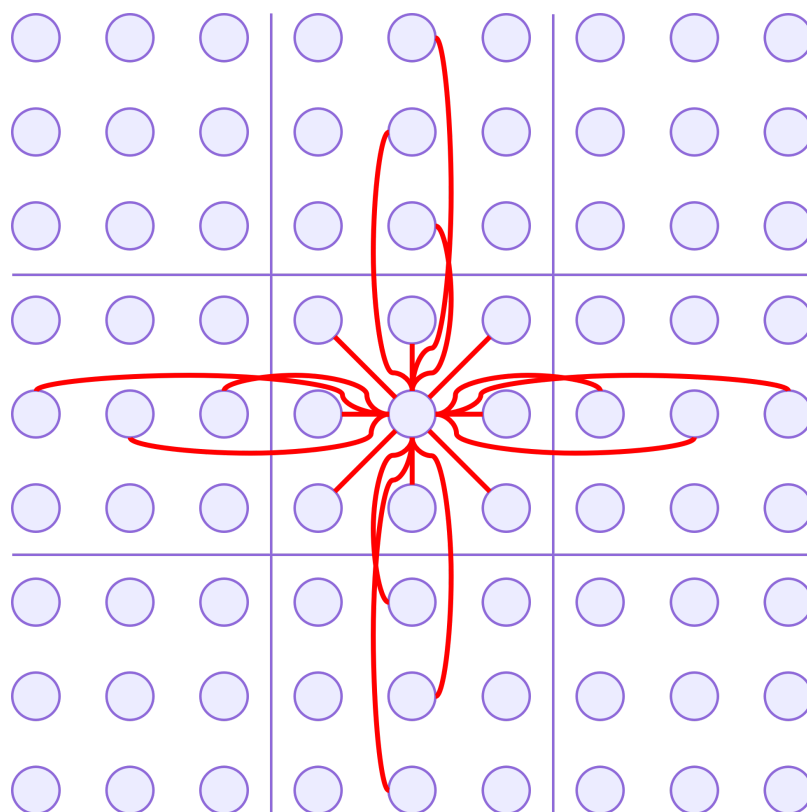
Sujet

On s'intéresse au jeu du Sudoku classique sur une grille 9×9 dans laquelle les valeurs de 1 à 9 doivent être placées une et une seule fois par ligne, par colonne et par sous-grille de taille 3×3 . Certaines cases peuvent être remplies au départ. Comment exprimer la résolution d'un Sudoku sur une grille donnée à l'aide d'un graphe ? Décrire précisément le graphe (nombre de sommets, nombre d'arcs/arêtes), et le problème correspondant (on ne demande pas de résoudre la grille !!).

Résolution

- **Sommet** : case
- **Arête** : contrainte

Représentation partielle (impact d'une case sur les autres) :



Exercice 10

Sujet

Quatre équipes de soldats doivent être envoyées sur un territoire ennemi. Chaque équipe est formée de trois personnes : 1 éclaireur, 1 signaleur et 1 sniper. La formation des équipes est cruciale pour la réussite de l'opération, et certains soldats ne peuvent pas être affectés à la même équipe pour différentes raisons (incompatibilité d'humeur, différence d'expérience, ...). Le tableau ci-dessous liste les différents soldats, avec pour chacun sa spécialité et les soldats avec lesquels il ne peut pas travailler.

Soldat	Spécialité	Incompatibilité
1	éclaireur	5, 7, 10
2	éclaireur	/
3	éclaireur	5, 6, 8, 9, 11
4	éclaireur	8, 12
5	signaleur	1, 3, 9
6	signaleur	3, 10, 11
7	signaleur	1, 9, 12
8	signaleur	3, 4, 9, 10
9	sniper	3, 5, 7, 8
10	sniper	1, 6, 8
11	sniper	3, 6
12	sniper	4, 7

1. Dessiner un graphe qui modélise la situation de manière à pouvoir voir comment former des équipes en ayant 1 personne de chaque spécialité dans chaque équipe.
2. Peut-on former 4 équipes de 3 personnes en respectant les contraintes du problème dans notre cas ? (justifier)

Résolution

Exercice 11

Sujet

Monsieur et Madame Dupont organise une soirée chez eux lors de laquelle il y a, en plus d'eux, 3 autres couples. Comme cela arrive fréquemment, certaines personnes se serrent la main pour se saluer. On suppose qu'aucune personne ne se sert la main,

ne sert la main de son/sa conjoint(e), et que deux personnes ne se serrent pas la main plusieurs fois. Une fois tous les convives installés, Monsieur Dupont demande à chaque autre personne (dont sa femme), combien de main il/elle a serré. A la surprise générale, chacun donne une réponse différente. Modéliser la situation à l'aide d'un graphe de manière à déterminer combien de mains Monsieur Dupont a serré. Expliquer précisément votre raisonnement pour arriver à la solution.

Résolution

- **Sommet** : personne
- **Arête** : main serrée
- **Degré** : $0 \leq d(s) \leq 6$

Exercice 12

Sujet