НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
_______ М. М. Савчук
(підпис) *(ініціали, прізвище)*
“____” ____________ 2015 р.

Дипломна робота

освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр”

з напряму підготовки 6.040301 «Прикладна математика»
на тему «Розробка автоматизованого тестуючого комплексу, що враховує психологічні особливості студентів»

Виконав: студент 4 курсу групи ФІ-13
Кригін Валерій Михайлович _______
(підпис)
Керівник д-р ф.-м. наук, професор Дороговцев Андрій Анатолійович _______
(підпис)
Рецензент к. т. н., доцент Головенкін Володимир Павлович _______
(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _______

Київ — 2015 року

ЗМІСТ

1 ВСТУП

1.1 Обґрунтування та актуальність роботи

Існуючі на даний момент системи тестування недостатньо гнучкі: вони аналізують лише відповіді на запитання, відносячи їх до вірних або невірних, а на цій базі роблять кінцевий висновок щодо знань студента. Стрімкий розвиток комп'ютерної техніки й інформаційних технологій надає можливість визначати ритм складання тесту, а також індивідуальні особливості людини. Дані психологічних досліджень допоможуть правильно трактувати отримані значення, а добре вивчені та перевірені часом математичні методи надають великі можливості для систематизації та обробки результатів вимірювання.

1.2 Мета та завдання

Завдання наступні:

1) Вивчити математичні методи та розділи психології, що дозволять розв'язати поставлену задачу, пояснити та обґрунтувати отримані результати
2) Ознайомитися з правилами побудови тестових завдань для найбільш ефективної та об'єктивної процедури оцінки знань студентів
3) Розробити програмний комплекс тестування й обробки результатів
4) Моделювання

За мету поставлено збільшення об'єктивності тестування, а також покращення якості навчання за допомогою порад студентам і викладачам практичних занять.

2 ОСНОВНА ЧАСТИНА

2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Метод головних компонент

Метод головних компонент (Principal component analysis) — метод, що дозволяє зменшити розмірність досліджуваної вибірки з мінімальними втратами інформації. [1]

Маємо m об'єктів, з яких треба зняти по n певних властивостей. На вході в нас є виборки $\vec{X}_k$, кожна з яких відповідає сукупності властивостей k-го об'єкту

$$\vec{X}_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^n \end{bmatrix}, \qquad k = \overline{1,m}$$

Згрупуємо всі вимірювання в одну матрицю X

$$X = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_m^n \end{bmatrix}$$

Спочатку нам знадобиться знайти вибіркові середні значення для кожної властивості

$$a_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} x_k^i, \qquad i = \overline{1,n}$$

Маємо вектор вибіркових середніх значень

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Центруємо отримані дані, що містяться в матриці X, віднявши від кожного стовбця вектор вибіркових середніх $\vec{a}$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^1 & \tilde{x}_2^1 & \dots & \tilde{x}_m^1 \\ \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_2^2 & \dots & \tilde{x}_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_1^n & \tilde{x}_2^n & \dots & \tilde{x}_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 - a_1 & x_2^1 - a_1 & \dots & x_m^1 - a_1 \\ x_1^2 - a_2 & x_2^2 - a_2 & \dots & x_m^2 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n - a_n & x_2^n - a_n & \dots & x_m^n - a_n \end{bmatrix}$$

Обчислюємо вибіркову коваріаційну матрицю властивостей. Вибіркову коваріацію i та j властивості рахуємо за формулою

$$\sigma_i^j = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} \tilde{x}_k^i \cdot \tilde{x}_k^j = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^{m} \left[\left(x_k^i - a_i \right) \cdot \left(x_k^j - a_j \right) \right], \qquad i,j = \overline{1,n}$$

Маємо вибіркову коваріаційну матрицю

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \dots & \sigma_n^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1^n & \sigma_2^n & \dots & \sigma_n^n \end{bmatrix}$$

Щоб отримувати лише потрібну інформацію, ми хочемо знайти таке ортогональне лінійне перетворення L вхідної матриці $\tilde{X}$, щоб отримати матрицю

$Y = L \cdot \tilde{X}$, яка має діагональну вибіркову коварiаційну матрицю K' з незростаючими зверху вниз значеннями. Діагональна вибіркова коваріаційна матриця гарантує той факт, що отримані значення Y будуть некорельованими. Рангування значень діагональних елементів матриці K' за величиною дасть більш наочне уявлення про будову досліджуваних об'єктів, адже діагональні елементи — вибіркові дисперсії. Чим більше дисперсія, тим більше відповідна властивість змінюється від об'єкту до об'єкту, і тим більше корисної інформації вона нам надає.

Вибіркова коваріаційна матриця K' для $Y = L \cdot \tilde{X}$ має вигляд

$$K' = L \cdot K \cdot L^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

З лінійної алгебри відомо, що матриця L складається з координат власних векторів матриці K, а елементи λ_k — її власні числа, які існують і є невід'ємними через невід'ємну означеність матриці K. Вважаємо, що числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ впорядковані від більшого до меншого для зручності подальших дій. Позначимо власний вектор матриці K, що відповідає власному числу λ_k, як $\vec{l}_k$. Тоді

$$\vec{l}_k = \left[l_k^1, l_k^2, \dots, l_k^n\right], \qquad k = \overline{1,n}$$

Матриця L має вигляд

$$L = \begin{bmatrix} l_1^1 & l_1^2 & \dots & l_1^n \\ l_2^1 & l_2^2 & \dots & l_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \dots & l_n^n \end{bmatrix}$$

Треба зменшити розмірність простору досліджуваних параметрів системи з n до $p < n$, але при цьому втратити якомога менше відомостей про досліджувані об'єкти. Введемо міру інформації, що залишається при зменшенні кількості компонент, що розглядаються

$$I = \frac{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$$

Будемо вважати, що діємо продуктивно, тому починаємо обирати з перших компонент, адже саме вони є найбільш інформативними. Також бачимо, що інформативність змінюється в межах від 0 (нічого не дізнаємось) до 1 (зберегли усю інформацію).

Надалі буде розглядатися матриця головних компонент Y

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \dots & y_m^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^p & y_2^p & \dots & y_m^p \end{bmatrix}$$

2.1.2 Гістограма

Для подальшого аналізу потрібно здобути щільність розподілу головних компонент. Оскільки маємо справу з вибіркою і вибірковими характеристиками, потрібно побудувати гістограму, адже це і є вибіркова характеристика, що відповідає щільності.

Побудуємо j-й стовбець гістограми для виборки з k-ї строки матриці Y

$$h_j^k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}\left(y_i^k \in I_j^k\right), \qquad j = \overline{1, N}, \qquad k = \overline{1, p}$$

де I^k — набір напівінтервалів, що розбиває відрізок $\left[\min\limits_{i=\overline{1,m}} y_i^k; \max\limits_{i=\overline{1,m}} y_i^k\right]$ на N

рівних частин. Для вибору N можна скористатися досить відомою формулою Стьорджеса (Sturges' formula) [2]

$$N = \lfloor \log_2 m \rfloor + 1$$

Маємо матрицю гістограм

$$H = \begin{bmatrix} h_1^1 & h_2^1 & \dots & h_N^1 \\ h_1^2 & h_2^2 & \dots & h_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^p & h_2^p & \dots & h_N^p \end{bmatrix}$$

і напівінтервалів, що відповідають кожному стовбчику кожної гістограми

$$I = \begin{bmatrix} I_1^1 & I_2^1 & \dots & I_N^1 \\ I_1^2 & I_2^2 & \dots & I_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_1^p & I_2^p & \dots & I_N^p \end{bmatrix}$$

2.1.3 Критерій узгодженості Пірсона χ^2

Гістограма може використовуватися не тільки для графічної інтерпретації отриманих даних, але й для віднесення вибірки до якогось відомого розподілу. Відповідь на питання "Чи дійсно вибірка $y_1^k, \dots, y_m^k$ має розподіл F^k?" може надати критерій узгодженості Пірсона.

Розглянемо вектор

$$\eta^k = \left[\frac{\nu_1^k - m \cdot \rho_1^k}{\sqrt{m \cdot \rho_1^k}}, \dots, \frac{\nu_N^k - m \cdot \rho_N^k}{\sqrt{m \cdot \rho_N^k}} \right]$$

Знайдемо його характеристичну функцію

$$\varphi_{\eta^k}(\lambda) = \mathrm{M}\, e^{i\cdot\left(\lambda,\eta^k\right)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^N$$

Для зручності перепозначимо індикатор

$$\mathfrak{I}_{i,j}^k = \mathbb{1}\left\{y_i^k \in I_j^k\right\}$$

Подивимось, чому дорівнює скалярний добуток в експоненті

$$\left(\lambda,\eta^k\right) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot \frac{\nu_j^k - m\cdot\rho_j^k}{\sqrt{m\cdot\rho_j^k}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{\sqrt{m\cdot\rho_j^k}} \cdot \sum_{i=1}^{m}\left(\mathfrak{I}_{i,j}^k - \rho_j^k\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_j}{\sqrt{m\cdot\rho_j^k}} \cdot \left(\mathfrak{I}_{i,j}^k - \rho_j^k\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot \frac{\mathfrak{I}_{i,j}^k - \rho_j^k}{\sqrt{m\cdot\rho_j^k}}$$

Бачимо суму m незалежних однаково розподілених випадкових величин. Введемо позначення

$$\mathfrak{I}_j^k = \mathbb{1}\left\{y_1^k \in I_j^k\right\}$$

А також позначимо новий випадковий вектор

$$\zeta^k = \left[\frac{\mathfrak{I}_1^k - \rho_1^k}{\sqrt{m\cdot\rho_1^k}}, \ldots \frac{\mathfrak{I}_N^k - \rho_N^k}{\sqrt{m\cdot\rho_N^k}}\right]$$

Тоді скалярний добуток прийме вигляд

$$\left(\lambda,\eta^k\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot \zeta_j^k = \sum_{i=1}^{m}\left(\lambda,\zeta^k\right) = m\cdot\left(\lambda,\zeta^k\right)$$

За рахунок незалежності випадкових величин ζ_j^k маємо

$$\varphi_{\eta^k}(\lambda) = \mathrm{M}\, e^{i\cdot\left(\lambda,\eta^k\right)} = \mathrm{M}\, e^{m\cdot i\cdot\left(\lambda,\zeta^k\right)} = \left(\mathrm{M}\, e^{i\cdot\left(\lambda,\zeta^k\right)}\right)^m \tag{2.1}$$

Розглянемо характеристичну функцію випадкового вектора ζ^k

$$\varphi_{\zeta^k}(\lambda) = \mathrm{M}\left[\exp\left\{i\cdot\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\cdot\zeta_j^k\right\}\right] \tag{2.2}$$

Легко побачити, що

$$\left(\lambda, \zeta^k\right) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot \zeta_j^k = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot \frac{\mathfrak{I}_j^k - \rho_j^k}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} \cdot \mathfrak{I}_j^k - \frac{\sqrt{\rho_j^k} \cdot \lambda_j}{\sqrt{m}} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathfrak{I}_j^k \cdot \left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} - \sum_{l=1}^{N} \frac{\sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l}{\sqrt{m}} \right)$$

Тобто характеристична функція (2.2) приймає вигляд

$$\varphi_{\zeta^k}(\lambda) = \mathrm{M} \left[\sum_{j=1}^{N} \mathfrak{I}_j^k \cdot \exp\left\{ \frac{i}{\sqrt{m}} \left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho_j^k}} - \sum_{l=1}^{N} \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l \right) \right\} \right]$$

Перепозначимо вираз в круглих дужках

$$\mathfrak{z}^k = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho_j^k}} - \sum_{l=1}^{N} \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l$$

Математичне очікування індикатора — ймовірність події, яку він перевіряє. Отже

$$\varphi_{\zeta^k}(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \rho_j^k \cdot \exp\left\{ \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right\}$$

Якщо розмір вибірки m буде зростати, то характеристична функція η^k (2.1) буде поводитись наступним чином

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_{\eta^k}(\lambda) = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \sum_{k=1}^{N} p_k \cdot \left[\exp\left\{ \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right\} - 1 \right] \cdot \frac{m}{m} \right)^m =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \exp\left\{ m \cdot \sum_{k=1}^{N} p_k \cdot \left[\exp\left\{ \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right\} - 1 \right] \right\}$$

Для $\exp\left\{ \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right\}$ використаємо співвідношення

$$e^{\alpha} - 1 \approx \alpha + \frac{\alpha^2}{2}, \qquad \alpha \ll 1$$

Маємо

$$\sum_{j=1}^{N}\rho_j^k\cdot\frac{i\cdot\mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}}=\sum_{j=1}^{N}\rho_j^k\cdot\frac{i}{\sqrt{m}}\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho_j^k}}-\sum_{l=1}^{N}\sqrt{\rho_l^k}\cdot\lambda_l\right)=$$
$$=\frac{i}{\sqrt{m}}\cdot\left(\sum_{j=1}^{N}\sqrt{\rho_j^k}\cdot\lambda_j-\sum_{l=1}^{N}\sqrt{\rho_l^k}\cdot\lambda_l\right)=0,$$

$$\sum_{j=1}^{N}\rho_j^k\cdot\left(\frac{i\cdot\mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}}\right)^2=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\rho_j^k}{m}\cdot\left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho_j^k}}-\sum_{l=1}^{N}\sqrt{\rho_l^k}\cdot\lambda_l\right)^2=$$
$$=-\frac{1}{m}\cdot\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_j-\left(\sum_{l=1}^{N}\sqrt{\rho_l^k}\cdot\lambda_l\right)^2\right]$$

Тому

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_{\eta^k}(\lambda)=\lim_{m\to\infty}\exp\left\{-\frac{m}{m\cdot 2}\cdot\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_j-\left(\sum_{l=1}^{N}\sqrt{\rho_l^k}\cdot\lambda_l\right)^2\right]\right\}=$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\sum_{j=1}^{N}\lambda_j-\left(\sum_{l=1}^{N}\sqrt{\rho_l^k}\cdot\lambda_l\right)^2\right]\right\}=e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(A^k\lambda,\lambda\right)}$$

Матриця A^k побудована наступним чином

$$A^k=\left\|\delta_{ij}-\sqrt{\rho_i^k}\cdot\sqrt{\rho_j^k}\right\|_{i=1}^{n}$$

Симетричність мариці очевидна, тому треба довести її невід'ємну визначеність, щоб стверджувати, що вона є коваріаційною. Для цього візьмемо вектор

$$e^k=\left[\sqrt{\rho_1^k},\ldots,\sqrt{\rho_N^k}\right],\qquad\left\|e^k\right\|=1$$

Тоді бачимо, що

$$\left(A^k\lambda,\lambda\right)=\|\lambda\|^2-\left(\lambda,e^k\right)^2\tag{2.3}$$

З нерівності Коші маємо

$$\left\|\left(\lambda,e^k\right)\right\|\leq\|\lambda\|\cdot\left\|e^k\right\|=\|\lambda\|$$

Тобто матриця є дійсно невід'ємно визначеною і вектор η^k розподілений за нормальним законом з нульовим середнім і коваріаційною матрицею A^k.

Для подальших розрахунків розглянемо стандартний гаусівський вектор як суму випадкових нормально розподілених випадкових величин в стандартному базисі $\mathbb{R}^N$, який позначимо $[e_1, \ldots, e_N]$

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \cdot e_j \sim N\left(\vec{0}, I\right)$$

Згадуємо, що ортогональні перетворення U зберігають відстані, а також справедливо наступне

$$U\xi \sim N\left(0, UIU^{-1}\right) \sim N\left(\vec{0}, I\right)$$

Також ортонормований базис залишається ортонормованим базисом після ортогонального перетворення U. Оберемо такий оператор U, щоб набір $[e_1, \ldots, e_N]$ під його дією перетворився на $[f_1, \ldots, f_N]$, де

$$f_1 = e^k = \left[\sqrt{\rho_1^k}, \ldots, \sqrt{\rho_N^k}\right]$$

Тоді маємо вектор

$$U\xi = \hat{\xi} = \sum_{j=1}^{N} \hat{\xi}_j \cdot f_j \sim N\left(\vec{0}, I\right)$$

Подивимось, який розподіл має наступний вектор

$$\Upsilon = \sum_{j=2}^{N} \hat{\xi}_j \cdot f_j = \hat{\xi} - \hat{\xi}_1 \cdot e^k$$

Для цього розглянемо квадратичну форму

$$\mathrm{M}\left(\Upsilon, \lambda\right)^2 = \sum_{j=2}^{N} \left(\lambda, f_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\lambda, f_j\right)^2 - \left(\lambda, f_1\right)^2 = \|\lambda\|^2 - \left(\lambda, e^k\right)^2 = \left(A^k \lambda, \lambda\right)$$

З рівності (2.3) бачимо, що випадкові вектори η^k та Υ мають однаковий розподіл. Отже, розподіли їх норм теж співпадають. Оскільки сума $N-1$ квадратів незалежних стандартних гаусових випадкових величин має розподіл Пірсона з $N-1$ ступенями вільності

$$\|\Upsilon\|^2 = \sum_{j=2}^{N} \xi_j^2 \sim \chi^2_{N-1}$$

Маємо

$$\|\eta^k\| = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\nu_j^k - m \cdot \rho_j^k\right)^2}{m \cdot \rho_j^k} = m \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(h_j^k - \rho_j^k\right)^2}{\rho_j^k} \sim \chi^2_{N-1}$$

Останнє співвідношення дає змогу перевіряти належність виборки $y_1^k, \ldots,$ y_m^k до розподілу F^k. Перевірка виглядає наступним чином.

Розглянемо випадкову величину

$$R^k = m \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(h_j^k - \rho_j^k\right)^2}{\rho_j^k} \tag{2.4}$$

Обираємо рівень значущості α для функції розподілу χ^2_{N-1} і шукаємо відповідне до кількості ступенів вільності r_α. Рівень значущості — ймовірність помилки першого роду, тобто ймовірність того, що буде відкинуто вірну гіпотезу

$$\mathbb{P}\left(\chi^2_{N-1} \geq r_\alpha\right) = \alpha$$

Якщо $R^k \leq r_\alpha$, то гіпотеза про те, що вибірка Y^k дійсно має розподіл F^k, приймається.

Розглянемо той випадок, коли ймовірність ρ_i^k відгадана невірно. Повернемося до формули (2.4)

$$R^k = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(\nu_j^k - m \cdot \rho_j^k\right)^2}{m \cdot \rho_j^k}$$

Всі члени суми є невід'ємними. Якщо хоча б один елемент буде завеликим, то великою буде вся сума. Маємо випадкову величину η

$$\eta = \nu_i^k - m \cdot \rho_i^k = \sum_{j=1}^{m} \left(\xi_j - \rho_i^k\right), \qquad \mathbb{1}\left(y_j^k \in I_i^k\right) = \xi_j$$

Якщо ρ_i^k вгадано невірно, то воно не дорівнює математичному очікуванню індикатора. Додамо та віднімемо справжнє математичне очікування

$$\eta = \sum_{j=1}^{m} \left(\xi_j - \mathrm{M}\,\xi_1 + \mathrm{M}\,\xi_1 - \rho_i^k\right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\xi_j - \mathrm{M}\,\xi_1\right) + \sum_{j=1}^{m} \left(\mathrm{M}\,\xi_1 - \rho_i^k\right)$$

Останній доданок є просто різницею, помноженою на m

$$\eta = \sum_{j=1}^{m} \left(\xi_j - \mathrm{M}\,\xi_1\right) + m \cdot \left(\mathrm{M}\,\xi_1 - \rho_i^k\right)$$

Поділимо на $\sqrt{m}$, щоб скористатися центральною граничною теоремою

$$\frac{\eta}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \left(\xi_j - \mathrm{M}\,\xi_1\right) + \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot m \cdot \left(\mathrm{M}\,\xi_1 - \rho_i^k\right)$$

Перший доданок асимптотично має розподіл $N\left(0, \sigma^2\right)$, де σ^2 — дисперсія випадкової величини ξ_1 для достатньо великих m. Отже, вся сума зростає пропорційно до $\sqrt{m}$

$$\frac{\eta}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \left(\xi_j - \mathrm{M}\,\xi_1\right) + \sqrt{m} \cdot \left(\mathrm{M}\,\xi_1 - \rho_i^k\right) \sim \sqrt{m} \cdot \left(\mathrm{M}\,\xi_1 - \rho_i^k\right)$$

Тобто зараз R^k буде зростати пропорційно до величини m, і буде великим у порівнянні з r_α, що призведе до відхилення невірної гіпотези.

2.1.4 Типи вищої нервової діяльності

Для визначення того, які показники вимірювати і яким чином, скористуємось відомою класифікацією типів вищої нервової діяльності.

Згідно з Павловим[3] типи вищої нервової діяльності характеризуються трьома показниками: сила нервової системи (сильна або слабка), врівноваженість (врівноважена або неврівноважена) та рухливість (рухлива або інетртна). Павлов розглядає 4 комбінації цих показників з 8 можливих:

1) Слабка
2) Сильна та неврівноважена
3) Сильна, врівноважена та інертна
4) Сильна, врівноважена та рухлива

Далі ці класи (комбінації) будуть називатися відповідно слабкий, неврівноважений, інертний та рухливий.

2.1.5 Теппінг-тест (Tapping rate)

Існують відомі залежності між типом вищої нервової діяльності та зміною максимального темпу рухів кистю руки з часом. Протягом 30 секунд людина намагається притримуватися максимально можливого для себе темпу. Показники темпу фіксуються через кожні 5 секунд, а далі по 6 отриманим точкам будується крива темпа руху. [4]

Для тесту можна використовувати ручку (олівець) і папір, або телеграф. Сучасні технології дозволяють проводити тест за допомогою клавіатури комп’ютера або екрану планшета.

З олівцем і папіром тест поводиться наступним чином:

1) На папері креслиться 6 квадратів
2) Людина починає ставити якомога більше точок в першому квадраті впродовж перших 5 секунд
3) Коли проходить 5 секунд, потрібно перейти до наступного квадрату і ставити точки там
4) Процедура повторюється до тих пір, доки не пройде 30 секунд — в кінці буде заповнено всі 6 квадратів

Далі підраховується кількість точок в кожному квадраті та малюється ламана, де горизонтальна вісь відповідає номеру часового проміжку (номеру квадрата), а вертикальна відповідає кількості точок в квадраті.

Трактуються отримані дані наступним чином:

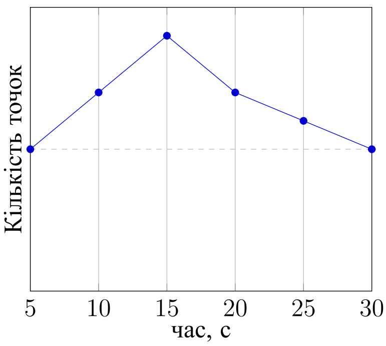
1) Спадна ламана відповідає слабкому типу (рис. 2.1д). Вона спадає після перших 5 секунд тесту і не повертається до початкового рівня
2) Ламана, що спочатку зростає, а після 10-15 секунд спадає нижче початкового рівня (проміжна між рівною та опуклою) відповідає неврівноваженому типу (рис. 2.1б).
3) Ввігнута ламана відповідає інертному типу (рис. 2.1г). Вона спочатку спадає, а на 25-30 секундах може зрости до початкового темпу
4) Опукла ламана відповідає рухливому типу (рис. 2.1а). Це така ламана, що зростає в перші 10-15 секунд тесту, а після 25-30 секунд повертається або падає нижче початкового рівня
5) Також темп може залишатися приблизно на одному рівні протягом усього тесту, що є оптимальним для складання іспитів (рис. 2.1в).

Достовірним відхиленням достатньо вважати різницю в два і більше натиснення між двома сусідніми п’ятисекундними проміжками. [4]

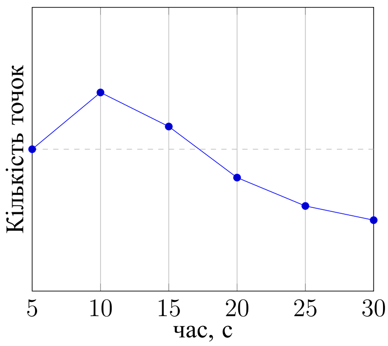
Оскільки цей тест заснований на вимірюванні витривалості нервової системи людини за умови максимального навантаження та перевіряє темп реагування (натиснення) на подразнювачі (внутрішній подразнювач — команда собі “треба тиснути”), було вирішено використовувати відомі вигляди кривих (рис. 2.1) при моделюванні результатів виконання завдань однакової складності.

Потрібно зауважити, що швидкість розв’язування задач може змінюватися з досвідом. Тобто, якщо студент зі слабкою нервовою системою буде тренуватися виконувати завдяння, то його показники з часом перейдуть на якісно новий рівень. Щодо студентів з сильною нервовою системою: швидкість не завжди означає якість виконання завдань.

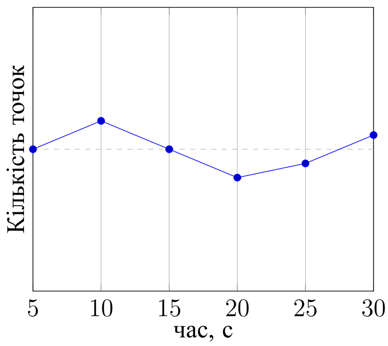
Завдання системи — класифікувати студентів в автоматичному режимі, з метою подальшого надання порад викладачам практичних занять щодо підвище-



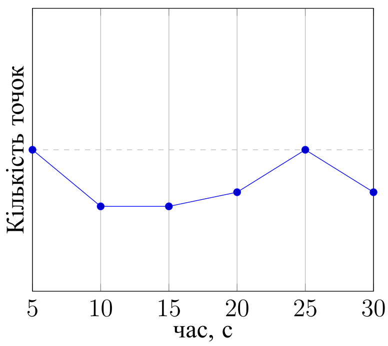
(а) Опукла



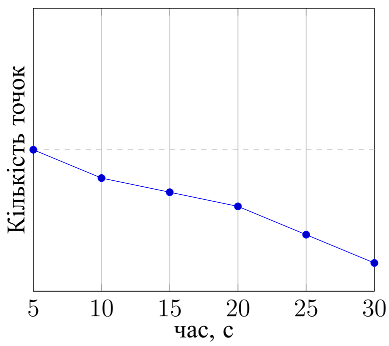
(б) Проміжна



(в) Рівна



(г) Ввігнута



(д) Спадна

Рисунок 2.1 — Загальний вигляд залежностей кількості поставлених точок від часу. Пунктирна лінія — кількість точок в перші 5 секунд

ння продуктивності роботи кожного студента. Це полегшує знаходження індивідуального підходу. Наприклад, тим, хто надто швидко втомлюється, потрібно розв'яювати якомога більше базових завдань, що не є складними, але розв'язок яких повинен бути на рівні рефлексів. Студентам, які поспішають, буде корисно ретельно коментувати у письмовій формі хід своїх думок, щоб вгамуватися та підвищити свою уважність.

Для тесту було обрано саме 30-секундний проміжок часу, адже спочатку виміри виконувалися протягом однієї хвилини і було виявлено, що найважливіша інформація отримується протягом перших 20-25 секунд, а далі лише марно втрачається час та сили тестованого. [4]

2.2 Моделювання

2.2.1 Процес Пуассона

Щоб моделювати темп виконання студентами контрольних задач, використаємо відомі дані з психології щодо ритму виконання теппінг-тесту для людей з різними типами вищої нервової діяльності. Оскільки постукування є потоком однорідних випадкових подій, змоделюємо їх як реалізації процесу Пуассона.

Нехай $\{N(t)\,|t \geq 0\}$ — процес Пуассона з інтенсивністю $\lambda(t)$. Маємо 7 контрольних точок на часовій вісі $t_0 = 0, t_1 = 5, \ldots, t_6 = 30$. Введемо відрізок часу T, за який проводиться вимірювання, та проміжки T_i, на які його розбито в експерименті

$$T = (0, 30]\,, \qquad T_i = (t_{i-1}, t_i]\,, \qquad i = \overline{1,6}$$

Нехай ν_i визначається наступним чином

$$\nu_i = N(t_i) - N(t_{i-1})\,, \qquad i = \overline{1{,}6}$$

Тоді ν_i — випадкова величина, що має розподіл Пуассона з параметром λ_i, де [5]

$$\lambda_i = m(T_i) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(\tau)\ d\tau, \qquad i = \overline{1,6}$$

Функція m — міра інтенсивності. [6]

Проміжки T_i утворюють розбиття множини T, а отже не перетинаються. Це означає, що випадкові величини ν_i незалежні між собою, і є можливість згенерувати процес натискання за допомогою 6 незалежних випадкових величин, що мають розподіл Пуассона.

Інтенсивність (параметр λ) є математичним очікуванням випадкової величини, що має розподіл Пуассона. Маючи результати реальних експериментів, можна обчислити середні значення кількості постукувань для кожного часового проміжку T_i, а отримані результати використовувати в якості параметрів λ_i.

Візьмемо значення відомого експерименту з підручника [4], які зображено на рис. 2.2. Оскільки результат один, то його значення будуть середніми з вибірки, що складається з одного вектора — їх і використаємо в якості параметрів λ_i. На рис. 2.3а зображено різні реалізації послідовності випадкових величин, що розподілені за законом Пуассона з параметрами

$$[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6] = [43, 40, 38, 37, 38, 35]$$

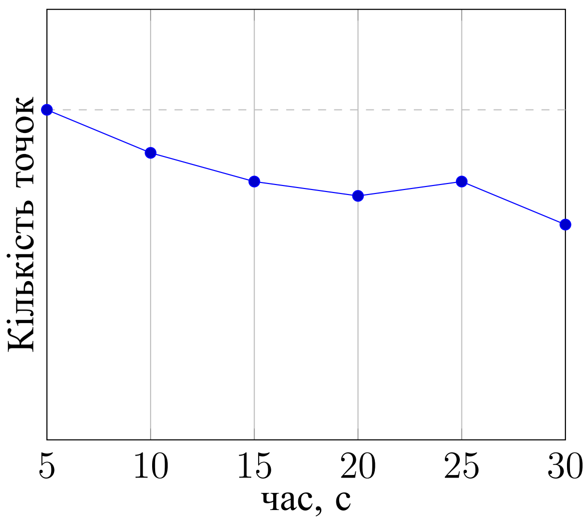


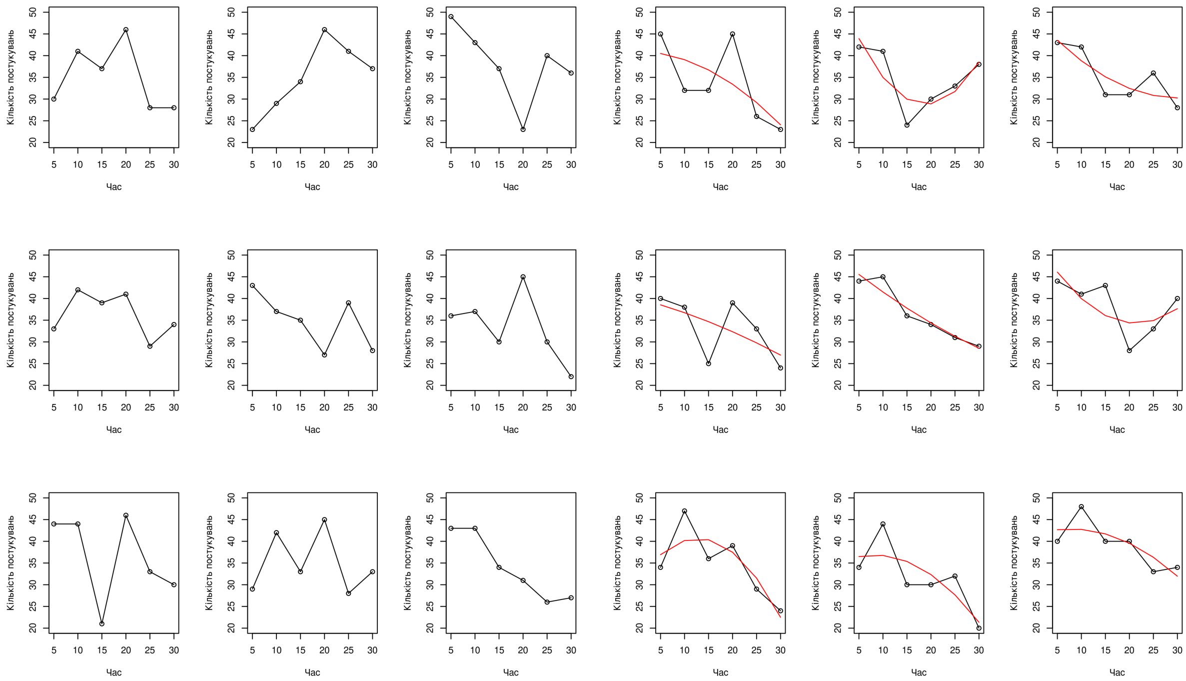
Рисунок 2.2 — Спадна ламана, побудована на основі даних з книги Ільїна

2.2.2 Квадратична апроксимація методом найменших квадратів

Види результуючих ламаних (опукла, ввігнута, рівна, спадна) можна представити квадратичними функціями виду

$$y\left(t\right) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$$

На рис. 2.3б зображено реалізації послідовності випадкових величин, що розподілені за законом Пуассона, та криві, що є результатом апроксимації цих реалізацій.



(а) Без апроксимації (б) З апроксимацією

Рисунок 2.3 — Приклади результатів моделювання

Щоб представити результати у вигляді квадратичних функцій, використаємо метод найменших квадратів. Нехай $\left\{y_i \mid i = \overline{1,6}\right\}$ — результати поточного теппінг-тесту. Суть методу полягає в знаходженні таких коефіцієнтів a, b і c, з якими наступна величина приймає мінімальне значення

$$R^2\left(a, b, c\right) = \sum_{i=1}^{6} \left(a \cdot t_i^2 + b \cdot t_i + c - y_i\right)^2$$

Для цього треба взяти часткові похідні по кожному коефіцієнту, прирівняти ці похідні до нуля та розв'язати отриману систему

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} 2 \cdot \left(a \cdot t_i^2 + b \cdot t_i + c - y_i\right) & = 0 \\ \sum_{i=1}^{6} 2 \cdot t_i \cdot \left(a \cdot t_i^2 + b \cdot t_i + c - y_i\right) & = 0 \\ \sum_{i=1}^{6} 2 \cdot t_i^2 \cdot \left(a \cdot t_i^2 + b \cdot t_i + c - y_i\right) & = 0 \end{cases}$$

Цю систему можна переписати в матричному вигляді наступним чином

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{6} t_i^2 & \sum_{i=1}^{6} t_i & \sum_{i=1}^{6} 1 \\ \sum_{i=1}^{6} t_i^3 & \sum_{i=1}^{6} t_i^2 & \sum_{i=1}^{6} t_i \\ \sum_{i=1}^{6} t_i^4 & \sum_{i=1}^{6} t_i^3 & \sum_{i=1}^{6} t_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{6} y_i \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^{6} y_i \cdot t_i^2 \end{bmatrix}$$

Введемо позначення:

$$\sum_{i=1}^{6} 1 = N,$$

$$\sum_{i=1}^{6} t_i^k = X^k, \qquad k = \overline{1,4}$$

$$\sum_{i=1}^{6} y_i \cdot t_i^k = YX^k, \qquad k = \overline{0,2}$$

Рівняння прийняло наступний вигляд

$$\begin{bmatrix} X^2 & X & N \\ X^3 & X^2 & X \\ X^4 & X^3 & X^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ YX \\ YX^2 \end{bmatrix}$$

Використаємо метод Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь. Визначник Δ

$$\Delta = X^2 \cdot \left(X^2 \cdot X^2 - X \cdot X^3\right) - X \cdot \left(X^3 \cdot X^2 - X \cdot X^4\right) + N \cdot \left(X^3 \cdot X^3 - X^2 \cdot X^4\right)$$

Визначник Δ_a

$$\Delta_a = Y \cdot \left(X^2 \cdot X^2 - X \cdot X^3\right) - YX \cdot \left(X \cdot X^2 - N \cdot X^3\right) + YX^2 \cdot \left(X \cdot X - N \cdot X^2\right)$$

Визначник Δ_b

$$\Delta_b = -Y \cdot \left(X^3 \cdot X^2 - X \cdot X^4\right) + YX \cdot \left(X^2 \cdot X^2 - N \cdot X^4\right) - YX^2 \cdot \left(X^2 \cdot X - N \cdot X^3\right)$$

Визначник Δ_c

$$\Delta_c = Y \cdot \left(X^3 \cdot X^3 - X^2 \cdot X^4\right) - YX \cdot \left(X^2 \cdot X^3 - X \cdot X^4\right) \\ + YX^2 \cdot \left(X^2 \cdot X^2 - X \cdot X^3\right)$$

Відомо, що розв'язками є наступні вирази

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \qquad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}, \qquad c = \frac{\Delta_c}{\Delta}$$

Бачимо, що параметри — лінійні комбінації y_i, а коефіцієнти при y_i — раціональні дроби. Тобто можна записати розв'язки наступним чином

$$a = \sum_{i=1}^{6} y_i \cdot \frac{a_i}{\Delta}, \qquad b = \sum_{i=1}^{6} y_i \cdot \frac{b_i}{\Delta}, \qquad c = \sum_{i=1}^{6} y_i \cdot \frac{c_i}{\Delta}$$

2.2.3 Аналіз квадратичної апроксимації

Запишемо умови, що накладаються на a, b і c, за якиих отримана парабола відповідає раніше введеним типам вищої нервової діяльності. Введемо такі позначення: t_{max} і t_{min} — точки, в яких парабола досягає локального максимуму та мінімуму на відрізку $[t_1, t_6]$ відповідно. $\varepsilon = 1$ буде відповідати відхиленню від початкового значення функції, яке вважається суттєвим. t_1 і t_6, як і раніше, є точками першого та останнього спостереження відповідно.

Пряма ламана весь час тримається приблизно на початковому рівні

$$\begin{cases} y\left(t_{max}\right) - y\left(t_1\right) & \leq \varepsilon \\ y\left(t_1\right) - y\left(t_{min}\right) & \leq \varepsilon \end{cases}$$

Спадна ламана спадає після моменту t_1, і не повертається до початкового положення

$$\begin{cases} t_{max} = t_1 \\ y\left(t_{max}\right) - y\left(t_{min}\right) > \varepsilon \end{cases}$$

Проміжна ламана спочатку зростає, потім не пізніше моменту часу t_3 починає спадати нижче початкового рівня

$$\begin{cases} t_2 \leq t_{max} \leq t_3 < t_{min} \\ y\left(t_{max}\right) - y\left(t_1\right) > \varepsilon \\ y\left(t_1\right) - y\left(t_{min}\right) > \varepsilon \end{cases}$$

Опукла ламана спочатку зростає, не пізніше моменту t_3 починає спадати, а до моменту t_6 повертається до початкового рівня або спадає нижче нього.

$$\begin{cases} t_2 \leq t_{max} \leq t_3 < t_{min} \\ y\left(t_{max}\right) - y\left(t_1\right) > \varepsilon \\ y\left(t_6\right) \leq y\left(t_1\right) \end{cases}$$

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Айвазян, С.А.* Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности : Справочное издание / С.А. Айвазян. — Финансы и статистика, 1989.

2. *Sturges, Herbert A.* The Choice of a Class Interval / Herbert A. Sturges // *j-J-AM-STAT-ASSOC*. — 1926. — March. — Vol. 21, no. 153. — Pp. 65–66.

3. *Павлов, И.П.* Двадцатилетний опыт объективного изучения высшей деятельности (поведения) животных / И.П. Павлов. — Государственное издательство Москва-Петроград, 1923.

4. *Ильин, Е.П.* Дифференциальная психофизиология / Е.П. Ильин. Серия Учебник нового века. — Питер, 2001.

5. *Булинский, А.В.* Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. Теория вероятностей. Математическая статистика : ТВМС. — Физматлит, 2003. `https://books.google.com.ua/books?id=4uihGwAACAAJ`.

6. *Kingman, J.F.C.* Poisson Processes / J.F.C. Kingman. Oxford studies in probability. — Clarendon Press, 1992. `https://books.google.com.ua/books?id=VEiM-OtwDHkC`.

Додаток А

Лістинг коду програми, яка моделює результати теппінг-тесту

```
library(NHPoisson)
wideScreen();
# Read command line arguments
args <- commandArgs(TRUE);
displayApproximation <- FALSE;
if (length(args) > 0 && args[1] == "approximation") {
    displayApproximation <- TRUE;
}
# Init cells for charts
n <- 3;
m <- 3;
png(’output.png’, width=18, height=22, units="cm", res=300);
par(mfrow=c(n,m));
# Parameters
time <- seq(5, 30, 5);
sample.size = length(time);
lambda.default = c(40, 38, 36, 34, 32, 30, 0);
# Fill every cell
for (i in 1:(n*m)) {
    # Generate non-homogeneous Poisson process
    aux <- simNHP.fun(lambda=lambda.default);
    # Calculate number of events in every time interval (we have sample.size of them)
    cur <- unlist((Map(function(x) length(aux$posNH[aux$posNH==x]), 1:(sample.size))));
    # Calculate approximation
    model <- lm(cur ~ poly(time, 2, raw=TRUE));
    predictedcounts <- predict(model);
    # Plot
    plot(time, cur, xlab="Час", ylab="Кількість постукувань", ylim=c(20,50));
    lines(time, cur);
    if (displayApproximation) {
        lines(time, predictedcounts, col=’red’);
    }
}
dev.off();
```