

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ**  
**“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”**  
**ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ**  
**КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ**

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

М. М. Савчук

“ \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2015 р.  
(підпис) (ініціали, прізвище)

**Дипломна робота**

освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр”

з напрямку підготовки 6.040301 «Прикладна математика»  
на тему «Розробка автоматизованого тестуючого комплексу,  
що враховує психологічні особливості студентів»

Виконав: студент 4 курсу групи ФІ-13

Кригін Валерій Михайлович

Керівник д-р ф.-м. наук, професор Дороговцев Андрій Анатолійович

Рецензент к. т. н., доцент Головенкін Володимир Павлович

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

\_\_\_\_\_  
(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі  
немає запозичень з праць інших авторів  
без відповідних посилань.

Студент \_\_\_\_\_

Київ — 2015 року

## ЗМІСТ

Вступ . . . . .	3
1 Математичне підґрунтя . . . . .	4
1.1 Теоретичні відомості . . . . .	4
1.1.1 Метод головних компонент . . . . .	4
1.1.2 Побудова гістограми для критерію Пірсона . . . . .	8
1.1.3 Критерій узгодженості Пірсона $\chi^2$ . . . . .	9
1.1.4 Типи вищої нервової діяльності . . . . .	17
1.1.5 Теппінг-тест (Tapping rate) . . . . .	18
1.2 Моделювання результатів виконання тестових завдань . . . . .	20
1.2.1 Процес Пуассона . . . . .	20
1.2.2 Квадратична апроксимація методом найменших квадратів . . . . .	22
1.2.3 Аналіз квадратичної апроксимації . . . . .	26
Перелік посилань . . . . .	30
Додаток А . . . . .	31

## ВСТУП

Існуючі на даний момент системи тестування недостатньо гнучкі: вони аналізують лише відповіді на запитання, відносячи їх до вірних або невірних, а на цій базі роблять кінцевий висновок щодо знань студента. Стрімкий розвиток комп'ютерної техніки й інформаційних технологій надає можливість визначати ритм складання тесту, а також індивідуальні особливості людини. Дані психологічних досліджень допоможуть правильно трактувати отримані значення, а добре вивчені та перевірені часом математичні методи надають великі можливості для систематизації та обробки результатів вимірювання.

За мету поставлено збільшення об'єктивності тестування, а також покращення якості навчання за допомогою порад студентам і викладачам практичних занять.

Завдання наступні:

- 1) Вивчити математичні методи та розділи психології, що дозволять розв'язати поставлену задачу, пояснити та обґрунтувати отримані результати
- 2) Ознайомитися з правилами побудови тестових завдань для найбільш ефективної та об'єктивної процедури оцінки знань студентів
- 3) Розробити програмний комплекс тестування й обробки результатів
- 4) Моделювання

# 1 МАТЕМАТИЧНЕ ПІДГРУНТЯ

## 1.1 Теоретичні відомості

### 1.1.1 Метод головних компонент

Метод головних компонент (Principal component analysis) — метод, що дозволяє зменшити розмірність досліджуваної вибірки з мінімальними втратами інформації. [1]

Маємо  $m$  об'єктів, з яких треба зняти по  $n$  певних властивостей. На вході в нас є виборки  $\vec{X}_k$ , кожна з яких відповідає сукупності властивостей  $k$ -го об'єкту

$$\vec{X}_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^n \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Згрупуємо всі вимірювання в одну матрицю  $X$

$$X = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_m^n \end{bmatrix}.$$

Спочатку нам знадобиться знайти вибіркові середні значення для кожної

властивості

$$a_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m x_k^i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Маємо вектор вибірових середніх значень

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Центруємо отримані дані, що містяться в матриці  $X$ , віднявши від кожного стовбця вектор вибірових середніх  $\vec{a}$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^1 & \tilde{x}_2^1 & \dots & \tilde{x}_m^1 \\ \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_2^2 & \dots & \tilde{x}_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_1^n & \tilde{x}_2^n & \dots & \tilde{x}_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 - a_1 & x_2^1 - a_1 & \dots & x_m^1 - a_1 \\ x_1^2 - a_2 & x_2^2 - a_2 & \dots & x_m^2 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n - a_n & x_2^n - a_n & \dots & x_m^n - a_n \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо вибірову коваріаційну матрицю властивостей. Вибіркову коваріацію  $i$  та  $j$  властивості рахуємо за формулою

$$\sigma_i^j = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m \tilde{x}_k^i \cdot \tilde{x}_k^j = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m \left[ (x_k^i - a_i) \cdot (x_k^j - a_j) \right], \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Маємо вибірку коваріаційну матрицю

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 & \dots & \sigma_n^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1^n & \sigma_2^n & \dots & \sigma_n^n \end{bmatrix}.$$

Щоб отримувати лише потрібну інформацію, ми хочемо знайти таке ортогональне лінійне перетворення  $L$  вхідної матриці  $\tilde{X}$ , щоб отримати матрицю  $Y = L \cdot \tilde{X}$ , яка має діагональну вибірку коваріаційну матрицю  $K'$  з незростаючими зверху вниз значеннями. Діагональна вибірка коваріаційна матриця гарантує той факт, що отримані значення  $Y$  будуть некорельованими. Рангування значень діагональних елементів матриці  $K'$  за величиною дасть більш наочне уявлення про будову досліджуваних об'єктів, адже діагональні елементи — вибіркові дисперсії. Чим більше дисперсія, тим більше відповідна властивість змінюється від об'єкту до об'єкту, і тим більше корисної інформації вона нам надає.

Вибіркова коваріаційна матриця  $K'$  для  $Y = L \cdot \tilde{X}$  має вигляд

$$K' = L \cdot K \cdot L^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

З лінійної алгебри відомо, що матриця  $L$  складається з координат власних ве-

кторів матриці  $K$ , а елементи  $\lambda_k$  — її власні числа, які існують і є невід’ємними через невід’ємну означеність матриці  $K$ . Вважаємо, що числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  впорядковані від більшого до меншого для зручності подальших дій. Позначимо власний вектор матриці  $K$ , що відповідає власному числу  $\lambda_k$ , як  $\vec{l}_k$ . Тоді

$$\vec{l}_k = [l_k^1, l_k^2, \dots, l_k^n], \quad k = \overline{1, n}.$$

Матриця  $L$  має вигляд

$$L = \begin{bmatrix} l_1^1 & l_1^2 & \dots & l_1^n \\ l_2^1 & l_2^2 & \dots & l_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \dots & l_n^n \end{bmatrix}.$$

Треба зменшити розмірність простору досліджуваних параметрів системи з  $n$  до  $p < n$ , але при цьому втратити якомога менше відомостей про досліджувані об’єкти. Введемо міру інформації, що залишається при зменшенні кількості компонент, що розглядаються

$$I = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}.$$

Будемо вважати, що діємо продуктивно, тому починаємо обирати з перших компонент, адже саме вони є найбільш інформативними. Також бачимо, що інформативність змінюється в межах від 0 (нічого не дізнаємось) до 1 (зберегли усю інформацію).

Надалі буде розглядатися матриця головних компонент  $Y$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \dots & y_m^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^p & y_2^p & \dots & y_m^p \end{bmatrix}.$$

### 1.1.2 Побудова гістограми для критерію Пірсона

Для подальшого аналізу потрібно здобути щільність розподілу головних компонент. Оскільки маємо справу з вибіркою і вибірковими характеристиками, потрібно побудувати гістограму, адже це і є вибіркова характеристика, що відповідає щільності. [2]

Побудуємо  $j$ -й стовбець гістограми для виборки з  $k$ -ї строки матриці  $Y$

$$h_j^k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \mathbb{1}(y_i^k \in I_j^k), \quad j = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, p},$$

де  $I^k$  — набір напівінтервалів, що розбиває відрізок  $\left[ \min_{i=\overline{1, m}} y_i^k; \max_{i=\overline{1, m}} y_i^k \right]$  на  $N$  рівних частин. Для вибору  $N$  можна скористатися досить відомою формулою Стюрджеса (Sturges' formula) [3]

$$N = \lfloor \log_2 m \rfloor + 1.$$



Маємо матрицю гістограм

$$H = \begin{bmatrix} h_1^1 & h_2^1 & \dots & h_N^1 \\ h_1^2 & h_2^2 & \dots & h_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^p & h_2^p & \dots & h_N^p \end{bmatrix}$$

і напівінтервалів, що відповідають кожному стовбчику кожної гістограми

$$I = \begin{bmatrix} I_1^1 & I_2^1 & \dots & I_N^1 \\ I_1^2 & I_2^2 & \dots & I_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_1^p & I_2^p & \dots & I_N^p \end{bmatrix}.$$

### 1.1.3 Критерій узгодженості Пірсона $\chi^2$

Гістограма може використовуватися не тільки для графічної інтерпретації отриманих даних, але й для віднесення вибірки до якогось відомого розподілу. Відповідь на питання “Чи дійсно вибірка  $y_1^k, \dots, y_m^k$  має розподіл  $F^k$ ?” може надати критерій узгодженості Пірсона.

Розглянемо вектор

$$\eta^k = \left[ \frac{\nu_1^k - m \cdot \rho_1^k}{\sqrt{m \cdot \rho_1^k}}, \dots, \frac{\nu_N^k - m \cdot \rho_N^k}{\sqrt{m \cdot \rho_N^k}} \right].$$

Знайдемо його характеристичну функцію

$$\varphi_{\eta^k}(\lambda) = M e^{i \cdot (\lambda, \eta^k)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^N.$$

Для зручності перепозначимо індикатор

$$\mathfrak{I}_{i,j}^k = \mathbb{1}\{y_i^k \in I_j^k\}.$$

Подивимось, чому дорівнює скалярний добуток в експоненті

$$\begin{aligned} (\lambda, \eta^k) &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \frac{\nu_j^k - m \cdot \rho_j^k}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} = \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} \cdot \sum_{i=1}^m (\mathfrak{I}_{i,j}^k - \rho_j^k) = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_j}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} \cdot (\mathfrak{I}_{i,j}^k - \rho_j^k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \frac{\mathfrak{I}_{i,j}^k - \rho_j^k}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}}. \end{aligned}$$

Бачимо суму  $m$  незалежних однаково розподілених випадкових величин. Введемо позначення

$$\mathfrak{I}_j^k = \mathbb{1}\{y_1^k \in I_j^k\},$$

а також позначимо новий випадковий вектор

$$\zeta^k = \left[ \frac{\mathfrak{I}_1^k - \rho_1^k}{\sqrt{m \cdot \rho_1^k}}, \dots, \frac{\mathfrak{I}_N^k - \rho_N^k}{\sqrt{m \cdot \rho_N^k}} \right].$$

Скалярний добуток прийняв вигляд

$$(\lambda, \eta^k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \zeta_j^k = \sum_{i=1}^m (\lambda, \zeta^k) = m \cdot (\lambda, \zeta^k).$$

За рахунок незалежності випадкових величин  $\zeta_j^k$  маємо

$$\varphi_{\eta^k}(\lambda) = M e^{i \cdot (\lambda, \eta^k)} = M e^{m \cdot i \cdot (\lambda, \zeta^k)} = \left( M e^{i \cdot (\lambda, \zeta^k)} \right)^m. \quad (1.1)$$

Розглянемо характеристичну функцію випадкового вектора  $\zeta^k$

$$\varphi_{\zeta^k}(\lambda) = M \left[ \exp \left\{ i \cdot \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \zeta_j^k \right\} \right]. \quad (1.2)$$

Легко побачити, що

$$\begin{aligned} (\lambda, \zeta^k) &= \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \zeta_j^k = \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot \frac{\mathfrak{I}_j^k - \rho_j^k}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\lambda_j}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} \cdot \mathfrak{I}_j^k - \frac{\sqrt{\rho_j^k} \cdot \lambda_j}{\sqrt{m}} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^N \mathfrak{I}_j^k \cdot \left( \frac{\lambda_j}{\sqrt{m \cdot \rho_j^k}} - \sum_{l=1}^N \frac{\sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l}{\sqrt{m}} \right). \end{aligned}$$

Тобто характеристична функція (1.2) приймає вигляд

$$\varphi_{\zeta^k}(\lambda) = M \left[ \sum_{j=1}^N \mathfrak{I}_j^k \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{m}} \left( \frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho_j^k}} - \sum_{l=1}^N \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l \right) \right\} \right].$$

Перепозначимо вираз в круглих дужках

$$\mathfrak{z}^k = \frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho_j^k}} - \sum_{l=1}^N \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l.$$

Математичне очікування індикатора — ймовірність події, яку він перевіряє. Отже

$$\varphi_{\zeta^k}(\lambda) = \sum_{j=1}^N \rho_j^k \cdot \exp \left\{ \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right\}.$$

Якщо розмір вибірки  $m$  буде зростати, то характеристична функція  $\eta^k$  (1.1) буде поводитись наступним чином

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{\eta^k}(\lambda) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( 1 + \sum_{k=1}^N p_k \cdot \left[ \exp \left\{ \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right\} - 1 \right] \cdot \frac{m}{m} \right)^m = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left\{ m \cdot \sum_{k=1}^N p_k \cdot \left[ \exp \left\{ \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right\} - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Для  $\exp \left\{ \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right\}$  використаємо співвідношення

$$e^\alpha - 1 \approx \alpha + \frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha \ll 1.$$

Маємо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \rho_j^k \cdot \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} &= \sum_{j=1}^N \rho_j^k \cdot \frac{i}{\sqrt{m}} \cdot \left( \frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho_j^k}} - \sum_{l=1}^N \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l \right) = \\ &= \frac{i}{\sqrt{m}} \cdot \left( \sum_{j=1}^N \sqrt{\rho_j^k} \cdot \lambda_j - \sum_{l=1}^N \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \rho_j^k \cdot \left( \frac{i \cdot \mathfrak{z}^k}{\sqrt{m}} \right)^2 &= - \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j^k}{m} \cdot \left( \frac{\lambda_j}{\sqrt{\rho_j^k}} - \sum_{l=1}^N \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l \right)^2 = \\
&= - \frac{1}{m} \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - \left( \sum_{l=1}^N \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_{\eta^k}(\lambda) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \exp \left\{ - \frac{m}{m \cdot 2} \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - \left( \sum_{l=1}^N \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l \right)^2 \right] \right\} = \\
&= \exp \left\{ - \frac{1}{2} \cdot \left[ \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - \left( \sum_{l=1}^N \sqrt{\rho_l^k} \cdot \lambda_l \right)^2 \right] \right\} = e^{-\frac{1}{2} \cdot (A^k \lambda, \lambda)}.
\end{aligned}$$

Матриця  $A^k$  побудована наступним чином

$$A^k = \left\| \delta_{ij} - \sqrt{\rho_i^k} \cdot \sqrt{\rho_j^k} \right\|_{i=1}^n.$$

Симетричність матриці очевидна, тому треба довести її невід'ємну визначеність, щоб стверджувати, що вона є коваріаційною. Для цього візьмемо вектор

$$e^k = \left[ \sqrt{\rho_1^k}, \dots, \sqrt{\rho_N^k} \right], \quad \|e^k\| = 1.$$

Тоді бачимо, що

$$(A^k \lambda, \lambda) = \|\lambda\|^2 - (\lambda, e^k)^2. \quad (1.3)$$

З нерівності Коші маємо

$$\|(\lambda, e^k)\| \leq \|\lambda\| \cdot \|e^k\| = \|\lambda\|.$$

Тобто матриця є дійсно невід’ємно визначеною і вектор  $\eta^k$  розподілений за нормальним законом з нульовим середнім і коваріаційною матрицею  $A^k$ .

Для подальших розрахунків розглянемо стандартний гаусівський вектор як суму випадкових нормально розподілених випадкових величин в стандартному базисі  $\mathbb{R}^N$ , який позначимо  $[e_1, \dots, e_N]$

$$\xi = \sum_{j=1}^N \xi_j \cdot e_j \sim N(\vec{0}, I).$$

Згадуємо, що ортогональні перетворення  $U$  зберігають відстані, а також справедливо наступне

$$U\xi \sim N(0, UIU^{-1}) \sim N(\vec{0}, I).$$

Також ортонормований базис залишається ортонормованим базисом після ортогонального перетворення  $U$ . Оберемо такий оператор  $U$ , щоб набір  $[e_1, \dots, e_N]$  під його дією перетворився на  $[f_1, \dots, f_N]$ , де

$$f_1 = e^k = \left[ \sqrt{\rho_1^k}, \dots, \sqrt{\rho_N^k} \right].$$

Тоді маємо вектор

$$U\xi = \hat{\xi} = \sum_{j=1}^N \hat{\xi}_j \cdot f_j \sim N(\vec{0}, I).$$

Подивимось, який розподіл має наступний вектор

$$\Upsilon = \sum_{j=2}^N \hat{\xi}_j \cdot f_j = \hat{\xi} - \hat{\xi}_1 \cdot e^k.$$

Для цього розглянемо квадратичну форму

$$M(\Upsilon, \lambda)^2 = \sum_{j=2}^N (\lambda, f_j)^2 = \sum_{j=1}^N (\lambda, f_j)^2 - (\lambda, f_1)^2 = \|\lambda\|^2 - (\lambda, e^k)^2 = (A^k \lambda, \lambda).$$

З рівності (1.3) бачимо, що випадкові вектори  $\eta^k$  та  $\Upsilon$  мають однаковий розподіл. Отже, розподіли їх норм теж співпадають. Оскільки сума  $N - 1$  квадратів незалежних стандартних гаусових випадкових величин має розподіл Пірсона з  $N - 1$  ступенями вільності

$$\|\Upsilon\|^2 = \sum_{j=2}^N \xi_j^2 \sim \chi_{N-1}^2.$$

Маємо

$$\|\eta^k\|^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(\nu_j^k - m \cdot \rho_j^k)^2}{m \cdot \rho_j^k} = m \cdot \sum_{j=1}^N \frac{(h_j^k - \rho_j^k)^2}{\rho_j^k} \sim \chi_{N-1}^2.$$

Останнє співвідношення дає змогу перевіряти належність виборки  $y_1^k, \dots, y_m^k$  до розподілу  $F^k$ . Перевірка виглядає наступним чином.

Розглянемо випадкову величину

$$R^k = m \cdot \sum_{j=1}^N \frac{(h_j^k - \rho_j^k)^2}{\rho_j^k}. \quad (1.4)$$

Обираємо рівень значущості  $\alpha$  для функції розподілу  $\chi_{N-1}^2$  і шукаємо відповідне до кількості ступенів вільності  $r_\alpha$ . Рівень значущості — ймовірність помилки першого роду, тобто ймовірність того, що буде відкинута вірна гіпотезу

$$\mathbb{P}(\chi_{N-1}^2 \geq r_\alpha) = \alpha.$$

Якщо  $R^k \leq r_\alpha$ , то гіпотеза про те, що вибірка  $Y^k$  дійсно має розподіл  $F^k$ , приймається.

Розглянемо той випадок, коли ймовірність  $\rho_i^k$  відгадана невірно. Повернемося до формули (1.4)

$$R^k = \sum_{j=1}^N \frac{(\nu_j^k - m \cdot \rho_j^k)^2}{m \cdot \rho_j^k}.$$

Всі члени суми є невід'ємними. Якщо хоча б один елемент буде завеликим, то великою буде вся сума. Маємо випадкову величину  $\eta$

$$\eta = \nu_i^k - m \cdot \rho_i^k = \sum_{j=1}^m (\xi_j - \rho_i^k), \quad \mathbb{1}(y_j^k \in I_i^k) = \xi_j.$$

Якщо  $\rho_i^k$  вгадано невірно, то воно не дорівнює математичному очікуванню індикатора. Додамо та віднімемо справжнє математичне очікування

$$\eta = \sum_{j=1}^m (\xi_j - M \xi_1 + M \xi_1 - \rho_i^k) = \sum_{j=1}^m (\xi_j - M \xi_1) + \sum_{j=1}^m (M \xi_1 - \rho_i^k).$$

Останній доданок є просто різницею, яку помножено на  $m$

$$\eta = \sum_{j=1}^m (\xi_j - M \xi_1) + m \cdot (M \xi_1 - \rho_i^k).$$

Поділимо на  $\sqrt{m}$ , щоб скористатися центральною граничною теоремою

$$\frac{\eta}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \sum_{j=1}^m (\xi_j - M \xi_1) + \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot m \cdot (M \xi_1 - \rho_i^k).$$

Перший доданок асимптотично має розподіл  $N(0, \sigma^2)$ , де  $\sigma^2$  — дисперсія випад-



кової величини  $\xi_1$  для достатньо великих  $m$ . Отже вся сума зростає пропорційно до  $\sqrt{m}$

$$\frac{\eta}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \sum_{j=1}^m (\xi_j - M \xi_1) + \sqrt{m} \cdot (M \xi_1 - \rho_i^k) \sim \sqrt{m} \cdot (M \xi_1 - \rho_i^k).$$

Тобто зараз  $R^k$  буде зростати пропорційно до величини  $m$ , і буде великим у порівнянні з  $r_\alpha$ , що призведе до відхилення невірної гіпотези.

#### 1.1.4 Типи вищої нервової діяльності

Для визначення того, які показники вимірювати і яким чином, скористуємось відомою класифікацією типів вищої нервової діяльності.

Згідно з Павловим[4] типи вищої нервової діяльності характеризуються трьома показниками: сила нервової системи (сильна або слабка), врівноваженість (врівноважена або неврівноважена) та рухливість (рухлива або інертна). Павлов розглядає 4 комбінації цих показників з 8 можливих:

- 1) Слабка
- 2) Сильна та неврівноважена
- 3) Сильна, врівноважена та інертна
- 4) Сильна, врівноважена та рухлива

Далі ці класи (комбінації) будуть називатися відповідно слабкий, неврівноважений, інертний та рухливий.

### 1.1.5 Теппінг-тест (Tapping rate)

Існують відомі залежності між типом вищої нервової діяльності та зміною максимального темпу рухів кистю руки з часом. Протягом 30 секунд людина намагається притримуватися максимально можливого для себе темпу. Показники темпу фіксуються через кожні 5 секунд, а далі по 6 отриманим точкам будується крива темпа руху. [5]

Для тесту можна використовувати ручку (олівець) і папір, або телеграф. Сучасні технології дозволяють проводити тест за допомогою клавіатури комп'ютера або екрану планшета.

З олівцем і папіром тест поводиться наступним чином:

- 1) На папері креслиться 6 квадратів
- 2) Людина починає ставити якомога більше точок в першому квадраті впродовж перших 5 секунд
- 3) Коли проходить 5 секунд, потрібно перейти до наступного квадрату і ставити точки там
- 4) Процедура повторюється до тих пір, доки не пройде 30 секунд — в кінці буде заповнено всі 6 квадратів

Далі підраховується кількість точок в кожному квадраті та малюється ламана, де горизонтальна вісь відповідає номеру часового проміжку (номеру квадрата), а вертикальна відповідає кількості точок в квадраті.

Трактуються отримані дані наступним чином:

- 1) Спадна ламана відповідає слабкому типу (рис. 1.1д). Вона спадає після перших 5 секунд тесту і не повертається до початкового рівня
- 2) Ламана, що спочатку зростає, а після 10-15 секунд спадає нижче початкового рівня (проміжна між рівною та опуклою) відповідає неврівноваженому типу (рис. 1.1б).

- 3) Ввігнута ламана відповідає інертному типу (рис. 1.1г). Вона спочатку спадає, а на 25-30 секундах може зрости до початкового темпу
- 4) Опукла ламана відповідає рухливому типу (рис. 1.1а). Це така ламана, що зростає в перші 10-15 секунд тесту, а після 25-30 секунд повертається або падає нижче початкового рівня
- 5) Також темп може залишатися приблизно на одному рівні протягом усього тесту, що є оптимальним для складання іспитів (рис. 1.1в).

Достовірним відхиленням достатньо вважати різницю в два і більше натиснення між двома сусідніми п'ятисекундними проміжками. [5]

Оскільки цей тест заснований на вимірюванні витривалості нервової системи людини за умови максимального навантаження та перевіряє темп реагування (натиснення) на подразнювачі (внутрішній подразнювач — команда собі “треба тиснути”), було вирішено використовувати відомі вигляди кривих (рис. 1.1) при моделюванні результатів виконання завдань однакової складності.

Потрібно зауважити, що швидкість розв'язування задач може змінюватися з досвідом. Тобто, якщо студент зі слабкою нервовою системою буде тренуватися виконувати завдання, то його показники з часом перейдуть на якісно новий рівень. Щодо студентів з сильною нервовою системою: швидкість не завжди означає якість виконання завдань.

Завдання системи — класифікувати студентів в автоматичному режимі, з метою подальшого надання порад викладачам практичних занять щодо підвищення продуктивності роботи кожного студента. Це полегшує знаходження індивідуального підходу. Наприклад, тим, хто надто швидко втомлюється, потрібно розв'язувати якомога більше базових завдань, що не є складними, але розв'язок яких повинен бути на рівні рефлексів. Студентам, які поспішають, буде корисно ретельно коментувати у письмовій формі хід своїх думок, щоб вгамуватися та підвищити свою уважність.

Для тесту було обрано саме 30-секундний проміжок часу, адже спочатку

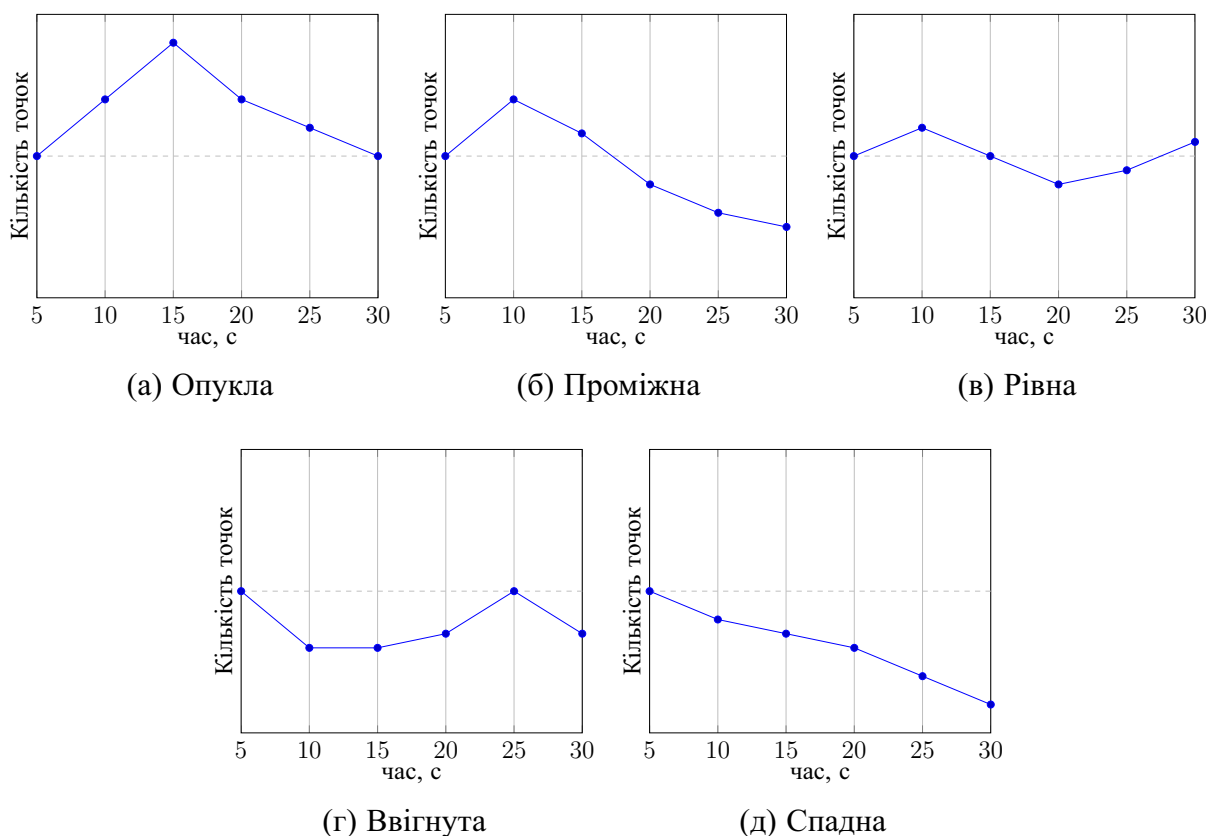


Рисунок 1.1 — Загальний вигляд залежностей кількості поставлених точок від часу. Пунктирна лінія — кількість точок в перші 5 секунд

виміри виконувалися протягом однієї хвилини і було виявлено, що найважливіша інформація отримується протягом перших 20-25 секунд, а далі лише марно втрачається час та сили тестованого. [5]

## 1.2 Моделювання результатів виконання тестових завдань

### 1.2.1 Процес Пуассона

Щоб моделювати темп виконання студентами контрольних задач, використаємо відомі дані з психології щодо ритму виконання теппінг-тесту для людей з різними типами вищої нервової діяльності. Оскільки постукування є потоком однорідних випадкових подій, змоделюємо їх як реалізації процесу Пуассона.

Нехай  $\{N(t) | t \geq 0\}$  — процес Пуассона з інтенсивністю  $\lambda(t)$ . Маємо 7 контрольних точок на часовій вісі  $t_0 = 0, t_1 = 5, \dots, t_6 = 30$ . Введемо відрізок часу  $T$ , за який проводиться вимірювання, та проміжки  $T_i$ , на які його розбито в експерименті

$$T = (0, 30], \quad T_i = (t_{i-1}, t_i], \quad i = \overline{1, 6}.$$

Нехай  $\nu_i$  визначається наступним чином

$$\nu_i = N(t_i) - N(t_{i-1}), \quad i = \overline{1, 6},$$

тоді  $\nu_i$  — випадкова величина, що має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda_i$ , де [6]

$$\lambda_i = m(T_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Функція  $m$  — міра інтенсивності. [7]

Проміжки  $T_i$  утворюють розбиття множини  $T$ , а отже не перетинаються. Це означає, що випадкові величини  $\nu_i$  незалежні між собою, і є можливість згенерувати процес натискання за допомогою 6 незалежних випадкових величин, що мають розподіл Пуассона.

Інтенсивність (параметр  $\lambda$ ) є математичним очікуванням випадкової величини, що має розподіл Пуассона. Маючи результати реальних експериментів, можна обчислити середні значення кількості постукувань для кожного часового проміжку  $T_i$ , а отримані результати використовувати в якості параметрів  $\lambda_i$ .

Візьмемо значення відомого експерименту з підручника [5], які зображено на рис. 1.2. Оскільки результат один, то його значення будуть середніми з вибір-

ки, що складається з одного вектора — їх і використаємо в якості параметрів  $\lambda_i$ . На рис. 1.3а зображено різні реалізації послідовності випадкових величин, що розподілені за законом Пуассона з параметрами

$$[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6] = [43, 40, 38, 37, 38, 35]. \quad (1.5)$$

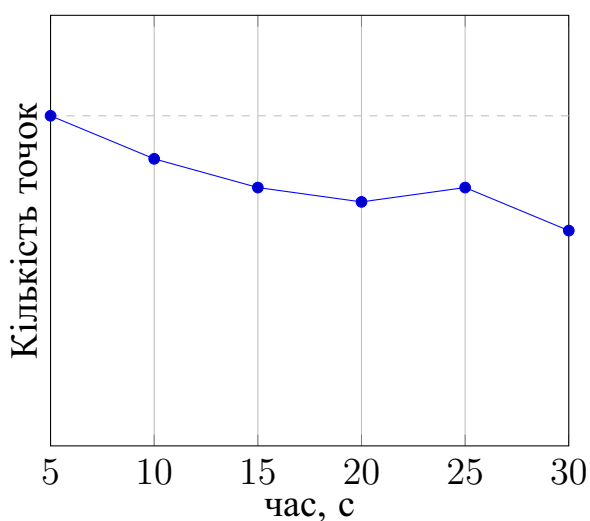


Рисунок 1.2 — Спадна ламана, побудована на основі даних з [5]

### 1.2.2 Квадратична апроксимація методом найменших квадратів

Види результуючих ламаних (опукла, ввігнута, рівна, спадна) можна представити квадратичними функціями виду

$$y(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c.$$

На рис. 1.3б зображено реалізації послідовності випадкових величин, що розподілені за законом Пуассона, та криві, що є результатом апроксимації цих реалізацій.

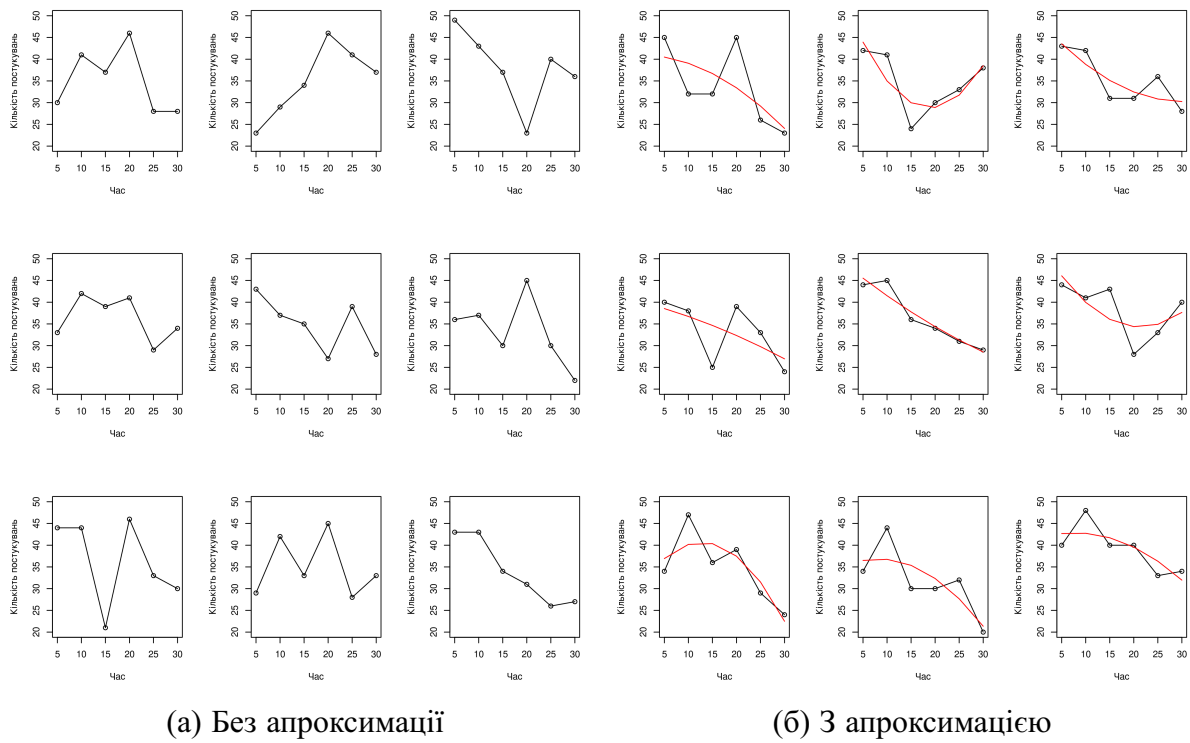


Рисунок 1.3 — Приклади результатів моделювання

Щоб представити результати у вигляді квадратичних функцій, використаємо метод найменших квадратів. Нехай  $\{y_i \mid i = \overline{1, 6}\}$  — результати поточного теппінг-тесту. Суть методу полягає в знаходженні таких коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  і  $c$ , з якими наступна величина приймає мінімальне значення

$$R^2(a, b, c) = \sum_{i=1}^6 (a \cdot t_i^2 + b \cdot t_i + c - y_i)^2.$$

Для цього треба взяти часткові похідні по кожному коефіцієнту, прирівняти ці

похідні до нуля та розв'язати отриману систему

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^6 2 \cdot (a \cdot t_i^2 + b \cdot t_i + c - y_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^6 2 \cdot t_i \cdot (a \cdot t_i^2 + b \cdot t_i + c - y_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^6 2 \cdot t_i^2 \cdot (a \cdot t_i^2 + b \cdot t_i + c - y_i) &= 0. \end{cases}$$

Цю систему можна переписати в матричному вигляді наступним чином

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 t_i^2 & \sum_{i=1}^6 t_i & \sum_{i=1}^6 1 \\ \sum_{i=1}^6 t_i^3 & \sum_{i=1}^6 t_i^2 & \sum_{i=1}^6 t_i \\ \sum_{i=1}^6 t_i^4 & \sum_{i=1}^6 t_i^3 & \sum_{i=1}^6 t_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^6 y_i \\ \sum_{i=1}^6 y_i \cdot t_i \\ \sum_{i=1}^6 y_i \cdot t_i^2 \end{bmatrix}.$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 1 &= N, \\ \sum_{i=1}^6 t_i^k &= X^k, \quad k = \overline{1, 4}, \\ \sum_{i=1}^6 y_i \cdot t_i^k &= YX^k, \quad k = \overline{0, 2}. \end{aligned}$$

Рівняння прийняло наступний вигляд

$$\begin{bmatrix} X^2 & X & N \\ X^3 & X^2 & X \\ X^4 & X^3 & X^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ YX \\ YX^2 \end{bmatrix}.$$



Використаємо метод Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь. Визначник  $\Delta$

$$\Delta = X^2 \cdot (X^2 \cdot X^2 - X \cdot X^3) - X \cdot (X^3 \cdot X^2 - X \cdot X^4) + N \cdot (X^3 \cdot X^3 - X^2 \cdot X^4).$$

Визначник  $\Delta_a$

$$\Delta_a = Y \cdot (X^2 \cdot X^2 - X \cdot X^3) - YX \cdot (X \cdot X^2 - N \cdot X^3) + YX^2 \cdot (X \cdot X - N \cdot X^2).$$

Визначник  $\Delta_b$

$$\Delta_b = -Y \cdot (X^3 \cdot X^2 - X \cdot X^4) + YX \cdot (X^2 \cdot X^2 - N \cdot X^4) - YX^2 \cdot (X^2 \cdot X - N \cdot X^3).$$

Визначник  $\Delta_c$

$$\Delta_c = Y \cdot (X^3 \cdot X^3 - X^2 \cdot X^4) - YX \cdot (X^2 \cdot X^3 - X \cdot X^4) + YX^2 \cdot (X^2 \cdot X^2 - X \cdot X^3).$$

Відомо, що розв'язками є наступні вирази

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta}, \quad c = \frac{\Delta_c}{\Delta}.$$

Бачимо, що параметри — лінійні комбінації  $y_i$ , а коефіцієнти при  $y_i$  — раціональні

доби. Тобто можна записати розв'язки наступним чином

$$a = \sum_{i=1}^6 y_i \cdot \frac{a_i}{\Delta}, \quad b = \sum_{i=1}^6 y_i \cdot \frac{b_i}{\Delta}, \quad c = \sum_{i=1}^6 y_i \cdot \frac{c_i}{\Delta}.$$

### 1.2.3 Аналіз квадратичної апроксимації

Запишемо умови, що накладаються на  $a$ ,  $b$  і  $c$ , за яких отримана парабола відповідає раніше введеним типам вищої нервової діяльності. Введемо такі позначення:  $t_{max}$  і  $t_{min}$  — точки, в яких парабола досягає локального максимуму та мінімуму на відрізку  $[t_1, t_6]$  відповідно.  $\varepsilon = 1$  буде відповідати відхиленню від початкового значення функції, яке вважається суттєвим.  $t_1$  і  $t_6$ , як і раніше, є точками першого та останнього спостереження відповідно.

Пряма ламана весь час тримається приблизно на початковому рівні

$$\begin{cases} y(t_{max}) - y(t_1) \leq \varepsilon, \\ y(t_1) - y(t_{min}) \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Спадна ламана спадає після моменту  $t_1$ , і не повертається до початкового положення

$$\begin{cases} t_{max} = t_1, \\ y(t_{max}) - y(t_{min}) > \varepsilon. \end{cases}$$

Проміжна ламана спочатку зростає, потім не пізніше моменту часу  $t_3$  по-

чинає спадати нижче початкового рівня

$$\begin{cases} t_2 \leq t_{max} \leq t_3 < t_{min}, \\ y(t_{max}) - y(t_1) > \varepsilon, \\ y(t_1) - y(t_{min}) > \varepsilon. \end{cases}$$

Опукла ламана спочатку зростає, не пізніше моменту  $t_3$  починає спадати, а до моменту  $t_6$  повертається до початкового рівня або спадає нижче нього.

$$\begin{cases} t_3 \leq t_{max}, \\ y(t_{max}) - y(t_1) > \varepsilon, \\ y(t_6) \leq y(t_1). \end{cases}$$

Звичайним диференціюванням поліному  $y$  знаходимо точку його глобального екстремуму

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_g} = 2 \cdot a \cdot t_g + b = 0 \Rightarrow t_g = -\frac{b}{2 \cdot a}.$$

Якщо коефіцієнт  $a$  від'ємний, то це означає, що точка  $t_g$  — точка глобального максимуму, якщо додатній,  $t_g$  — точка глобального мінімуму. В протилежному випадку, якщо  $a = 0$ , глобального екстремуму немає.

Введемо множину критичних точок  $C$

$$C = \begin{cases} \{t_1, t_6, t_g\}, & t_1 < t_g < t_6, & a \neq 0 \\ \{t_1, t_6\}, & otherwise \end{cases}$$

В такому випадку знаходження точки максимуму (мінімуму) функції  $y$  зводиться до її максимізації (мінімізації) по множині, що складається з 2-3 елементів

$$t_{max} = \arg \max_{t \in C} y(t), \quad t_{min} = \arg \min_{t \in C} y(t).$$

Було згенеровано 6 вибірок по 100 реалізацій процесу Пуассона з інтенсивністю, яку було вказано у формулі (1.5) для подальшої класифікації та порівняння отриманих даних з відомими. Результати класифікації можна побачити на рис. 1.4а. На рис. 1.4б зображено дані класифікації всієї сукупності з 600 траєкторій з логарифмічною шкалою.

Опис:

- Не вдалося віднести до тієї чи іншої групи біля 16% траєкторій
- Найбільш розповсюджений вид — спадна ламана, що зустрілася у 60% випадків
- Біля 15% ламаних — проміжні
- Опуклі ламані виникали у 7%
- Прямі з'явилися в 1% випадків

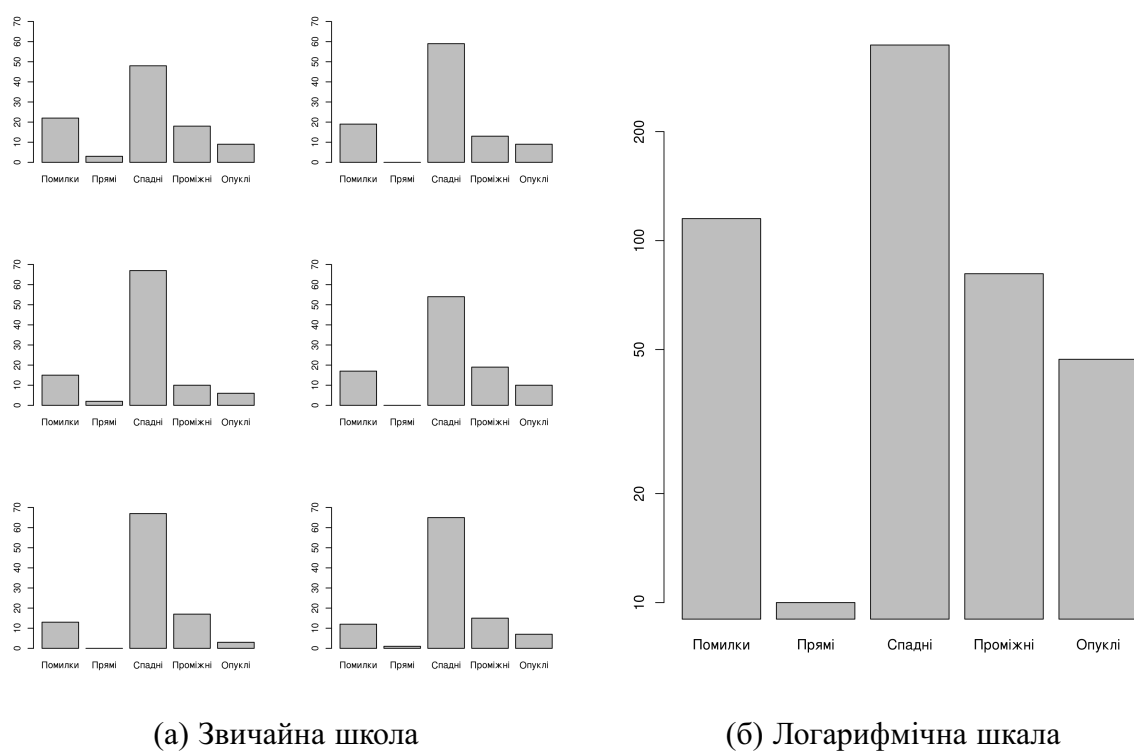


Рисунок 1.4 — Розбиття траєкторій по класах

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Айвазян, С.А. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности : Справочное издание / С.А. Айвазян. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 606 с.
2. Боровков, А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков // Учебники для ВУЗов. Специальная литература. — СПб.: Лань, 2010. — 705 с.
3. Sturges, Herbert A. The Choice of a Class Interval / Herbert A. Sturges // *J-J-AM-STAT-ASSOC.* — 1926. — March. — Vol. 21, no. 153. — Pp. 65–66.
4. Павлов, И.П. Двадцатилетний опыт объективного изучения высшей деятельности (поведения) животных / И.П. Павлов. — М.: Рипол Классик, 1973. — 659 с.
5. Ильин, Е.П. Дифференциальная психофизиология / Е.П. Ильин // Серия Учебник нового века. — СПб.: Питер, 2001. — 464 с.
6. Булинский, А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев // Теория вероятностей. Математическая статистика : ТВМС. — М.: Физматлит, 2003. — 399 с.
7. Kingman, J.F.C. Poisson Processes / J.F.C. Kingman // Oxford studies in probability. — Oxford: Clarendon Press, 1992. — 112 pp.

## ДОДАТОК А

### Лістинг коду програми, яка моделює результати теппінг-тесту

```

1  library(NHPoisson)
2  source("generate_sequence.r")
3  source("analyze_approximation.r")
4  wideScreen()
5  # Read command line arguments
6  args <- commandArgs(TRUE)
7  display_approximation <- FALSE
8  if (length(args) > 0 && args[1] == "approximation") {
9      display_approximation <- TRUE
10 }
11 # Init cells for charts
12 n <- 3
13 m <- 3
14 png('output.png', width=18, height=22, units="cm", res=300)
15 par(mfrow=c(n,m))
16 chart.xlab <- "Час"
17 chart.ylab <- "Кількість постукувань"
18 chart.ylim <- c(20,50)
19 # Parameters
20 sample.time <- seq(5, 30, 5)
21 sample.size = length(sample.time)
22 sample.prediction_degree = 2
23 sample.poly = poly(sample.time, sample.prediction_degree, raw=TRUE)
24 #lambda.default = c(40, 38, 36, 34, 32, 30, 0)
25 lambda.default = rep(40, sample.size+1)
26 # Fill every cell
27 for (i in 1:(n*m)) {
28     ## Generate non-homogeneous Poisson process trajectory
29     sample.current <- generate_trajectory(lambda.default)
30     ## Plot
31     plot(sample.time, sample.current, xlab=chart.xlab, ylab=chart.ylab,
32          ylim=chart.ylim)
33     lines(sample.time, sample.current)
34     if (display_approximation) {
35         # Calculate approximation
36         sample.model <- lm(sample.current ~ sample.poly)
37         sample.prediction <- predict(sample.model)
38         extrema <- find_extrema(sample.model, sample.time)
39         # Draw approximation
40         lines(sample.time, sample.prediction, col='red')
41         # Draw start rhythm
42         abline(h=sample.model$coefficients[3]*sample.time[1]^2 +
43               sample.model$coefficients[2]*sample.time[1] +
44               sample.model$coefficients[1], col='green', lty=2, lwd=1)
45         # Draw mininum and maximum

```

```
46      abline(v=extrema[['min']], col='gray', lty=3, lwd=1)
47      abline(v=extrema[['max']], col='blue', lty=3, lwd=1)
48      # Display group
49      print(get_group(sample.model, sample.time,
50                    extrema[['min']], extrema[['max']]))
51    }
52  }
53  dev.off()
```