

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

Кафедра математичних методів захисту інформації

ЗВІТ

З ВИРОБНИЧОЇ ПРАКТИКИ

Напрямок підготовки: 6.040301 «Прикладна математика»

Тема: «Розробка автоматизованого тестуючого комплексу,
що враховує психологічні особливості студентів»

Виконав студент 4 курсу

групи ФІ-13

Кригін Валерій Михайлович

Науковий керівник:

Доктор фізико-математичних наук, професор

Дороговцев Андрій Анатолійович

(підпис)

ЗМІСТ

1 Вступ	3
1.1 Обґрунтування та актуальність роботи	3
1.2 Мета та завдання	3
2 Основна частина	4
2.1 Теоретичні відомості	4
2.1.1 Метод головних компонент	4
2.1.2 Гістограма	7
2.1.3 Критерій узгодженості Пірсона χ^2	8
Перелік посилань	10

1 ВСТУП

1.1 Обґрунтування та актуальність роботи

Існуючі на даний момент системи тестування недостатньо гнучкі: вони аналізують лише відповіді на запитання, відносячи їх до вірних або невірних, а на цій базі роблять кінцевий висновок щодо знань студента. Стрімкий розвиток комп'ютерної техніки й інформаційних технологій надає можливість визначати ритм складання тесту, а також індивідуальні особливості людини. Дані психологічних досліджень допоможуть правильно трактувати отримані значення, а добре вивчені та перевірені часом математичні методи надають великі можливості для систематизації та обробки результатів вимірювання.

1.2 Мета та завдання

Завдання наступні:

- 1) Вивчити математичні методи та розділи психології, що дозволять розв'язати поставлену задачу, пояснити та обґрунтувати отримані результати
- 2) Ознайомитися з правилами побудови тестових завдань для найбільш ефективної та об'єктивної процедури оцінки знань студентів
- 3) Розробити програмний комплекс тестування й обробки результатів
- 4) Моделювання

За мету поставлено збільшення об'єктивності тестування, а також покращення якості навчання за допомогою порад студентам і викладачам практичних занять.

2 ОСНОВНА ЧАСТИНА

2.1 Теоретичні відомості

2.1.1 Метод головних компонент

Метод головних компонент (Principal component analysis) — метод, що дозволяє зменшити розмірність досліджуваної вибірки з мінімальними втратами інформації.

Маємо m об'єктів, з яких треба зняти по n певних властивостей. На вході в нас є виборки \vec{X}_k , кожна з яких відповідає сукупності властивостей k -го об'єкту

$$\vec{X}_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ x_k^2 \\ \vdots \\ x_k^n \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, m}$$

Згрупуємо всі вимірювання в одну матрицю X

$$X = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_m^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_m^n \end{bmatrix}$$

Спочатку нам знадобиться знайти вибіркові середні значення для кожної властивості

$$a_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m x_k^i, \quad i = \overline{1, n}$$

Маємо вектор вибірових середніх значень

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Центруємо отримані дані, що містяться в матриці X , віднявши від кожного стовбця вектор вибірових середніх \vec{a}

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^1 & \tilde{x}_2^1 & \dots & \tilde{x}_m^1 \\ \tilde{x}_1^2 & \tilde{x}_2^2 & \dots & \tilde{x}_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_1^n & \tilde{x}_2^n & \dots & \tilde{x}_m^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 - a_1 & x_2^1 - a_1 & \dots & x_m^1 - a_1 \\ x_1^2 - a_2 & x_2^2 - a_2 & \dots & x_m^2 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n - a_n & x_2^n - a_n & \dots & x_m^n - a_n \end{bmatrix}$$

Обчислюємо вибірову коваріаційну матрицю властивостей. Вибіркову коваріацію i та j властивості рахуємо за формулою

$$\sigma_i^j = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m \tilde{x}_k^i \cdot \tilde{x}_k^j = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^m \left[(x_k^i - a_i) \cdot (x_k^j - a_j) \right], \quad i, j = \overline{1, n}$$

Маємо вибірову коваріаційну матрицю

$$K = \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \dots & \sigma_1^n \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n^1 & \sigma_n^2 & \dots & \sigma_n^n \end{bmatrix}$$

Щоб отримувати лише потрібну інформацію, ми хочемо знайти таке ортогональне лінійне перетворення L вхідної матриці \tilde{X} , щоб отримати матрицю

$Y = L \cdot \tilde{X}$, яка має діагональну вибірку коваріаційну матрицю K' з незростаючими зверху вниз значеннями. Діагональна вибірка коваріаційна матриця гарантує той факт, що отримані значення Y будуть некорельованими. Рангування значень діагональних елементів матриці K' за величиною дасть більш наглядне представлення про будову досліджуваних об'єктів, адже діагональні елементи — вибірккові дисперсії; а чим більше дисперсія, тим більше відповідна властивість змінюється від об'єкту до об'єкту і тим більше корисної інформації вона нам надає.

Вибіркова коваріаційна матриця K' для $Y = L \cdot \tilde{X}$ має вигляд

$$K' = L \cdot K \cdot L^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

З лінійної алгебри відомо, що матриця L складається з координат власних векторів матриці K , а елементи λ_k — її власні числа, які існують і є невід'ємними через невід'ємну означеність матриці K . Вважаємо що числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ впорядковані від більшого до меншого для зручності подальших дій. Позначимо власний вектор матриці K , що відповідає власному числу λ_k , як \vec{l}_k . Тоді

$$\vec{l}_k = [l_k^1, l_k^2, \dots, l_k^n], \quad k = \overline{1, n}$$

Матриця L має вигляд

$$L = \begin{bmatrix} l_1^1 & l_1^2 & \dots & l_1^n \\ l_2^1 & l_2^2 & \dots & l_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_n^1 & l_n^2 & \dots & l_n^n \end{bmatrix}$$

Треба зменшити розмірність простору досліджуваних параметрів системи з n до $p < n$, але при цьому втратити якомога менше відомостей про досліджувані об'єкти. Введемо міру інформації, що залишається при зменшенні кількості компонент, що розглядаються

$$I = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$$

Будемо вважати, що діємо продуктивно, тому починаємо обирати з перших компонент, адже саме вони є найбільш інформативними. Також бачимо, що інформативність змінюється в межах від 0 (нічого не дізнаємось) до 1 (зберегли усю інформацію).

2.1.2 Гістограма

Для подальшого аналізу потрібно здобути щільність розподілення. Оскільки маємо справу з вибіркою і вибірковими характеристиками, потрібно побудувати гістограму, адже це і є вибіркова характеристика, що відповідає щільності.

Побудуємо i -й стовбець гістограми для виборки з k -ї строки матриці Y

$$h_i^k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^m \mathbb{1}(y_j^k \in I_i^k)$$

де I_k — набір напівінтервалів, що розбиває відрізок $\left[\min_{j=1,m} y_j^k; \max_{j=1,m} y_j^k \right]$ на N рівних частин. Для вибору N можна скористатися досить відомою формулою Стюрджеса (Sturges' formula) [1]

$$N = \lfloor \log_2 m \rfloor + 1$$

Маємо матрицю гістограм

$$H = \begin{bmatrix} h_1^1 & h_2^1 & \dots & h_N^1 \\ h_1^2 & h_2^2 & \dots & h_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1^n & h_2^n & \dots & h_N^n \end{bmatrix}$$

і напівінтервалів, що відповідають кожному стовбчику кожної гістограми

$$I = \begin{bmatrix} I_1^1 & I_2^1 & \dots & I_N^1 \\ I_1^2 & I_2^2 & \dots & I_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_1^n & I_2^n & \dots & I_N^n \end{bmatrix}$$

2.1.3 Критерій узгодженості Пірсона χ^2

Гістограма може використовуватися не тільки для графічної інтерпретації отриманих даних, але й для віднесення вибірки до якогось відомого розподілу. Відповідь на питання “Чи дійсно вибірка y_1^k, \dots, y_m^k має розподіл F ?” може надати критерій узгодженості Пірсона.

Спочатку треба визначити ймовірність p_i^k того, що випадкова величина ξ^k з функцією розподілу F^k попаде в I_i^k

$$p_i^k = \mathbb{P}(\xi \in I_i^k), \quad \mathbb{P}(\xi^k \leq x) = F^k(x)$$

Далі рахуємо значення R^k за формулою

$$R^k = \sum_{i=1}^N \frac{(h_i^k - m \cdot p_i^k)^2}{m \cdot p_i^k}$$

За допомогою таблиці знаходимо приблизний розв'язок наступного рівняння відносно r_α

$$\mathbb{P}(\chi_{N-1}^2 \leq r_\alpha) = \alpha$$

Якщо $R^k \leq r_\alpha$, то гіпотеза про те, що вибірка Y^k дійсно має розподіл F , не відхиляється. В протилежному випадку значення R^k буде поводитись як \sqrt{m} , а гіпотезу буде відхилено.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Sturges, Herbert A.* The Choice of a Class Interval / Herbert A. Sturges // *J-AM-STAT-ASSOC.* — 1926. — March. — Vol. 21, no. 153. — Pp. 65–66.