MS211 - Cálculo Numérico - Turma J - Atividade 4

Luiz Henrique Costa Freitas RA: 202403
Gabriel de Freitas Garcia RA: 216179
Vanessa Vitória de Arruda Pachalki RA: 244956

10 de novembro de 2020

Enunciado Atividade 4

Nesta atividade vamos estudar e comparar o Método de Newton e uma extensão do Método de Gauss-Seidel para sistemas não lineares.

Considere o sistema não linear:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Se $x^{(k)} = ({x_1}^{(k)}, {x_2}^{(k)}, ..., {x_n}^{(k)})$ é o vetor com as aproximações obtidas na iteração k, *o método de Seidel para sistemas não lineares* consiste em utilizar e determinar o vetor x^{k+1} resolvendo-se n equações não lineares, cada uma delas em uma única variável, da seguinte forma. Para determinar a primeira coordenada do vetor x^{k+1}, resolve-se:

$$f_1({x_1}^{(k+1)}, {x_2}^{(k)}, ..., {x_n}^{(k)}) = 0$$

Feito isso, resolvendo-se:

$$f_2({x_1}^{(k+1)}, {x_2}^{(k+1)}, ..., {x_n}^{(k)}) = 0$$

determina-se ${x_2}^{(k+1)}$. De modo geral, a equação

$$f_j({x_1}^{(k+1)}, ..., {x_j}^{(k+1)}, {x_{j+1}}^{(k+1)} ..., {x_n}^{(k)}) = 0$$

é utilizada para determinar ${x_j}^{(k+1)}$. A resolução de cada uma dessas n equações pode ser feita utilizando-se qualquer métodos para resolver uma equação não linear escalar.

Considere o sistema não linear:

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 - x_3 = 0 \\ \frac{{x_1}^2}{4} + \frac{{x_2}^2}{9} + {x_3}^2 - 1 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

1. Defina no Octave as funções $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a função $J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{3\times3}$, matriz Jacobiana de F, de tal modo que o sistema não linear 2 seja equivalente a $F(x) = 0$.
2. Aplique o método de Newton para sistemas não lineares para encontrar uma solução de 2. Use $\epsilon = 10^{-14}$ e como ponto incial utilize o vetor $x^{(0)} = (a + 1, -a - 1.a + 1)^T$, onde a é o último dígito do menor RA dos membros do seu grupo. Descreva qual o critério da parada empregado, qual foi a acurácia atingida e quantas iterações foram necessárias.
3. Implemente o método de Seidel em Octave. Para a resolução de cada equação não linear wscalar, empregue sua implementação do Método de Newton ou utilize a função **fsolve** do Octave.
4. Partindo do mesmo ponto inicial de antes e usando o mesmo critério de parada, quantas iterações foram necessárias para encontrar a solução do sistema 2 ? Quantas vezes foi necessário avaliar a função F ?
5. Com base nos seus experimentos e implementação, faça uma comparação dos dois métodos. Discuta seus resultados:

1 Respostas

Para a resolução dos itens 1 e 2, desenvolvemos o código descrito a seguir, em que definimos a função F e a função J, através do cálculo das derivadas parciais das equações de F.

```
# exercício 1 e 2
f = @(x)  [x(1)^2 + x(2)^2 - x(3) ; x(1)^2/4 + x(2)^2/9 + x(3)^2-1 ; x(1) + x(2)];
J = @(x)  [2*x(1),2*x(2),-1;x(1)/2,(2*x(2))/9 ,2*x(3); 1,1,0];
x = [4;-4;4];
k = 0;
while (norm(f(x),inf) > 10^-14)
   s = J(x) \ (-f(x));
  x = s + x;
  k++;
endwhile
disp(x);
disp(norm(f(x),inf));
disp(k);
fsolve(f,x)
```

O último dígito do menor RA dos membros do grupo é 3 e, portanto, o ponto inicial utilizado foi $[4, -4, 4]^T$. Utilizamos como critério de parada a norma de F atingir um valor menor que 10^{-14}, que é o erro indicado no enunciado. A partir dessas condições e o código apresentado, obtivemos o resultado mostrado na Tabela 1 e comparamos com os valores obtidos para a solução do sistema utilizando a função *fsolve* do Octave, também apresentados na tabela.

Método	$x1$	$x2$	$x3$
Código desenvolvido	0.67594	−0.67594	0.91379
Função *fsolve*	0.67594	−0.67594	0.91379

Tabela 1: Valores obtidos para solução do sistema.

Analisando os resultados, concluimos que a acurácia obtida foi satisfatória, uma vez que quando calculamos o erro apresentado após 7 iterações, obtivemos um valor próximo da precisão da máquina igual a 1.1102×10^{-16}, o que indica que nossos resultados foram muito próximos do calculado pela função do Octave.

Para os itens 3,4 e 5 não foi possível obter resultados que convergissem, conforme foi informado pelo professor.