



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE ENSINO SUPERIOR DO SERIDÓ
DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO E TECNOLOGIA
BACHARELADO EM SISTEMAS DE INFORMAÇÃO



Inversão de dados em eletrorresistividade 1D usando o esquema de inversão de Occam

Vitor Daniel Lócio Medeiros

Caicó - RN
Dezembro de 2023

Vitor Daniel Lócio Medeiros

Inversão de dados em eletrorresistividade 1D usando o esquema de inversão de Occam

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Sistemas de Informação do Departamento de Computação e Tecnologia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Sistemas de Informação.

Orientador(a): Dr. Francisco Márcio Barboza.

Caicó - RN
Dezembro de 2023

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Sistema de Bibliotecas - SISBI

Catálogo de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof^a. Maria Lúcia da Costa Bezerra - -CERES- - Caicó

Medeiros, Vitor Daniel Lócio.

Inversão de dados em eletrorresistividade 1D usando o esquema de inversão de Occam / Vitor Daniel Locio Medeiros. - Caicó, 2023.

34f.: il.

Monografia (graduação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ensino Superior do Seridó, Bacharelado em Sistemas de Informação. Caicó, RN, 2023.

Orientação: Prof. Dr. Francisco Márcio Barboza.

1. Problema inverso - Monografia. 2. Modelagem direta 1D - Monografia. 3. Eletrorresistividade - Monografia. 4. Algoritmo de Occam - Monografia. I. Barboza, Francisco Márcio. II. Título.

RN/UF/BS-CERES

CDU 537.311.3

Elaborado por Giulianne Monteiro Pereira Marques - CRB-15/714

Vitor Daniel Lócio Medeiros

Inversão de dados em eletrorresistividade 1D usando o esquema de inversão de Occam

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Sistemas de Informação do Departamento de Computação e Tecnologia da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Sistemas de Informação.

Dr. Francisco Márcio Barboza

Orientador
DCT/UFRN

Dr. Renato Ramos da Silva Dantas

Examinador 1
DG/UFRN

MSc. Jerbeson de Melo Santana

Examinador 2
PETROBRAS

Esp. Arthur Anthony da Cunha

Romão e Silva
Examinador 3
FACISA/UFRN

Caicó - RN

19 de Dezembro de 2023

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, dedico este trabalho de conclusão de curso a Deus e agradeço a Ele por ter me guiado e iluminado meu caminho durante toda esta jornada acadêmica, me dando forças e perseverança para superar os desafios e obstáculos que surgiram.

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre me apoiaram em todas as etapas da minha vida e que foram a minha fonte inesgotável de amor e motivação. Sem o incentivo de vocês, eu nunca realizaria nada em minha vida. Agradeço por me ensinarem os valores da determinação na busca pelos meus objetivos. Dedico também aos meus familiares, que são minha base e exemplos a serem seguidos, pois eles sempre me deram suporte e me encorajaram em todas as provações.

Gostaria de dedicar este trabalho ao meu orientador, que esteve ao meu lado durante esta etapa final do curso, guiando-me com sabedoria, paciência e dedicação. Agradeço pela sua orientação cuidadosa, pelas suas críticas construtivas e pelo seu comprometimento em me ajudar a alcançar meus objetivos e concluir o curso. Agradeço por compartilhar seus conhecimentos e experiências comigo. Você foi um verdadeiro mentor, professor e amigo para mim, por isso serei eternamente grato. Obrigado por ter sido um exemplo de dedicação e profissionalismo.

Também dedico este trabalho aos meus amigos e amigas, em especial a Ari Oliveira, meu ex-professor, amigo e incentivador a seguir nessa profissão desde os tempos de IFRN.

Sem o apoio de vocês, eu não teria conseguido chegar até aqui. Este trabalho é resultado do esforço conjunto de todos aqueles que acreditaram em mim e me incentivaram a seguir em frente. Muito obrigado!

“O sol nasce para todos, mas a sombra é para quem planta.”
(Tiririca)

RESUMO

A presente pesquisa focaliza a questão da inversão de dados em eletrorresistividade unidimensional (1D) mediante a aplicação do esquema de inversão de Occam, com o propósito de avaliar sua eficiência na reconstrução das camadas do modelo terrestre. Este estudo se propõe a examinar esse esquema por meio da utilização de dados sintéticos de eletrorresistividade gerados a partir de um modelo com transições suaves. Os resultados comprovam a precisão do esquema de inversão de Occam na reconstrução das características das camadas subsuperficiais a partir dos dados de eletrorresistividade 1D, evidenciando sua consistência na interpretação dos dados e na confiável reconstrução das propriedades geológicas. Essas conclusões reforçam a importância do esquema de inversão de Occam como uma promissora ferramenta para a interpretação e modelagem dos dados de eletrorresistividade 1D, visando a caracterização subsuperficial.

Palavras-chave: Problema inverso, Modelagem direta 1D, Eletrorresistividade, Algoritmo de Occam.

ABSTRACT

This research focuses on the issue of one-dimensional (1D) electrical resistivity data inversion through the application of the Occam inversion scheme, aimed at evaluating its efficiency in reconstructing layers within the Earth's model. This study aims to examine this scheme by using synthetic electrical resistivity data generated from a model with smooth transitions. The results confirm the accuracy of the Occam inversion scheme in reconstructing subsurface layer characteristics from 1D electrical resistivity data, highlighting its consistency in data interpretation and reliable reconstruction of geological properties. These findings reinforce the significance of the Occam inversion scheme as a promising tool for interpreting and modeling 1D electrical resistivity data, with a focus on subsurface characterization.

Keywords: Inverse problem, 1D direct modeling, Electroresitivity, Occam Algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Aplicação do método da eletrorresistividade.	16
Figura 2 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os círculos azuis correspondem a resistividade aparente observada; a linha vermelha representa a resistividade aparente obtida na inversão.	24
Figura 3 – Gráfico ilustrativo da variação da resistividade em relação à profundidade de cada camada no subsolo, em um modelo 1D de três camadas. Este gráfico permite analisar a consistência entre o modelo resultante da inversão e o modelo observado. A linha azul representa o modelo verdadeiro e a linha vermelha o modelo obtido pela inversão de Occam.	25
Figura 4 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os círculos azuis correspondem a resistividade aparente observada; a linha vermelha representa a resistividade aparente obtida na inversão.	27
Figura 5 – Gráfico ilustrativo da variação da resistividade em relação à profundidade de cada camada no subsolo, em um modelo 1D de quatro camadas. Este gráfico permite analisar a consistência entre o modelo resultante da inversão e o modelo observado. A linha azul representa o modelo verdadeiro e a linha vermelha o modelo obtido pela inversão de Occam.	28
Figura 6 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os círculos azuis correspondem a resistividade aparente observada; a linha vermelha representa a resistividade aparente obtida na inversão.	30
Figura 7 – Gráfico ilustrativo da variação da resistividade em relação à profundidade de cada camada no subsolo, em um modelo 1D de três camadas. Este gráfico permite analisar a consistência entre o modelo resultante da inversão e o modelo observado. A linha azul representa o modelo verdadeiro e a linha vermelha o modelo obtido pela inversão de Occam.	31

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Modelo sintético de 3 camadas.	23
Tabela 2 – Modelo sintético de 4 camadas	26
Tabela 3 – Dado real de 13 camadas.	29

LISTA DE ALGORITMOS

1	Algoritmo de Inversão de Occam	22
---	--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	Objetivos da pesquisa	13
1.1.1	Objetivo geral	13
1.1.2	Objetivos específicos	13
1.2	Organização do trabalho	13
2	METODOLOGIA	15
2.1	Método de eletrorresistividade	15
2.2	Modelagem em eletrorresistividade 1D	16
2.3	Inversão	17
2.4	Inversão em Eletrorresistividade e Regularização de Tikhonov	18
2.4.1	Vínculo de Suavidade: Regularização de Tikhonov	19
2.5	Algoritmo de Occam	20
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	23
3.1	Modelo 1	23
3.2	Modelo 2	25
3.3	Dados Reais	28
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	32
	REFERÊNCIAS	33

1 INTRODUÇÃO

A geofísica desempenha um papel fundamental na análise da distribuição de propriedades físicas na subsuperfície. Em particular, a eletrorresistividade é um método geoeletrico amplamente utilizado que permite determinar a resistividade elétrica dos materiais. A aplicação desse método abrange diversos campos das geociências.

Os métodos geoeletricos remontam ao século XIX, quando ocorreram as primeiras descobertas sobre a resistividade das rochas. Cientistas como Georg Ohm foram pioneiros nesse campo, desenvolvendo a lei de Ohm em 1827 ([OHM, 1827](#)), que estabelece a relação entre tensão, corrente e resistência em um circuito elétrico. Desde então, a eletrorresistividade tem sido aplicada para investigar a subsuperfície em várias áreas, como exploração de recursos naturais, estudos ambientais e geotecnia. O uso desses métodos continua a evoluir com novas técnicas e tecnologias ao longo do século XX e XXI.

A modelagem direta e a inversão são abordagens fundamentais na análise dos dados de eletrorresistividade. Na modelagem direta, os parâmetros do modelo são utilizados para calcular as respostas ou dados esperados. Já na inversão, os parâmetros do modelo são estimados a partir dos dados observados, visando a reconstrução de uma possível estrutura subsuperficial.

Em problemas geofísicos inversos, a regularização desempenha um papel crucial na busca por soluções confiáveis e precisas. Estes problemas envolvem a estimativa de parâmetros ou propriedades físicas da subsuperfície terrestre a partir de dados observados, como medições geofísicas ([ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019](#)).

Uma das formas mais comuns de regularização em problemas geofísicos inversos é a introdução de restrições ou penalidades nos modelos durante o processo de inversão. Essas penalidades são baseadas na suavização dos modelos ou na limitação de certos parâmetros, garantindo que a solução encontrada seja mais estável e coerente com os dados observados.

A regularização em problemas inversos é fundamental e pode ser compreendida através do princípio da navalha de Occam. Este princípio, originado da filosofia, sugere que entre várias explicações para um fenômeno, a explicação mais simples tende a ser a mais correta ([CONSTABLE; PARKER; CONSTABLE, 1987](#)).

Neste trabalho, o foco será nas inversões 1D em eletrorresistividade. Será utilizado o esquema de inversão de Occam baseado em [Constable, Parker e Constable \(1987\)](#). O método de Occam visa encontrar a solução mais simples e suave possível, penalizando modelos complexos, através da minimização da função objetivo.

A aplicação desse esquema de inversão permitirá obter camadas de resistividade (ρ) em profundidade a partir das curvas de resistividade aparente. Essas informações são cruciais para compreender a estrutura subsuperficial e identificar a presença de minerais e água subterrânea.

Espera-se que este estudo contribua para o avanço da compreensão da subsuperfície por meio da inversão de dados de eletrorresistividade 1D, utilizando o esquema de Occam. Essa técnica é uma valiosa ferramenta para análise e interpretação de dados geofísicos, proporcionando informações importantes para diversas aplicações nas geociências.

1.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

Esta seção contempla os objetivos gerais e específicos do trabalho realizado.

1.1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo principal deste trabalho é contribuir para a resolução e interpretação de problemas Inversos 1D em eletrorresistividade com uso do esquema de inversão de Occam.

1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos buscados no trabalho são:

- Desenvolver e implementar algoritmos de inversão em eletrorresistividade 1D usando esquema de inversão de Occam;
- Aplicação do algoritmo de inversão em diferentes dados sintéticos com ruído;
- Aplicação do algoritmo de inversão em dados reais;

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 1 apresenta a introdução, contextualizando o tema e apresentando os objetivos.

O Capítulo 2 apresenta a metodologia, estabelecendo um embasamento teórico para o trabalho. Discute-se o método de eletrorresistividade, modelagem direta, problemas inversos e o algoritmo de Occam. São mostrados os principais conceitos e equações matemáticas envolvidas.

O Capítulo 3 apresenta os resultados obtidos a partir dos testes em dados sintéticos com ruído e dados reais, incluindo a análise e discussão dos resultados.

O Capítulo 4 apresenta as considerações finais a respeito dos resultados obtidos. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2 METODOLOGIA

2.1 MÉTODO DE ELETRORRESISTIVIDADE

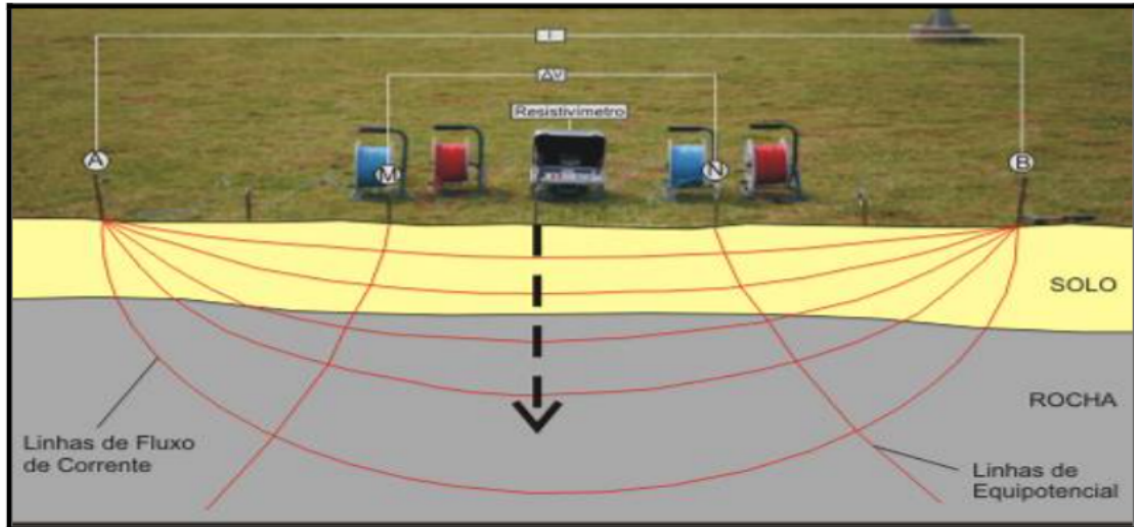
A resistividade é uma propriedade física que descreve a resistência elétrica de um material quando submetido a um campo elétrico. Ela representa a capacidade do material em resistir ao fluxo de corrente elétrica quando uma diferença de potencial é aplicada sobre ele (TELFORD *et al.*, 1990). A resistividade é frequentemente representada pelo símbolo ρ (rho) e é medida em ohm-metro ($\Omega \cdot m$).

Por outro lado, A eletroresistividade é a capacidade de um material mudar sua resistividade quando um campo elétrico variável é aplicado. Isso significa que a resistividade de um material pode se alterar em resposta a mudanças no campo elétrico, mas não sob condições estáticas. Materiais com alta resistividade têm baixa capacidade de condução elétrica, enquanto materiais com baixa resistividade são bons condutores de eletricidade. (SMITH, 2018).

Nesse contexto, são aplicadas correntes elétricas controladas no solo por meio de arranjos de eletrodos posicionados na superfície ou em furos de sondagem. Os potenciais elétricos resultantes são medidos e utilizados para calcular a resistividade aparente do subsolo, que é uma estimativa da resistividade média ao longo do caminho percorrido pela corrente elétrica (TELFORD *et al.*, 1990).

Na figura 1, é mostrado que a técnica a ser empregada requer o desenvolvimento a partir da superfície do terreno, com espaçamentos cada vez maiores entre os eletrodos A-B. É importante ressaltar que o centro do arranjo AMNB permanecerá fixo ao longo de todo o ensaio, conhecida como arranjo Schlumberger (BRAGA, 2006). A diferença entre os eletrodos A-B e M-N é que A e B são eletrodos de corrente, na qual será injetado corrente elétrica e M e N são eletrodos de potencial, usados para medir a diferença de potencial. Trata-se de um levantamento pontual que estuda as variações verticais do parâmetro físico medido.

Figura 1 – Aplicação do método da eletrorresistividade.



Fonte: (PORSANI *et al.*, 2004)

2.2 MODELAGEM EM ELETORRESISTIVIDADE 1D

Métodos corrente direta (DC) ou métodos de eletrorresistividade envolve injeção de corrente elétrica na terra por um sistema de eletrodo de corrente e de potencial. Na prática, injeta-se uma corrente de baixa frequência (abaixo de 10 Hz), que propaga dentro da terra praticamente como corrente direta. Levantamentos DC são usados para determinar a resistividade de formações rochosas.

Resistividade é parâmetro físico muito importante que fornece informação sobre o conteúdo mineral e estrutura física das rochas e também sobre fluidos em rochas. Em levantamentos DC os eletrodos de corrente e de potencial são usados para mapear a distribuição espacial da formação de rocha. A principal limitação do método resistivo é que correntes diretas não podem penetrar através de formações resistivas. Em levantamentos DC são fornecidos dados de resistividade aparente e uma estimativa dos seus erros.

O problema do cálculo da resistividade aparente para um modelo de terra estratificada plana paralela para o arranjo de eletrodos Schlumberger é dado por [Stefanescu, Schlumberger e Schlumberger \(1930\)](#):

$$V = \frac{\rho l}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \int_0^\infty \theta(\lambda, \kappa, h) J_0(\lambda r) d\lambda \right], \quad (2.1)$$

$$\rho_{as} = \rho_1 \left[1 + 2r^2 \int_0^\infty \theta(\lambda, \kappa, h) J_1(\lambda r) d\lambda \right], \quad (2.2)$$

onde I é a corrente injetada na terra, $2r$ é o espaçamento do eletrodo de corrente AB, V é o eletrodo de potencial em $r = \frac{AB}{2}$, ρ_{as} é a resistividade aparente Schlumberger, ρ_1 é a resistividade da camada do topo, J_0 e J_1 são funções de Bessel de ordem zero e 1ª ordem, respectivamente, $\theta(\lambda, \kappa, h)$ é a função Kernel de Stefanescu, este kernel é crucial

para calcular a resistividade aparente em métodos de prospecção geofísica, permitindo interpretar dados obtidos por arranjos de eletrodos, λ é a variável de integração, κ é o coeficiente de reflexão de resistividade e h é a espessura da camada. O kernel Slichter é definido Koefoed (1979) por

$$K(\lambda, k, h) = [1 + 2\theta(\lambda, k, h)]. \quad (2.3)$$

A transformada de resistividade indicada por $T(A, k, h)$ é definida (KOEFOED, 1979) por

$$T(\lambda, k, h) = \rho_1 K(\lambda, k, h). \quad (2.4)$$

Tem a dimensão física da resistividade e é uma função dos parâmetros da camada e λ que tem a dimensão do recíproco de comprimento. Está relacionado à resistividade aparente através da transformada de Hankel inversa da equação 2.2 como

$$T(\lambda, k, h) = \int_0^\infty \frac{\rho_{as}}{\lambda} J_1(\lambda r) dr. \quad (2.5)$$

A relação de recorrência de Pekeris pode ser expressa pela função transformada de resistividade (KOEFOED, 1979)

$$T_i = \frac{[T_{i+1} + \rho_i \tanh(\lambda h_i)]}{1 + T_{i+1} \frac{\tanh(\lambda h_i)}{\rho_1}} \quad (2.6)$$

O problema de resistividade direta usa o método do filtro linear introduzido por (GHOSH, 1971). O procedimento é realizado em duas etapas. O primeiro passo é calcular os valores de amostra da transformação de resistividade a partir dos parâmetros da camada. Isto é realizado pela aplicação da relação de recorrência de Pekeris 2.6. Na segunda fase, os valores de amostra da resistividade aparente são determinados a partir daquela da transformação de resistividade pela aplicação de um filtro linear. A equação que define esta operação é dada como

$$\rho_{as}(x_0) = \sum_j f_j T(Y_0 - j\Delta y) \quad (2.7)$$

onde x_0 é a abscissa do ponto da função de saída (a resistividade aparente), e y_0 é a abscissa do primeiro ponto da função de entrada (a transformada de resistividade) com o valor de abscissa $\geq x_0$ e f_j são os coeficientes de filtro.

2.3 INVERSÃO

O objetivo principal da teoria de inversão é estimar os parâmetros de um modelo que reproduzem observações reais (PARKER, 1977). Na geofísica, essa técnica é utilizada para estimar modelos geológicos que justifiquem os valores das medidas físicas adquiridas durante levantamentos feitos na superfície, como a eletrorresistividade. Sen e Stoffa (2013)

classificam os métodos de inversão em duas categorias: inversão direta ou inversão dos parâmetros do modelo. No primeiro caso, um operador matemático é escolhido e aplicado ao dado observado para se recuperar o modelo geológico, como, por exemplo, é feito na migração sísmica. O segundo caso é um procedimento em que dados sintéticos são gerados a partir de um suposto modelo e comparados com dados reais observados na aquisição. Se a comparação entre os dois for aceitável, o modelo é adotado como solução. Caso contrário, o modelo é alterado, os cálculos são refeitos e comparados novamente com as observações. Essa técnica é repetida automática e iterativamente até que seja encontrado um modelo cujos dados gerados sinteticamente sejam compatíveis com os dados observados (SEN; STOFFA, 2013).

O processo de inversão de dados é um procedimento iterativo que envolve a minimização de uma função objetivo, que quantifica a diferença entre os dados observados e os dados sintéticos gerados a partir de um modelo inicial. A escolha da função objetivo depende do tipo de dados e do problema inverso em questão (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019).

No problema de eletrorresistividade, uma vez que a resistividade aparente para um modelo teórico tenha sido calculada, a seguinte função de desajuste é utilizada na inversão:

$$\Phi(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^N \frac{(\log \mathbf{d}_i - \log \rho_i(\mathbf{m}))^2}{\sigma_i^2} \quad (2.8)$$

onde \mathbf{d}_i são os dados de resistividade aparente observada, $\rho(\mathbf{m})$ é a resistividade aparente calculada para o modelo \mathbf{m} , σ_i é a i -ésimo desvio padrão da i -ésima observação e N é o número de observação. O logaritmo usado está na base decimal.

Durante a inversão, são utilizados métodos de otimização para atualizar os parâmetros do modelo e minimizar a função objetivo, como o algoritmo de Occam, que será em breve explicado. A escolha do método de otimização também depende do tipo de problema inverso e das características dos dados (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). Em geral, a inversão de dados é uma técnica poderosa para inferir informações sobre a estrutura interna de materiais, como a subsuperfície terrestre, a partir de medidas físicas adquiridas na superfície.

2.4 INVERSÃO EM ELETRORRESISTIVIDADE E REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV

A inversão de dados eletrorresistivos é um problema geofísico inverso, uma ferramenta matemática crucial na geofísica para estimar parâmetros do modelo com base em um conjunto de dados observados. Essa abordagem pode ser formulada como um

problema de otimização, buscando minimizar um funcional que, neste contexto, visa ajustar os parâmetros do modelo. No entanto, é comumente reconhecido como um problema mal-posto, onde a solução pode não existir, ser não única ou apresentar instabilidade devido aos ruídos nos dados observados (HADAMARD, 1923).

Para superar os desafios associados a problemas mal-postos, é essencial recorrer à regularização. A regularização visa transformar o problema em um caso bem-posto e incorporar informações geológicas *a priori* na solução, buscando soluções aproximadas aceitáveis (BARBOZA, 2017). A aplicação da regularização de Tikhonov é uma abordagem clássica nesse contexto (TIKHONOV; ARSENIN, 1977).

A matriz de suavidade (\mathcal{D}) incorpora informações geológicas *a priori*, promovendo soluções suaves que se alinham com a estrutura esperada do subsolo.

A abordagem de regularização de Tikhonov, ao equilibrar a fidelidade aos dados observados e a suavidade da solução, oferece uma estratégia robusta para a inversão de dados eletrorresistivos, resultando em estimativas mais estáveis e confiáveis dos parâmetros do modelo.

O problema de minimizar $\Phi(\mathbf{m})$ (equação 2.8) é mal-posto, pois as soluções obtidas geralmente apresentam instabilidade.

Para lidar com a natureza mal-posta do problema, introduzimos um vínculo como informação *a priori* para regularizar a solução (SILVA; MEDEIROS; BARBOSA, 2001). A regularização é uma abordagem que busca aproximar o problema mal-posto por meio de uma família de quase-soluções (TIKHONOV; ARSENIN, 1977). O funcional regularizante, agora com o vínculo, é dado por:

$$\Omega(\mathbf{m}) = \Phi(\mathbf{m}) + \alpha \mathcal{R}(\mathbf{m}), \quad (2.9)$$

onde Φ é o funcional descrito na equação 2.8, α é o multiplicador de Lagrange e \mathcal{R} é o vínculo que visa regularizar a solução.

2.4.1 VÍNCULO DE SUAVIDADE: REGULARIZAÇÃO DE TIKHONOV

Um dos métodos de regularização empregados é o proposto por Tikhonov (TIKHONOV; ARSENIN, 1977). O objetivo do vínculo de suavidade é estabilizar a solução, favorecendo um comportamento suave (BARBOZA; MEDEIROS; SANTANA, 2019).

Dado um modelo \mathbf{m} , podemos quantificar a irregularidade brusca por meio de uma operação matricial (CONSTABLE; PARKER; CONSTABLE, 1987):

$$\mathcal{R} = \|\mathcal{D}\mathbf{m}\|^2, \quad (2.10)$$

onde \mathcal{D} é uma matriz $N \times N$ dada por:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \\ & & & \cdots & \\ & 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

$$\mathcal{D}\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \rho_2 - \rho_1 \\ \rho_3 - \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n - \rho_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \\ & & & \cdots & \\ & 0 & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A matriz \mathcal{D} no nosso problema é a matriz de Suavidade. $\mathcal{D}\mathbf{m}$ consiste nas diferenças verticais dos parâmetros de resistividade adjacentes.

2.5 ALGORITMO DE OCCAM

O Algoritmo de Occam surge como uma abordagem relevante para a geração de modelos suaves a partir de dados elétricos e eletromagnéticos no contexto da inversão e modelagem geofísica. Uma das principais características do Algoritmo de Occam, conforme discutido por [Constable, Parker e Constable \(1987\)](#), é a penalização de termos de variação rápida no modelo. Essa penalização promove a preferência por modelos com variações mais graduais, o que é benéfico para reduzir a interpretação dos dados. Ao suavizar as variações do modelo, o algoritmo permite uma representação mais realista e geral da subsuperfície, considerando também a presença de ruído e incertezas nos dados elétricos.

Esse princípio é uma extensão do famoso "Princípio de Occam", também conhecido como "Navalha de Occam", formulado pelo filósofo e lógico medieval William de Ockham ([SILVA; ALMEIDA; YAMAKAMI, 2015](#)).

O Princípio de Occam postula que, em meio a várias explicações possíveis para um fenômeno, a explicação mais simples é geralmente a correta. Em outras palavras, se duas teorias explicam os dados de forma igualmente eficiente, a teoria mais simples, que requer menos premissas ou entidades, é preferida.

Diferentes formas de regularização podem ser utilizadas, como a suavização espacial, suavização vertical, suavização em uma base de funções, entre outras ([CONSTABLE; PARKER; CONSTABLE, 1987](#)), neste trabalho designaremos o vínculo de suavidade

pela matriz de diferenças finitas \mathcal{D} . A escolha da forma de regularização depende das características dos dados e do conhecimento prévio sobre a subsuperfície. Esse algoritmo tem sido amplamente aplicado em áreas como geofísica, ciência do solo e hidrologia, sendo reconhecido por sua capacidade de gerar estimativas confiáveis e interpretáveis das propriedades subsuperficiais (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2019). Através da aplicação deste algoritmo, é possível obter modelos suaves que fornecem informações valiosas para estudos geofísicos, exploração de recursos naturais e tomada de decisões em diversas aplicações.

A inversão de Occam utiliza basicamente o princípio da discrepância e busca a solução que minimiza $\|\mathcal{D}\mathbf{m}\|_2$, sujeito à restrição $\|\rho(\mathbf{m}) - \mathbf{d}\|_2 \leq \delta^2$. A ideia da inversão de Occam é uma linearização local que é aplicada iterativamente:

$$\rho(\mathbf{m}^k + \Delta\mathbf{m}) \approx \rho(\mathbf{m}^k) + \mathbf{J}(\mathbf{m}^k)\Delta\mathbf{m} \quad (2.13)$$

onde a matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{m})$ pode ser escrita como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{m}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1(\mathbf{m}^k)}{\partial m_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_1(\mathbf{m}^k)}{\partial m_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \rho_m(\mathbf{m}^k)}{\partial m_1} & \cdots & \frac{\partial \rho_m(\mathbf{m}^k)}{\partial m_n} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Usando a equação 2.13, o problema dos mínimos quadrados amortecidos se torna:

$$\min \|\rho(\mathbf{m}^k) + \mathbf{J}(\mathbf{m}^k)\Delta\mathbf{m} - \mathbf{d}\|_2^2 + \alpha^2 \|\mathcal{D}(\mathbf{m}^k) + \Delta\mathbf{m}\|_2^2 \quad (2.15)$$

onde o modelo atualizado para depois de uma iteração pode ser escrito como $\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k + \Delta\mathbf{m}$, dando uma expressão para a solução em forma de:

$$\mathbf{m}^{k+1} = \mathbf{m}^k + \Delta\mathbf{m} = (\mathbf{J}(\mathbf{m}^k)^T \mathbf{J}(\mathbf{m}^k) + \alpha^2 \mathcal{D}^T \mathcal{D})^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{m}^k)^T \hat{\mathbf{d}}(\mathbf{m}^k) \quad (2.16)$$

onde:

$$\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{m}^k) = \mathbf{d} - \rho(\mathbf{m}^k) + \mathbf{J}(\mathbf{m}^k)\mathbf{m}^k \quad (2.17)$$

Abaixo, segue um pseudocódigo do algoritmo de inversão de Occam:

Algoritmo 1 Algoritmo de Inversão de Occam

Entrada: Vetor de parâmetros iniciais \mathbf{m}_0 **Entrada:** Vetor de dados observados \mathbf{d} **Entrada:** Função de modelagem $\rho(\mathbf{m})$ **Entrada:** Função de cálculo do vetor de resíduos $\mathbf{r}(\mathbf{m})$ **Entrada:** Função de cálculo da matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{m})$ **Entrada:** Parâmetro de regularização α

```

1:  $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m}_0$ 
2:  $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}(\mathbf{m}, \mathbf{d})$ 
3:  $\mathbf{J} \leftarrow \mathbf{J}(\mathbf{m})$ 
4:  $k \leftarrow 0$ 
5: repetir
6:   Busca  $\alpha$  (Princípio discrepância)
7:    $\mathbf{J}^\top \mathbf{J} \leftarrow \mathbf{J}^\top \mathbf{J} + \alpha^2 \mathcal{D}^\top \mathcal{D}$ 
8:    $\Delta \mathbf{m} \leftarrow (\mathbf{J}^\top \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^\top \mathbf{r}$ 
9:    $\mathbf{m} \leftarrow \mathbf{m} + \Delta \mathbf{m}$ 
10:   $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r}(\mathbf{m}, \mathbf{d})$ 
11:   $\mathbf{J} \leftarrow \mathbf{J}(\mathbf{m})$ 
12:   $k \leftarrow k + 1$ 
13: até que critério de parada seja alcançado
14: return  $\mathbf{m}$ 

```

O modelo \mathbf{m} , passado como parâmetro no algoritmo, é um vetor apenas de resistividades. Outros algoritmos costumam também pedir que no modelo seja passado as espessuras de cada camada, mas no caso do Algoritmo de Occam, ele considera que as espessuras são de tamanho constante e a análise do modelo encontrado pela inversão é feita na visualização da resistividade encontrada entre as pequenas camadas e essa proximidade de resistividade pode formar camadas maiores.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O objetivo principal deste estudo de inversão foi identificar um modelo que representasse precisamente as resistividades e espessuras das camadas subterrâneas com base em um modelo 1D de terra e dados observados de eletrorresistividade. Isso possibilitaria uma análise mais detalhada das características de resistividade do solo. Para avaliar a eficácia da implementação do método de Occam na resolução deste problema de inversão, seguimos a metodologia proposta por [Constable, Parker e Constable \(1987\)](#). Eles argumentam que, ao lidar com a inversão de dados eletromagnéticos, como os de eletrorresistividade, não é possível obter uma solução única. Portanto, é crucial selecionar um modelo mais adequado dentre as soluções encontradas para interpretar as observações.

Para demonstrar a eficácia do método de Occam, conduzimos testes em três modelos, sendo dois deles baseados em dados sintéticos com a adição de um ruído gaussiano de 5%, e o terceiro modelo utilizando dados reais. Nos testes com os modelos sintéticos, a condição de parada foi definida após um número máximo de iterações de $T = 50$, após uma série de experimentos.

3.1 MODELO 1

Os dados sintéticos foram gerados a partir do modelo obtido de [Monteiro e El-Kaliouby \(2010\)](#), e um ruído gaussiano de 5% foi acrescentado na resistividade aparente observada. Definiu-se, nessa primeira situação, que o número máximo de iterações seria 50 e a tolerância de convergência seria 5%.

A tabela 1 contém os parâmetros com os valores dos parâmetros do modelo verdadeiro utilizado nessa primeira situação de testes. As colunas correspondem, respectivamente, aos valores de resistividade e espessura referentes a camada i . A última camada tem espessura infinita.

Tabela 1 – Modelo sintético de 3 camadas.

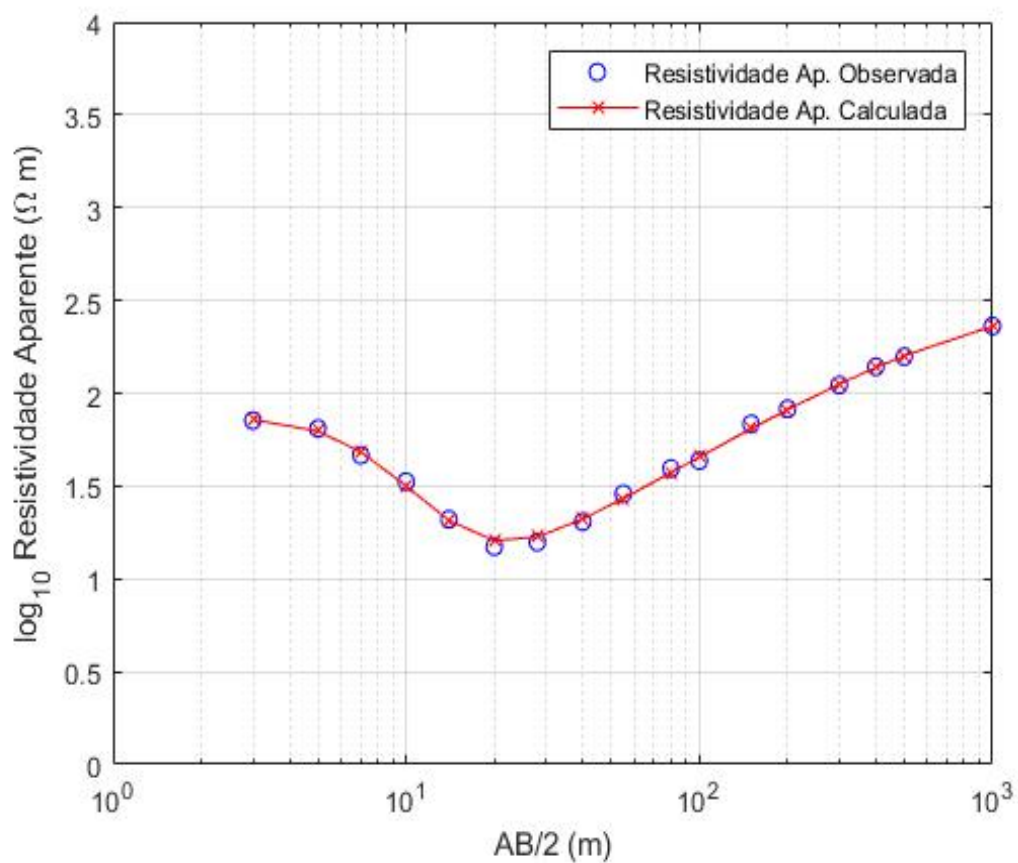
Número da Camada	Resistividade ($\Omega \cdot m$)	Espessura (m)
1	100	5
2	10	15
3	500	∞

Fonte: ([MONTEIRO; EL-KALIOUBY, 2010](#))

A seguir, pode-se visualizar, por meio de gráficos com escala logarítmica, os resultados da inversão nessa primeira situação.

A figura 2 mostra, por meio de uma curva de ajuste mínimo, a correlação entre a resistividade aparente observada, obtida por modelagem direta usando os parâmetros do modelo verdadeiro vistos na tabela 1 e aplicando o ruído gaussiano de 5%, e a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado que o algoritmo de inversão de Occam encontrou. Observando o dado de resistividade aparente, é possível perceber que o algoritmo teve uma boa convergência ao longo de todas as aberturas ($AB/2$) que foram usadas.

Figura 2 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os círculos azuis correspondem a resistividade aparente observada; a linha vermelha representa a resistividade aparente obtida na inversão.

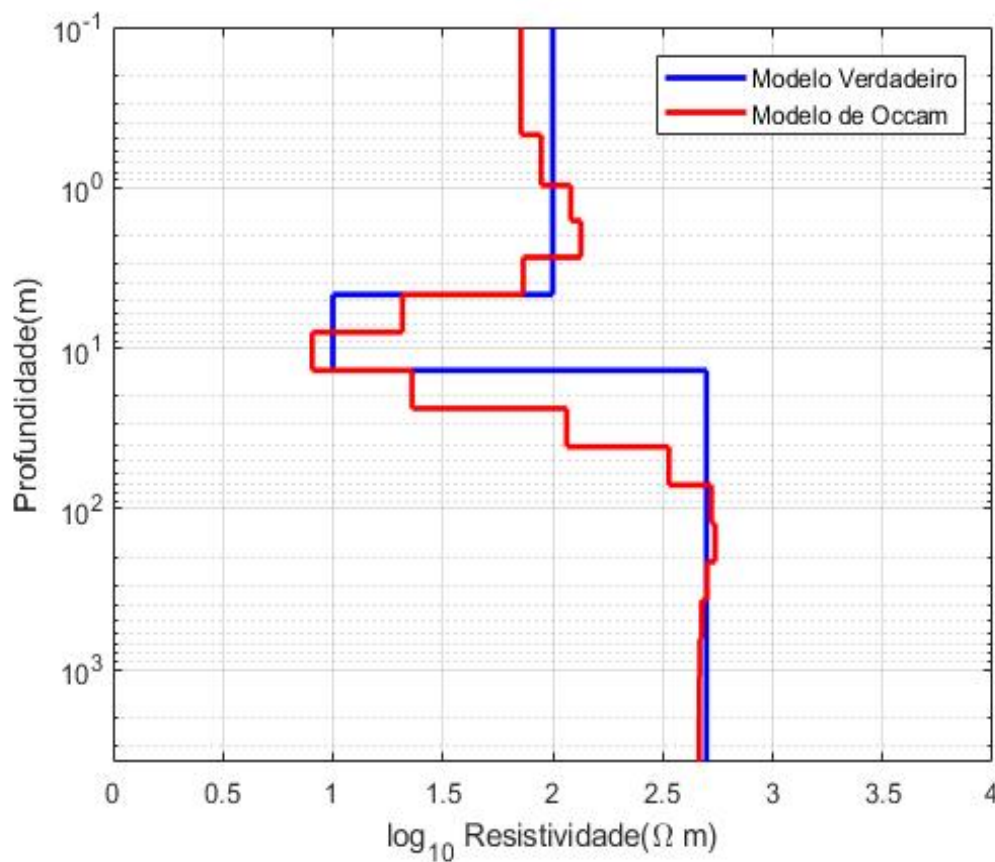


Fonte: Próprio Autor

Na figura 3, é mostrado a representação dos dois modelos, sendo assim possível investigar o comportamento que o algoritmo teve. O modelo verdadeiro é composto por apenas 3 camadas e o modelo encontrado pelo algoritmo tem várias camadas de um tamanho constante. Isso ocorre pelo fato do algoritmo desprezar o tamanho das camadas como um dos parâmetros e usar pequenas camadas. A investigação do modelo pode ser feita observando a resistividade em cada camada pequena e formando camadas maiores quando se há valores próximos de resistividade entre as camadas.

Como um todo, o modelo encontrado é aceitável e teve uma boa convergência. Percebe-se ainda que o algoritmo de Occam tenta manter uma suavidade entre as camadas, o que já era esperado nos resultados, além de que, para modelos verdadeiros suaves, será possível perceber um melhor resultado, como ocorre no modelo 3.2.

Figura 3 – Gráfico ilustrativo da variação da resistividade em relação à profundidade de cada camada no subsolo, em um modelo 1D de três camadas. Este gráfico permite analisar a consistência entre o modelo resultante da inversão e o modelo observado. A linha azul representa o modelo verdadeiro e a linha vermelha o modelo obtido pela inversão de Occam.



Fonte: Próprio Autor

3.2 MODELO 2

Os dados sintéticos foram gerados a partir do modelo obtido de [Ojo, Xie e Olorunfemi \(2018\)](#), e um ruído gaussiano de 5% foi acrescentado na resistividade aparente observada. Definiu-se, nessa primeira situação, que o número máximo de iterações seria 50 e a tolerância de convergência seria 5%.

A tabela 2 contém os parâmetros com os valores dos parâmetros do modelo verdadeiro utilizado nessa primeira situação de testes. As colunas correspondem, respecti-

vamente, aos valores de resistividade e espessura referentes a camada i . A última camada tem espessura infinita.

Tabela 2 – Modelo sintético de 4 camadas

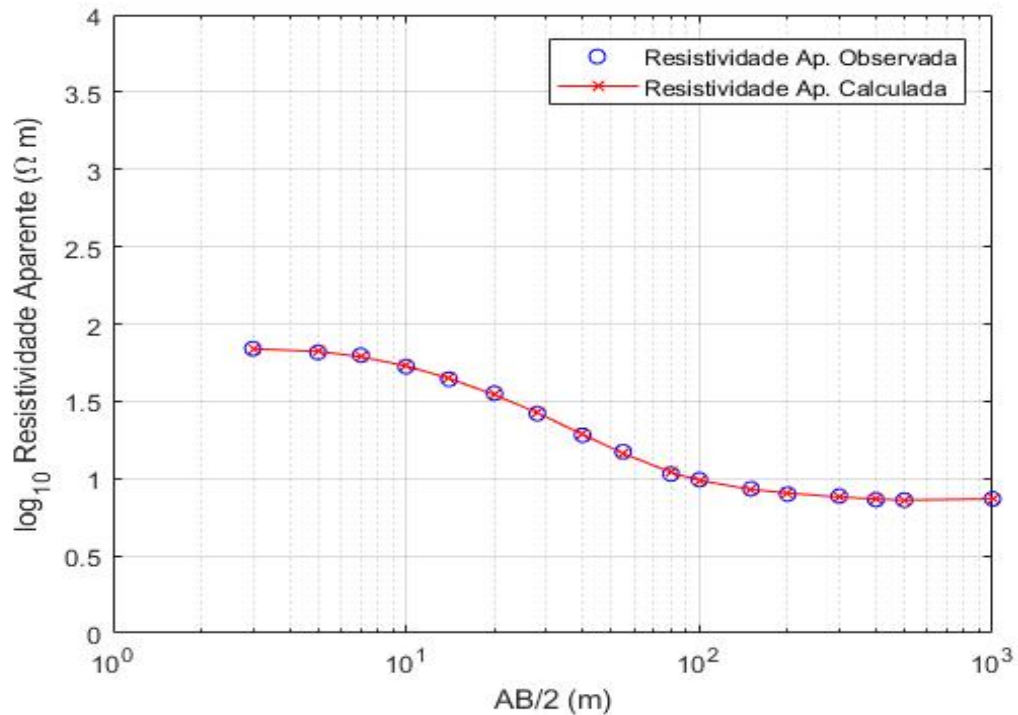
Número da Camada	Resistividade ($\Omega \cdot m$)	Espessura (m)
1	100	5
2	50	10
3	20	20
4	10	∞

Fonte: (OJO; XIE; OLORUNFEMI, 2018)

A seguir, pode-se visualizar, por meio de gráficos com escala logarítmica, os resultados da inversão nessa segunda situação.

A figura 4 exibe uma curva de ajuste mínimo, que representa a correlação entre a resistividade aparente observada, obtida através da modelagem direta usando os parâmetros do modelo verdadeiro descritos na tabela 2, e a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado a partir do algoritmo de inversão de Occam. Ao aplicar um ruído gaussiano de 5%, foi possível observar que o algoritmo convergiu de forma satisfatória ao longo de todas as aberturas ($AB/2$) utilizadas. Isso sugere que o algoritmo conseguiu reproduzir com precisão os dados de resistividade aparente, refletindo uma boa correspondência entre os valores obtidos pela modelagem direta e os resultados da inversão de Occam para esse modelo de 4 camadas.

Figura 4 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os círculos azuis correspondem a resistividade aparente observada; a linha vermelha representa a resistividade aparente obtida na inversão.

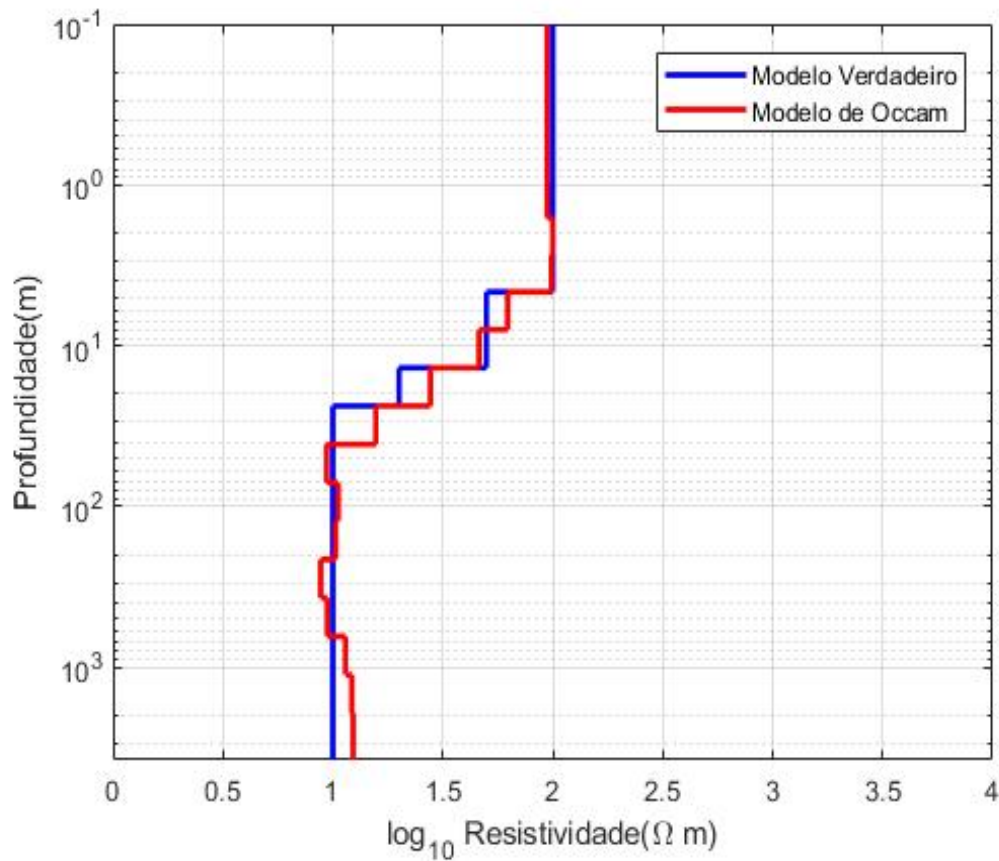


Fonte: Próprio Autor

Na Figura 5, observamos a representação comparativa dos dois modelos, permitindo uma análise do comportamento do algoritmo empregado. Enquanto o modelo verdadeiro é composto por apenas 4 camadas, o modelo derivado pelo algoritmo revela múltiplas camadas de tamanho uniforme. A análise desse modelo pode ser realizada ao examinar a variação da resistividade em cada camada menor e agregá-las em camadas maiores quando são identificados valores de resistividade semelhantes entre elas.

Em geral, o modelo obtido é satisfatório e demonstra uma convergência notável. Como já comentado anteriormente, é notório que o algoritmo de Occam busca manter uma transição suave entre as camadas, conforme esperado nos resultados e esta suavização é uma característica desejada na resolução do problema.

Figura 5 – Gráfico ilustrativo da variação da resistividade em relação à profundidade de cada camada no subsolo, em um modelo 1D de quatro camadas. Este gráfico permite analisar a consistência entre o modelo resultante da inversão e o modelo observado. A linha azul representa o modelo verdadeiro e a linha vermelha o modelo obtido pela inversão de Occam.



Fonte: Próprio Autor

3.3 DADOS REAIS

O Algoritmo de Occam usando dados reais também foi investigado nesse trabalho. Para isso, foi utilizado o dado de campo real retirado de (CONSTABLE; PARKER; CONSTABLE, 1987).

Tabela 3 – Dado real de 13 camadas.

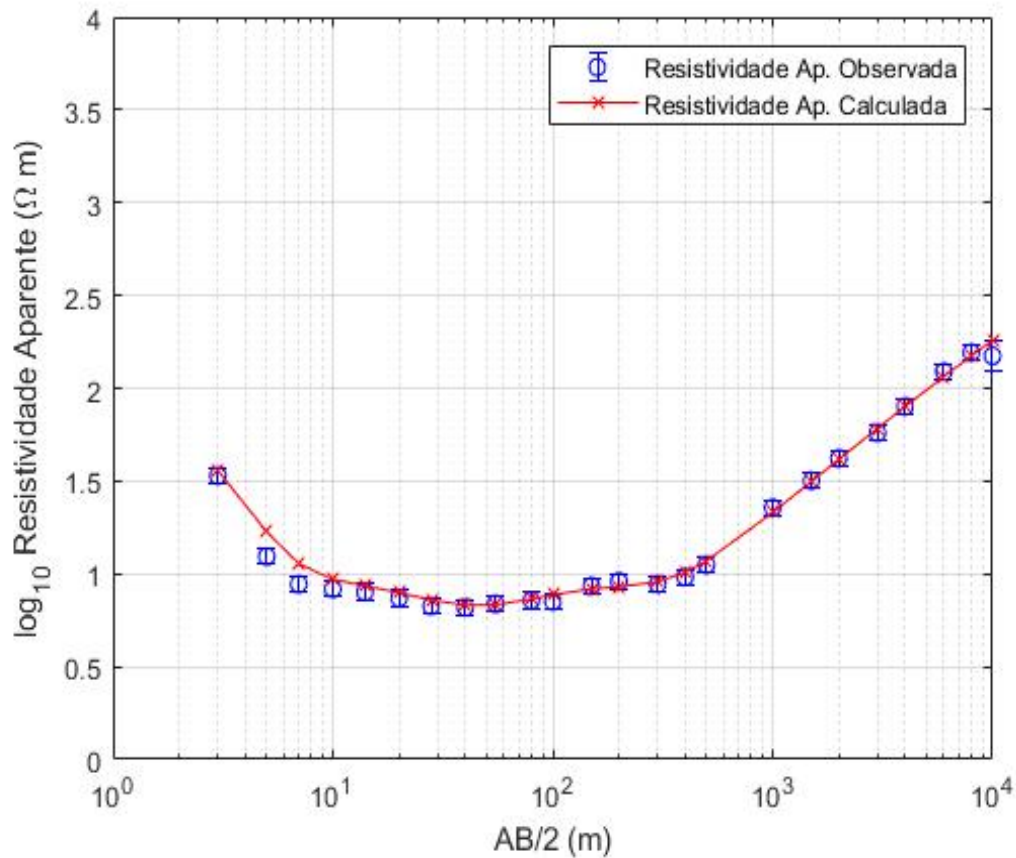
AB/2	Resistividade Aparente ($\Omega \cdot m$)	Desvio Padrão ($\sigma_{\log \rho}$)
3	33.729	0.043
5	12.388	0.043
7	8.790	0.043
10	8.299	0.043
14	7.998	0.043
20	7.396	0.043
28	6.699	0.043
40	6.592	0.043
55	6.887	0.043
80	7.194	0.043
100	7.096	0.043
150	8.590	0.043
200	9.099	0.043
300	8.790	0.043
400	9.594	0.043
500	11.194	0.043
1000	22.699	0.82
1500	31.769	0.043
2000	41.879	0.043
3000	57.677	0.043
4000	79.799	0.043
6000	122.744	0.043
8000	155.597	0.043
10000	149.279	0.86

Fonte: (CONSTABLE; PARKER; CONSTABLE, 1987)

A seguir, pode-se visualizar, por meio de gráficos com escala logarítmica, os resultados da inversão nessa situação com dados reais.

A figura 6 apresenta a curva de ajuste mínimo, que ilustra a relação entre a resistividade aparente observada, conforme detalhado na tabela 3, e a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado através do algoritmo de inversão de Occam. Observa-se na figura uma representação que sugere que o algoritmo foi capaz de reproduzir de forma aceitável os dados de resistividade aparente. Isso reflete uma correspondência notável entre os valores obtidos pela modelagem direta e os resultados provenientes da inversão de Occam aplicada a esse modelo real. Ressalta-se ainda que a curva de ajuste de resistividade aparente obtida se assemelha consideravelmente à encontrada por (CONSTABLE; PARKER; CONSTABLE, 1987).

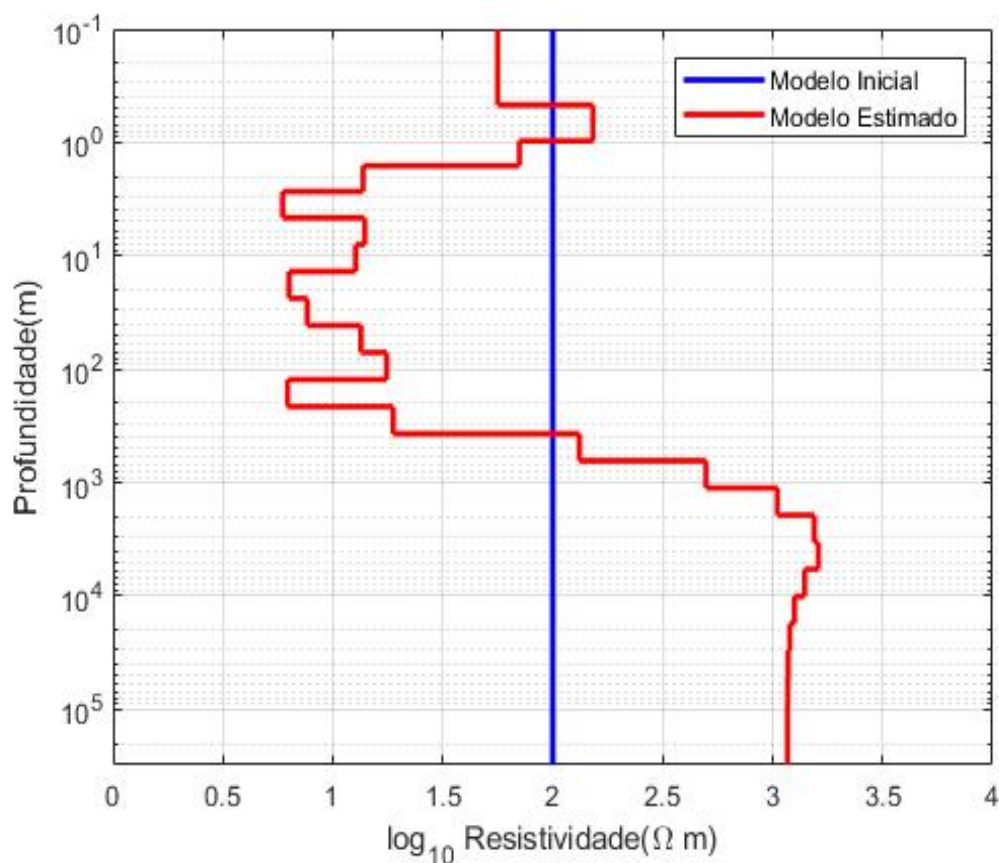
Figura 6 – Gráfico da convergência entre a resistividade aparente calculada pelo modelo estimado e a resistividade aparente observada. Os círculos azuis correspondem a resistividade aparente observada; a linha vermelha representa a resistividade aparente obtida na inversão.



Fonte: Próprio Autor

Na figura 7 é possível investigar e comparar a variação da resistividade em cada camada de profundidade do modelo encontrado. Observa-se que o algoritmo identificou as camadas, cada qual com sua respectiva resistividade e espessura. Ao contrário dos modelos sintéticos, nessa figura não temos como comparar o modelo encontrado com o modelo verdadeiro, pois como se trata de um dado real, não temos como afirmar qual o modelo real, mas sim, estimar, é o que estamos fazendo com a inversão do algoritmo de Occam. Logo, a figura representa em vermelho o modelo estimado encontrado pela inversão e, em azul, o modelo inicial que é requerido por algoritmos locais para começar a busca por uma solução.

Figura 7 – Gráfico ilustrativo da variação da resistividade em relação à profundidade de cada camada no subsolo, em um modelo 1D de três camadas. Este gráfico permite analisar a consistência entre o modelo resultante da inversão e o modelo observado. A linha azul representa o modelo verdadeiro e a linha vermelha o modelo obtido pela inversão de Occam.



Fonte: Próprio Autor

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento deste estudo, o foco primordial foi a aplicação do esquema de inversão de Occam na interpretação de dados de eletrorresistividade em um contexto unidimensional (1D), buscando avaliar sua efetividade e utilidade. Os experimentos conduzidos, que envolveram a análise de conjuntos de dados sintéticos, bem como dados reais coletados em campo, produziram resultados encorajadores, consolidando a visão de que o esquema de inversão de Occam representa uma abordagem promissora para a interpretação de dados de eletrorresistividade em modelagem 1D.

Destaca-se, sobretudo, a capacidade robusta do esquema de inversão de Occam em reconstruir modelos de maneira aproximada, mesmo diante de desafios inerentes à natureza dos dados coletados.

Dessa forma, este estudo enfatiza que a utilização do esquema de inversão de Occam para a interpretação de dados de eletrorresistividade 1D emerge como uma alternativa confiável e promissora, especialmente quando se objetiva a reconstrução de estruturas subsuperficiais sob a perspectiva da modelagem 1D.

REFERÊNCIAS

- ASTER, R. C.; BORCHERS, B.; THURBER, C. H. **Parameter Estimation and Inverse Problems**. [S.l.]: Academic Press, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 12, 18 e 21.
- BARBOZA, F. M. Otimização global para resolver problemas inversos em eletrorresistividade com flexibilidade na escolha dos vínculos. Brasil, 2017. Citado na página 19.
- BARBOZA, F. M.; MEDEIROS, W. E.; SANTANA, J. M. A user-driven feedback approach for 2d direct current resistivity inversion based on particle swarm optimization. **Geophysics**, GeoScienceWorld, v. 84, n. 2, p. E105–E124, 2019. Citado na página 19.
- BRAGA, A. C. d. O. Métodos da eletrorresistividade e polarização induzida aplicados nos estudos da captação e contaminação de águas subterrâneas: uma abordagem metodológica e prática. Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2006. Citado na página 15.
- CONSTABLE, S. C.; PARKER, R. L.; CONSTABLE, C. G. Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. **Geophysics**, Society of Exploration Geophysicists, v. 52, n. 3, p. 289–300, 1987. Citado 9 vezes nas páginas 12, 19, 20, 23, 28 e 29.
- GHOSH, D. Inverse filter coefficients for the computation of apparent resistivity standard curves for a horizontally stratified earth. **Geophysical prospecting**, European Association of Geoscientists & Engineers, v. 19, n. 4, p. 769–775, 1971. Citado na página 17.
- HADAMARD, J. **Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations**. [S.l.]: Yale university press, 1923. v. 15. Citado na página 19.
- KOEFOED, O. Resistivity sounding on an earth model containing transition layers with linear change of resistivity with depth. **Geophysical Prospecting**, Wiley Online Library, v. 27, n. 4, p. 862–868, 1979. Citado na página 17.
- MONTEIRO, F. A. S.; EL-KALIOUBY, H. M. Comparative study of local versus global methods for 1d joint inversion of direct current resistivity and time-domain electromagnetic data. **Near Surface Geophysics**, European Association of Geoscientists & Engineers, v. 8, n. 2, p. 135–143, 2010. Citado na página 23.
- OHM, G. S. Die galvanische kette, mathematisch bearbeitet. **Journal für Chemie und Physik**, 1827. Citado na página 12.
- OJO, A.; XIE, J.; OLORUNFEMI, M. Nonlinear inversion of resistivity sounding data for 1-d earth models using the neighbourhood algorithm. **Journal of African Earth Sciences**, Elsevier, v. 137, p. 179–192, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- PARKER, R. L. Understanding inverse theory. **Annual Review of Earth and Planetary Sciences**, Annual Reviews 4139 El Camino Way, PO Box 10139, Palo Alto, CA 94303-0139, USA, v. 5, n. 1, p. 35–64, 1977. Citado na página 17.

- PORSANI, J. L.; BORGES, W. R.; ELIS, V. R.; DIOGO, L. A.; HIODO, F. Y.; MARRANO, A.; BIRELLI, C. A. Investigações geofísicas de superfície e de poço no sítio controlado de geofísica rasa do iag-usp. **Revista Brasileira de Geofísica**, SciELO Brasil, v. 22, p. 245–258, 2004. Citado na página [16](#).
- SEN, M. K.; STOFFA, P. L. **Global optimization methods in geophysical inversion**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 2 vezes nas páginas [17](#) e [18](#).
- SILVA, J. B.; MEDEIROS, W. E.; BARBOSA, V. C. Pitfalls in nonlinear inversion. **Pure and Applied Geophysics**, Springer, v. 158, p. 945–964, 2001. Citado na página [19](#).
- SILVA, R. M.; ALMEIDA, T.; YAMAKAMI, A. Quanto mais simples, melhor! categorização de textos baseada na navalha de occam. **Anais do 12th Encontro Nacional de Inteligência Artificial e Computacional (ENIAC'15)**, p. 2–15, 2015. Citado na página [20](#).
- SMITH, J. Electrical resistivity and its dynamic behavior. **Journal of Electrical Materials**, 2018. Citado na página [15](#).
- STEFANESCO, S.; SCHLUMBERGER, C.; SCHLUMBERGER, M. Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain à couches horizontales, homogènes et isotropes. **Journal de Physique et le Radium**, Société Française de Physique, v. 1, n. 4, p. 132–140, 1930. Citado na página [16](#).
- TELFORD, W. M.; TELFORD, W.; GELDART, L.; SHERIFF, R. E. **Applied geophysics**. [S.l.]: Cambridge university press, 1990. Citado na página [15](#).
- TIKHONOV, A.; ARSENIN, V. Y. Solutions of ill-posed problems. winston. **Washington, DC**, p. 95–108, 1977. Citado na página [19](#).