

Контрольні запитання

1. В чому полягає принципова відмінність рекурсивної процедури оцінювання параметрів від нерекурсивної?

В МНК ми одразу використовуємо всі дані і один раз підраховуємо значення параметрів(обернена матриця і тд)

В РМНК ми можемо вносити нові отримані значення ‘в режимі реального часу’: тобто ми маємо певні початкові дані, рахуємо наближення, вносимо нові дані і ,використовуючи наближення з минулого кроку, отримуємо нові, більш точні оцінки параметрів. Коли нам здається, що потрібна точність досягнена, ми можемо перестати вносити нові значення. В МНК нам, навпаки, потрібно одразу мати певну велику кількість даних і всі їх використати.

2. Які умови отримання ефективних оцінок параметрів математичних моделей за допомогою РМНК, (порівняйте із звичайним МНК) ?

Для РМНК потрібна певна кількість ітерацій, щоб пройшов так званий перехідний процес: фактично, щоб значення стабілізувалися(перестали стрибати туди-сюди) і почали прямувати до фактичного значення параметру. Тривалість перехідного процесу варіюється в залежності від кількості параметрів, що треба оцінити.

Оцінки, отримані МНК, одразу є незміщеними, ефективними та конзистентними.

3. Порівняйте якість оцінок, отриманих за допомогою МНК і РМНК.

На основі проведеного нами аналізу можна сказати, що оцінки отримані за допомогою МНК, є більш якісними(до того ж вони незміщенні, ефективні, конзистентні, а це завжди дуже добре), але в практичному розумінні РМНК є більш вдалим варіантом.(дивися питання 1)

4. Які статистичні характеристики використовують для вибору кращої моделі?

Сума квадратів похибок моделі(чим менший, тим краще), коефіцієнт детермінації(в хорошому випадку прямує до 1; відношення дисперсії оціненої ВВ до дисперсії самої змінної) та критерій Акаїке(характеризує адекватність моделі; чим менше, тим краще; використовується для порівняння декількох моделей, саме по собі його значення не грає важливої ролі)

5. Чому для виконання параметричної ідентифікації використовують білий шум і чому його називають білим?

Нормально розподілена некорельована послідовність псевдовипадкових чисел має широкий частотний спектр (якщо обчислити для неї перетворення Фур'є), а тому її називають “білим” шумом по аналогії з сонячним світлом, який також має широкий частотний спектр складових.

Крім *білого шуму* для достатнього збудження на вхід процесу можна подавати інші широкополосні сигнали, тобто, сигнали, які містять великий набір частотних складових. До них відносяться: **одиничний імпульс** та **псевдовипадкова двійкова послідовність**. Перетворення Фур'є цих сигналів також свідчить про те, що вони *мають широкий частотний спектр, а тому є високоінформативними з точки зору наповнення гармонічними складовими*.

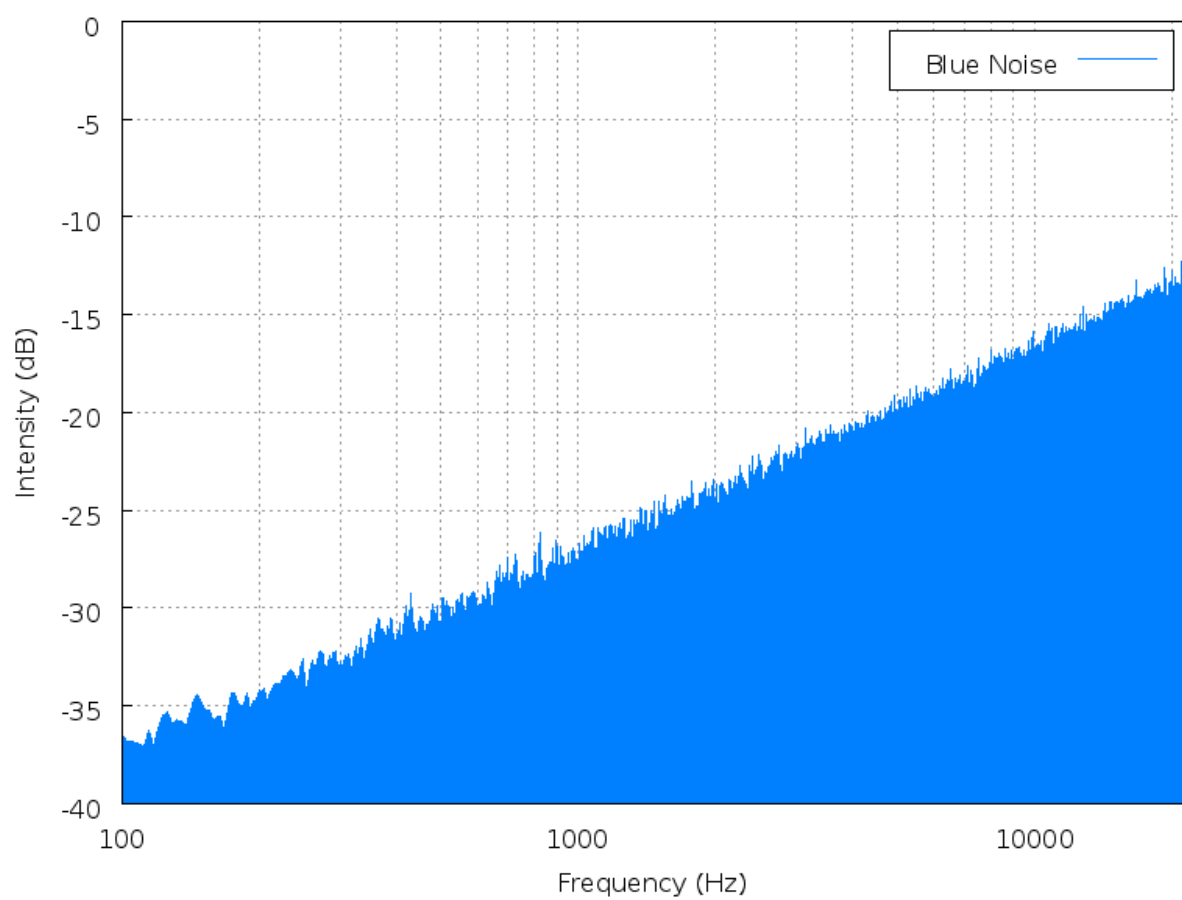
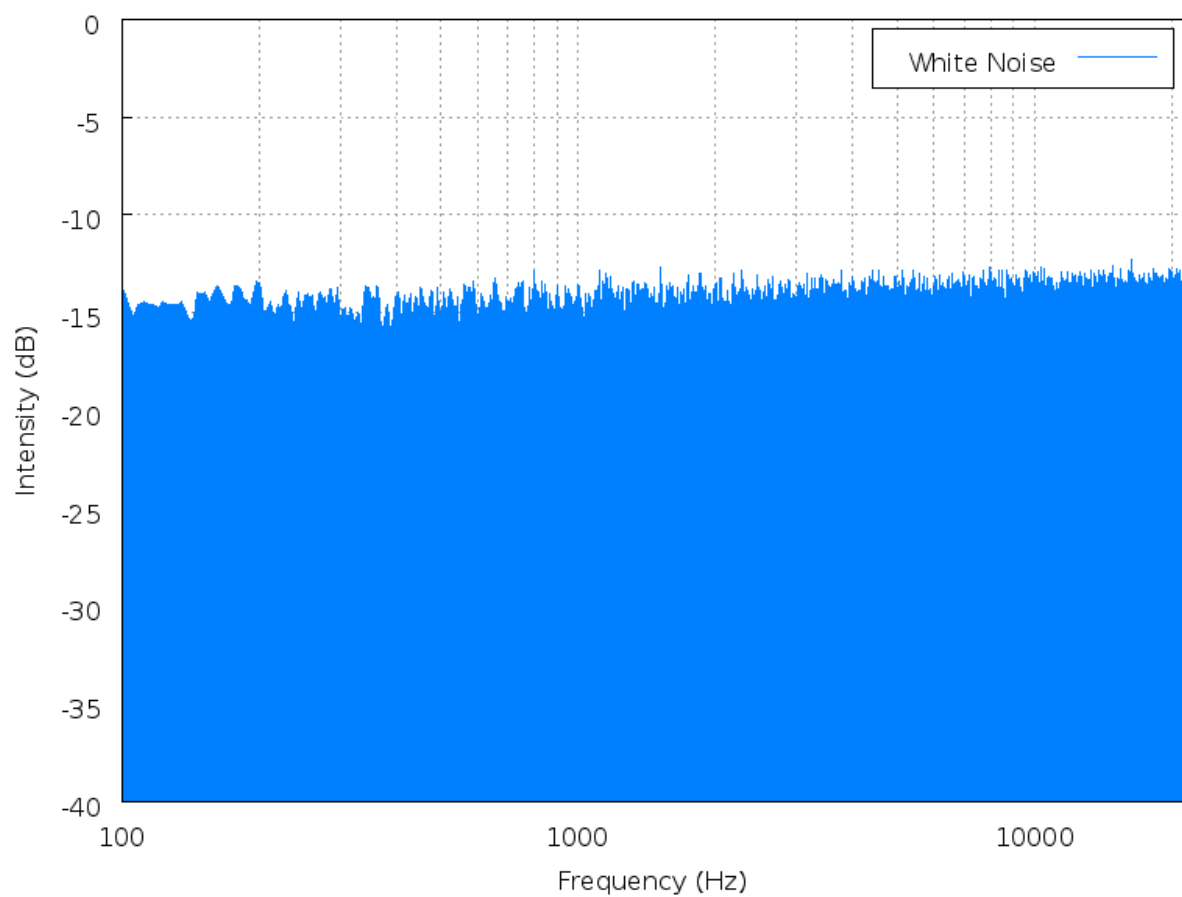
(из методички)

Почему белый шум и всякие похожие на него? Потому что для всех частот интенсивность одинаковая, значит, фактически, модель будет “чувствовать” разные частоты(и они будут попадаться, наверное, с одинаковой вероятностью) и будет показываться себя на них. Мы, как бы, подаем разнообразные значения на вход модели, что позволяет оценить ее параметры. Если подавать на вход цветной шум, то модель будет скорее показывать, как она работает на определенных частотах, а не на любых. Именно поэтому оценка получится зависимой от данных на входе => плохая оценка.

(это были мои размышления, так как в Интернете ничего по этому поводу нет)

6. Що означає термін «кольоровий шум»?

По аналогії з білим шумом вводиться поняття шумів різних кольорів(рожевий, фіолетовий і тд). Колір визначається за допомогою графіків(гістограм) спектральної щільності: графік, де по ОХ частоти, а по ОУ інтенсивність) Для білого шуму при всіх частотах інтенсивність однакова. Для кольорових інтенсивність залежить від частоти, тому вони не підходять для подання на вхід при оціненні параметрів моделі).



(приклади гістограм для білого і синього шуму)

7. Які інші інформативні сигнали можна подавати на вхід об'єкту для того щоб отримати інформативний сигнал на виході і чому?

Крім *білого шуму* для достатнього збудження на вхід процесу можна подавати інші широкополосні сигнали, тобто, сигнали, які містять великий набір частотних складових. До них відносяться: **одиничний імпульс** та **псевдовипадкова двійкова послідовність**. Перетворення Фур'є цих сигналів також свідчить про те, що вони *мають широкий частотний спектр, а тому є високоінформативними з точки зору наповнення гармонічними складовими*.

(дивися питання 5)

8. Поясніть вибір початкових умов для алгоритму РМНК?

Для того щоб можна було почати обчислення в момент $k = 0$, необхідно присвоїти змінним наступні початкові значення:

$$\hat{\theta}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}(0) = \begin{bmatrix} p_{11}(0) & 0 \\ 0 & p_{22}(0) \end{bmatrix},$$

де $p_{11}(0) \gg 0$, $p_{22}(0) \gg 0$. Тобто початкові значення діагональних елементів матриці $\mathbf{P}(0)$ задаються досить великими додатніми числами (наприклад, кілька сотень). Якщо є інформація щодо значень коефіцієнтів моделі, то нею можна скористатись для того щоб скоротити тривалість перехідного процесу. Наприклад, якщо ми встановили, що кореляція між сусідніми значеннями ряду додатна, тобто, $\text{cov}[y(k) y(k-1)] > 0$, то коефіцієнту a_1 можна присвоїти невелике додатне значення: $a_1(0) = 0,01$. Такий підхід, як правило, дозволяє скоротити тривалість перехідного процесу. Значення параметра λ вибирають наступним чином: якщо коефіцієнти рівняння, що оцінюється, не змінюються в часі, то $\lambda = 0,95 \div 0,98$ (саме такий випадок розглядається в лабораторній роботі); якщо коефіцієнти рівняння змінюються в часі, то $\lambda = 0,6 \div 0,7$.

9. Як змінюється тривалість перехідного процесу оцінювання параметрів при зміні порядку моделі?

Загалом, тривалість перехідного процесу при оцінюванні параметрів математичної моделі залежить від числа невідомих параметрів (коефіцієнтів)

моделі. Якщо в моделі невідомі 1-2 коефіцієнти, то необхідно не більше 20-30 кроків (значень вимірів) для обчислення їх точних значень. Якщо необхідно оцінити 3-4 коефіцієнти, то знадобиться 60-80 кроків. Найбільше число кроків для оцінювання параметрів моделі необхідно виконати у випадку, коли оцінюються параметри багатовимірної моделі, тобто, коли число рівнянь моделі більше одиниці. В такому випадку число кроків (число разів виконання алгоритму РМНК) може сягати кількох сотень і навіть тисяч.

10. Які параметри можна використати для контролю правильності процесу функціонування алгоритму РМНК?

- Сумма квадратів похибок моделі, тобто $S = \sum_{k=1}^N e^2(k)$, де N – об'єм вибірки даних ($N \geq 100$;
- Коефіцієнт детермінації $R^2 = \frac{\text{var}(\hat{y})}{\text{var}(y)}$, де $\text{var}(\hat{y})$ – дисперсія залежної змінної, оціненої за допомогою побудованої математичної моделі; $\text{var}(y)$ – дисперсія залежної змінної, оцінена за допомогою її фактичних значень (для хорошої моделі $R^2 \rightarrow 1$).
- критерій Акайке для визначення адекватності моделі процесу

$$IKA = N \ln(\sum_{k=1}^N e^2(k)) + 2n,$$

де $n = p + q + 1$ – число параметрів моделі, що оцінюються за алгоритмом РМНК; N – об'єм вибірки даних.

11. Доведіть лему про обернення матриць (в тексті документа це [формула 2.13](#)).

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[DA^{-1}B + C^{-1}]^{-1}DA^{-1}. \quad (2.13)$$

Доведення леми виконується шляхом домноження обох частин (2.13) на матрицю $[A + BCD]$.

$$I = I + A^{(-1)}BCD - B[DA^{(-1)}B + C^{(-1)}]^{(-1)}DA^{(-1)} - BCD A^{(-1)}B[DA^{(-1)}B + C^{(-1)}]^{(-1)}DA^{(-1)} =$$

12. Назвіть інші, відомі вам алгоритми рекурсивної ідентифікації?

Других алгоритмів не знаєм. В теорії не написано, ради розв'язання не читали.

13. Наведіть приклади використання РМНК в реальному часі.

- Оцінка параметрів регресійної моделі
- Тестування стабільності параметрів моделі