حل مسئله کمترین مربعات با تجزیه SVD

۱۱ تیر ۱۴۰۱

محمدرضا باطنی

هدف ما یافتن برداری است که نرم دوم AX را کمینه بکند و قید $||X||_2 = 1$ را هم حفظ کند.
روش حل بدین صورت است که ماتریس را به صورت SVD تجزیه میکنیم و با استفاده از ماتریس های تجزیه، مقدار $\min_{||X||_2=1} ||AX||_2$ را به دست میاوریم.
این مقاله سه بخش دارد. در بخش اول مفاهیم مقادیر منفرد و تجزیه SVD و روش انجام این تجزیه توضیح داده میشود. در بخش دوم توضیح داده میشود که چگونه با استفاده از تجزیه SVD میتوان مسئله کمترین مربعات را حل کرد و در بخش سوم این موضوع اثبات میشود.

۱ بخش اول (توضیح مفاهیم)

مقادیر منفرد: مقادیر منفرد ماتریس A برابر است با جذر مقادیر ویژه ماتریس $A^T A$.
تجزیه SVD : یک تجزیه مشخص ماتریس A به سه ماتریس U و Σ و V است به طوری که $A = U\Sigma V^T$ و ماتریس U یک ماتریس متعامد n*n و ماتریس Σ d یک ماتریس قطری m*n و ماتریس V یک ماتریس متعامد m*m باشد.
خواهیم دید که از تعامد دو ماتریس نامبرده شده و همچنین قطری بودن ماتریس Σ در ادامه استفاده میشود.
روش یافتن تجزیه SVD : ماتریس AA^T یک ماتریس n*n است. ثابت میشود که اگر تمام مقادیر ویژه های این ماتریس را به دست آوریم و بردار ویژه های یکه متناظر با هر کدام این مقادیر را پیدا کنیم و ستون به ستون و به ترتیب نزولی در یک ماتریس بچینیم (اگر تعداد بردار های ویژه از n کمتر بود بقیه ستون ها را صفر میگذاریم) در نهایت ماتریس U به دست میاید.
برای به دست آوردن Σ کافی است مقادیر منفرد A را به صورت نزولی در یک قطر ماتریس n*m بچینیم.
ماتریس $A^T A$ یک ماتریس m*m است. ثابت میشود که اگر تمام مقادیر ویژه های این ماتریس را به دست آوریم و بردار ویژه های یکه متناظر با هر کدام این مقادیر را پیدا کنیم و سطر به سطر و به ترتیب نزولی در یک ماتریس بچینیم (اگر تعداد بردار های ویژه از m کمتر بود بقیه ستون ها را صفر میگذاریم) در نهایت ماتریس V^T به دست میاید.

۲ بخش دوم مقاله (روش حل مسئله کمترین مربعات با تجزیه SVD)

برای یافتن مقدار X ای که جواب $\min_{||X||_2=1}||AX||_2$ باشد، کافی است بردار ویژه متناظر با کوچک ترین مقدار ویژه A^TA یعنی آخرین سطر بردار V^T را به دست آوریم. همچنین مقدار عددی این مینیمم برابر رادیکال مقدار ویژه متناظر با این بردار است.

۳ بخش سوم مقاله (اثبات)

طبق تجزیه انجام شده ($A=U\Sigma V^T$) داریم : $\min_{||X||_2=1}||AX||_2=\min_{||X||_2=1}||U\Sigma V^TX||_2$
اما از آنجایی که U متعامد یکه است و پایه ای برای فضای سطری A است پس ضرب این ماتریس در یک بردار، اندازه آن را تغییر نمیدهد. یعنی : $\min_{||X||_2=1}||U\Sigma V^TX||_2=\min_{||X||_2=1}||\Sigma V^TX||_2$
همچنین اگر y رابرابر V^TX قرار دهیم ، $\min||\Sigma V^TX||_2$ به $\min||\Sigma y||_2$ تبدیل میشود و طبق صحبت انجام شده، چون ماتریس V^T متعامد یکه است، ضرب آن در X ، اندازه X را تغییر نمیدهد. پس اگر $||X||_2=1$ حتما $||y||_2=1$ هم هست و مسئله ما تبدیل میشود به $\min_{||y||_2=1}||\Sigma y||_2$.
و حل این مسئله خیلی ساده است زیرا ماتریس Σ قطری است و سطر های آن به صورت نزولی چیده شده اند. بنابراین مقدار y برابر $[0,0,\dots,1]^T$ است.
پس مقدار min برابر کوچکترین مقدار منفرد ماتریس A یا همان رادیکال کوچکترین مقدار ویژه A^TA است.
برای محاسبه مقدار X ای که منجر به این مینیمم میشود کافی ست توجه کنیم که مقدار y برابر V^TX بود بنابراین :
$$y=V^TX \implies VV^TX=Vy \underset{\text{تعامد V}}{\implies} X=Vy$$
همچنین برای به دست آوردن X ، یعنی همان برداری که $||AX||_2$ را مینیمم کرد، کافی است ماتریس V را در $y=[0,0,\dots,1]^T$ ضرب کنیم و این یعنی ستون آخر V یا همان سطر آخر V^T برابر بردار X مطلوب است.
نکته جالب تر اینکه با تغییر تمام min ها به max مسئله ما تبدیل به $\max_{||X||_2=1}||AX||_2$ میشود که دقیقا برابر نرم ماتریس A است.

کد متلب تجزیه SVD و یافتن مقدار کمترین مربعات در پیوست آمده شده است. در این کد در ابتدا تجزیه انجام شده و بررسی شده که تجزیه به درستی انجام شده. سپس طبق صحبت های این مقاله X ساخته شده و بررسی شده که اندازه این X واقعا ۱ هست و سپس مقدار مینیمم AX چاپ شده. همچنین در آخر به جای min ، max گرفته شده و دیده میشود که جواب با $||A||_2$ واقعا برابر است.

۴ منابع

جزوه درس جبر خطی کاربردی دکتر عباداللهی سال ۱۳۹۷ - گروه کنترل دانشگاه علم و صنعت
16-385 Computer Vision (Kris Kitani) Carnegie Mellon University
Wikipedia (Singular value decomposition)