CHƯƠNG 3
BIẾN ĐỔI Z VÀ ỨNG DỤNG

- The Z-transform
- Z-transform properties
- Inversion of Z-transform
- Analysis of LTI systems in the z-domain

Biến đổi Z

1. Định nghĩa

2. Miền hội tụ (Region of convergence)

3. Ví dụ

Z-Transform (ZT)

Biến đổi Laplace :

$$\boxed{F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt}$$

Biến đổi Z có thể xem như là phiên bản rời rạc (thời gian rời rạc) của biến đổi Laplace :

$$\boxed{F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}}$$

s and z take values in the complex plane
t and *n* are time variables
Infinite integral replaced by infinite sum
e^{-st} replaced by z^{-n}

Cho tín hiệu rời rạc x[n] = …, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], …

Biến đổi Z hai chiều của x[n] định nghĩa như sau:

$$\boxed{X(z) = ZT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}}$$

n nhận giá trị nguyên

Giả sử tồn tại z để tổng trên hội tụ. **z nhận giá trị phức**

Cực (pole) và điểm không (zero)

$$X(z) = ZT\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

Poles $p_k \leftrightarrow X(p_k) = \infty$

Zeros $z_k \leftrightarrow X(z_k) = 0$

Cực là nghiệm của mẫu số

Điểm không là nghiệm của tử số

Chú ý: trước hết cần đơn giản hóa và xét các đa thức theo z

1. Definition of the Z-transform

2. Region of convergence

3. Examples of Z-transform

Miền hội tụ (ROC)

ROC: tập hợp giá trị z để X(z) hội tụ

Ta xét các trường hợp sau:

1. Right-sided signal ($x[n] = 0, n<n_0$) (tín hiệu bên phải)
2. Left-sided signal ($x[n] = 0, n>n_0$) (tín hiệu bên trái)
3. Two-sided signal ($-\infty<n<+\infty$) (tín hiệu “hai bên”)
4. Finite-duration signal (tín hiệu thời gian hữu hạn)

Right-sided signal

for right-sided $x[n]$

$$X(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty} x[n]\left(\frac{1}{z}\right)^{n}$$

Sum goes from n_0 to infinity

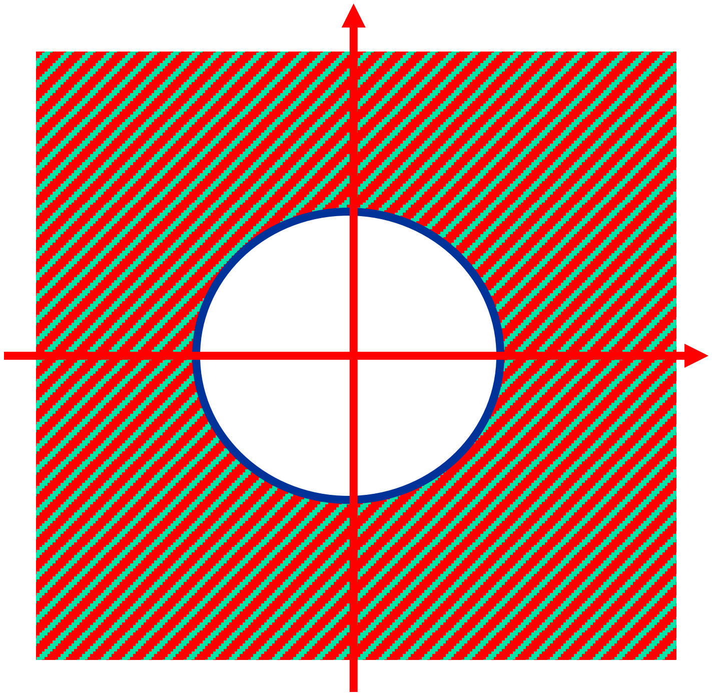
$$\boxed{\text{As } n\to\infty\text{, need } (1/z)^n\to 0 \text{ for sum to converge.}}$$

Happens for z OUTSIDE the poles $|z|>r_{max}$.

$$\boxed{|z| > r_{max}}$$

Right-sided signal

$$\boxed{|z| > r_{max}}$$



Right-sided signal

Nếu x[n] không nhân quả thì X(z) không hội tụ tại z = ∞

→ ROC không chứa ∞

Ex: x[n] = u[n+1]

$$X(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} z^{-n} = z + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

ROC: $r_{max} < |z| < \infty$

Left-sided signal

for left-sided $x[n]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_0} x[n] z^{-n}$$

Sum goes from minus infinity to n_o

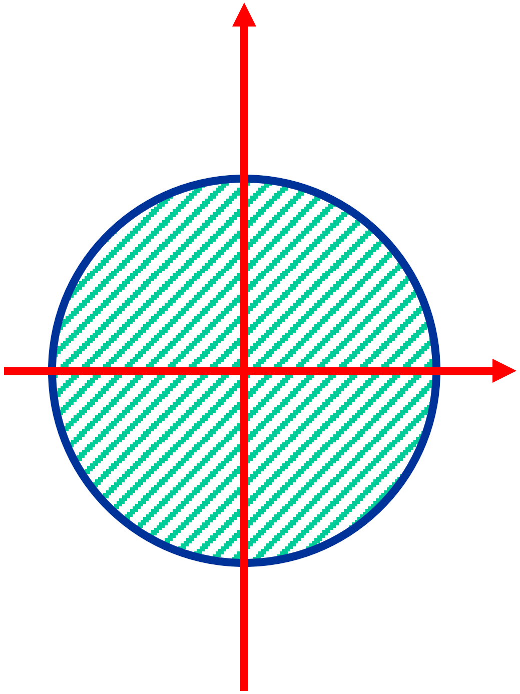
$$\boxed{\text{As } n \to -\infty, \text{ need } (1/z)^n \to 0 \text{ or } z^{\infty} \to 0}$$

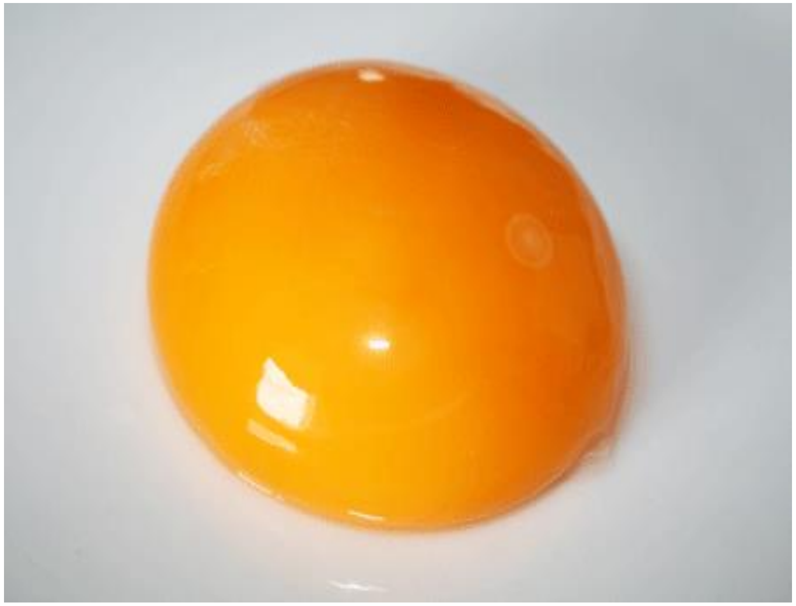
Happens for z INSIDE the poles (rather than outside)

$$\boxed{|z| < r_{min}}$$

Left-sided signal

$\boxed{|z| < r_{min}}$





Left-sided signal

Nếu x[n] có giá trị (khác không) tại thời điểm > 0, X(z) không hội tụ tại z = 0 → ROC không chứa 0

Ex: x[n] = u[-n+1]

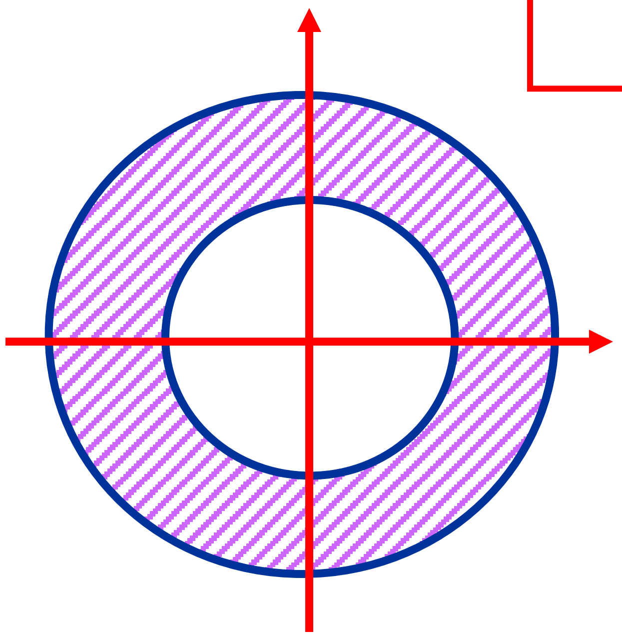
$$X(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{1} z^{-n} = z^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n}$$

ROC: $0 < |z| < r_{min}$

Two-sided signal (tín hiệu “hai bên”)

- Two-sided signal = Left-sided signal + right-sided signal

$$|a| < |z| < |b|$$



Note: if $|a| \geq |b|$ then X(z) does not exist

Finite-duration signal (tín hiệu thời gian hữu hạn)

For $x(n) = \delta(n-m) \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-m) z^{-n} = z^{-m}$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=n_1}^{n_2} x[k]\delta[n-k] \Rightarrow X(z) = \sum_{k=n_1}^{n_2} x[k] z^{-k}}$$

ROC: mọi giá trị của z, trừ:

z = 0 if k > 0

z = ∞ if k < 0

Ví dụ

1. Definition of the Z-transform

2. Region of convergence

3. Examples of Z-transform

Tìm biến đổi Z các tín hiệu sau:

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad \text{and} \quad x_2[n] = -(a^n)u[-n-1]$$

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-az^{-1}} & |az^{-1}| < 1 \\ \infty & |az^{-1}| > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$x_1[n] = a^n u[n] \quad \text{and} \quad x_2[n] = -(a^n)u[-n-1]$$

$$X_2(z) = -\sum_{n=-1}^{-\infty} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1}z)^n = \begin{cases} -\dfrac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} & |a^{-1}z| < 1 \\ -\infty & |a^{-1}z| > 1 \end{cases}$$

$$= \frac{z}{z-a}, \quad |z| < |a|$$

ROC phải được xác định để biến đổi Z hai chiều là duy nhất

Tìm biến đổi Z của tín hiệu sau:

$$x[n] = 3^n u[-n-1] + 4^n u[-n-1].$$

Tìm biến đổi Z của tín hiệu (hai bên) sau: $x[n] = a^{|n|}$

Tìm biến đổi Z của tín hiệu sau:

$$h[n] = (.5)^n u[n-1] + 3^n u[-n-1].$$

Examples of Z-transform

Tìm biến đổi Z của tín hiệu sau:

$$x[n] = \tfrac{1}{2}\delta[n-1] + 3\delta[n+1]$$

Tính chất của biến đổi Z

1. tuyến tính (linearity)

2. Dịch thời gian (time shifting)

3. Tỉ lệ tần số (Frequency scaling)

4. Nhân với n (Multiplication by *n)*

5. tích chập trong miền thời gian (Convolution in time)

6. Giá trị đầu (Initial value)

7. Giá trị cuối (Final value)

Tuyến tính (Linearity)

$$\boxed{ax[n] + by[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} aX(z) + bY(z)}$$

The new ROC is the intersection of ROC{X(z)} and ROC{Y(z)}

If aX(z) + bY(z) cancels pole then the new ROC is bigger

Dịch thời gian (Time shifting)

$$\boxed{x[n-n_0] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-n_0} X(z)}$$

The new ROC is the same as ROC{X(z)} except for z = 0 if $n_0 > 0$ and z = ∞ if $n_0 < 0$

Proof:

$$Z\{x[n-n_o]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_o] z^{-n}$$

$$let \quad l = n - n_o \qquad \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] z^{-(l+n_o)} = z^{-n_o} \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l] z^{-l} = z^{-n_o} X(z)$$

Delay of k means that the Z-transform is multiplied by z^{-k}

Ví dụ áp dụng dịch thời gian

Tìm biến đổi Z của tín hiệu sau:

$$w[n] = \frac{1}{4}\left\{(-1)^n + (3)^{n-5}\right\}u[n-5]$$

Frequency scaling

$$\boxed{a^n x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{a}\right)}$$

The new ROC is the scaled ROC{X(z)} with factor */a/*
(bigger or smaller)

Proof:

$$ZT\{a^n x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Multiplication by a^n results in a complex scaling in the z-domain

Ví dụ

Tìm biến đổi Z:

$$x[n] = a^n u[n]$$

Multiplication by n

$$\boxed{nx[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz}}$$

The new ROC is the same ROC{X(z)}

Proof:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n} \Rightarrow \frac{dX(z)}{dz}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx[n]z^{-n-1}=-\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx[n]z^{-n}$$

$$\Rightarrow ZT\{nx[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx[n]z^{-n}=-z\frac{dX(z)}{dz}$$

Example of applying the multiplication-by-n property

Tìm biến đổi Z:

$$x[n] = na^n u[n]$$

Tích chập trong miền thời gian

$$\boxed{y[n]=x[n]*h[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}X(z)H(z)}$$

The new ROC is the intersection of ROC{X(z)} and ROC{Y(z)}

If poles cancel zeros then the new ROC is bigger

Proof:

$$y[n]=x[n]*h[n]\overset{Z}{\longleftrightarrow}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]]z^{-n}$$

Switching the order of the summation:

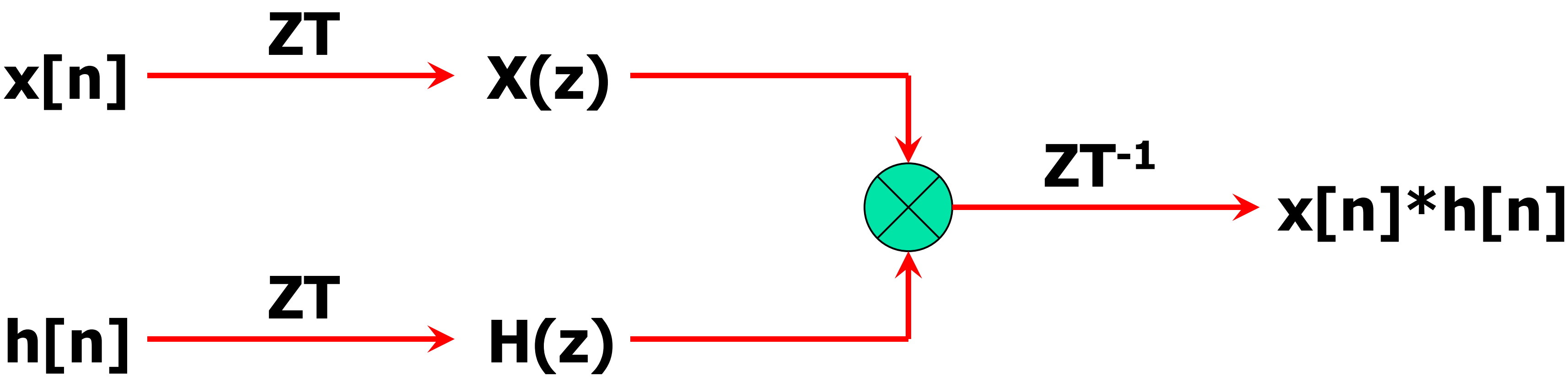
$$Y(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n-k]z^{-n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}\sum_{n-k=-\infty}^{\infty}h[n-k]z^{-(n-k)}$$

$$=X(z).H(z)$$

Áp dụng tính chất tích chập

Convolution in time domain ⇒ multiplication in Z domain



Ví dụ

Tính tích chập của hai tín hiệu sau:

$x_1[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

$x_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5]$

Định lý giá trị đầu
(Initial value theorem)

If x[n] is causal then x[0] is the initial value of the function x[n]

$$\boxed{x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)}$$

Proof:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} = x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \ldots$$

$$Obviously, \quad as\ z \to \infty, \quad z^{-n} \to 0$$

Initial value theorem

If $x[n] = 0$ with $n < n_0$ then $x[n_0]$ is the initial value, and

$$\boxed{x[n_0] = \lim_{z\to\infty}[z^{n_0} X(z)]}$$

Proof:

$$X(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[n_0]z^{-n_0} + x[n_0+1]z^{-(n_0+1)} + x[n_0+2]z^{-(n_0+2)} + \ldots$$

$$z^{n_0} X(z) = x[n_0] + x[n_0+1]z^{-1} + x[n_0+2]z^{-2} + \ldots$$

$$As\ z \to \infty, \quad z^{n_0} X(z) = x[n_0]$$

Định lý giá trị cuối
(Final value theorem)

If this limit exists then x[n] has a final value (steady-state value)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x[n] = x[\infty] = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]}$$

Proof: Exercise

Biến đổi Z ngược

Bảng biến đổi Z

1 $\delta(n) \leftrightarrow 1$

2 $\delta(n-m) \leftrightarrow z^{-m}$

3 $a^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-a}$

4 $na^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{az}{(z-a)^2}$

5 $n^2 a^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{az(z+a)}{(z-a)^3}$

6 $a^n \cos(\Omega n)u[n] \leftrightarrow \dfrac{z(z-a\cos\Omega)}{z^2-2az\cos\Omega+a^2}$

7 $a^n \sin(\Omega n)u[n] \leftrightarrow \dfrac{az\sin\Omega}{z^2-2az\cos\Omega+a^2}$

Phân tích thành phân số

Ví dụ: $X(z) = \dfrac{2z^2 - 5z}{(z-2)(z-3)}, |z| > 3$

Chia X(z) cho z, (giữ z lại)

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z-5}{(z-2)(z-3)} = \frac{(z-2)+(z-3)}{(z-2)(z-3)}$$

$$= \frac{1}{z-3} + \frac{1}{z-2}, |z| > 3$$

$$\Rightarrow x(n) = (3^n + 2^n)u(n)$$

Examples (cont)

- Cực lặp lại (repeated poles)

$$X(z) = \frac{2z}{(z-2)(z-1)^2}, \quad |z| > 2$$

$$\frac{X(z)}{2z} = \frac{1}{(z-2)(z-1)^2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}, |z| > 2$$

$$A(z-1)^2 + B(z-1)(z-2) + C(z-2) = 1$$

$$A = 1; B = -1; C = -1;$$

$$X(z) = 2\left[\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2}\right], |z| > 2$$

$$\boxed{x(n) = 2(2^n - 1 - n)u(n)}$$

Examples (cont)

Dịch thời gian $W(z) = \dfrac{z^{-4}}{z^2 - 2z - 3}, |z| > 3$

$$\frac{W(z)}{z} = \frac{z^{-5}}{z^2 - 2z - 3} = \frac{z^{-5}}{(z+1)(z-3)} = \left(\frac{-\frac{1}{4}}{z+1} + \frac{\frac{1}{4}}{z-3} \right) z^{-5}$$

$$w[n] = -\frac{1}{4}(-1)^{n-5}u[n-5] + \frac{1}{4}(3)^{n-5}u[n-5]$$

Examples (cont)

- Given $h(n) = a^n u(n)$ $(|a|<1)$ and $x(n) = u(n)$.

  Find $y(n) = x(n)*h(n)$

$$\boxed{y[n] = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u[n]}$$

Examples (cont)

Find the output y(n) to an input x(n) = u(n) and an LTI system with impulse response h(n) = $-3^n u(-n-1)$

$$\boxed{y[n] = -\frac{1}{2}u[n] - \frac{3}{2}(3)^n u[-n-1]}$$

Phân tích hệ thống LTI trong miền Z

1. Hàm truyền (Transfer function)

2. Tính chất của hệ thống LTI (LTI system properties from transfer function)

Hàm truyền

Cho đáp ứng xung **h(n),** biến đổi Z của nó gọi là hàm truyền (**Transfer Function**) **H(z)**

Xét **H(z) = N(z)/D(z)**

Nghiệm của N(z): điểm không của hệ thống

Nghiệm của D(z): cực của hệ thống

D(z) = 0: phương trình đặc tính (characteristic equation)

Xác định hàm truyền

1. Từ đáp ứng xung h(n): thực hiện biến đổi Z

2. Từ phương trình sai phân:

- Thực hiện biến đổi Z hai vế
- Tính Y(z)/ X(z)

3…

Hàm truyền từ phương trình sai phân

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

ZT

$\longleftrightarrow$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

-Linear

-Time-shift

Y(z) = X(z) . H(z) $\Rightarrow$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

Giả sử M = N

Nhân tử và mẫu với z^N:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{\sum_{r=0}^{N} b_r z^{r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{k}}$$

Ví dụ

For the α-filter:

$$y(n)-(1-\alpha)y(n-1)=\alpha\, x(n)$$

Its transfer function:

$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)z^{-1}}$$

For example: *y[n] – 0.9y[n-1] = 0.1x[n]* → *α = 0.1*

$$H(z)=\frac{0.1z}{z-0.9}$$

Tính chất của hệ thống LTI

1. Transfer function

2. LTI system properties from transfer function

Nhân quả

- **Nhắc lại:**

  hệ thống nhân quả ←→ $\boxed{h[n]=0 \quad \forall n<0}$

- **h(n)** là tín hiệu "bên phải" ←→ ROC của hàm truyền là

$$\boxed{|z| > r_{max}}$$

- Hệ thống LTI là nhân quả nếu và chỉ nếu ROC của hàm truyền nằm ngoài vòng tròn bán kính $r_{max} < \infty$ bao gồm cả điểm $z = \infty$

Nhân quả

- Xét hệ thống:

$$H(z)=\frac{z^2+0.4z+0.9}{z-0.6}=z+\frac{z+0.9}{z-0.6}$$

Unit advance y[n]=x[n+1]
→ noncausal

- Với hệ thống nhân quả, bậc của tử số của H(z) **không thể lớn hơn bậc của mẫu số**
- Nếu bậc của tử nhỏ hơn hoặc bằng mẫu thì hệ thống có nhân quả không ??? **NOT SURE!!!**

Example

- Xét hệ thống sau:

$$h[n] = -u[-n-1]$$

$$H(z) = \frac{z}{z-1} \quad ROC: |z| < 1$$

- Bậc mẫu = bậc tử = 1; but it is non- causal!!!

Ổn định

- **Nhắc lại:**

Hệ thống ổn định ←→ $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty}$

- **Its transfer function:**

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n} \Rightarrow |H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] z^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| |z^{-n}|$$

Unit circle |z| = 1 → $|H(z)| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$ The ROC includes |z| = 1

- Hệ thống LTI là ổn định BIBO nếu và chỉ nếu ROC của hàm truyền chứa vòng tròn đơn vị.

Nhân quả và ổn định

- Điều kiện nhân quả và ổn định độc lập nhau, "cái này không suy ra cái kia"
- **4 trường hợp:**
  - Nhân quả và ổn định
  - Không nhân quả và ổn định
  - Nhân quả và không ổn định
  - Không nhân quả và không ổn định
- Hệ nhân quả là ổn định nếu tất cả các cực của H(z) đều nằm trong vòng tròn đơn vị.

Examples

Ex1: Given an LTI system:

$$H(z) = \frac{2z^2 - 1.6z - 0.9}{z^3 - 2.5z^2 + 1.96z - 0.48}$$

The poles of H(z):

den = [1 -2.5 1.96 -0.48];

p = roots(den)

$\rightarrow$ **p = 1.2 0.8 0.5**

1. |z|>1.2: causal, unstable

2. 0.8<|z|<1.2: non-causal, stable

3. 0.5≠|z|<0.8: non-causal, unstable

Examples

Ex2: A LTI system is characterized by:

$$H(z)=\frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}}=\frac{z(3z-4)}{z^2-3.5z+1.5}=\frac{z}{z-0.5}+\frac{2z}{z-3}$$

Xác định ROC trong các trường hợp sau và xác định h(n) tương ứng:

1. Hệ thống ổn định
2. Hệ thống nhân quả
3. Hệ thống phản nhân quả (anti-causal)